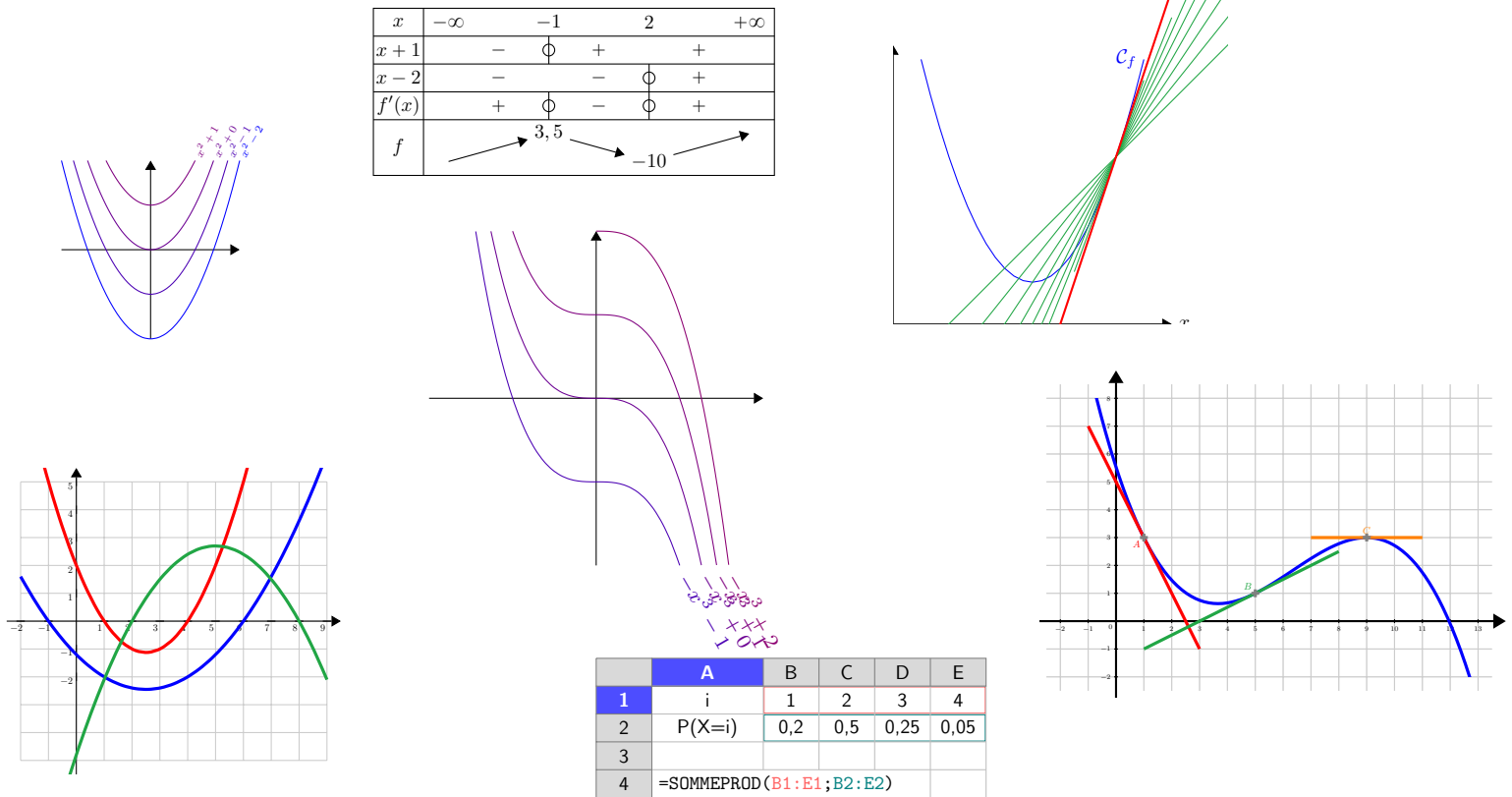
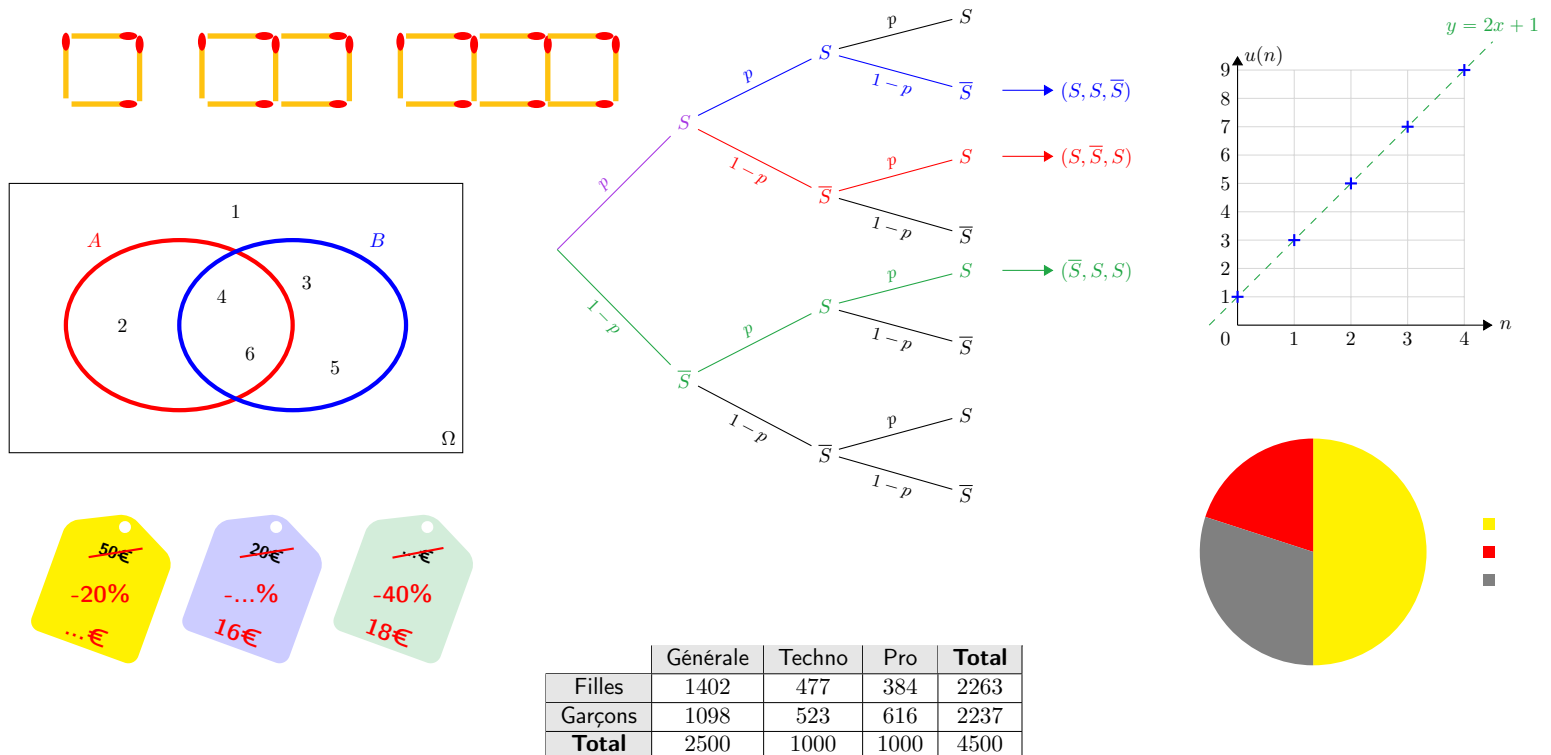




Mathématiques

1^{ère} techno (hors ST2A) – Cours complet



Cours de première ST

1	Rappels sur les proportions	17
1	Rappels : vocabulaire statistique	18
2	Proportions et pourcentages	18
3	Tableaux croisés d'effectifs	21
	Exercices	23
2	Rappels sur les évolutions	27
1	Évolutions simples	28
2	Évolutions successives	31
	Exercices	32
3	Notion de suite	35
1	Introduction à la notion de suite	36
2	La notation des suites	37
3	Les suites dans un tableur	39
	Exercices	40
4	Rappels sur les fonctions	41
1	Le vocabulaire fonctionnel	42
2	Représentation graphique d'une fonction	43
3	Résolution graphique d'(in)équations	45
4	Tableau de signes d'une fonction	48
	Exercices	50
5	Suites arithmétiques et géométriques	55
1	Modèle discret de croissance linéaire : les suites arithmétiques	56
2	Modèle discret de croissance exponentielle : les suites géométriques	57
	Exercices	59
6	Probabilités conditionnelles, succession d'événements	61
1	Probabilité conditionnelle	62
2	Arbres pondérés	64
	Exercices	66
7	Fonctions polynômes de degré 2	69
1	Polynômes du second degré, paraboles	70
2	Forme factorisée, signes et variations d'un polynôme de degré 2	73
	Exercices	77
8	Représentation de données	79
1	Indicateurs statistiques	80
2	Représentations graphique des séries à un caractère	83
3	Représentation des séries à deux caractères	84
	Exercices	88
9	Variables aléatoires	91
1	Variables aléatoires, loi de probabilités, espérance	92
2	Loi de Bernoulli	93
	Exercices	95

10 Rappels sur les fonctions affines	97
1 Point de vue algébrique	98
2 Point de vue géométrique	99
Exercices	102
11 Notion de nombre dérivé	105
1 Taux d'accroissement d'une sécante	106
2 De la sécante à la tangente	106
3 Nombre dérivé et tangente	107
Exercices	108
12 Dérivation et variations des fonctions numériques	111
1 Fonction dérivée	112
2 Variations et signes de la dérivée	113
3 Extrema d'une fonction	114
Exercices	115
A Rappels de calcul entier, décimal, relatif	117
1 Numération décimale de position	117
2 Opérations	119
3 Techniques de calcul posé	120
4 Nombres relatifs	126
B Rappels de calcul fractionnaire	133
1 Comprendre les fractions	133
2 Calculer avec les fractions	143
3 Décomposition, encadrement, comparaison de fractions	149
C Rappels de calcul littéral	151
1 Expressions littérales et programmes de calcul	151
2 Simplifier/réduire une expression	154
3 Distributivité	154
D Rappels de probabilités	157
1 Modéliser le hasard : vocabulaire et notations	157
2 Quantifier le hasard : (loi de) probabilité	159
3 Expériences à plusieurs épreuves : arbres de probabilité	163

Programme de première ST

Préambule

Intentions majeures

Le programme de mathématiques commun à tous les élèves des classes de première de la voie technologique est conçu avec les intentions suivantes :

- ▶ permettre à chaque élève de consolider et d'élargir les acquis du collège et de la classe de seconde afin de poursuivre l'acquisition d'une culture mathématique nécessaire pour évoluer dans un environnement numérique où les données et les graphiques sont omniprésents ;
- ▶ développer une image positive des mathématiques et permettre à chaque élève de faire l'expérience personnelle des démarches qui leur sont propres afin d'en appréhender la pertinence et l'efficacité ;
- ▶ assurer les bases mathématiques nécessaires aux autres disciplines enseignées et développer des aptitudes intellectuelles indispensables à la réussite d'études supérieures, quelle que soit la spécialité technologique retenue ;
- ▶ prendre en compte les spécificités des séries tertiaires et industrielles qui se traduisent par des finalités d'apprentissage différentes.

Lignes directrices pour l'enseignement

Attitudes développées

L'enseignement des mathématiques participe à la formation générale des élèves en contribuant au développement d'attitudes propices à la poursuite d'études. Parmi elles, peuvent notamment être mentionnés, la persévérance dans la recherche d'une solution, l'esprit critique, le souci d'argumenter sa pensée par un raisonnement logique, la qualité d'expression écrite et orale, l'esprit de collaboration dans un travail d'équipe, etc.

La résolution d'exercices et de problèmes, individuellement ou en groupe, l'organisation de réflexions et d'échanges scientifiques pour valider un résultat ou une méthode sont des occasions fécondes pour développer ces attitudes indispensables à la formation de chaque individu dans ses dimensions personnelle et professionnelle, sans omettre la responsabilité du citoyen.

Développement des six compétences mathématiques et de l'aptitude à l'abstraction

L'activité mathématique contribue à développer les six compétences mentionnées ci-dessous :

- ▶ chercher, expérimenter, émettre des conjectures ;
- ▶ modéliser, réaliser des simulations numériques d'un modèle, valider ou invalider un modèle ;
- ▶ représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.), changer de registre (algébrique, graphique, etc.) ;
- ▶ raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- ▶ calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- ▶ communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

Ces compétences sont plus ou moins mobilisées selon les activités proposées aux élèves et il convient de diversifier les situations afin de les développer toutes. Au-delà de ces compétences disciplinaires, l'enseignement des mathématiques contribue à développer des aptitudes transversales, notamment l'abstraction, qui sont essentielles pour la poursuite d'études supérieures.

Diversité de l'activité mathématique

La mise en œuvre du programme permet aux élèves d'acquérir des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques. En lien avec les contenus étudiés, elles sont mobilisées et articulées les unes aux autres dans des activités riches et variées où le sens des concepts et les techniques liées à leur application sont régulièrement mis en relation, chacun venant éclairer et consolider l'autre. La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes favorisant les prises d'initiatives, mises au point collectives d'une solution, productions d'écrits individuels ou collectifs, etc.

Le passage à l'abstraction mathématique peut présenter des difficultés pour certains élèves. Il importe donc de veiller au caractère progressif et actif des apprentissages. Les nouveaux concepts gagnent à être introduits par un questionnement ou un problème qui conduit à des conjectures et donne sens à leur formalisation abstraite. Le recours à des logiciels de calcul, de géométrie dynamique ou la pratique de la programmation facilitent cette approche inductive. Pour assurer la stabilité et la pérennité des apprentissages, les concepts sont ensuite mis en œuvre dans des exercices et des problèmes qui permettent de les consolider et d'en montrer la portée.

Au-delà du cours de mathématiques, l'élève consolide sa compréhension des notions enseignées en les mobilisant dans des situations issues des autres disciplines de sa filière. Les professeurs de mathématiques sont invités à travailler avec les professeurs des disciplines concernées pour identifier des situations propices à la contextualisation de son enseignement et pour harmoniser les notations et le vocabulaire. Cela favorise les articulations, facilite les transferts et renforce ainsi les acquis des élèves.

Les professeurs veillent à montrer que les mathématiques sont vivantes et en perpétuelle évolution, qu'elles s'inscrivent dans un cadre historique mais aussi dans la société actuelle. Il s'agit par exemple :

- ▶ d'insérer des éléments d'histoire des mathématiques, des sciences et des techniques, en classe de mathématiques ;
- ▶ de présenter des faits d'actualité liés aux mathématiques (médaille Fields, évocation de mathématiciennes et mathématiciens contemporains, présentation vulgarisée de découvertes importantes, etc.) ;
- ▶ de montrer comment les mathématiques permettent d'éclairer et de décrypter l'actualité ;
- ▶ de faire connaître des métiers et des études supérieures où les mathématiques sont utilisées, en veillant à déconstruire les stéréotypes de genre.

Évaluation des élèves

L'évaluation joue un rôle clé dans la régulation des apprentissages, tant pour l'enseignant que pour l'élève, pour lequel elle participe pleinement au développement de son autonomie et à son engagement dans les apprentissages. Elle revêt différentes modalités mais conserve toujours une visée formative ; pour cela, les élèves sont informés en amont des éléments évalués.

L'évaluation doit permettre de repérer les acquis des élèves en lien avec les six compétences mathématiques : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

L'évaluation doit faire prendre conscience des réussites et des progrès. Le retour sur l'évaluation est un moment clé du processus d'apprentissage. Il ne se limite pas à une correction collective, mais vise à valoriser les démarches pertinentes, même si elles ne mènent pas immédiatement à la bonne réponse, mettre en lumière les erreurs fréquentes, pour aider les élèves à les comprendre et à y remédier, proposer des pistes progrès aux élèves. Ce retour permet aussi à l'enseignant de réguler sa progression, de revoir certains points du programme ou de proposer d'autres approches pédagogiques. L'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes doit tout particulièrement être évaluée.

Activités algorithmiques et numériques

Le développement d'un mode de pensée numérique est aujourd'hui constitutif de la formation mathématique. Il ne s'agit plus seulement d'utiliser des outils numériques (calculatrices, logiciels de géométrie, etc.) pour l'enseignement

mais d'intégrer à l'enseignement des mathématiques une composante informatique qui recouvre l'algorithmique, la programmation et la pratique du tableur.

Cette dimension s'inscrit de manière transversale dans le cours de mathématiques et repose sur la connaissance d'un nombre limité d'éléments de syntaxe et de fonctions spécifiques à l'outil utilisé (langage Python, tableur). Cela suppose, d'une part, un enseignement explicite par les professeurs, d'autre part, une pratique effective et régulière des élèves.

Tout au long du cycle terminal, les élèves sont amenés à :

- ▶ écrire une fonction simple en langage Python ;
- ▶ interpréter un algorithme donné ;
- ▶ compléter, améliorer ou corriger un programme informatique ;
- ▶ traduire un algorithme en langage naturel ou en langage Python ;
- ▶ décomposer un programme en fonctions ;
- ▶ organiser une feuille de calcul.

Parallèlement, l'utilisation de logiciels pédagogiques, notamment ceux de géométrie dynamique, enrichit le cours de mathématiques d'illustrations ou de simulations propices à l'appropriation des concepts.

Résolution de problèmes et automatismes

La résolution de problèmes est centrale dans l'activité mathématique car elle offre un cadre privilégié pour travailler, mobiliser et combiner les six compétences mathématiques tout en développant des aptitudes transversales. Par ailleurs, elle contribue à donner du sens aux notions étudiées. Toutefois, pour résoudre des problèmes, il faut être en capacité de prendre des initiatives, d'imaginer des pistes de solution et de s'y engager sans s'égarer. Pour cela, on procède souvent par analogie, en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes ou en adaptant une méthode connue à la situation étudiée. La disponibilité d'esprit nécessaire à ces étapes essentielles suppose des connaissances, des procédures et des stratégies immédiatement mobilisables, c'est-à-dire automatisées. L'acquisition de ces automatismes est favorisée par la mise en place, dans la durée et sous la conduite du professeur, d'activités rituelles. Il ne s'agit pas de réduire les mathématiques à des activités répétitives, mais de permettre un ancrage solide des fondamentaux, afin de pouvoir les mobiliser en situation de résolution de problèmes.

Parallèlement à l'ancrage de notions incontournables, les activités visant l'acquisition d'automatismes fournissent des conditions de réussite rapide et mettent l'élève en confiance pour s'engager dans la résolution de problèmes.

Place de l'oral

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales notamment à travers la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs, etc. L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calculs).

Trace écrite

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, éventuellement enrichie par des exemples ou des schémas, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin, tout au long du cycle terminal. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche

d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Les professeurs doivent avoir le souci de la bonne qualité (mathématique et rédactionnelle) des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés (conjecture, définition, propriété - admise ou démontrée -, démonstration, théorème).

