

CONVERGENCE EN LOI DISCRÈTE & APPROXIMATION BINOMIALE - POISSON

261, 262,
264

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X_n, n \in \mathbb{N}$ et X des variables aléatoires réelles sur Ω . Soit $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.

Def: On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , et on note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$, si pour toute fonction continue bornée $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

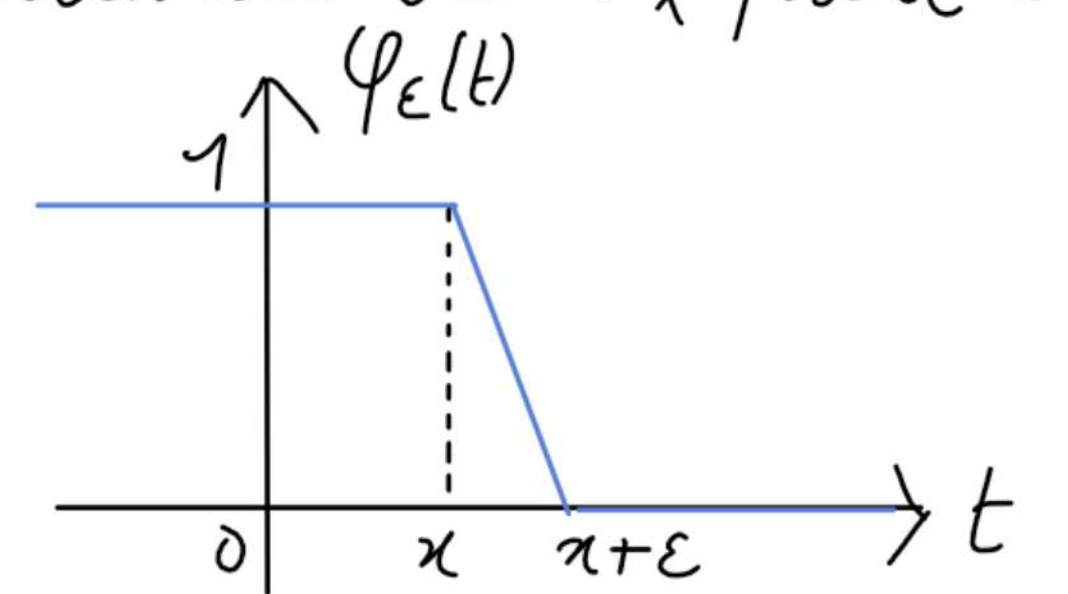
Thm: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, F_x \text{ continue en } x \Rightarrow F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_X(x))$

Thm: Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n et X sont à valeurs dans D presque-sûrement.
 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(X = k)$.

Appli: Soient $\lambda > 0$ et $(p_n)_n \in]0, 1[^\mathbb{N}$ telle que $np_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Preuve de Thm 1: $\Rightarrow$ Supposons que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$. Soit $x \in \mathbb{R}$ un point de continuité de F_X , soit $\varepsilon > 0$.

Considérons la fonction φ_ε dont la courbe représentative est donnée ci-contre. Comme $\varphi_\varepsilon \geq \mathbb{1}_{\cdot \leq x}$, par croissance de $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] \geq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n \leq x}] = \mathbb{P}(X_n \leq x) = F_{X_n}(x)$. De là,



$$\mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup F_{X_n}(x)$$

Or $\mathbb{1}_{\cdot \leq x+\varepsilon} \leq \varphi_\varepsilon$ donc $F_X(x+\varepsilon) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \leq x+\varepsilon}] \leq \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X)]$, donc $F_X(x+\varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup F_{X_n}(x)$.

Comme F_X est continue, on a donc $F_X(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(x+\varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup F_{X_n}(x)$.

On montre de la même manière que $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf F_{X_n}(x) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_X(x-\varepsilon) = F_X(x)$, d'où $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_X(x)$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. En particulier, φ peut être uniformément approchée par des fonctions en escalier. Comme F est croissante, ses points de discontinuité sont en quantité dénombrable.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \dots, x_{k+1}$ des points de continuité de F et $a_1, \dots, a_k$ des réels tels que $\|\varphi - g\|_\infty \leq \varepsilon$, où $g = \sum_{j=1}^k a_j \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1})}$. De là, $|\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| \leq |\mathbb{E}[(\varphi - g)(X_n)]| + |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| + |\mathbb{E}[(g - \varphi)(X)]|$

$$\leq 2\varepsilon + |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]|. \text{ Or } \mathbb{E}[g(X_n)] = \sum_{j=1}^k a_j \mathbb{P}(x_j < X_n \leq x_{j+1}) = \sum_{j=1}^k a_j (F_{X_n}(x_{j+1}) - F_{X_n}(x_j)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[g(X)]$$

par hypothèse, donc $|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| \leq \varepsilon$ pour n assez grand, donc $|\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| \leq 3\varepsilon$ pour n grand. ■

Preuve de Thm 2: Soit $k \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon] \cap D = \{x_k\}$. Comme $X \in D$ presque sûrement, $x_k \pm \varepsilon$ sont des points de continuité de F_X .

* Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$, alors $F_{X_n}(x_k \pm \varepsilon) \rightarrow F_X(x_k \pm \varepsilon)$, donc $\mathbb{P}(X_n = x_k) = \mathbb{P}(x_k - \varepsilon < X_n \leq x_k + \varepsilon) = F_{X_n}(x_k + \varepsilon) - F_{X_n}(x_k - \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(x_k - \varepsilon < X \leq x_k + \varepsilon) = \mathbb{P}(X = x_k)$.

* Réciproquement, si $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = x_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = x_k)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que F_x est continue en x ,
 $|F_{X_n}(x) - F_X(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En effet,

$$|F_{X_n}(x) - F_X(x)| = \left| \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x_k \leq x}} \mathbb{P}(X_n = x_k) - \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ x_k \leq x}} \mathbb{P}(X = x_k) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\mathbb{P}(X_n = x_k) - \mathbb{P}(X = x_k)|$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{P}(X_n = x_k)}_{\text{sommeable}} + \underbrace{\mathbb{P}(X = x_k)}_{\text{sommeable}} - 2 \underbrace{\min(\mathbb{P}(X_n = x_k), \mathbb{P}(X = x_k))}_{\leq \mathbb{P}(X = x_k), \text{sommeable}}$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = x_k) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_k) - 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \min(\mathbb{P}(X_n = x_k), \mathbb{P}(X = x_k))$$

$$\leq 2 - 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\min(\mathbb{P}(X_n = x_k), \mathbb{P}(X = x_k))}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = x_k) \text{ par hypothèse}}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 - 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_k) = 0 \quad (\text{convergence dominée, } \leq \mathbb{P}(X = x_k)).$$

Preuve de Appli: Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{n p_n \rightarrow \lambda} \underbrace{(1-p_n)^n}_{\text{car } p_n \rightarrow 0} \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\rightarrow 1} \sim \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\sim 1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\sim 1} \dots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\sim 1} e^{-\lambda} \cdot 1 \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} > 0$$

donc $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$. ■

$$(1-p_n)^n = e^{n \ln(1-p_n)} = e^{n(-p_n + o(p_n))} = e^{-np_n + o(1)} \underset{p_n \rightarrow 0}{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}} e^{-\lambda} > 0$$