

Lemme : Il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui approche uniformément l'identité sur $[-1, 1]$.

Soit (X, d) un espace métrique compact contenant au moins 2 éléments.

Thm (de STONE-WEIERSTRASS) : Si H est une sous-algèbre séparante et unitaire de $C(X, \mathbb{R})$ alors H est dense dans $C(X, \mathbb{R})$.

Preuve du Thm : Soit $H \subseteq C(X, \mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses.

► Pour tout $(f, g) \in H^2$, $\min(f, g) \in H$ et $\max(f, g) \in H$:

Soit $h \in H \setminus \{0\}$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par le lemme. Comme H est unitaire, $\bar{H}$ aussi, donc $\mathbb{R} \in \bar{H}$, et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n\left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right) \in \bar{H}$, et donc $|h| = \|h\|_\infty \left|\frac{h}{\|h\|_\infty}\right| \in \bar{H}$. Il suffit pour conclure de remarquer que :

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{et} \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

► $\forall (x_1, x_2) \in X^2$, $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists h \in H : h(x_1) = \alpha_1$ et $h(x_2) = \alpha_2$.

Soient $(x_1, x_2) \in X^2$ tel que $x_1 \neq x_2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Comme H est séparante, il existe $h_0 \in H$ telle que $h_0(x_1) \neq h_0(x_2)$.

De là, $\begin{cases} \lambda h_0(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda h_0(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$ est un système de CRAMER d'inconnues λ et μ , et admet donc une unique solution (λ_0, μ_0) . Posons $h = \lambda_0 h_0 + \mu_0$. Comme H est une algèbre unitaire, $h \in H$, et h vérifie bien $h(x_1) = \alpha_1$ et $h(x_2) = \alpha_2$.

► H est dense dans $C(X, \mathbb{R})$:

Soient $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $(x, y) \in X^2$ tel que $x \neq y$. D'après le point précédent, il existe $u_y \in H$ telle que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$. Posons alors $O_y = \{x' \in X \mid u_y(x') > f(x') - \varepsilon\} = (u_y - f)^{-1}(]-\varepsilon, +\infty[)$. Comme u_y et f sont continues, O_y est ouvert, et $u_y(x) = f(x) > f(x) - \varepsilon$ et $u_y(y) = f(y) > f(y) - \varepsilon$, donc $(x, y) \in O_y^2$. De là, $X = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} O_y$, mais X est compact donc il existe $(y_1, \dots, y_r) \in (X \setminus \{x\})^r$ tel que $X = O_{y_1} \cup \dots \cup O_{y_r}$.

Posons $v_x = \max(u_{y_1}, \dots, u_{y_r}) \in \bar{H}$. On a alors $v_x(x) = \max(u_{y_1}(x), \dots, u_{y_r}(x)) = \max(f(x), \dots, f(x)) = f(x)$, et $v_x(y) = \max(u_{y_1}(y), \dots, u_{y_r}(y)) > f(y) - \varepsilon$. Posons $\Omega_x = \{x' \in X \mid v_x(x') < f(x') + \varepsilon\} = (v_x - f)^{-1}(]-\infty, \varepsilon[)$.

Par continuité de $v_x - f$, Ω_x est ouvert, et de même que précédemment, pour tout $x \in X$, $x \in \Omega_x$, donc $X = \bigcup_{x \in X} \Omega_x$, mais X est compact donc il existe $(x_1, \dots, x_t) \in X^t$ tel que $X = \Omega_{x_1} \cup \dots \cup \Omega_{x_t}$.

Posons finalement $v = \min(v_{x_1}, \dots, v_{x_t}) \in \bar{H}$. Pour tout $x \in X$, $f(x) - \varepsilon < v(x) < f(x) + \varepsilon$, donc $\|f - v\|_\infty < \varepsilon$. ■

Preuve du Lemme : Soit $(P_n)_n$ la suite définie par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n : x \mapsto P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$:

► $n = 0$: Pour tout $x \in [-1, 1]$, $0 \leq P_0(x) \leq P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \leq |x|$.