Travail personnel des élèves

Si la classe est le lieu privilégié pour la mise en activité mathématique des élèves, les travaux hors du temps scolaire sont indispensables pour consolider les apprentissages. Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, ces travaux sont essentiels à la formation des élèves. Individuels ou en groupe, évalués à l'écrit ou à l'oral, ces travaux sont conçus de façon à prendre en compte la diversité des élèves et visent la mémorisation, la maîtrise des savoir-faire, le réinvestissement de démarches ou méthodes.

Les professeurs précisent le cadre et les modalités d'usage des outils d'intelligence artificielle dans le travail personnel des élèves.

Cohérence entre l'enseignement de tronc commun et l'enseignement de spécialité « Physique-chimie et mathématiques » des séries STI2D et STL

L'enseignement commun de mathématiques est complété, pour les élèves des séries STI2D et STL, par un enseignement de spécialité intitulé « Physique-chimie et mathématiques ». Il convient pour les professeurs de mathématiques d'inscrire ces deux composantes de la formation en cohérence et en résonance afin de bien préparer les élèves aux démarches mathématiques indispensables à la poursuite et à la réussite d'études scientifiques et technologiques. Cela recouvre aussi bien le choix des supports pour la contextualisation des mathématiques ou pour la modélisation du réel que la pratique de raisonnements faisant appel à l'abstraction. Une étroite collaboration s'impose avec les professeurs de physique-chimie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en trois parties transversales (vocabulaire ensembliste et logique ; algorithmique et programmation ; automatismes) et en deux parties thématiques :

- ▶ analyse pour étudier ou modéliser des évolutions ;
- ▶ statistiques et probabilités pour traiter et interpréter des données, pour modéliser des phénomènes aléatoires.

Les connaissances de la classe de seconde sont réactivées au cours de l'année sans pour autant faire l'objet de chapitres de révision.

Pour la série STD2A, la partie « algorithmique et programmation » est remplacée par une partie « activités géométriques », en raison, d'une part, de la nature spécifique de la spécialité « design et arts appliqués » qui requiert une vision géométrique et, d'autre part, de l'enseignement « outils et langages numériques » qui développe des capacités d'algorithmique et de programmation analogues à celles du programme de mathématiques.

Les parties transversales recensent les capacités attendues qui doivent être travaillées tout au long du cycle terminal, sous forme de rituels ou d'activités intégrées aux enseignements d'analyse et de statistiques et probabilités. Reposant essentiellement sur des notions étudiées dans les classes précédentes, elles ne donnent pas lieu à des chapitres de cours spécifiques mais font cependant l'objet d'un enseignement explicite.

Les parties « analyse » et « statistiques et probabilités » sont organisées en quatre rubriques :

- ▶ contenus ;
- ▶ capacités attendues ;
- ▶ commentaires ;
- ▶ situations algorithmiques (sauf pour la série STD2A).

La dernière rubrique (qui ne concerne pas la série STD2A) identifie un nombre limité de situations qui doivent toutes faire l'objet d'un travail spécifique utilisant le langage Python ou le tableur. Les professeurs s'attachent à proposer ces deux modalités afin qu'en fin d'année les élèves aient acquis les capacités attendues en algorithmique et en programmation.

Programme

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'ensemble vide, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\emptyset, \in, \subset, \cap, \cup, \{\dots\}$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple et celle de produit cartésien de deux ensembles.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E , on utilise la notation $\overline{A}$ des probabilités, ou la notation $E \setminus A$. On utilise la notation $\text{Card}(A)$ pour le cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble fini A .

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves s'exercent :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- à identifier le statut d'une égalité (identité, équation) et celui de la ou des lettres utilisées (variable, indéterminée, inconnue, paramètre) ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à distinguer une proposition de sa réciproque, de sa contraposée ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante », « équivalence logique ».

Commentaires

- La construction de conditions logiques en algorithmique à l'aide des opérateurs ET, OU, NON et la création de filtres en analyse de données sont l'occasion de travailler la logique.
- Dans le cours de mathématiques, les professeurs sont attentifs à expliciter la nature des raisonnements conduits (raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde) ainsi que les quantificateurs à l'œuvre, en langage naturel et sans formalisme.

Algorithmique et programmation (sauf série STD2A)

La pratique de l'algorithmique et de la programmation se poursuit au cycle terminal. En continuité avec la classe de seconde, le langage utilisé est Python.

Le programme vise la consolidation des notions de variable, d'instruction conditionnelle et de boucle ainsi que l'utilisation des fonctions. La seule notion nouvelle est celle de liste qui trouve naturellement sa place dans de nombreuses parties du programme et aide à la compréhension de notions mathématiques telles que les suites numériques, les tableaux de valeurs, les séries statistiques, etc.

Capacités attendues

Variables

- Utiliser un générateur de nombres aléatoires entre 0 et 1 pour simuler une loi de Bernoulli de paramètre p .
- Utiliser la notion de compteur.
- Utiliser le principe d'accumulateur pour calculer une somme, un produit.

Fonctions

- ▶ Identifier les entrées et les sorties d'une fonction.
- ▶ Structurer un programme en ayant recours aux fonctions.

Listes

- ▶ Générer une liste (en extension, par ajouts successifs, en compréhension).
- ▶ Manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer, etc.) et leurs indices.
- ▶ Itérer sur les éléments d'une liste.

Sélection de données

- ▶ Traiter un fichier contenant des données réelles pour en extraire de l'information et l'analyser.
- ▶ Réaliser un tableau croisé de données sur deux critères à partir de données brutes.

Commentaires

- ▶ Les notions relatives aux types de variables et à l'affectation sont consolidées. Comme en classe de seconde, on utilise le symbole « $\leftarrow$ » pour désigner l'affectation dans un algorithme écrit en langage naturel.
- ▶ L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples.
- ▶ La génération des listes en compréhension et en extension est mise en lien avec la notion d'ensemble. Les conditions apparaissant dans les listes définies en compréhension permettent de travailler la logique.
- ▶ Afin d'éviter des confusions, il est recommandé de se limiter aux listes sans présenter d'autres types de collections.

Automatismes

Cette partie du programme vise à construire et à entretenir des habiletés dans les domaines du calcul, de l'information chiffrée et des représentations graphiques. Il s'agit d'automatiser le recours à des connaissances, des procédures, des méthodes et des stratégies afin de permettre aux élèves de les mobiliser plus rapidement. Leur acquisition permet aux élèves une meilleure réussite dans l'apprentissage des mathématiques, participe du développement de leur esprit critique par une meilleure maîtrise des chiffres et du calcul et leur permet une meilleure lecture et compréhension des représentations de données dont les graphiques.

Les capacités attendues énoncées ci-dessous n'ont pas vocation à faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique car les notions qui les sous-tendent ont été travaillées dans les classes antérieures et doivent être entretenues et consolidées au cours de l'année. Cependant les nouvelles notions du programme peuvent donner lieu également à un travail d'automatisation tout le long de l'année. Elles relèvent d'un entraînement régulier privilégiant l'activité mentale. Les différents thèmes proposés doivent être travaillés tout au long de l'année et la présentation par blocs thématiques ne signifie pas, bien au contraire, qu'il faille les aborder les uns après les autres. Les modalités de mise en œuvre peuvent être variées et prendre appui sur différents supports : à l'oral, à l'écrit, individuellement ou en groupe, utilisant éventuellement des outils numériques de vidéo-projection, de recensement instantané des réponses, etc.

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Évolutions et variations

- ▶ Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale.
- ▶ Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage.
- ▶ Calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives.

- Calculer un taux d'évolution réciproque.

Calcul numérique et algébrique

- Résoudre une équation produit nul.
- Déterminer le signe d'une expression du premier degré, d'une expression factorisée du second degré.
- Développer, factoriser, réduire une expression algébrique simple.

Fonctions et représentations

- Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type : $f(x) = k$, $f(x) < k$, etc.
- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations.
- Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur.
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite.
- Déterminer le coefficient directeur d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points.

Statistiques

- Lire un graphique, un histogramme, un diagramme en barres ou circulaire, un diagramme en boîte ou toute autre représentation (repérer l'origine du repère, les unités de graduations ou les échelle, etc.).
- Passer du graphique aux données et vice-versa.
- Calculer et interpréter des indicateurs statistiques pour une série statistique.

Probabilités

- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs ou d'arbres pondérés.
- Distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$, $P_B(A)$.

Analyse

Le programme d'analyse permet à la fois de conforter l'acquisition de connaissances et de méthodes déjà étudiées (fonctions et problèmes du premier degré, fonctions carré et cube) et d'introduire des notions nouvelles (polynômes de degré 2 ou 3, suites, dérivées). La plupart de ces notions peuvent être présentées à partir de contextes familiers aux élèves (emprunts, placements, coûts, vitesses, etc.) ou de représentations fournies par les outils numériques (calculatrice, tableur, logiciel de géométrie dynamique) avant d'être définies de manière formelle et générale. Cette démarche inductive facilite l'accès progressif à l'abstraction qui est l'un des enjeux de l'enseignement des mathématiques au cycle terminal. La mise en application des modèles d'analyse étudiés, tant dans des situations internes qu'externes aux mathématiques, permet à la fois de consolider les habiletés en calcul, de développer les capacités de raisonnement et d'étudier des systèmes évolutifs de différentes natures.

Cette partie du programme s'organise autour de trois grands axes :

- les suites numériques comme modèles mathématiques d'évolutions discrètes ;
- les fonctions numériques de la variable réelle comme modèles mathématiques d'évolutions continues ;
- la dérivation comme concept mathématique traduisant une évolution instantanée.

Suites numériques

Contenus

Les suites comme modèles mathématiques d'évolutions discrètes

- Différents modes de génération d'une suite numérique.

- ▶ Sens de variation.
- ▶ Représentation graphique : nuage de points $(n, u(n))$.

Les suites arithmétiques comme modèles discrets d'évolutions absolues constantes (croissance linéaire) et les suites géométriques (à termes strictement positifs) comme modèles discrets d'évolutions relatives constantes (croissance exponentielle)

- ▶ Relation de récurrence.
- ▶ Explicitation du terme de rang n .
- ▶ Sens de variation.
- ▶ Représentation graphique.

Capacités attendues

- ▶ Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- ▶ Reconnaître si une situation relève d'un modèle discret de variation linéaire ou exponentielle.
- ▶ Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- ▶ Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.
- ▶ Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
- ▶ Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
- ▶ Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique à l'aide de la raison.

Commentaires

- ▶ L'utilisation d'un tableur pour calculer des termes d'une suite favorise la compréhension des différents modes de génération.
- ▶ L'objectif est de modéliser des situations discrètes simples, choisies notamment en lien avec les autres enseignements de la série (évolution ou actualisation d'un capital, évolution d'une colonie bactérienne, etc.).
- ▶ En lien avec l'écriture fonctionnelle, on utilise la notation $u(n)$ préalablement à celle de u_n .
- ▶ L'étude des suites arithmétiques et géométriques permet de comparer différents types de croissance.
- ▶ En classe de première, il convient de faire fonctionner la définition par récurrence d'une suite géométrique ou arithmétique.
- ▶ On s'attache à présenter des suites qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- ▶ Calculer un terme de rang donné d'une suite, une somme finie de termes.
- ▶ Déterminer une liste de termes d'une suite et les représenter.
- ▶ Déterminer le rang à partir duquel les termes d'une suite sont supérieurs ou inférieurs à un seuil donné, ou aux termes de même rang d'une autre suite.

Fonctions de la variable réelle

Contenus

Les fonctions comme modèles mathématiques d'évolutions continues

- ▶ Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- ▶ Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- ▶ Taux de variation, entre deux valeurs de la variable x , d'une grandeur y vérifiant $y = f(x)$.
- ▶ Fonctions monotones sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.

Fonctions polynômes de degré 2

- ▶ Éléments caractéristiques de la courbe : allure, axe de symétrie, coordonnées du sommet en lien avec la symétrie et tableau de variation de la fonction.
- ▶ Racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée (le calcul des racines à l'aide du discriminant ne figure pas au programme).

Capacités attendues

- ▶ Modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction.
- ▶ Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation de la forme $f(x) < k$ ou $f(x) > k$.
- ▶ Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.
- ▶ Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2, pour les fonctions de la forme : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + c$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- ▶ Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Aucune formule n'est attendue. On déterminera l'axe de symétrie par exemple en résolvant l'équation $f(x) = c$.
- ▶ Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2.
- ▶ Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
- ▶ Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 pour trouver ses racines et étudier son signe.

Commentaires

- ▶ Les fonctions polynômes de degré 2 fournissent des occasions de pratiquer le calcul numérique (image d'un nombre donné) et littéral (développement, factorisation) et de travailler sur les représentations graphiques.
- ▶ Les exemples prennent appui sur des situations réelles (impôts, hauteurs de marée, tarifs de courrier, évolution de l'émission de CO₂, etc.) et internes aux mathématiques (problèmes d'optimisation dans un cadre géométrique, etc.).
- ▶ Les professeurs utilisent différentes notations pour la variable : t, u , etc. et habituent les élèves à lire des graphiques reliant une grandeur y à une grandeur composée ($x^2, 1/x$, etc.), ce qui permet notamment de donner sens à l'expression « grandeurs inversement proportionnelles ».
- ▶ La recherche systématique des racines d'un polynôme de degré 2 ne figurant pas au programme, on privilégie les situations où les racines sont évidentes ainsi que les interprétations graphiques. En cas de besoin, la résolution d'une équation du second degré peut se faire à l'aide d'un solveur.

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- ▶ Calculer une valeur approchée d'une solution d'une équation par balayage.

Dérivation

Contenus

Point de vue local : approche graphique de la notion de nombre dérivé

- ▶ Sécantes à une courbe passant par un point donné ; taux de variation en un point.
- ▶ Tangente à une courbe en un point, définie comme position limite des sécantes passant par ce point.
- ▶ Nombre dérivé en un point défini comme limite du taux de variation en ce point.
- ▶ Équation réduite de la tangente en un point.

Point de vue global

- ▶ Fonction dérivée ;
- ▶ Fonctions dérivées de : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$.
- ▶ Dérivée d'une somme, dérivée de kf ($k \in \mathbb{R}$), dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

- ▶ Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée.
- ▶ Tableau de variations, extrema.

Capacités attendues

- ▶ Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- ▶ Construire la tangente à une courbe en un point.
- ▶ Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.
- ▶ Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- ▶ Déterminer le sens de variation et les extrema d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Commentaires

- ▶ La notion de nombre dérivé gagne à être illustrée dans des contextes variés :
 - ▶ dans le cadre d'un mouvement rectiligne, il est possible d'interpréter le taux de variation de la position du point mobile entre deux instants comme une vitesse moyenne et le nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
 - ▶ dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.
- limite des sécantes à une courbe en un point.
- ▶ Il est recommandé de ne pas donner la définition formelle de la notion de limite et de s'en tenir à une approche intuitive à partir d'exemples. Le vocabulaire et la notation correspondants sont introduits à l'occasion du travail sur la notion de nombre dérivé.
- ▶ Il est possible de démontrer que la dérivée d'une fonction monotone est de signe constant. La réciproque (admise) s'appuie sur l'interprétation géométrique du nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

Statistiques et probabilités

En statistiques, à la suite des couples de variables qualitatives étudiés en classe de seconde, on introduit en première technologique l'étude des séries statistiques à deux variables quantitatives.

En probabilités, les objectifs sont les suivants :

- ▶ utiliser la notion de probabilité conditionnelle pour définir l'indépendance de deux événements ;
- ▶ modéliser des cas simples d'expériences aléatoires à plusieurs épreuves indépendantes ;
- ▶ introduire la notion de variable aléatoire.

La simulation est une composante importante de l'apprentissage des probabilités au cycle terminal. Elle permet d'observer la fluctuation d'échantillonnage et de traiter des situations fréquemment rencontrées dans la vie sociale (sondages d'opinion, données socio-économiques, jeux de hasard, etc.) ou en sciences expérimentales (incertitude de mesure), tout en se prêtant à des activités de programmation instructives.

Des activités de programmation, au tableur ou en langage Python, permettent d'automatiser certains calculs et d'obtenir des résultats inaccessibles à la main.

Séries statistiques à deux variables quantitatives

Alors que le programme de la classe de seconde est consacré, dans sa partie relative aux statistiques, à l'étude de couples de variables qualitatives, celui de la classe première technologique aborde l'étude de variables quantitatives, représentées par des nuages de points. On procède à la recherche d'ajustements pertinents affines de ces nuages, dans le but de réaliser des interpolations ou des extrapolations.

Contenus

- ▶ Nuage de points associé à une série statistique à deux variables quantitatives.

- Ajustement affine, point moyen.

Capacités attendues

- Représenter un nuage de points.
- Savoir calculer les coordonnées du point moyen.
- Déterminer et utiliser un ajustement affine.
- Interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues à l'aide d'un ajustement affine.

Commentaires

- Plusieurs ajustements sont proposés (au jugé, droite de Mayer, moindres carrés) mais aucune connaissance théorique n'est attendue. L'appréciation de leur qualité peut faire l'objet d'une discussion au sein de la classe.
- La méthode des moindres carrés est présentée : recherche d'une droite d'équation $y = ax + b$ réalisant le minimum de $\sum_i (y_i - (ax_i + b))^2$ pour le nuage de points (x_i, y_i) .
- Les situations ou contextes réels, en lien notamment avec les enseignements de spécialité, sont privilégiés :
- données issues des domaines de la santé, de l'économie, de la gestion, des sciences sociales, etc. ;
- mesures expérimentales de grandeurs liées par une relation linéaire en physique-chimie (intensité et tension ; droite d'étalonnage d'une concentration, etc.), en biotechnologies ou en sciences de l'ingénieur dans tous les domaines (industriels, génie civil, etc.).
- Les élèves sont entraînés à exercer leur esprit critique sur la pertinence, au regard des données et de la situation étudiée, d'une modélisation par ajustement affine et sur les limites des extrapolations faites dans ce cadre.

Probabilités conditionnelles : indépendance

La notion de probabilité conditionnelle permet d'introduire de manière intuitive l'indépendance de deux événements : deux événements A et B sont dits indépendants si la probabilité conditionnelle de A sachant B est égale à la probabilité de A (sous réserve de la non-nullité de celle de B).

Contenus

- Indépendance de deux événements.
- Formule des probabilités totales.

Capacités attendues

- Savoir utiliser ou justifier l'indépendance de deux événements.
- Dans les cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.

Commentaires

- L'indépendance de deux événements repose sur la définition suivante : pour un événement A de probabilité non nulle, B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$. On démontre que la propriété d'indépendance est symétrique lorsque A et B sont de probabilités non nulles.

Modèle associé à une expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes

Contenus

- Probabilité associée à la répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli.

Capacités attendues

- Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités.

Variables aléatoires

Contenus

- ▶ Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance.
- ▶ Loi de Bernoulli $(0, 1)$ de paramètre p , espérance.

