

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $q \geq 1$.

Lemme 1: Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{0 \leq k \leq q-1}$ est libre, et $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est stable par u .

Lemme 2: Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tel que $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ et $G = H^\circ = \text{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))^\circ$ sont stables par u et vérifient $E = F \oplus G$.

Thm: Il existe $E_1, \dots, E_r$ des sous espaces de E stables par u , des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ de $E_1, \dots, E_r$ telles que l'endomorphisme u_i induit par u sur E_i a pour matrice dans $\mathcal{B}_i$:

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(K).$$

Preuve du Lemme 1: Comme $u^{q-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$. Si $\mathcal{B}_{u,x}$ était liée, alors il existerait $(\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}) \in K^q \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Posons $p = \min \{k \mid \lambda_k \neq 0\}$.

Comme $u^{q-1}(x) \neq 0$, nécessairement $p < q-1$. Pour $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, posons $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_p}$. On a: $\lambda_p u^p(x) = -\sum_{k=p+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$ donc $u^p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^k(x) = \sum_{j=1}^{q-p-1} \mu_{p+j} u^{p+j}(x)$. Or

$$u^{q-1}(x) = u^{q-p-1}(u^p(x)) = \sum_{j=1}^{q-p-1} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x) = 0 \text{ car } q+j-1 \geq q \text{ et } u^q = 0.$$

C'est contradictoire, donc $\mathcal{B}_{u,x}$ est libre. De plus, F est stable par u car $u^q = 0$.

Preuve du Lemme 2: Rappelons que $G := H^\circ = \{y \in E \mid \forall \varphi \in H, \langle \varphi, y \rangle = 0\}$, et que $\dim(E) = \dim(G) + \dim(H)$.

► Si H est stable par ${}^t u$, alors G est stable par u : en effet, pour tout $y \in G$, pour tout $\varphi \in H$, $\langle \varphi, u(y) \rangle = \langle {}^t u(\varphi), y \rangle = 0$ car ${}^t u(\varphi) \in H$.

► Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $({}^t u)^k = {}^t(u^k)$, ${}^t u$ est nilpotent d'indice q , donc il existe $\varphi \in E^*$ telle que $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$, i.e. $\varphi \circ u^{q-1} \neq 0$. Il existe donc $x \in E$ tel que $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$. De là, $u^{q-1}(x) \neq 0$ (car φ est linéaire), donc d'après Lemme 1, $\mathcal{B}_{u,x}$ est libre et $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est stable par u . De même, d'après Lemme 1, puisque $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$, $\mathcal{B}_{{}^t u, \varphi}$ est libre et $H = \text{Vect}(\mathcal{B}_{{}^t u, \varphi})$ est stable par ${}^t u$ - a fortiori, G est stable par u .

► Comme $\dim(F) + \dim(G) = \dim(H) + \dim(G) = n$ (car $\dim(F) = \dim(H) = q$), il suffit

pour conclure de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Soit $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F \cap G$. Comme G est stable par u , $u^{q-1}(y) \in G$, donc $0 = \langle \varphi, u^{q-1}(y) \rangle = \varphi \circ u^{q-1}(y) = \varphi(\lambda_0 u^{q-1}(x)) = \lambda_0 \varphi \circ u^{q-1}(x)$, mais $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$. Supposons que $\lambda_0 = \dots = \lambda_j = 0$, montrons que $\lambda_{j+1} = 0$. On a $y = \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$ et $0 = \varphi \circ u^{q-j-2}(y) = \lambda_{j+1} \varphi \circ u^{q-1}(x)$.

Preuve du Thm : $\blacktriangleright$ Si $n = \dim(E) = 1$, alors $u = 0$, et le résultat est immédiat.
 $\blacktriangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat montré pour les endomorphismes nilpotents des espaces de dimension $\leq n$. Avec les notations de Lemme 2, notons u_F l'endomorphisme induit par u sur F , et u_G l'endomorphisme induit par u sur G . On a $\text{Mat}_{B_{u,n}}(u_F) = J_q$, et u_G étant nilpotent, sa matrice dans une base convenable B_G de G est de la forme attendue. Ainsi, la matrice de u dans $B_{u,n} \cup B_G$ a la forme voulue.