

Soient K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

Thm: $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*, \exists ! A \in \mathcal{M}_n(K) : \varphi = \text{Tr}(A \cdot)$.

Appli 1: Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$. Si $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(K)^2, \varphi(XY) = \varphi(YX)$, alors il existe $a \in K$ tel que $\varphi = a \cdot \text{Tr}$.

Appli 2: Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.

Appli 3: Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

Preuve du Thm: Posons $\Phi: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)^*, A \mapsto \varphi_A = \text{Tr}(A \cdot)$. Par linéarité de Tr , Φ est linéaire.

▷ Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Ker}(\Phi)$. Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, 0 = \varphi_A(E_{ij}) = \text{Tr}(AE_{ij}) = a_{ij}$, donc $A = 0$. Ainsi, Φ est injective.

▷ $\dim(\mathcal{M}_n(K)) = \dim(\mathcal{M}_n(K)^*)$

Ainsi Φ est un isomorphisme, donc $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*, \exists ! A \in \mathcal{M}_n(K) : \varphi = \Phi(A) = \text{Tr}(A \cdot)$. ■

Preuve de Appli 1: Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$ vérifiant l'hypothèse. D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi = \text{Tr}(A \cdot)$.

Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(K)^2, \text{Tr}(AXY) = \varphi(XY) = \varphi(YX) = \text{Tr}(AYX) = \text{Tr}(XAY)$, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$, pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(K), \text{Tr}((AX - XA)Y) = \Phi(AX - XA)(Y) = 0$, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K), AX - XA \in \text{Ker}(\Phi) = \{0\}$, i.e. $AX = XA$. (i.e. $A \in Z(\mathcal{M}_n(K))$).

Instant calcul: on a $Ae_i = \left(\sum_{k=1}^n a_{p,k} \delta_{k,i} \right)_p = (a_{p,i})_p = \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k$, ou autrement dit Ae_i est la i^{e} colonne de A . En particulier, $E_{ij}e_k = \delta_{k,j}e_i$ car les colonnes de E_{ij} sont nulles, sauf la j^{e} qui est e_i .

De plus, en notant $E_{ij} = (\varepsilon_{p,q} = \delta_{p,i} \delta_{q,j})_{p,q}, E_{ij}A = \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_{p,k} a_{k,q} \right)_{p,q} = \left(\sum_{k=1}^n \delta_{p,i} \delta_{k,j} a_{k,q} \right)_{p,q} = (\delta_{p,i} a_{j,q})_{p,q}$

En particulier, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2,$

$$(AE_{ij})e_j = A(E_{ij}e_j) = Ae_i = \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k = (E_{ij}A)e_j = (\delta_{p,i} a_{j,j})_p = a_{j,j}(\delta_{p,i})_p = a_{j,j}e_i$$

Ainsi, pour tout $k \neq i, a_{k,i} = 0$, et $a_{i,i} = a_{j,j}$. Posons $a := a_{i,i}$, de sorte que $A = aI_n$. On a donc $\varphi = \text{Tr}(A \cdot) = a \cdot \text{Tr}$. ■

Preuve de Appli 2: Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$. Il existe $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi = \text{Tr}(A \cdot)$. Notons $r = \text{rg}(A)$. Il existe $(P, Q) \in GL_n(K)^2$ tel que $A = P J_r Q$ où $J_r = \text{Diag}(I_r, 0_{n-r})$. De là, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K), \text{Tr}(AX) = \text{Tr}(P J_r Q X) = \text{Tr}(J_r Y)$ où $Y = QXP$. Comme $(P, Q) \in GL_n(K)^2$, on a $X \in GL_n(K) \Leftrightarrow Y \in GL_n(K)$, donc trouver $X \in H \cap GL_n(K) = \text{Ker}(\text{Tr}(A \cdot)) \cap GL_n(K)$ revient à trouver $Y \in \text{Ker}(\text{Tr}(J_r \cdot)) \cap GL_n(K)$. Pour cela, prenons pour Y la matrice de la permutation $(1, 2, \dots, n)$. ■

Preuve de Appli 3: Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \text{Tr}(A \cdot)$. Soit $A = \Theta S$, $\Theta \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ une décomposition polaire de A . D'après le théorème spectral, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = P D {}^t P$. De là,

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(AX) = \text{Tr}(\Theta P D {}^t P X) = \text{Tr}({}^t P X \Theta P D) = \text{Tr}(Y D) \quad \text{où } Y = {}^t P X \Theta P.$$

Remarquons que $X \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Y \in O_n(\mathbb{R})$, donc chercher $X \in H \cap O_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}(A \cdot)) \cap O_n(\mathbb{R})$ revient à chercher $Y \in O_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{Tr}(D \cdot))$. Pour cela, la matrice de la permutation $(1, 2, \dots, n)$ est orthogonale puisqu'elle change une base orthonormée en une autre base orthonormée, et $\text{Tr}(DY) = 0$. ■