Capacités attendues

- ▶ Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}, \{X \leq a\}$ où X désigne une variable aléatoire et calculer les probabilités correspondantes $P(X = a), P(X \leq a)$.
- ▶ Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
- ▶ Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
- ▶ Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points.
- ▶ Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p .

Commentaires

- ▶ On s'abstient de tout formalisme sur les variables aléatoires. Elles sont essentiellement manipulées en contexte pour modéliser des situations dans lesquelles les issues sont des nombres aléatoires.
- ▶ La simulation d'échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p permet d'observer la fluctuation d'échantillonnage.
- ▶ Sur des simulations de N échantillons (N de l'ordre de plusieurs centaines), on évalue le pourcentage d'échantillons dont la fréquence observée des 1 se situe à une distance $s, 2s$ ou $3s$ de p où s désigne l'écart-type de la série des fréquences observées. Sans développer de théorie de décision ou de test, et en prenant appui sur des simulations et des représentations (histogramme, nuage de points), on fait percevoir, pour une observation donnée, la diversité des interprétations possibles de la distance à p (paramètre du modèle) de la fréquence des 1 : situation fréquente ou situation rare dans le cadre du modèle.
- ▶ Sur des simulations, on constate que la série des fréquences observées des 1 dans N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli a un écart-type de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour plusieurs valeurs de n on représente $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en abscisse et, en ordonnée, l'écart-type s des fréquences observées des 1 dans N échantillons (plusieurs centaines) de taille n . On peut commenter ce résultat en observant que pour diviser la dispersion par k il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2 .

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- ▶ Simuler des échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli à partir d'un générateur de nombres aléatoires entre 0 et 1.
- ▶ Représenter par un histogramme ou par un nuage de points les fréquences observées des 1 dans N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli.
- ▶ Compter le nombre de valeurs situées dans un intervalle de la forme $[p - ks; p + ks]$ pour $k \in \{1; 2; 3\}$.

1 Rappels sur les proportions

Table des matières

1	Rappels : vocabulaire statistique	18
2	Proportions et pourcentages	18
3	Tableaux croisés d'effectifs	21
	Exercices	23

Programme

Croisement de deux variables catégorielles

Contenus

- ▶ Tableau croisé d'effectifs.
- ▶ Fréquence conditionnelle, fréquence marginale.

Capacités attendues

- ▶ Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
- ▶ Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles.

Commentaires

- ▶ L'étude des fréquences conditionnelles permet un travail sur la langue française en considérant les formulations usuellement utilisées dans les médias.
- ▶ Des variables catégorielles de natures diverses sont étudiées : nominale (profession, espèce, département de résidence...), ordinale (niveau d'étude, degré de satisfaction de la clientèle...) ou définies par des intervalles (classe d'âge, temps de transport...).
- ▶ Les élèves travaillent avec des données réelles dans des domaines variés (sécurité routière, démographie, économie, agronomie...).
- ▶ Au moins un traitement statistique de fichier de données individuelles anonymes est proposé, issu par exemple du web (OpenData...).

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- ▶ À partir de deux listes représentant deux caractères d'individus, déterminer un sous-ensemble d'individus répondant à un critère (filtre, utilisation des ET, OU, NON).
- ▶ Dresser le tableau croisé de deux variables catégorielles à partir du fichier des individus et calculer des fréquences conditionnelles ou marginales.

1 – Rappels : vocabulaire statistique

Vocabulaire

Définition 1

- ▶ Quand on a un ensemble de données, on parle de **série de données**.
- ▶ Le **caractère** est la grandeur ou l'attribut que l'on observe.
- ▶ La **population** est l'ensemble des individus sur lesquels on effectue l'étude statistique.
- ▶ Soit E une population. Une **sous-population** de E est une partie de E .

Exemple 2

- ▶ On recense la taille des arbres d'une forêt : le caractère est la taille des arbres, et la population est l'ensemble des arbres de la forêt.
- ▶ On étudie les couleurs de cheveux dans un collège. Le caractère étudié est la couleur des cheveux, la population est l'ensemble des élèves du collège.

Exemple 3

Considérons la population E constituée des arbres de la forêt des Landes. L'ensemble des arbres de E qui sont des pins en est une sous-population. L'ensemble des arbres qui mesurent plus de 15m en est un autre.

Effectifs

Définition 4

Dans une série de données,

- ▶ l'**effectif total** est le nombre de données,
- ▶ l'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois que cette donnée apparaît,

2 – Proportions et pourcentages

Proportion, fréquence

Définition 5

Soit E une population comportant $n_E > 0$ individus, et A une sous-population de E comportant n_A individus.

La **proportion** (ou **fréquence**) de A dans E est le nombre $p = \frac{n_A}{n_E}$.

En réécrivant cette définition avec des notations non mathématiques, on peut écrire :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre d'individus réellement concernés}}{\text{nombre d'individus potentiellement concernés}}$$

Exemple 6

Lors de l'élection présidentielle de 2022, 35 096 478 votants étaient inscrits sur les listes électorales. Parmi eux, 6 106 787 se sont abstenus lors des deux tours.

La proportion de ceux-ci parmi les votants est donc $p = \frac{6\,106\,787}{35\,096\,478} \approx 0,174$.

Exemple 7

Lors d'un sondage, on demande "quel assaisonnement préférez-vous avec du poulet frit ?" Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant, dans lequel on a également calculé les fréquences de chaque valeur du caractère (chaque assaisonnement possible).

Assaisonnement	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre
Effectif	4	10	6
Fréquence	0,2	0,5	0,3

Corollaire 8

- ▶ Si on connaît l'effectif de la population totale E et la proportion que représente A dans E , on peut retrouver l'effectif de la population A par $n_A = p \times n_E$.
- ▶ Si on connaît l'effectif de la population de A et la proportion qu'elle représente dans E , on peut retrouver l'effectif global par $n_E = \frac{n_A}{p}$.

Exemple 9

- ▶ Dans une classe de 20 élèves, 40% portent des lunettes. Combien d'élèves portent des lunettes ?
La population est la classe entière, donc $n_E = 20$. La sous population est celle des élèves portant des lunettes, au nombre n_A que l'on cherche. Leur proportion dans la classe est $p = 40\% = 0,40$. Comme $p = \frac{n_A}{n_E}$, c'est-à-dire $0,40 = \frac{n_A}{20}$, on a $n_A = 0,40 \times 20 = 8$. Il y a donc 8 élèves à lunettes.
- ▶ Une entreprise, 60% des salariés ont moins de 40 ans, ce qui représente 48 employés. Combien de salariés cette entreprise compte-t-elle ?
La population est l'entreprise entière, au nombre n_E d'employés que l'on cherche. La sous population est celle des salariés de moins de 40 ans, au nombre $n_A = 48$. Leur proportion dans la classe est $p = 60\% = 0,60$. Comme $p = \frac{n_A}{n_E}$, c'est-à-dire $0,60 = \frac{48}{n_E}$, on a $n_E = \frac{48}{0,6} = \frac{8}{0,1} = \frac{80}{1} = 80$. Il y a donc 80 salariés dans cette entreprise.

Propriété 10

Une proportion est comprise entre 0 et 1.

Pourcentage d'une quantité**Proposition 11**

Calculer $t\%$ d'une quantité Q revient à calculer $Q \times \frac{t}{100}$.

Remarque 12

Un pourcentage est une proportion relative à une population de référence contenant 100 individus : ainsi, un pourcentage de, par exemple, 12%, qui correspond à une proportion de 0,12, signifie que dans une population de référence de 100 individus, 12 sont concernés.

Si vous avez du mal à mémoriser la méthode, vous pouvez faire un tableau de proportionnalité (on a le droit car les pourcentages sont une situation de proportionnalité).

	Pourcentage	Données
Population	100	n_E
Sous-popu.	12	n_A

Exemple 13

Dans une plaquette de 180g de chocolat, le cacao représente 55%. Cela représente donc $180 \times \frac{55}{100} = 99\text{g}$.
Avec un tableau de proportionnalité, cela donne :

	Pourcentage	Masse (g)
Tablette	100	180
Cacao	55	

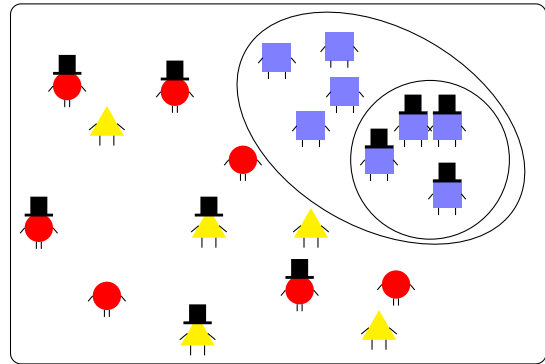
Méthode 14 (Quelques pourcentages utiles)

- ▶ 10% de $Q = Q \div 10$
- ▶ 20% de $Q = Q \div 5$
- ▶ 25% de $Q = Q \div 4$
- ▶ 33% de $Q \approx Q \div 3$
- ▶ 50% de $Q = Q \div 2$
- ▶ 75% de $Q = Q \div 4 \times 3$

On considère une population d'êtres géométriques illustrée ci-contre. Il y a des carrés, des disques et des triangles. Certains portent un chapeau, d'autre non. On considère la sous-population des carrés. À l'intérieur de cette sous-population, on considère la sous-population des carrés qui portent un chapeau.

Les carrés sont 8 dans une population de 20 individus, ils représentent donc une proportion de $\frac{8}{20}$ (soit 40%) de la population totale.

Parmi les 8 carrés, 4 portent un chapeau, ils représentent donc une proportion de $\frac{4}{8}$ (soit 50%) des carrés (pas de la population totale!).



Sous-population d'une sous-population

Proposition 15

Sur un exemple générique : dans l'illustration précédente, la proportion de carrés portant un chapeau se calcul en multipliant les deux proportions successives :

$$\frac{8}{20} \times \frac{4}{8} = \frac{4}{20}$$

Exemple 16

En 2024, 51,5% des électeurs français se sont rendus aux urnes pour les élections européennes. En France, 44,1% des suffrages exprimés étaient dirigés vers des partis classés à droite, 14,6% vers des partis classés au centre, et 31,6% vers des partis classés à gauche.

On voudrait savoir quel pourcentage des électeurs (et non des suffrages exprimés) français ont voté pour chaque bloc : on multiplie donc la proportion de votant par les proportions de chaque bloc.

- ▶ $0,515 \times 0,441 \approx 0,227$: environ 22,7% des électeurs ont voté pour le bloc de droite,
- ▶ $0,515 \times 0,146 \approx 0,08$: environ 8% des électeurs ont voté pour le bloc du centre,
- ▶ $0,515 \times 0,316 \approx 0,163$: environ 16,3% des électeurs ont voté pour le bloc de gauche.

Exercice 1 (Faux négatifs)

Un virus touche 1% de la population. Il existe un test de dépistage qui tombe juste dans 95% de cas, c'est-à-dire que la test indique "malade" pour 95% des malades (et échoue à détecter la maladie chez 5% des malades), et indique "non malade" pour 95% des non malades (et indique injustement "malade" pour 5% des non malades). On teste l'ensemble de la population.

Notations pour l'exercice : On note P le nombre d'individus dans la population totale, M le nombre de

malades, S le nombre de non malades (sains), T^+ le nombre de personnes recevant un test positif, et T^- le nombre de personnes recevant un test négatif.

Pour répondre aux questions suivantes, il est vivement conseillé de faire un schéma des différentes populations et sous-populations, et de rédiger rigoureusement les proportions.

- 1► Quelle proportion de la population totale P (malade ou non) reçoit un test positif?
- 2► On s'intéresse à la sous-population M^+ des individus malades et testés positifs.
 - a► À l'aide de la formule du cours, exprimez la proportion de M^+ dans P , en considérant M^+ comme une sous-population de M .
 - b► À l'aide de la formule du cours, exprimez la proportion de M^+ dans P , en considérant M^+ comme une sous-population de T^+ .
- 3► Dédurre de la question précédente une égalité de deux produits.
- 4► À partir de cette égalité, exprimez la proportion de M dans T^+ en fonction de trois autres proportions.
- 5► Quelle est la proportion des individus malades parmi les testés positifs? Commentez.

3 – Tableaux croisés d'effectifs

Définition 17

Tableau croisé d'effectifs

Un **tableau croisé d'effectifs** est un tableau à double entrée décrivant les effectifs d'une population selon deux caractères.

Souvent, on représente dans une ligne et une colonne supplémentaires (souvent appelées **marges** du tableau) la somme des effectifs de chaque ligne et de chaque colonne.

Exemple 18

On interroge des lycéens en classe de terminale dans les voies générale, technologique et professionnelle pour déterminer la proportion de filles dans ces filières. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant avec les totaux en marge :

	Générale	Techno	Pro	Total
Filles	1 402	477	384	2 263
Garçons	1 098	523	616	2 237
Total	2 500	1 000	1 000	4 500

Par exemple, on lit dans ce tableau que sur 2 500 élèves interrogés en filière générale, 1 402 sont des filles. On lit également que sur les 2 237 garçons interrogés, 616 sont en filière professionnelle.

Dans toute la suite, on reprendra les données de l'exemple 18 précédent.

Définition 19

Fréquence marginale

Dans un tableau croisé d'effectifs, l'**effectif marginal** d'une valeur d'un caractère est la somme des effectifs de cette valeur, qui se lit donc dans une marge du tableau.

La **fréquence marginale** d'une valeur A d'un caractère est la proportion de la population totale représentée par cette valeur du caractère, notée $f(A)$. Autrement dit :

$$f(A) = \text{fréquence marginale de } A = \frac{\text{effectif marginal de } A}{\text{effectif total}}$$

Exemple 20

- L'effectif marginal des filles est 2 263. La fréquence marginale des filles est donc $f(\text{Filles}) = \frac{2\,263}{4\,500}$.

- L'effectif marginal de la filière technologique est 1 000. La fréquence marginale de la filière technologique est donc $f(\text{Techno}) = \frac{1\,000}{4\,500}$.

Définition 21**Fréquence conditionnelle**

Soient A une valeur d'un caractère et B une valeur de l'autre caractère.

La **fréquence conditionnelle de A parmi B** est la proportion que représente A au sein de la sous-population concernée par B , notée $f_B(A)$. Autrement dit :

$$f_B(A) = \text{fréquence conditionnelle de } A \text{ parmi } B = \frac{\text{effectif vérifiant à la fois } A \text{ et } B}{\text{effectif marginal de } B}$$

Exemple 22

- La fréquence conditionnelle des garçons parmi la filière professionnelle est la proportion de garçon en filière professionnelle, c'est-à-dire $f_{\text{Pro}}(\text{Garçon}) = \frac{616}{1\,000}$.
- La fréquence conditionnelle de la filière générale parmi les garçons est la proportion d'élèves en filière générale parmi les garçons, c'est-à-dire $f_{\text{Garçon}}(\text{Générale}) = \frac{1\,098}{2\,237}$.

Remarque 23

Dans les deux cas, marginal ou conditionnel, la formule donnée au début du cours reste valable :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre d'individus réellement concernés}}{\text{nombre d'individus potentiellement concernés}}$$

En effet, dans le cas de la fréquence marginale, tous les individus sont **potentiellement** concernés. Dans le cas conditionnel, seule une catégorie est **potentiellement** concernée.

Dans l'exemple précédent, lorsqu'on demande la fréquence conditionnelle de la filière générale parmi les garçons, les élèves potentiellement concernés par cette description sont les garçons du lycée, au nombre de 2 237. Les élèves réellement concernés par cette description sont au nombre de 1 098.

Exercices

Entraînement au calcul

Exercice 2 (Pourcentage et fractions)



1► Calculer :

- a► 30% de 60 c► 60% de 70
b► 40% de 80 d► 90% de 20

2► Exprimer ces fractions en pourcentages :

- a► $\frac{6}{10}$ c► $\frac{7}{8}$ e► $\frac{5}{2}$
b► $\frac{12}{15}$ d► $\frac{1}{2}$ f► $\frac{61}{1000}$

Exercice 3 (Calculs usuels)



Calculer :

- a► $\frac{12}{15} \times 4$ e► $\frac{12}{6} - \frac{1}{12}$
b► $\frac{7}{8} \times 2$ f► $\frac{1}{3} \times \frac{3}{12}$
c► $\frac{1}{27} \times 18$ g► $\frac{12}{15} \times \frac{1}{2}$
d► $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{1}{24}$ h► $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$

Exercice 4 (Tableau de correspondances)



Écriture décimale	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire	Entier + Fraction < 1	Pourcentage
0,59				
	$\frac{6}{5}$			
		$1 + \frac{7}{10}$		
				229%

Calculs simples en situation

Exercice 5 (Fraction d'une quantité)



- 1► Pour le goûter, Aurore a bu les deux tiers d'une canette de 33cL de soda, et Amel les trois cinquièmes d'une bouteille de 25cL d'eau gazeuse. Calculer la quantité bue par chacun en cL.
- 2► Lors de son séjour à Venise, Nino a parcouru 13,5km, dont deux neuvièmes confortablement installé dans une gondole. Quelle distance a-t-il parcouru en gondole ?
- 3► Sur 600 articles dans un magasin, deux tiers sont en soldes. Donner le nombre d'articles soldés.

Exercice 6 (Pourcentage d'une quantité)



- 1► La chemise que Lucie achète devrait coûter 60 euros mais a 20% de réduction. Quel est son prix ?
- 2► Une veste coûte 50 euros. Quel sera son prix si le marchand pose une étiquette -70% ?

Exercice 7 (Proportion de proportion)

- 1► Garance boit un tiers de son Soda, puis la moitié de ce qu'il reste.
Combien a-t-elle bu de Soda ?
- 2► Antoine a préparé 10 cookies. Guillaume mange deux cinquièmes des cookies, Margaux prend deux tiers de ce qu'il reste.
Combien de cookies reste-t-il pour Antoine ?
- 3► Walid dépense deux tiers de ses économies pour acheter un jeu vidéo. Il dépense un cinquième du reste pour acheter un sandwich. Il lui reste alors 24€.

Combien d'argent avait-il au départ ?
- 4► Camille a 50€ en poche, elle achète un jeu vidéo avec trois dixièmes de cette somme, puis va au restaurant en dépensant trois cinquièmes de ce qu'elle avait initialement en poche.
Combien d'argent lui reste-t-il ?

Exercice 8 (Proportions et fractions)

- 1► Pour sa grenadine, Mme A a rempli un tiers de son verre de sirop, puis a versé de l'eau jusqu'à ras bord. Son verre fait 21cL.
Quel volume de Sirop a-t-elle versé dans le verre ?
- 2► Mr B a parcouru 36km aujourd'hui. La moitié en bus, un tiers en vélo et le reste à pieds.
Quelle distance a parcouru Mr B en vélo ? En bus ? À pieds ?
Quelle proportion du parcours a été parcouru à pieds ?
- 3► Une question dont la réponse est oui ou non est posée à la classe. 6 élèves sur 18 répondent oui, un tiers de la classe répond non.
Combien d'élèves n'ont pas répondu ?