► Soit $n \in \mathbb{N}$ rendant l'hypothèse vraie. Soit $x \in [-1, 1]$. Comme $0 \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$, on a $P_{n+1}(x)^2 \leq x^2$, et donc

$$P_{n+2}(x) - P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}(x)^2) \geq 0. \text{ Ensuite,}$$

$$P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}(x)^2) = |x| - |x| + P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(|x| - P_{n+1}(x))(|x| + P_{n+1}(x))$$

$$= |x| + \underbrace{(|x| - P_{n+1}(x))}_{\geq 0} \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))\right]}_{\leq 0} \leq |x|$$

D'après le théorème de la limite monotone, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction P sur $[-1,1]$. En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ dans $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$, on montre que $P(x) = P(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P(x)^2)$, mais $0 \leq P(x) \leq |x|$ donc $P(x) = |x|$.

Comme $P = |\cdot|$ est continue et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante sur le compact $[-1,1]$, un théorème de DINI montre que la convergence est uniforme. ■

ANNEXE 1: Théorème de DINI

Soient $D \subseteq \mathbb{R}^n$ compact et $(u_n)_n \in C^0(D, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ croissante (point par point) qui converge simplement vers $u \in C^0(D, \mathbb{R})$. Alors $\|u_n - u\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\Omega_n := \{x \in D \mid u_n(x) - u(x) < \varepsilon\} = (u_n - u)^{-1}([-\infty, \varepsilon[)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - u$ est continue, $(\Omega_n)_n$ est une suite d'ouverts, qui plus est croissante par croissance de $(u_n)_n$. Comme $(u_n)_n$ converge simplement vers u , on a $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, mais D est compact, donc on peut extraire de $(\Omega_n)_n$ un sous-recouvrement fini de D ; par croissance de $(\Omega_n)_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $D = \Omega_{n_0}$. De là, $\forall x \in D$, $u_{n_0}(x) - u(x) < \varepsilon$, mais $(u_n)_n$ tend simplement en croissant vers u sur D , donc $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in D$, $|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$, i.e. $\|u_n - u\|_{\infty} < \varepsilon$. ■

ANNEXE 2: Exemples d'algèbres unitaires séparantes

- ▶ $C^k(X, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- ▶ L'espace des fonctions lipschitziennes sur X
- ▶ L'ensemble des fonctions polynomiales
- ▶ Si $X \subseteq \mathbb{R}^d$, alors $H = \{x \mapsto P(x_1, \dots, x_d) : P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$

ANNEXE 3: Version complexe du théorème de STONE - WEIERSTRASS (qui peut être présentée à la place du lemme)

Si H est une sous-algèbre séparante et unitaire de $C(X, \mathbb{C})$ stable par conjugaison, alors H est dense dans $C(X, \mathbb{C})$.

Preuve: Posons $H^{\mathbb{R}} = \{h \in H \mid h(x) \in \mathbb{R}\}$: c'est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$, unitaire et séparante. En effet soit $(x, y) \in X^2$ tel que $x \neq y$. Il existe $h_0 \in H$ tel que $h_0(x) \neq h_0(y)$, donc $\operatorname{Re}(h_0(x)) \neq \operatorname{Re}(h_0(y))$ ou $\operatorname{Im}(h_0(x)) \neq \operatorname{Im}(h_0(y))$. Dans le premier cas (le deuxième est identique), remarquons que $\operatorname{Re} \circ h_0 = \frac{h_0 + \overline{h_0}}{2} \in H$, et $\operatorname{Re} \circ h_0(x) \in \mathbb{R}$ donc $\operatorname{Re} \circ h_0 \in H^{\mathbb{R}}$, CQFD. D'après le théorème de STONE - WEIERSTRASS réel, $H^{\mathbb{R}}$ est dense dans $C(X, \mathbb{R})$. Remarquons enfin que $C(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{R}) + iC(X, \mathbb{R})$ et $H = H^{\mathbb{R}} + iH^{\mathbb{R}}$ pour conclure que H est dense dans $C(X, \mathbb{C})$. ■