Exercice 9 (Pourcentages)

- 1► 80% des 55 personnes interrogées disent aimer le chocolat noir.
Combien de personnes interrogées aiment le chocolat noir ?
- 2► 56% des 50 chatons nés cette année ont le pelage gris.
Combien de chatons nés cette année ont le pelage gris ?
- 3► 28% des 850 personnes interrogées connaissent le théorème de Pythagore.

Combien de personnes interrogées connaissent le théorème de Pythagore ?

- 4► Une veste qui coûte habituellement 35€ est à 60% de réduction.
Donner son prix soldé.
- 5► Sur les 120 élèves de mathématiques spécifiques de l'an dernier, 30 n'ont jamais été absents.
Quelle est la proportion d'élèves qui n'a jamais été absent ? (Donner une fraction puis un pourcentage.)
- 6► Sur les 50 chatons nés cette année, 15 ont les yeux bleus.
Quelle est la proportion de chatons ayant les yeux bleus ? (Donner une fraction puis un pourcentage)

Exercice 10

Dans la bibliothèque de Jojo, on peut trouver 1200 livres. 600 de ces livres sont des ouvrages datant d'avant 1900, qu'il appelle des "classiques". Parmi ces classiques, il a marqué d'une gommette rouge 200 ouvrages qu'il appelle les "classiques essentiels" : des livres qu'il faut absolument avoir lu.

- 1► Dans la bibliothèque de Jojo, quelle est la proportion de "classiques" ?
- 2► Donner la proportions de "classiques essentiels" parmi les "classiques".
- 3► Dans la bibliothèque de Jojo, quelle est la proportion de "classiques essentiels" ?

Cependant depuis 1900 il est sorti de nombreux livres que Jojo trouve extraordinaires, selon lui 150 de ces ouvrages récents dans sa bibliothèques sont des "incontournables".

- 1► Quelle est la proportion de livres "incontournables" dans la collection de Jojo ?
- 2► Donner la proportion de livres "incontournables" parmi les ouvrages sortis après 1900.
- 3► Si Dio, un ami de Jojo, devait lire les "classiques essentiels" et les "incontournables", quelle proportion de la bibliothèque de Jojo aurait-il besoin de lire ?
- 4► Après avoir examiné la bibliothèque de Jojo, Dio pense qu'il possède déjà chez lui deux tiers de ses ouvrages au total et trois quarts de ses "classiques". Parmi les ouvrages qui sont communs à leurs deux bibliothèques, quelle est la proportion de "classiques" ?

Exercice 11



Laura affirme qu'elle passe un tiers de chaque jour à dormir, un quart à être en cours, un huitième à s'alimenter, un douzième à faire ses devoirs et faire des tâches ménagères, un douzième à utiliser son téléphone ou regarder la télé, et le reste à s'adonner ses loisirs.

- 1► Exprimer les durées de chacune des 6 activités qu'à évoqué Laura en heure.
Il est vivement recommandé d'utiliser le modèle en barres.
- 2► Donner la proportion de sa journée consacrée aux loisirs.
- 3► Exprimer chacune des fractions données ci dessus en pourcentages si possible.

Avec la calculatrice

Exercice 12 (Proportion via effectif)

En 1998, le film *Titanic* avait enregistré 20 634 793 entrées. Cette année-là, tous films confondus, les cinémas en France ont enregistré 170,1 millions d'entrées.

En 2008, le film *Bienvenue chez les Ch'tis* avait enregistré 20 489 303 entrées. Cette année-là, tous films confondus, les cinémas en France ont enregistré 212,7 millions d'entrées.

Lequel de ces deux films a attiré la proportion de spectateurs l'année de sa sortie ?

Exercice 13 (Effectif via proportion)

- 1► L'Asie compte environ 4,6 milliards d'habitants, et 31% d'entre eux vivent en Inde. Combien l'Inde compte-t-elle d'habitants ?
- 2► La France compte environ 67 millions d'habitants, ce qui représente environ 15% de la population totale de l'Union Européenne (UE).
Combien l'UE compte-t-elle d'habitants au total ?

Exercice 14 (Proportion de proportion)

L'été dernier, 64% des Espagnols sont partis en vacances, et parmi ceux-ci, 61% sont allés à la mer.
Quel pourcentage des Espagnols sont allés à la mer l'été dernier ?

Tableaux croisés d'effectifs

Exercice 15

Un restaurant effectue un sondage auprès de ses clients le premier septembre. On donne les résultats de ce sondage dans ce tableau :

	Très satisfaits	Satisfaits	Pas satisfaits	Total
Sur place	10	12	8	
À emporter	14		15	50
Total		33	23	

- 1► Quels sont les caractères étudiés ?

- 2► Quelle est la quantité de clients qui ont pris un repas sur place ?
- 3► Compléter le tableau.
- 4► Quelle est la proportion de clients qui ont pris un repas à emporter. Le gérant est satisfait si au moins 70% des clients sont satisfaits ou très satisfaits.
- 5► Le gérant est-il satisfait ?
- 6► Calculer la proportion de clients très satisfaits parmi ceux qui ont pris un repas sur place.
- 7► Suite à ce sondage, le gérant du restaurant affirme que les clients prenant un repas à emporter sont plus souvent très satisfaits que ceux qui prennent un repas sur place.
Discuter la pertinence de cette affirmation en vous appuyant sur vos calculs.

Exercice 16

On a listé tous les participants à une course de 20 chevaux suivant leur sexe et leur âge. (Par exemple : F5 désigne une femelle âgée de 5 ans).

F5 – M6 – M5 – F6 – F7 – F5 – F5 – M6 – M7 – F5 – F6 – F7 – M7 – F5 – F5 – F6 – F7 – M6 – M5 – F6

- 1► Quels sont les deux caractères permettant de catégoriser ces chevaux ?
- 2► Compléter le tableau croisé d'effectifs suivant :

	5 ans	6 ans	7 ans	Total
Femelle				
Mâle				
Total				

- 3► Calculer la proportion de femelles.
- 4► Parmi les femelles quelle est la proportion de femelles âgées de 5 ans ?
- 5► Mettre en lien les résultats des questions précédents avec la proportion de femelles âgées de 5 ans parmi l'ensemble des participants.

2 Rappels sur les évolutions

Table des matières

1	Évolutions simples	28
2	Évolutions successives	31
	Exercices	32

Programme

Automatismes

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Évolutions et variations

- ▶ Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale.
- ▶ Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage.
- ▶ Calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives.
- ▶ Calculer un taux d'évolution réciproque.

1 – Évolutions simples

Variation absolue, variation relative, coefficient multiplicateur

Définition 1

Soit V une grandeur strictement positive qui prend la valeur $V_{\text{départ}}$ puis la valeur $V_{\text{arrivée}}$.

- La **variation absolue** de V est $\Delta V = V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}$.
Elle correspond à l'écart en valeur (par exemple, si la valeur est en euros, la variation absolue est en euros.)
- La **variation relative**, ou **taux d'évolution** de V est $\tau = \frac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}} = \frac{\Delta V}{V_{\text{départ}}}$.
Elle correspond à l'écart en proportion, souvent exprimée comme un pourcentage.
- Le **coefficient multiplicateur entre $V_{\text{départ}}$ et $V_{\text{arrivée}}$** est le nombre CM par lequel il faut multiplier $V_{\text{départ}}$ pour obtenir $V_{\text{arrivée}}$, c'est-à-dire $V_{\text{arrivée}} = CM \times V_{\text{départ}}$. Autrement dit, $CM = \frac{V_{\text{arrivée}}}{V_{\text{départ}}}$.

Exemple 2

Un pantalon vendu à 25€ est soldé à 20€.

- La variation absolue est $\Delta V = 20\text{€} - 25\text{€} = -5\text{€}$.
- La variation relative est $\tau = \frac{20 - 25}{25} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5} = -0,2 = -20\%$
- Le coefficient multiplicateur est $CM = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0,8$. Autrement dit $20\text{€} = 25\text{€} \times 0,8$.

Propriété 3

Le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution sont liés par la relation :

$$\tau = CM - 1$$

En particulier,

$$V_{\text{arrivée}} = (1 + \tau)V_{\text{départ}}$$

Proposition 4

- Augmenter une quantité Q de $t\%$, c'est calculer $Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$
- Diminuer une quantité Q de $t\%$, c'est calculer $Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$

+10%	+25%	+40%	+100%	-10%	-25%	-50%	-40%
$\times 1,10$	$\times 1,25$	$\times 1,40$	$\times 2$	$\times 0,90$	$\times 0,75$	$\times 0,50$	$\times 0,60$

Remarque 5

- Les taux sont souvent exprimés en pourcentages. Ainsi, un taux de 0,25 correspond à un pourcentage de 25% (et à une multiplication par 1,25).
- Un taux positif correspond à une *augmentation* : un taux de 0,67 correspond à une augmentation de 67% (et à une multiplication par 1,67).
- Un taux négatif correspond à une *diminution* : un taux de -0,52 correspond à une évolution de -52%, autrement dit une *diminution* de 52%. Cela correspond également à une multiplication par $1 - 0,52 = 0,48$.

Attention à bien distinguer un *taux* et un *coefficient multiplicateur* :

- Un coefficient multiplicateur est toujours positif : si $CM > 1$, cela correspond à une augmentation, et si $0 \leq CM < 1$, cela correspond à une diminution.
- Un taux peut être soit positif, soit négatif selon les ouvrages, OU un taux est toujours accompagné des termes «augmentation de» ou «diminution de». Si $\tau > 0$, cela correspond à une augmentation, et si $\tau < 0$, cela correspond à une diminution.
Il est courant d'écrire le signe + d'un taux positif pour accentuer le sens de la variation : on peut dire «une augmentation de +12%» au lieu de «une augmentation de 12%». On évitera cependant de parler d'une «diminution de -12%».

Exemple 6

- Le prix du kWh l'électricité en février 2020 était de 0,1546€. En juillet 2024, il était de 0,2516€. Comme $0,2516 \approx 1,63 \times 0,1546$, le coefficient multiplicateur est d'environ 1,63. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 1,63 - 1 = 0,63$, soit +63% d'augmentation.
- En 1980, la demande mondiale de plastique était de 60 tonnes environ. En 2020, elle était de 360 tonnes. Comme $360 = 6 \times 60$, cela correspond à un coefficient multiplicateur de 6. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 6 - 1 = 5$, soit +500% d'augmentation.
- Dans les années 1980, la superficie des glaces arctiques de plus de 4 ans d'âge atteignait environ 3 millions de km². Dans les années 2020, elle dépassait à peine 0,3 millions de km². Comme $0,3 = 0,1 \times 3$, cela correspond à un coefficient multiplicateur de 0,1. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 0,1 - 1 = -0,9$, soit -90%, autrement dit une diminution de 90%.

Méthode 7 (Évolutions simples avec un tableau de proportionnalité)

Le fait que les taux d'évolution s'expriment traditionnellement en pourcentages traduit le fait qu'ils relèvent d'une situation de proportionnalité. On peut donc se servir d'un tableau de proportionnalité, et lire les variations absolue et relative sur chaque ligne.

	Départ	Arrivée
Pourcentage	100	...
Données	$V_{\text{départ}}$	$V_{\text{arrivée}}$

→ Écart = variation relative en %

→ Écart = variation absolue

Exemple 8

Dans le pays d'Algérie, la consommation de jus de fruits était de 120L par habitant. L'année suivante, elle est montée à 150L par habitant. Quelle augmentation cela représente-t-il dans l'absolu ? Et en pourcentage ?

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessous, on trouve que la quatrième proportionnelle est :

$$\frac{100 \times 150}{120} = \frac{100 \times 15}{12} = \frac{100 \times 5}{4} = 100 \times 1,25 = 125$$

	Départ	Arrivée
Pourcentage	100	125
Volume (L)	120	150

→ Variation relative = +25%

→ Variation absolue = +30L

La variation absolue est donc $150\text{L} - 120\text{L} = 30\text{L}$ par habitant, la variation relative est +25% car $125 - 100 = 25$.

Exemple 9

Le service *Comme ça me plaît* propose un régime alimentaire pour perdre du poids. Un témoignage affirme qu'après avoir suivi le programme, son poids est de 102kg contre 120kg auparavant. Quelle perte cela représente-t-il dans l'absolu ? Et en pourcentage ?

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessous, on trouve que la quatrième proportionnelle est :

$$\frac{100 \times 102}{120} = \frac{10 \times 102}{12} = \frac{10 \times 51}{6} = \frac{10 \times 17}{2} = 85$$

	Départ	Arrivée
Pourcentage	100	85
Poids (kg)	120	102

→ Variation relative = -15%

→ Variation absolue = -18kg

La variation absolue est donc $12\text{kg} - 102\text{kg} = -18\text{kg}$, la variation relative est -15% car $85 - 100 = -15$.

Par définition, le coefficient multiplicateur est le nombre qui complète le produit à trou $V_{\text{arrivée}} = \dots \times V_{\text{départ}}$. On l'a noté CM , de sorte que $V_{\text{arrivée}} = CM \times V_{\text{départ}}$. Et si les choses s'étaient passées dans l'autre sens ? Autrement dit, que se passe-t-il si les valeurs d'arrivée et de départ changeaient de rôle ? On veut donc compléter le produit à trou $V_{\text{départ}} = \dots \times V_{\text{arrivée}}$. En manipulant la première égalité, on trouve que le nombre manquant est $\frac{1}{CM}$. Cela est cohérent : pour défaire une multiplication par CM , il faut une division par CM . Et rappelons que diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse !

Taux réciproque

Définition 10

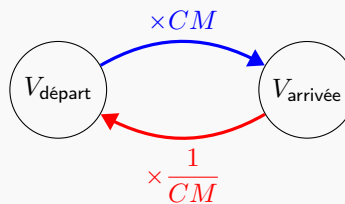
Soit V une grandeur strictement positive qui prend la valeur $V_{\text{départ}}$ puis la valeur $V_{\text{arrivée}}$. On note τ le taux d'évolution de $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.

Le **taux d'évolution réciproque** est le taux τ' qui correspond à l'évolution dans l'autre sens (réciproque) de $V_{\text{arrivée}}$ à $V_{\text{départ}}$.

Proposition 11

Notons CM le coefficient multiplicateur de l'évolution de $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.

Le coefficient multiplicateur réciproque est $CM' = \frac{1}{CM}$.



Exemple 12

Un vendeur baisse le prix d'un article de 20% en été. Autrement dit, le prix a été multiplié par 0,8.

Pour ramener le prix à sa valeur initiale à la fin de l'été, ce vendeur se demande quel pourcentage d'augmentation il doit appliquer. Le coefficient multiplicateur étant 0,8, le coefficient réciproque est :

$$\frac{1}{0,8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Il doit donc multiplier le prix par 1,25, ce qui correspond à une augmentation de 25%.

2 – Évolutions successives

Activité 13

Support vidéo : <https://youtu.be/9o4cl3WYZ5s?si=CDz1XhTkwLyx1RN6>

Dans ce journal télévisé, le présentateur et économiste affirme que cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre représentent une augmentation globale de 30%.

- 1► À quel *taux d'évolution*, et à quel *coefficient multiplicateur* correspond une augmentation de 6% ?
- 2► Exprimez puis calculez le taux d'évolution global et le coefficient multiplicateur global correspondant à cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre. Commentez les propos du présentateur.

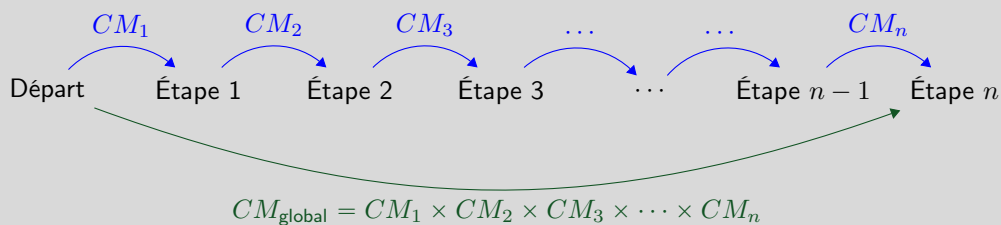
Définition 14

Taux d'évolution global

Lorsqu'une grandeur évolue plusieurs fois successivement, le **taux d'évolution global** correspond au taux d'évolution entre la valeur initiale et la valeur finale.

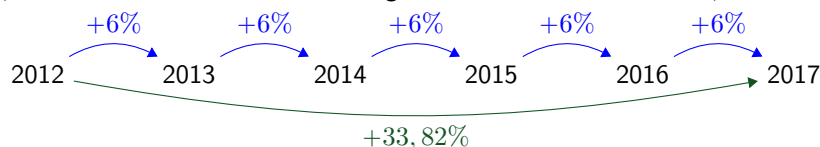
Il correspond au coefficient multiplicateur qui est égal au produit de tous les coefficients intermédiaires :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \dots \times CM_n$$



Exemple 15

Reprenons l'Activité 13. D'une année à l'autre, le taux d'évolution est de 6%. Cela correspond à un coefficient multiplicateur de $CM = \frac{6}{100} = 0,06$. Ainsi, l'évolution globale est $CM_{\text{global}} = 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 = 1,06^5 = 1,3382255776$. Le taux d'évolution global est donc environ de 33,82%.



Activité 16 (Fluctuations boursières)

En 2023, le cours d'une cryptomonnaie était de 60% supérieur au cours de 2022. En 2024, il est redescendu de 60% par rapport au cours de 2023.

- 1► Est-il revenu au cours initial ?
- 2► Le résultat serait-il le même si le cours avait d'abord baissé puis augmenté de 60% ?
- 3► Quel est le cours de la cryptomonnaie en 2024 s'il augmente de 60% puis baisse de 62,5% ? Discutez ce dernier pourcentage.

Exercices

Évolutions simples

Exercice 1 (Taux d'évolution)

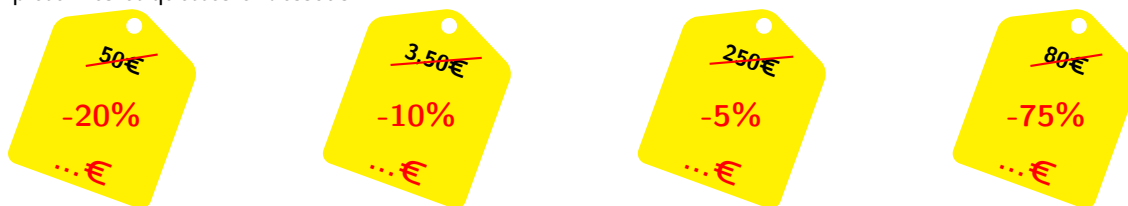
Recopier et compléter sans justifier le tableau ci-dessous :

Variation en pourcentage	Baisse de 28%	Hausse de 73%		
Coefficient multiplicateur			0,9	1,23

Exercice 2 (Soldes : prix final)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

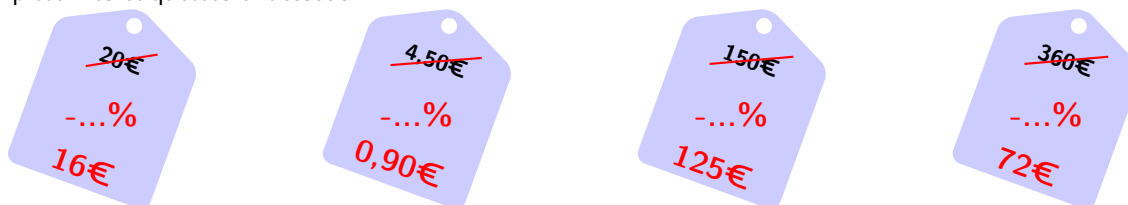
Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 3 (Soldes : réduction)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

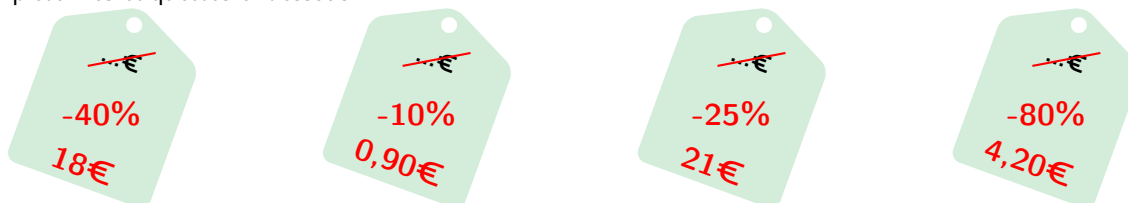
Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 4 (Soldes : prix initial)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 5 (Défi)

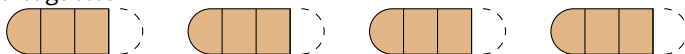
Depuis 2018, les commerçants n'ont plus le droit d'offrir sur les produits alimentaires des promotions au-delà d'un tiers de leur valeur (c'est-à-dire concernant les produits que l'on peut acheter à l'unité : un concombre, une bouteille, ...) ou d'un quart de leur volume (c'est-à-dire concernant les produits dont le prix est affiché au kg ou au L : des pommes, des boissons, de la lessive, ...).

Autrement dit, on doit calculer la réduction entre l'unité du produit (la valeur d'un article seul, ou d'un kg, ou d'un L) sans promotion et avec. Par exemple, si on vend 4 baguettes pour le prix de 3, alors 1 baguette coûte alors le prix de $3 \div 4 = 0,75$ baguette, soit une réduction de 25%.

Il est commode de représenter la situation avec un dessin, sur lequel on peut lire la réduction globale :



On voit 3 baguettes payées au plein tarif, 1 baguette gratuite, ce qui, si on réarrange le remplissage, revient à offrir un quart de chaque baguette :



Complétez les étiquettes de réduction suivantes pour qu'elles offrent la plus grande promotion possible dans la limite de la loi.

40 rouleaux
+ ... offerts !

... achetés
1 offert !

2 achetés
le 2^e à ...%

40cL
dont ... cL gratuits

Évolutions successives**Exercice 6 (Hausse des prix)**

Un jouet sophistiqué de la marque GW coûtait 26€ en 2012, ce même article en coûte 52€ en 2024.

- 1► Calculer la hausse du prix (variation relative) et exprimer la en pourcentage.

L'entreprise justifie son augmentation de prix par l'inflation, c'est-à-dire le fait que tous les produits du marché soient plus chers et donc qu'il est plus cher de produire.

L'inflation était de 2% en moyenne chaque année de 2012 à 2021. Elle a bondi à 5% en 2022 et 5% en 2023, puis est finalement retombée à 2% en 2024.

- 2► La hausse du prix du fabricant de jouet est-elle justifiée ?
3► Quel serait le prix du jouet si l'augmentation du prix avait suivi l'inflation ? (On arrondira par excès à l'unité.)

Exercice 8 (Chiffre d'affaire)

Bob a créé son entreprise de comptabilité en 2020. Son chiffre d'affaire est de 24 000€ cette année. Les trois années suivantes, Bob voit son chiffre d'affaire augmenter de 20%, puis de 10% et enfin de 5%.

- 1► Donner le chiffre d'affaire de Bob en 2021.
2► Quel est le taux d'évolution global correspondant à ces trois évolutions successives ?
3► Donner le chiffre d'affaire de Bob en 2023.

Exercice 9 (Effectifs de deux lycées)

Le lycée A a vu sa population augmenter de 5% en 2023 puis de 5% en 2024.

Le lycée B a vu sa population augmenter de 3% en 2023 puis de 7% en 2024.

Dans quel lycée l'augmentation est-elle (en proportion) la plus grande sur ces deux années ?

Exercice 7 (Réductions cumulées)

Un pantalon à 50€ est soldé à 10% mais Charles qui travaille dans le magasin a droit à une remise de 20% sur ses achats. Quelle somme dépensera Charles s'il applique les deux réductions ?

Exercice 10 (Évolutions successives)

Quelle évolution en pourcentage correspond à :

- 1► Deux augmentations successives de 20% ?
- 2► Une augmentation de 60% suivie d'une autre de 40% ?
- 3► Une augmentation de 20% puis une autre de 80% ?
- 4► Une augmentation de 10% suivie d'une diminution de 10% ?
- 5► Une augmentation de 100% suivie d'une baisse de 50% ?

Exercice 11 (Stocks en baisse)

Julia a vendu 75% de son stock. Son partenaire a vendu le lendemain 75% du reste. Il reste alors 12 palettes à Julia et son partenaire.

- 1► Quelle proportion du stock a vendu le partenaire de Julia ?
- 2► De combien de palettes disposaient Julia et son partenaire avant la vente ?

Exercice 12 (Les économies de Mme B)

Mme B a fait un dépôt sur son compte en 2019. On lit dans le tableau suivant que de 2019 à 2020, Mme B a vu ses économies augmenter de 5%.

Compléter ce tableau.

Année	Valeur des économies de Mme B	Taux d'évolution par rapport à l'année précédente
2019		×
2020	10 000	+5%
2021		+20%
2022		+5%
2023	13 860	
2024	16 632	

Exercice 13 (Exercice complet)

Un magasin de meubles propose des soldes.

- 1► Une table coûtait 345€ et est soldée à -45%. Quel est son nouveau prix ?
- 2► Un lot de chaises coûte, solde compris, 202,80€. Sachant qu'il est soldé à -35%, quel est le prix initial du lot de chaises ?
- 3► Une armoire coûtait 340€, et est proposée à 119€ pendant les soldes.
 - a► Quelle est la variation absolue du prix de cette armoire ?
 - b► Quel est le pourcentage de réduction ?

Exercice 14 (La boucle est-elle bouclée ?)

Le prix des barres de céréales a augmenté de 40% puis diminué de 40%. Comment a-t-il évolué globalement ? A-t-il augmenté, diminué ? De quel pourcentage ?

3 Notion de suite

Table des matières

1	Introduction à la notion de suite	36
2	La notation des suites	37
3	Les suites dans un tableur	39
	Exercices	40

Programme

Suites numériques

Contenus

Les suites comme modèles mathématiques d'évolutions discrètes

- Différents modes de génération d'une suite numérique.
- Sens de variation.
- Représentation graphique : nuage de points $(n, u(n))$.

Capacités attendues

- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.

Commentaires

- L'utilisation d'un tableur pour calculer des termes d'une suite favorise la compréhension des différents modes de génération.
- L'objectif est de modéliser des situations discrètes simples, choisies notamment en lien avec les autres enseignements de la série (évolution ou actualisation d'un capital, évolution d'une colonie bactérienne, etc.).
- En lien avec l'écriture fonctionnelle, on utilise la notation $u(n)$ préalablement à celle de u_n .
- On s'attache à présenter des suites qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- Calculer un terme de rang donné d'une suite, une somme finie de termes.
- Déterminer une liste de termes d'une suite et les représenter.
- Déterminer le rang à partir duquel les termes d'une suite sont supérieurs ou inférieurs à un seuil donné, ou aux termes de même rang d'une autre suite.

1 – Introduction à la notion de suite

Activité 1

- 1► Dans la suite répétitive « ABABAB... », quelle est la 89^e lettre ?
- 2► Dans la suite répétitive « $\Delta \square \bigcirc \Delta \square \bigcirc \Delta \dots$ », quelle est le 60^e symbole ?
- 3► Dans la suite évolutive « 1, 3, 5, 7, 9, ... », quelle est le 17^e nombre ?
- 4► Dans la suite répétitive « $\Delta \times \square \bigcirc \Delta \times \square \bigcirc \Delta \times \dots$ », quelle est le 80^e symbole ?
- 5► Dans la suite répétitive « ABGFABGFAB... », quelle est la 17^e lettre ?
- 6► Dans la suite évolutive « 1, 2, 4, 7, 11, 16, ... », quelle est le 11^e nombre ?
- 7► Dans la suite évolutive « $\Delta \times \Delta \times \times \Delta \times \times \times \Delta \times \times \times \times \Delta \dots$ », quelle est le 20^e symbole ?
- 8► Dans la suite évolutive « 1, 2, 4, 8, 16... », quelle est le 9^e nombre ?

Définition 2

Suite, suite explicite, suite récurrente

Une *suite* est une liste ordonnée de nombres, appelés *termes* de la suite, régie par une certaine logique. Plus précisément, il y a deux types de logique que peuvent suivre les suites :

- *explicite* : on peut déterminer n'importe quel terme par un calcul direct
- *récurrente* : on est obligé de calculer tous les termes depuis le début

Le *mode de génération* d'une suite est le fait que cette suite est définie explicitement ou de manière récurrente.

Exemple 3

On peut classer les suites de la première activité selon la réponse écrite dans la correction

EXPLICITES

(on a calculé directement)

- ABABAB...
- $\Delta \square \bigcirc \Delta \square \bigcirc \Delta \dots$
- $\Delta \times \square \bigcirc \Delta \times \square \bigcirc \Delta \times \dots$
- ABGFABGFAB...

RÉCURRENTES

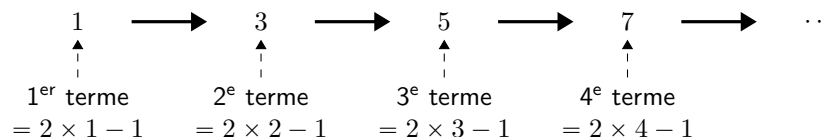
(on a calculé de proche en proche)

- 1, 3, 5, 7, 9, ...
- 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...
- $\Delta \times \Delta \times \times \Delta \times \times \times \Delta \times \times \times \times \Delta \dots$
- 1, 2, 4, 8, 16...

Remarque 4

Une suite n'est pas fondamentalement explicite ou récurrente. C'est le point de vue que l'on adopte qui le décide. Par exemple, pour la suite des nombres impairs, on peut adopter les deux points de vue :

- Récurrent : pour passer d'un terme au suivant, on ajoute 2 : $1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} \dots$
- Explicite : pour obtenir le n^{e} terme, on peut calculer $2 \times n - 1$.



2 – La notation des suites

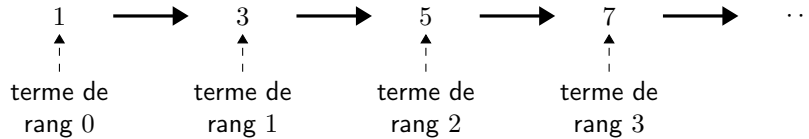
Rang

Définition 5

Bien qu'en français on dit « 1^{er} terme », « 2^e terme », ..., en mathématiques, on compte à partir de 0 : « terme (de rang) 0 », « terme (de rang) 1 », ...

Exemple 6

Pour reprendre la suite des nombres impairs :



Application 7

- 1► Dans la suite « 2, 3, 4, ... », quel est le 6^e terme ? Et le terme de rang 6 ?
- 2► Dans la suite « Δ , $\square$ $\square$, Δ , Δ , Δ , $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, ... », quel est le 8^e terme ? Et le terme de rang 8 ?
- 3► Dans la suite « 0, 1, -1, 2, -2, 3, ... », quel est le 4^e terme ? Et le terme de rang 4 ?
- 4► Dans la suite « 1, 2, 4, 8, ... », quel est le 6^e terme ? Et le terme de rang 6 ?

Notation en indice

Définition 8

Pour économiser des phrases, on donne un nom à la suite, et on note le rang de chaque terme en *indice* (en petit en bas).

Par exemple, si la suite s'appelle « lapin », les termes seront notés « lapin₀ », « lapin₁ », « lapin₂ », ...

Exemple 9

- Si on note « impairs » la suite des nombres impairs, alors impairs₀ = 1, impairs₁ = 3, impairs₂ = 5, ...
- Si on note « doubles » la suite 1, 2, 4, 8, 16, ..., alors doubles₀ = 1, doubles₁ = 2, doubles₂ = 4, doubles₃ = 8, ...

Notation raccourcie

Définition 10

Plutôt que de nommer la suite avec un mot entier, on ne garde qu'une lettre. Par exemple, au lieu de « terme₀ », on peut juste écrire « t₀ ».

Traditionnellement, une suite générique est notée u ou v . Pour des raisons qui s'éclairciront plus tard, on note parfois (u_n) la suite u .

Exemple 11

- Si on note « i » la suite des nombres impairs, alors $i_0 = 1$, $i_1 = 3$, $i_2 = 5$, ...
- Si on note « d » la suite 1, 2, 4, 8, 16, ..., alors $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, $d_3 = 8$, ...

À partir de maintenant, on présentera en parallèles les trois écritures proposées précédemment : avec une phrase (« terme de rang 5 »), avec un mot (« terme₅ »), et avec une lettre (« t₅ »). Vous pouvez choisir l'écriture que vous préférez ; l'objectif à terme est de maîtriser la dernière notation.

Application 12

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_5 .

1► $u_n = 3n + 5$

2► $u_n = 2^n - 1$

3► $u_n = \frac{n}{n+1}$

4► $u_0 = 1$ et, $u_{n+1} = 2u_n + 7$

5► $u_0 = 2$ et, $u_{n+1} = 3u_n - 2n$

Correction

Pour les suites définies explicitement, il suffit de remplacer le n dans l'expression par le rang demandé :

	u_1	u_2	u_3	u_5
$3n + 5$	$3 \times 1 + 5 = 8$	$3 \times 2 + 5 = 11$	$3 \times 3 + 5 = 14$	$3 \times 5 + 5 = 20$
$2^n - 1$	$2^1 - 1 = 1$	$2^2 - 1 = 3$	$2^3 - 1 = 7$	$2^5 - 1 = 31$
$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

Pour les suites définies par récurrence, il faut calculer les termes de proche en proche :

► $u_1 = 2u_0 + 7 = 2 \times 1 + 7 = 9$

► $u_2 = 2u_1 + 7 = 2 \times 9 + 7 = 25$

► $u_3 = 2u_2 + 7 = 2 \times 25 + 7 = 57$

► $u_4 = 2u_3 + 7 = 2 \times 57 + 7 = 121$

► $u_5 = 2u_4 + 7 = 2 \times 121 + 7 = 251$

Attention, pour la dernière suite, on fait intervenir à la fois u_n et n tout seul :

► $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 = 3 \times 2 - 2 \times 0 = 6$

► $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 = 3 \times 6 - 2 \times 1 = 16$

► $u_3 = 3u_2 - 2 \times 2 = 3 \times 16 - 2 \times 2 = 44$

► $u_4 = 3u_3 - 2 \times 3 = 3 \times 44 - 2 \times 3 = 126$

► $u_5 = 3u_4 - 2 \times 4 = 3 \times 126 - 2 \times 4 = 376$

Application 13

Modélisez les situations suivantes avec un suite.

- 1► Alice étudie une colonie de bactéries. Elle place 1 bactérie dans une boîte de pétri. Chaque heure, le nombre de bactéries double.
- 2► Bob compte le nombre de passagers dans des trains successifs numérotés 1, 2, 3, etc. Le nombre de passagers est égal au numéro du train multiplié par 3, auquel on ajoute 50.
- 3► En 2020, Carole possède 1000€ sur son compte d'épargne. Chaque année, son épargne lui rapporte 1,02 fois le montant de l'année précédente.
- 4► David s'entraîne pour un marathon. Le premier jour, il court 1,5km. Chaque jour, il progresse, et court 2km de plus que la veille.
- 5► Dans la suite d'allumettes suivante, quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour réaliser chaque étape ?



ÉTAPE 1



ÉTAPE 2



ÉTAPE 3

3 – Les suites dans un tableur

Méthode 14 (Cas par récurrence)

Considérons la suite u de terme initial $u_0 = 10$ et vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 4$, autrement dit on passe d'un terme au suivant en lui ajoutant 4.

- 1► Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).
- 2► Dans la colonne B, on inscrit le terme initial, puis on transcrit la formule de récurrence dans la cellule suivante. On étend ensuite cette formule.
- 3► La colonne B donne alors les termes de la suite. Par exemple, on lit sur la ligne 9 du tableur que $u_7 = 38$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	=B2+4
4	2	18
5	3	22
6	4	26
7	5	30
8	6	34
9	7	38
10	8	42

Méthode 15 (Cas explicite)

Considérons la suite u de terme général $u_n = 6n - 3$, c'est-à-dire que l'on trouve u_n en multipliant le rang par 6 et en soustrayant 3.

- 1► Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).
- 2► Dans la colonne B, on inscrit l'expression qui définit u_n en fonction de n . On étend ensuite cette formule.
- 3► La colonne B donne alors les termes de la suite. Par exemple, on lit sur la ligne 7 du tableur que $u_5 = 27$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	=6*A2-3
3	1	3
4	2	9
5	3	15
6	4	21
7	5	27
8	6	33
9	7	39
10	8	45

Exercices

Exercice 1

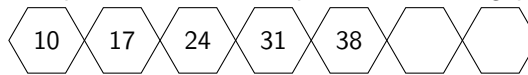
Un confiseur se prépare pour la période des fêtes. Chaque jour, il double son stock de chocolats, puis mange un chocolat pour s'assurer de la qualité. Avant son premier jour de préparation, il n'a que trois chocolats.

- 1► Combien de chocolats le confiseur a-t-il en réserve après le premier jour de préparation ? Après le deuxième ?
- 2► Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite. On prendra pour échelles 2 carreaux pour unité de l'axe des abscisses, et 0,5 carreau pour unité de l'axe des ordonnées.

Exercice 2

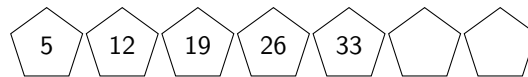
Alice, Bob et Carole sont dans une *Escape Room* ! Ils doivent pour s'échapper trouver des nombres correspondant à des suites logiques afin d'ouvrir les trois cadenas verrouillant la porte de sortie.

- 1► « Les quatre chiffres du code du premier cadenas complètent la suite logique suivante. »



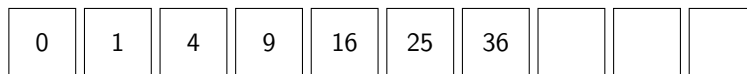
- a► Quelle est la logique de cette suite de nombres ?
- b► Déterminer le code du premier cadenas.

- 2► « Les quatre chiffres du code du premier cadenas complètent la suite logique suivante. »



- a► Quelle est la logique de cette suite de nombres ?
- b► Déterminer le code du deuxième cadenas.

- 3► « Les six chiffres du code du premier cadenas complètent la suite logique suivante. »



- a► Quelle est la logique de cette suite de nombres ?
- b► Déterminer le code du dernier cadenas.

Exercice 3

- 1► Écrire les quatre premiers termes d'une suite dont le premier terme est 4 et où chaque nouveau terme est le double de celui qui le précède.
- 2► Décrire mathématiquement cette suite.
- 3► On cherche désormais à écrire en langage mathématiques les phrases suivantes :
 - a► Le terme suivant u_n est la somme de u_n et de 3.
 - b► Le terme suivant v_n est son quadruple, auquel on a ajouté 7.
- 4► On considère le programme de calcul suivant :

```

1  On considère un nombre
2  On lui ajoute 1
3  On élève le résultat au carré
  
```

On considère une suite qui utilise ce programme pour passer d'un terme au suivant. (Donnez lui le nom que vous voulez.)

- a► On suppose que son premier terme est 0. Calculer les quatre premiers termes.
- b► Écrire la relation de récurrence satisfaite par cette suite.

4 Rappels sur les fonctions

Table des matières

1	Le vocabulaire fonctionnel	42
2	Représentation graphique d'une fonction	43
3	Résolution graphique d'(in)équations	45
4	Tableau de signes d'une fonction	48
	Exercices	50

Programme

Automatismes

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Fonctions et représentations

- Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type : $f(x) = k$, $f(x) < k$, etc.
- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations.

Fonctions de la variable réelle

Contenus

Les fonctions comme modèles mathématiques d'évolutions continues

- Différents modes de représentation d'une fonction : expression littérale, représentation graphique.
- Notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$.
- Taux de variation, entre deux valeurs de la variable x , d'une grandeur y vérifiant $y = f(x)$.
- Fonctions monotones sur un intervalle, lien avec le signe du taux de variation.

Capacités attendues

- Modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction.
- Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation de la forme $f(x) < k$ ou $f(x) > k$.
- Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.

Commentaires

- Les exemples prennent appui sur des situations réelles (impôts, hauteurs de marée, tarifs de courrier, évolution de l'émission de CO_2 , etc.) et internes aux mathématiques (problèmes d'optimisation dans un cadre géométrique, etc.).
- Les professeurs utilisent différentes notations pour la variable : t, u , etc. et habituent les élèves à lire des graphiques reliant une grandeur y à une grandeur composée ($x^2, 1/x$, etc.), ce qui permet notamment de donner sens à l'expression « grandeurs inversement proportionnelles ».

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- Calculer une valeur approchée d'une solution d'une équation par balayage.

1 – Le vocabulaire fonctionnel

Définition 1

Fonction, image

Soit D un ensemble de nombres.

Une **fonction** f définie sur D est un processus qui, à chaque nombre $x \in D$ **associe** un, et un seul nombre $f(x)$, lu « f de x », et appelé **l'image de x par f** .

L'ensemble D est appelé **ensemble de départ**, ou **domaine de définition** de f .

Remarque 2

Il existe une notation mathématique complète et compacte pour décrire une fonction :

$$\begin{array}{ccc} f : & D & \rightarrow A \\ & x & \mapsto f(x) \end{array}$$

A est appelé ensemble d'arrivée de la fonction mais on ne s'y intéresse pas cette année.

En pratique, on écrira plutôt : « La fonction f définie pour $x \in D$ par l'expression $f(x) = \dots$ »

Exemple 3

- Considérons la fonction f définie par $f(x) = x + 3$. Elle prend un nombre et lui ajoute 3. Par exemple, $f(2) = 5$, ou encore $f(10) = 13$.
- Considérons la fonction g définie par $f(x) = 2x$. Elle prend un nombre et le double. Par exemple, $g(2) = 4$, ou encore $g(10) = 20$.

Remarque 4

Une fonction traduit la dépendance entre deux grandeurs. Par exemple, la circonférence d'un cercle dépend de son rayon : si on note r le rayon d'un cercle, et $C(r)$ sa circonférence (en fonction du rayon), alors on a vu au collège que $C(r) = 2\pi r$.

Définition 5

Antécédent

Quand $f(x) = y$, on dit que x est UN **antécédent** de y par f .

Exemple 6

Considérons la fonction f dont l'expression est $f(x) = x^2$.

- Comme $f(2) = 4$, on dit que 4 est l'image de 2 par f , et que 2 est **un** antécédent de 4 par f .
- Comme $f(-2) = 4$, on dit que 4 est l'image de -2 par f , et que -2 est **un** antécédent de 4 par f .

À retenir : un antécédent n'a qu'une image, mais une image peut avoir plusieurs antécédents.

Exercice conseillé : 1

Remarque 7

Une fonction peut être représentée de plusieurs manières différentes :

- Algébriquement, quand on donne l'expression explicite de $f(x)$ en fonction de x (« La fonction f définie par $f(x) = 4x + 1$ »),
- On trouve parfois des **tableaux de valeurs** : sur la première ligne, on trouve les valeurs de x , et sur la seconde leurs images par f .

x	0	1	2
$f(x)$	1	5	9

On peut également représenter une fonction avec son **graphe** : c'est l'objet de la section suivante.

Exercice conseillé : 6

2 – Représentation graphique d'une fonction

Dans cette section, on munit le plan d'un repère orthonormé. Soit f une fonction dont l'ensemble de départ est D .

Courbe représentative

Définition 8

La **courbe représentative** (aussi appelé le **graphe**) de f est l'ensemble des points qui ont pour coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in D$, autrement dit l'ensemble :

$$\{(x; f(x)) : x \in D\}$$

ce que l'on écrit parfois :

$$\{M(x, y) \mid y = f(x)\}$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée **équation de la courbe de f** .

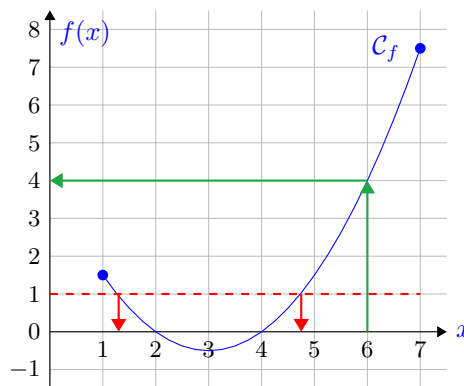
Remarque 9

- ▶ On lit les antécédents sur l'axe des abscisses (horizontal), et les images sur l'axe des ordonnées (vertical).
- ▶ On peut définir une fonction par sa courbe représentative.
- ▶ La courbe représentative de f est souvent notée $\mathcal{C}_f$.

Exemple 10

Considérons la fonction f définie par le graphe ci-contre.

- ▶ L'image de 6 par f est 4.
- ▶ On constate également que 1 possède deux antécédents : **environ** 1,2 et **environ** 4,8.



Exercices conseillés : 2, 3, 4, 7, 8, 9

Remarque 11

La définition par courbe représentative d'une fonction limite la connaissance des images, à cause de l'exactitude de la lecture : on ne peut pas déterminer avec certitude une valeur exacte par lecture graphique.

Exemple 12

Considérons la fonction f définie par :

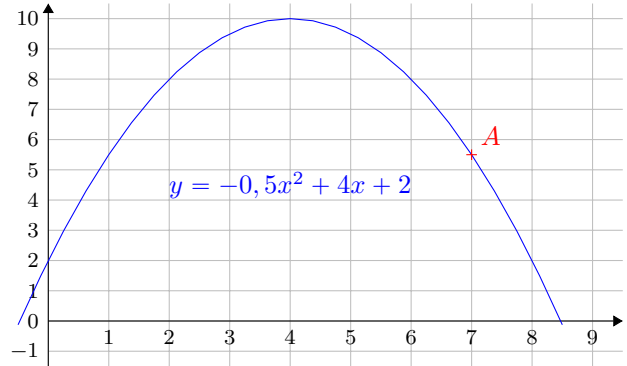
$$f(x) = -0,5x^2 + 4x + 2$$

dont le graphe est donnée ci-contre.

Le point $A \in \mathcal{C}_f$ a :

- pour abscisse 7,
- pour ordonnée

$$\begin{aligned} f(7) &= -0,5 \times 7^2 + 4 \times 7 + 2 \\ &= 5,5 \end{aligned}$$



Méthode 13

Pour savoir si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction f , on vérifie si son ordonnée est l'image de son abscisse par f .

Exemple 14

Reprenons la fonction de l'exemple précédent.

- Le point $B(6; 8)$ est-il sur la courbe représentative de f ?
C'est le cas si $f(6) = 8$, on calcule donc $f(6)$.

$$f(6) = -0,5 \times 6^2 + 4 \times 6 + 2 = 8$$

Ainsi, on peut affirmer que $B(6; 8) \in \mathcal{C}_f$.

- Le point $C(8,5; 0)$ est-il sur la courbe représen-

tative de f ?

C'est le cas si $f(8,5) = 0$, on calcule donc $f(8,5)$.

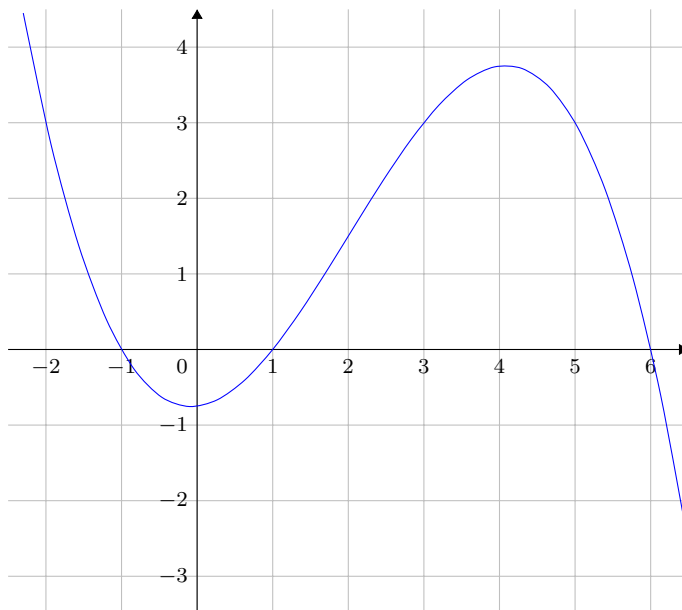
$$f(8,5) = -0,5 \times 8,5^2 + 4 \times 8,5 + 2 = -0,125$$

$f(8,5) \neq 0$ donc $C(8,5; 0) \notin \mathcal{C}_f$.

Exercices conseillés : 5

3 – Résolution graphique d'(in)équations

Soit $k \in \mathbb{R}$. Considérons comme exemple la fonction f dont le graphe est le suivant :

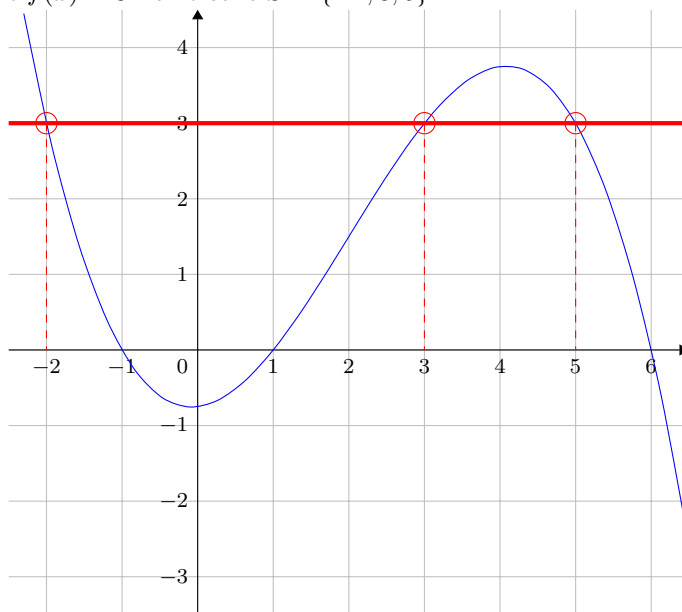


Méthode 15 (Résolution graphique d'équations)

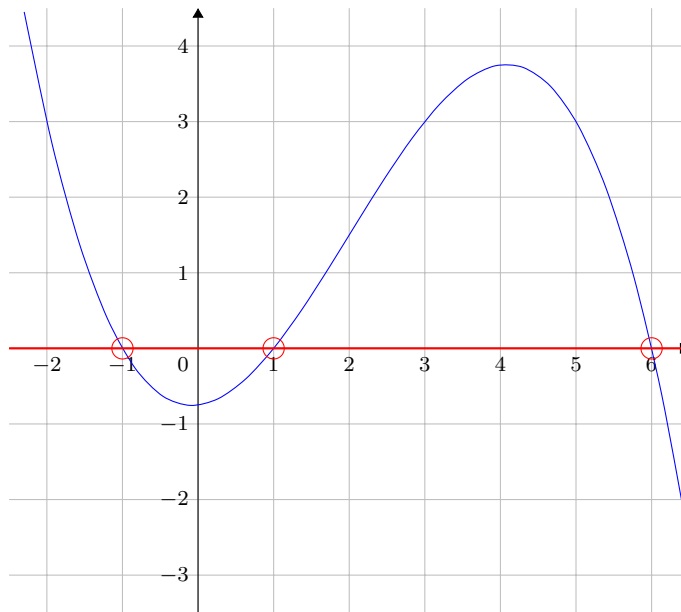
Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$, on trace dans un repère la courbe représentative de f et la droite horizontale à l'ordonnée k . On cherche ensuite les abscisses de leurs points d'intersection.

Exemple 16

On résout graphiquement $f(x) = 3$: on trouve $S = \{-2; 3; 5\}$.



On résout graphiquement $f(x) = 0$ (c'est-à-dire trouver les intersections de la courbe avec l'axe des abscisses) : on trouve $S = \{-1; 1; 6\}$.

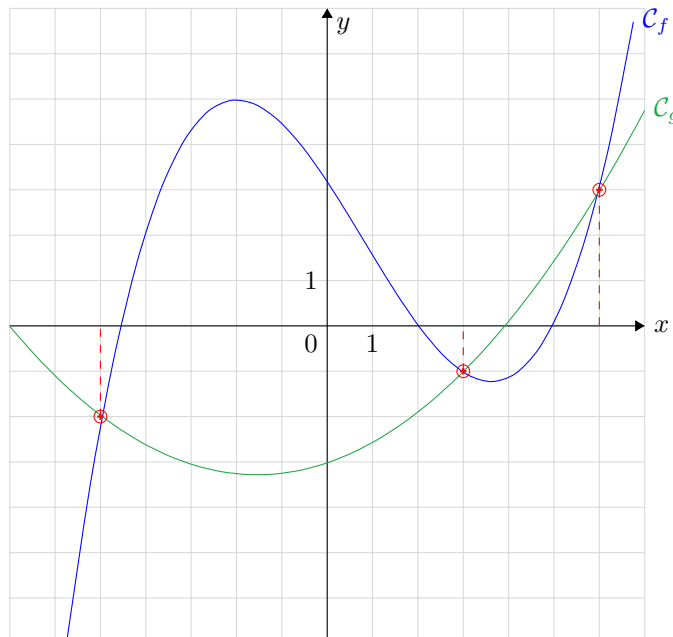


Méthode 17 (Résolution graphique d'équations – version générale)

Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ où f et g sont deux fonctions, il suffit de trouver les points d'intersection de leurs courbes représentatives.

Exemple 18

L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ où f et g sont définies par leurs courbes représentatives ci-dessous est $S = \{-5; 3; 6\}$.



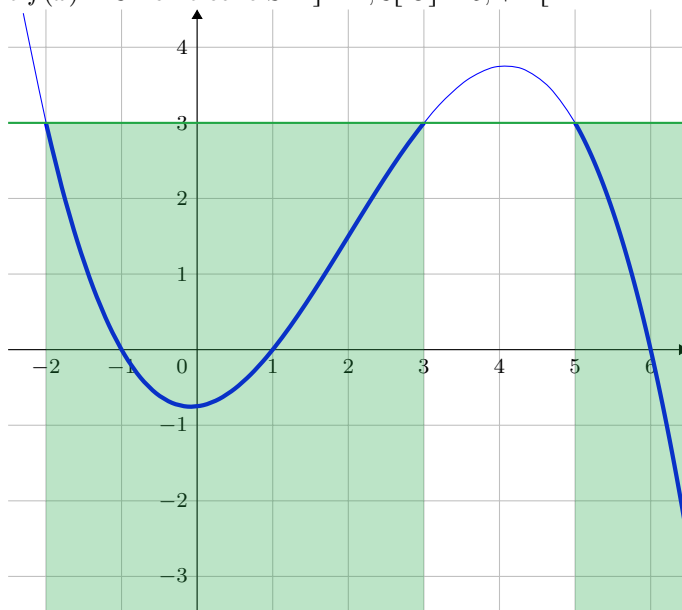
Méthode 19 (Résolution graphique d'inéquations)

Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) < k$, on trace dans un repère la courbe représentative de f et la droite horizontale d'ordonnée k . On cherche ensuite les intervalles d'abscisses dans lesquels la courbe de f est en-dessous de la « barre ».

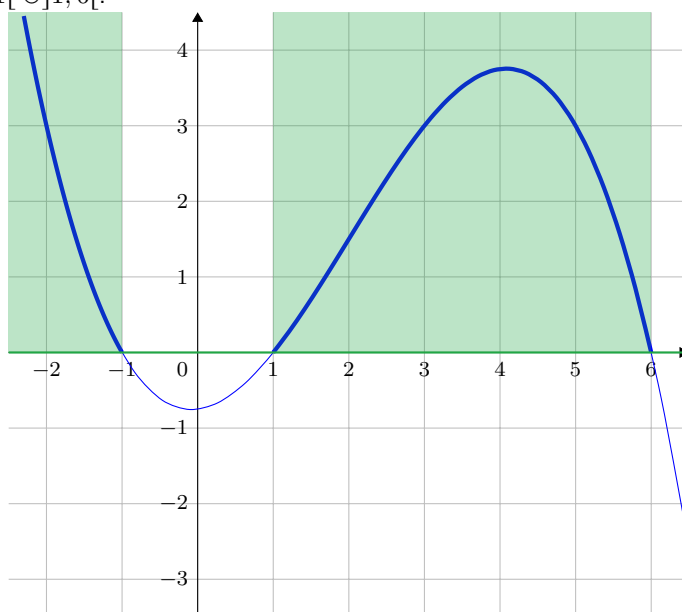
Comme l'inéquation est stricte, l'ensemble des solutions est une union d'intervalles ouverts.

Exemple 20

On résout graphiquement $f(x) < 3$: on trouve $S =]-2; 3[\cup]5; +\infty[$.



On résout graphiquement $f(x) > 0$ (c'est-à-dire trouver les intervalles où f est au-dessus de l'axe des abscisses) : on trouve $S =]-\infty; -1[\cup]1; 6[$.



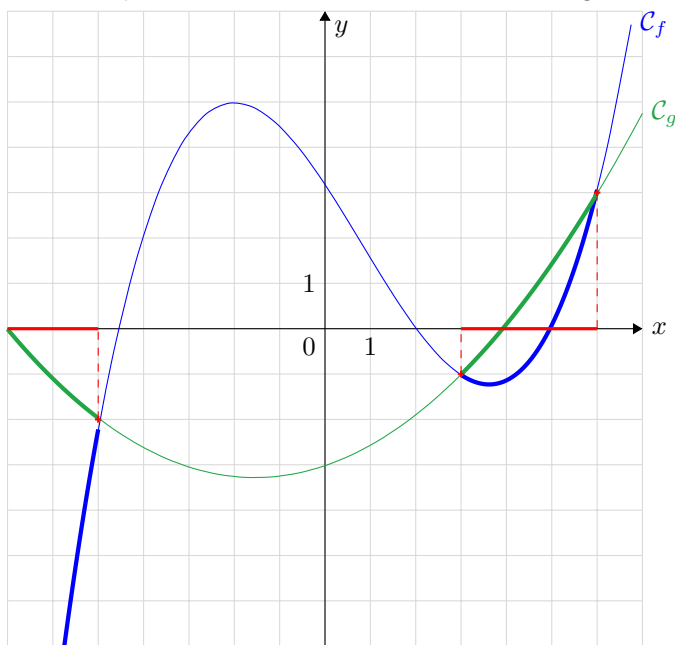
Méthode 21 (Résolution graphique d'inéquations – version générale)

Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) < g(x)$ où f et g sont deux fonctions, il faut déterminer les intervalles sur lesquels la courbe de g est au-dessus de la courbe de f .

Exemple 22

L'ensemble des solutions de $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont définies par leurs courbes représentatives ci-dessous est $S =]-\infty; -5] \cup [3; 6]$.

En effet, on cherche quand f (en bleu) est-elle en-dessous de g (en vert), autrement dit quand la courbe bleue est-elle en-dessous de la verte. Les portions concernées sont tracées en trait gras.

**4 – Tableau de signes d'une fonction****Définition 23**

Étudier le signe de f , c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est positive, négative ou nulle.

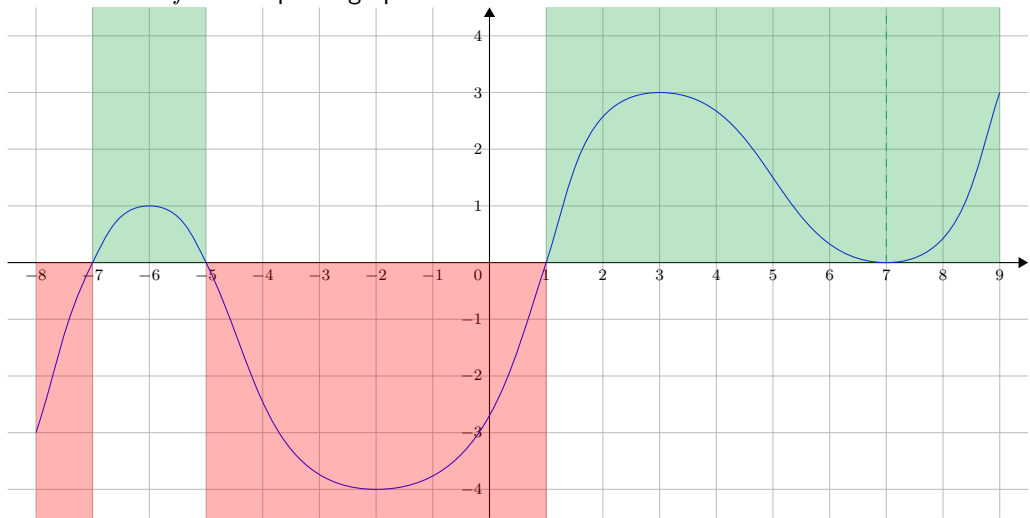
Méthode 24 (Tableau de signes)

On représente les différents signes de f dans un **tableau de signes**. Pour dresser le tableau de signes de f :

- ▶ On trace un tableau à 2 lignes : la première contient des valeurs de x , l'autre contient les signes de $f(x)$ correspondants.
- ▶ Sur la première ligne, on écrit aux deux extrémités les bornes de l'intervalle de définition de f .
- ▶ Entre les deux bornes, on inscrit dans l'ordre les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.
- ▶ Dans la deuxième ligne, en-dessous de chaque valeur de x telle que $f(x) = 0$, on trace une séparation verticale avec un rond (voir l'exemple).
- ▶ Dans chaque case ainsi créée sur la deuxième ligne, on inscrit $+$ ou $-$ pour indiquer le signe de f sur ce petit intervalle.

Exemple 25

Considérons la fonction f définie par le graphe suivant :



Son tableau de signes est :

x	-8	-7	-5	1	7	9			
$f(x)$	-	○	+	○	-	○	+	○	+

Exercices conseillés : 11, 12, 13, 14

Exercices

Appliquer

Exercice 1 (Images et antécédents)

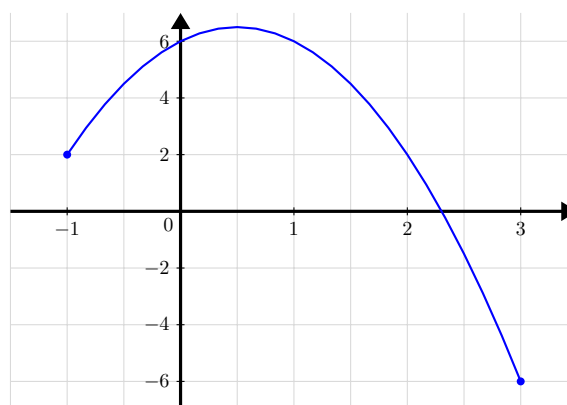
On considère la fonction f d'expression $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

- 1► Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-2)$.
- 2► Écrire une phrase réponse traduisant chacun de ces résultats en utilisant le mot « antécédent ».
- 3► Écrire une phrase réponse traduisant chacun de ces résultats en utilisant le mot « image ».
- 4► Quelle est l'image de (-4) par cette fonction ?

Exercice 2 (Lecture graphique)

Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.

- 1► Donner l'ensemble de définition de la fonction h représentée ici graphiquement.
- 2► Recopier et compléter le tableau ci-dessous si possible. Si cela est impossible, expliquer pourquoi.
- 3► Donner en **écrivant quatre phrases réponses** les images de (-1) , 0 , 1 et 2 par la fonction h .
- 4► Donner en **écrivant trois phrases réponses** les antécédents de (-6) , 2 et 6 par la fonction h .

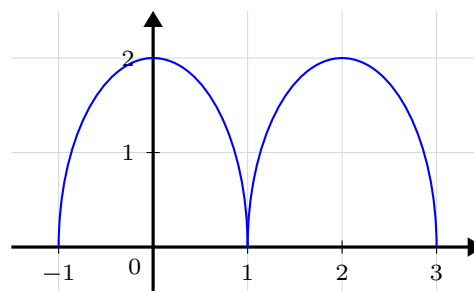


x	(-2)	(-1)	0	1	2	3	4	5
$h(x)$								

Exercice 3 (Lecture graphique)

(Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.)

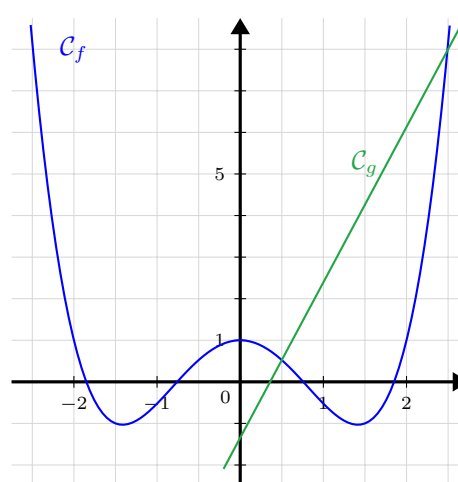
- 1► Donner l'ensemble de définition de f .
- 2► En écrivant des phrases réponses, donner un nombre qui semble avoir...
 - a► ... pour image 2,
 - b► ... 0 pour antécédent,
 - c► ... quatre antécédents par f ,
 - d► ... deux antécédents par f ,
 - e► ... aucun antécédent par f .



Exercice 4 (Lecture graphique)

(Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.)

- 1► Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2► Lire les images de 0 et 2 par la fonction f .
- 3► Lire les antécédents de 1 par la fonction f .
- 4► Trouver les nombres x pour lesquels $f(x) = (-1)$.
- 5► Comment peut-on lire sur la représentation graphique les abscisses pour lesquelles $f(x) = g(x)$?

**S'exercer****Exercice 5 (Bilan)**

Soit f une fonction dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère.
Recopier et compléter le tableau suivant.

Égalité	Image	Courbe	Équation	Antécédent
$f(2) = 3$				
	1 a pour image 0 par f			
		$A(-2; 3) \in \mathcal{C}_f$		
			4 est solution de $f(x) = 5$	
				3 est un antécédent de -4 par f

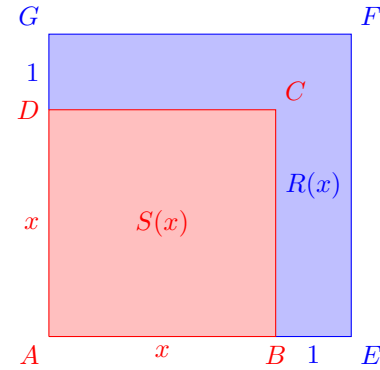
Exercice 6 (Comparaison de deux aires)

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le cm.

Dans la figure suivante, $ABCD$ est un carré dont les côtés ont pour longueur x et $AEFG$ est un carré dont les côtés ont pour longueur $x + 1$.

On note $S(x)$ l'aire de $ABCD$ et $R(x)$ l'aire du polygone $BEFGDC$.

- 1► Montrer que $S(x) = x^2$.
- 2► En déduire l'expression de $R(x)$.
- 3► Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-contre.
- 4► À l'aide de ce tableau de valeurs et **en écrivant des phrases réponses** :
 - 1► Donner a , l'antécédent de 5 par la fonction R . Calculer alors $S(a)$.
 - 2► Donner b , l'antécédent de 9 par la fonction S . Calculer alors $R(b)$.
- 5► Vérifier que pour $x = 1 + \sqrt{2}$, on a $R(x) = S(x)$ (on dit alors que $1 + \sqrt{2}$ est *solution* de l'équation $R(x) = S(x)$).

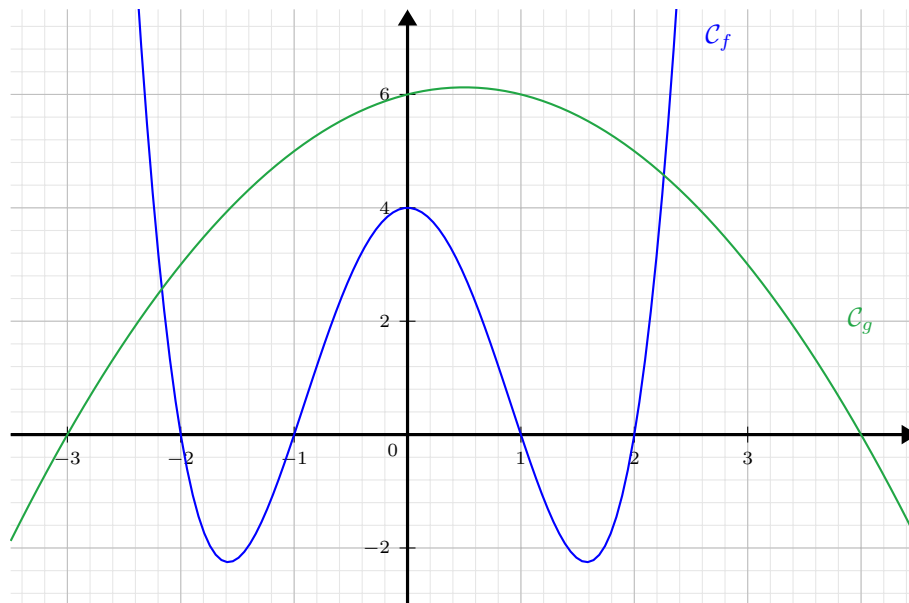


x	0	1	2	3	4	5
$S(x)$						
$R(x)$						

Exercice 7 (Lecture graphique)

(Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.)

- 1► Donner l'image de 0 par la fonction f et l'image de (-2) par la fonction g .
- 2► Donner les antécédents de 4 par la fonction f .
- 3► Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
- 4► Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 3$ et l'inéquation $g(x) > 3$.

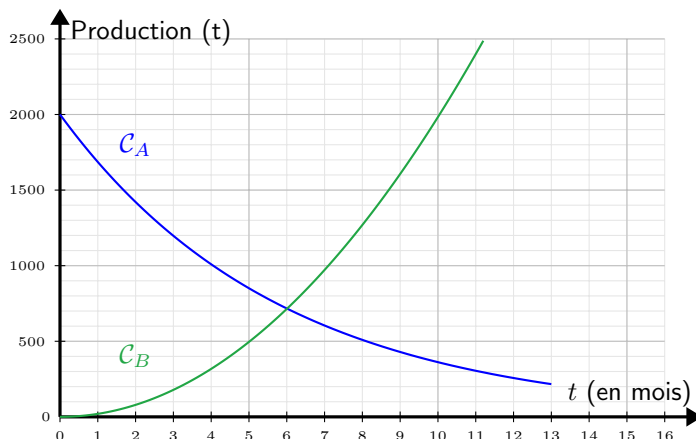


Problème 8 (Usine)

Une usine qui fabrique un produit A décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par l'usine en fonction du temps est modélisée par la fonction A pour le produit A et par la fonction B pour le produit B.

1► Quel est le produit le plus fabriqué au cours du :

- a► troisième mois ?
- b► huitième mois ?



2► Lire graphiquement les solutions des équations :

a► $A(t) = 500$

b► $B(t) = 500$

c► $A(t) = B(t)$

3► Interpréter ces résultats en terme de production.

Problème 9 (Bactéries)

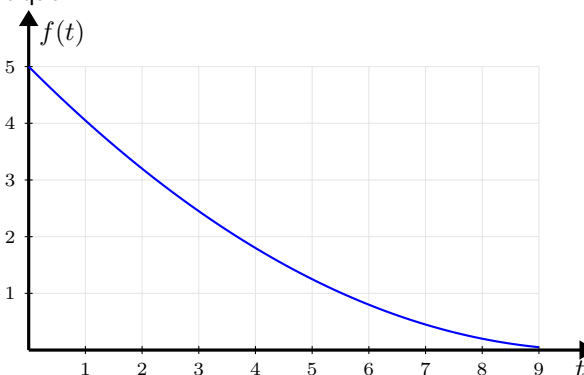
On souhaite tester l'effet d'un antibiotique sur des bactéries. On introduit l'antibiotique dans un b cher qui contient 5 000 bactéries et on mesure, à intervalles réguliers pendant 9 heures, la quantité de bactéries restantes dans le b cher au fur et à mesure de l'action de l'antibiotique.

Les valeurs conduisent à modéliser l'évolution du nombre de bactéries (en milliers) dans ce b cher par la fonction f définie à chaque instant entre 0h et 9h, par l'expression :

$$f(t) = 0,05t^2 - t + 5$$

où t représente la durée (en heures)  coul e depuis le début de l'expérience.

On représente la fonction f par la courbe donnée ci-contre.



Pour chaque question, répondre grâce à la courbe donnée.

- 1► Déterminer $f(0)$. Ce résultat est-il cohérent avec les données de l'énoncé ?
- 2► Déterminer, selon ce modèle, le nombre de bactéries dans le b cher au bout de deux heures.
- 3► Déterminer un antécédent de 0 par f . Interpréter ce résultat dans le contexte donné.

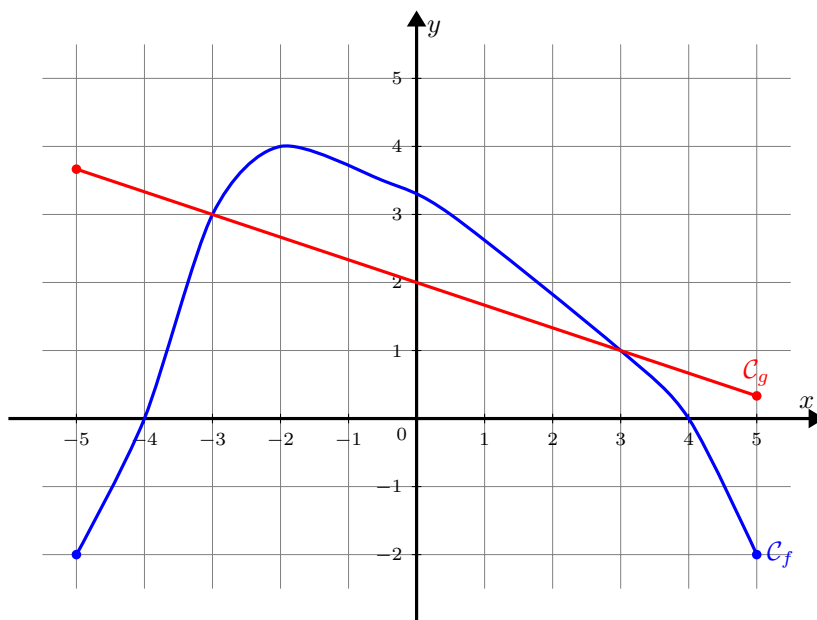
On estime qu'un antibiotique est efficace sur un humain s'il parvient à diviser par 5 le nombre de bactéries initialement présentes dans le b cher au bout de cinq heures.

- 4► L'antibiotique testé ici est-il efficace pour un humain ? Vérifier vos résultats par le calcul. Conclure.

Exercice 10

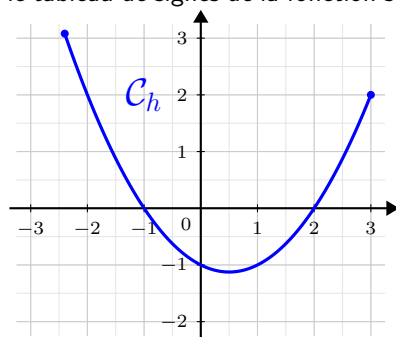
En utilisant la représentation graphique ci-contre, résoudre graphiquement :

- a► $f(x) = 4$
- b► $f(x) = g(x)$
- c► $f(x) = (-2)$
- d► $f(x) > 3$
- e► $f(x) \geq g(x)$
- f► $f(x) < (-2)$



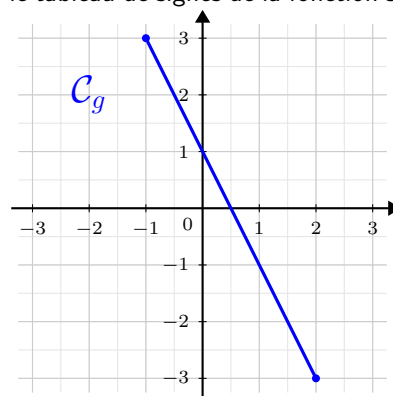
Exercice 11

Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :



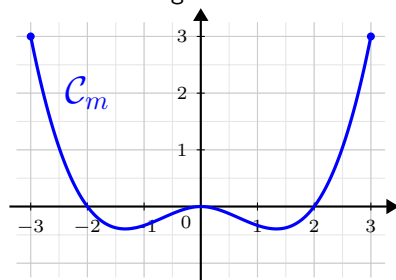
Exercice 13

Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :



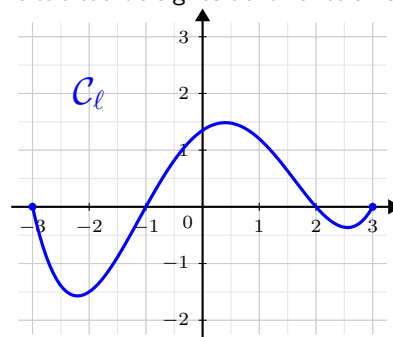
Exercice 12

Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :



Exercice 14

Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :



5 Suites arithmétiques et géométriques

Table des matières

1	Modèle discret de croissance linéaire : les suites arithmétiques	56
A	Définition récurrente, forme explicite	56
B	Représentation graphique, variations	56
2	Modèle discret de croissance exponentielle : les suites géométriques	57
A	Définition récurrente, forme explicite	57
B	Représentation graphique, variations	58
	Exercices	59

Programme

Suites numériques

Contenus

Les suites arithmétiques comme modèles discrets d'évolutions absolues constantes (croissance linéaire) et les suites géométriques (à termes strictement positifs) comme modèles discrets d'évolutions relatives constantes (croissance exponentielle)

- Relation de récurrence.
- Explicitation du terme de rang n .
- Sens de variation.
- Représentation graphique.

Capacités attendues

- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Reconnaître si une situation relève d'un modèle discret de variation linéaire ou exponentielle.
- Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
- Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique à l'aide de la raison.

Commentaires

- L'étude des suites arithmétiques et géométriques permet de comparer différents types de croissance.
- En classe de première, il convient de faire fonctionner la définition par récurrence d'une suite géométrique ou arithmétique.

1 – Modèle discret de croissance linéaire : les suites arithmétiques

A – Définition récurrente, forme explicite

Suites arithmétiques

Définition 1

Une *suite arithmétique* est une suite telle que, pour passer d'un terme au suivant, on **ajoute** toujours le même nombre, appelé *raison de la suite*.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} u_5 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} u_n$$

On écrit alors la *relation de récurrence* :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple 2

La suite u définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2$, est une suite arithmétique de raison 2.

Explicitation d'une suite arithmétique

Théorème 3

Si u est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout rang n , on peut calculer directement u_n avec la formule :

$$u_n = u_0 + r \times n$$

Exemple 4

En reprenant l'exemple précédent, $u_n = 1 + 2 \times n$.

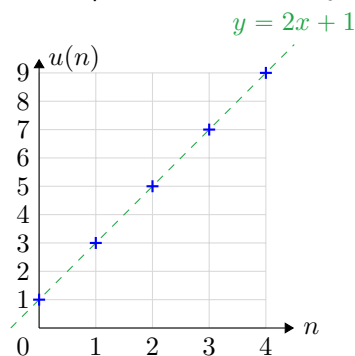
B – Représentation graphique, variations

Propriété 5

Les points d'un nuage de points représentent une suite arithmétique *si, et seulement si* ces points sont alignés.

Exemple 6

Représentation graphique de la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison 2 :

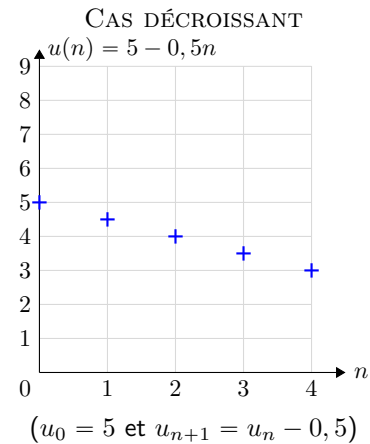
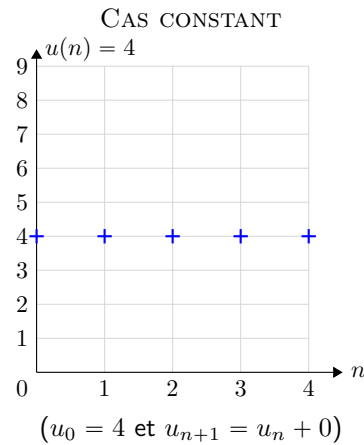
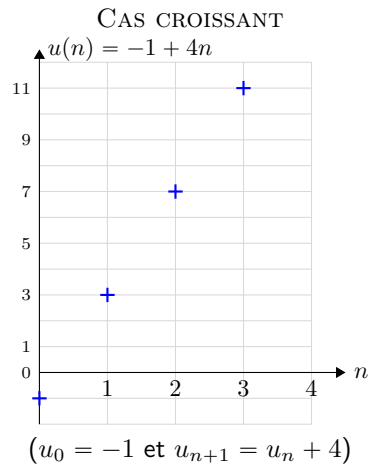


Variations d'une suite arithmétique

Proposition 7

Soit u une suite arithmétique de raison r .

- ▶ Si $r > 0$, alors u est strictement croissante.
- ▶ Si $r < 0$, alors u est strictement décroissante.
- ▶ Si $r = 0$, alors u est constante.

Exemple 8**2 – Modèle discret de croissance exponentielle : les suites géométriques****A – Définition récurrente, forme explicite***Suites géométriques***Définition 9**

Une *suite géométrique* est une suite telle que, pour passer d'un terme au suivant, on **multiplie** toujours par le même nombre, appelé *raison de la suite*.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \xrightarrow{\times q} \dots \xrightarrow{\times q} u_n$$

On écrit alors la *relation de récurrence* :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Exemple 10

La suite u définie par son terme initial $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n \times 10$, est une suite géométrique de raison 10.

Théorème 11**Explication d'une suite géométrique**

Si u est une suite géométrique de raison q , alors pour tout rang n , on peut calculer directement u_n avec la formule :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple 12

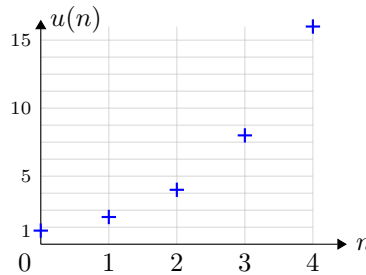
En reprenant l'exemple précédent, $u_n = 3 \times 10^n$.

B – Représentation graphique, variations

Dans cette section, on considère une suite u de terme initial $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

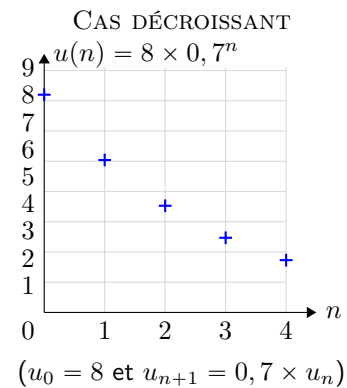
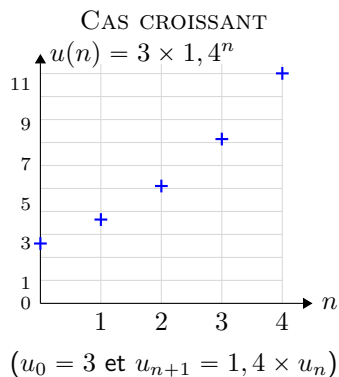
Exemple 13

Représentation graphique de la suite géométrique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison 2 :

**Proposition 14****Variations d'une suite géométrique**

Soit u une suite géométrique positive de raison q .

- ▶ Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.
- ▶ Si $q = 1$, alors u est constante.
- ▶ Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.

Exemple 15

Suites arithmétiques

Exercice 1

On donne les termes successifs d'une suite. S'agit-il des termes d'une suite arithmétique ? Si oui, en donner la raison.

- a ▶ 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; 23
- b ▶ 3 ; 8 ; 11 ; 16 ; 19 ; 24
- c ▶ 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96

Exercice 2

On donne les expressions des suites u , v et w . Calculer les quatre premiers termes de chaque suite, et dire si elles peuvent être arithmétiques ou non.

- ▶ $u_n = 7n - 1$
- ▶ $w_n = n^2 - 2$
- ▶ $v_n = 3 - 2n$

Exercice 3

Donner le terme général de chaque suite :

- ▶ u est arithmétique de raison $r = 1,5$ et de premier terme $u_0 = 15$.
- ▶ v est arithmétique de raison $r = 25$ et de premier terme $v_0 = 5$.
- ▶ w est arithmétique de raison $r = -\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = 8$.

Exercice 4

Donner le sens de variation de chaque suite :

- ▶ u est arithmétique de raison $r = -7$ et de premier terme $u_0 = 3$.
- ▶ v vérifie la relation $v_{n+1} = v_n + 8$.
- ▶ Chaque terme de w s'obtient en soustrayant 4 au terme précédent.

Exercice 5

Soit v la suite de terme général $v_n = 1,2 - 0,4n$. Représenter graphiquement les trois premiers termes de v , et tracer la droite passant par ces points.

Exercice 6

Alice et Bob comparent leurs économies. Au premier janvier 2020, Alice disposait de 300€ d'économies, et depuis ajoute 25€ le 31 décembre de chaque année. Au premier janvier 2020, Bob disposait de 165€

d'économies, et depuis ajoute 40€ par an.

- 1 ▶ Décrire les points communs et les différences entre Alice et Bob dans la gestion de leurs économies.
- 2 ▶ Calculer les économies d'Alice et Bob en 2021 et en 2022.
- 3 ▶ Modéliser les économies d'Alice et Bob par deux suites.
- 4 ▶ En déduire le montant de leurs économies en 2040.
- 5 ▶ En quelle année Bob aura-t-il économisé plus d'argent qu'Alice ?

Exercice 7

Un magazine de sport compte 280 000 abonnés en 2010. Depuis, le nombre d'abonnés chute de 7 000 chaque année.

- 1 ▶ Justifier que l'on peut modéliser le nombre d'abonnés par une suite arithmétique, dont on précisera les paramètres.
- 2 ▶ Le magazine ne sera plus édité s'il possède moins de 10 000 abonnés. Est-ce que cela va arriver ? Si oui, en quelle année ?

Exercice 8

Carole cultive un potager en forme de carré, qu'elle clôture pour éviter que les bêtes sauvages viennent manger ses légumes. Elle l'agrandit chaque année pour cultiver davantage de variétés : la première année, son potager fait 1m de côté, la deuxième année il fait 2m de côté, la troisième année il fait 3m de côté, et ainsi de suite.

- 1 ▶ La suite donnant la longueur du côté du potager chaque année est-elle arithmétique ? Si oui, préciser son premier terme et sa raison.
- 2 ▶ La suite donnant la longueur de la clôture chaque année est-elle arithmétique ? Si oui, préciser son premier terme et sa raison.
- 3 ▶ La suite donnant la surface du potager chaque année est-elle arithmétique ? Si oui, préciser son premier terme et sa raison.

Suites géométriques

Exercice 9

Déterminer les quatre premiers termes de la suite u géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 0,5$.

Exercice 10

Déterminer les quatre premiers termes de la suite v géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $v_0 = 750$.

Exercice 11

Indiquer si les suites de nombres suivantes sont ou non caractéristiques d'une croissance exponentielle :

- | | |
|-----------------|--|
| a► 4; 8; 12; 24 | c► $-10; 5; 2,5; -1,25$ |
| b► 2; 4; 6; 8 | d► $2, -\frac{2}{3}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{27}$ |

Exercice 12

Déterminer le terme de rang n des suites géométriques :

- u de raison 3 et de premier terme $u_0 = -3$
- v de raison -4 et de premier terme $v_0 = 10$
- w de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 4$

Exercice 13

Déterminer le sens de variation des suites géométriques :

- u de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$
- v de raison 1,5 et de premier terme $v_0 = 0,5$
- w de raison 0,7 et de premier terme $w_0 = 3$
- t de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $t_0 = 0,8$

Exercice 14

Alice avait en 2020 un salaire de 2 000€. Tous les ans, son salaire augmente de 10%.

- 1► Calculer le salaire d'Alice en 2021 et en 2022.
- 2► Modéliser le salaire d'Alice à l'aide d'une suite.
- 3► À l'aide d'une calculatrice, déterminer le salaire d'Alice en 2040.

Exercice 15

On lâche une balle depuis une hauteur de 6m. À chaque rebond, la balle ne remonte qu'à la moitié de la hauteur de son précédent rebond.

- 1► Calculer la hauteur des trois premiers rebonds.
- 2► Modéliser la hauteur de chaque rebond à l'aide d'une suite.
- 3► À l'aide d'une calculatrice, déterminer la hauteur du dixième rebond.

Exercice 16

En 2020, les entreprises de Bob et Carole possédaient toutes deux 10 000€ de capital. Elles choisissent deux stratégies de croissance différentes :

- La stratégie de Bob augmente la valeur de l'entreprise de 2 500€ par an.
- La stratégie de Carole augmente la valeur de son entreprise de 20% chaque année.

- 1► Calculer le capital de chaque entreprise en 2021 et en 2022.
- 2► Modéliser les capitaux des deux entreprises par deux suites, que l'on donnera sous forme récurrente et sous forme explicite.
- 3► Tracer sur un même graphique les deux nuages de points correspondant aux capitaux des deux entreprises entre 2020 et 2026. On veillera à choisir une échelle pertinente et à légender le graphique.
- 4► À l'aide du graphique, commenter les deux stratégies, décrire leurs avantages et inconvénients.

6 Probabilités conditionnelles, succession d'événements

Table des matières

1	Probabilité conditionnelle	62
2	Arbres pondérés	64
	Exercices	66

Programme

Automatismes

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Probabilités

- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs ou d'arbres pondérés.
- Distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$, $P_B(A)$.

Probabilités conditionnelles : indépendance

La notion de probabilité conditionnelle permet d'introduire de manière intuitive l'indépendance de deux événements : deux événements A et B sont dits indépendants si la probabilité conditionnelle de A sachant B est égale à la probabilité de A (sous réserve de la non-nullité de celle de B).

Contenus

- Indépendance de deux événements.
- Formule des probabilités totales.

Capacités attendues

- Savoir utiliser ou justifier l'indépendance de deux événements.
- Dans les cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.

Commentaires

- L'indépendance de deux événements repose sur la définition suivante : pour un événement A de probabilité non nulle, B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$. On démontre que la propriété d'indépendance est symétrique lorsque A et B sont de probabilités non nulles.

Modèle associé à une expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes

Contenus

- Probabilité associée à la répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli.

Capacités attendues

- Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités.

1 – Probabilité conditionnelle

Dans toute cette section, on note Ω l'univers, et on considère A et B deux événements de Ω .

Probabilité conditionnelle

Définition 1

Si $P(A) \neq 0$, alors on définit le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

appelé *probabilité conditionnelle de B sachant A*.

Une probabilité peut être vue comme une mesure de notre connaissance d'un sujet : par exemple, quand on lance un dé, on ne connaît pas le résultat à l'avance, mais on sait qu'il y a 1 chance sur 6 d'obtenir un 6. Le *conditionnement* en probabilité sert à tenir compte d'un gain d'information. Par exemple, vous lancez un dé, et un ami en cache le résultat. On l'a dit, sans plus d'informations, vous savez que vous avez 1 chance sur 6 s'obtenir un 6. Votre ami vous donne alors une information supplémentaire : «ton nombre est pair». La probabilité que vous ayez tiré un 6 change : elle devient $\frac{1}{3}$! En effet, il n'y a toujours qu'une seule issue favorable, mais le nombre de cas possible a changé : comme vous savez que le nombre est pair, les issues possibles sont 2, 4 et 6 ; il y en a donc 3. Le gain d'information a modifié la probabilité.

Remarque 2

Dans de nombreux livres, on rencontre plutôt la notation $P(B|A)$.

Remarque 3

Les probabilités conditionnelles ne sont pas sans lien avec les fréquences marginales d'un tableau croisé. En effet, prenons l'exemple suivant : dans une classe, on recense le nombre de porteurs de lunettes, en distinguant les effectifs selon les filles et les garçons.

	Filles	Garçons
Avec lunettes	3	7
Sans lunettes	5	5

Vous choisissez quelqu'un au hasard dans cette classe : il y a au total 20 élèves, et 10 parmi eux portent des lunettes, donc la probabilité d'avoir choisi un ou une porteuse de lunettes est $\frac{10}{20} = 0,5$. C'est la fréquence marginale des porteurs de lunettes dans la classe.

Si on vous dit que la personne que vous avez choisie est une fille, alors le gain d'information modifie la probabilité : en effet, vous avez maintenant 5 chances sur 8 d'être tombé sur une porteuse de lunettes, autrement dit la probabilité vaut $\frac{5}{8} = 0,625$. C'est la fréquence conditionnelle des porteuses de lunettes parmi les filles.

Le lien entre les probabilités conditionnelles et les fréquences conditionnelles est une conséquence de la proposition suivante, dont on a appliqué la formule sans le savoir :

Proposition 4

Dans une situation d'équiprobabilité, si $P(A) \neq 0$, alors :

$$P_A(B) = \frac{\text{Nombre d'issues vérifiant } A \text{ et } B \text{ simultanément}}{\text{Nombre d'issues vérifiant } A}$$

Exemple 5

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes, ce qui est une situation d'équiprobabilité. Considérons les événements B : «obtenir une figure» (c'est-à-dire tirer un valet, une dame ou un roi) et A : «obtenir un pique».

La probabilité d'obtenir un pique est $P(A) = \frac{13}{52}$, car 13 cartes sur 52 sont des piques.

La probabilité d'obtenir une figure sachant que l'on a tiré un pique est $P_A(B) = \frac{3}{13}$ car il y a 13 cartes de pique, et 3 d'entre elles sont des figures.

Une manipulation algébrique élémentaire de la définition d'une probabilité conditionnelle donne la nouvelle formule suivante, qui sera au centre sur chapitre suivant :

Proposition 6

Formule des probabilités composées

Si $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Exemple 7

En reprenant l'exemple précédent : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{13}{52} \times \frac{3}{13} = \frac{13 \times 3}{52 \times 13} = \frac{3}{52}$.

L'événement $A \cap B$ est «obtenir une figure de pique» : il est bien réalisé par 3 issues sur les 52 possibles.

Définition 8

Indépendance

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Corollaire 9

Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Remarque 10

Concrètement, l'indépendance de deux événements signifie que la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre. Typiquement, lancer un dé et une pièce sont deux événements indépendants : en effet, le résultat du dé n'a pas de raison de favoriser l'obtention de Pile ou de Face avec la pièce, et inversement.

Cependant, certaines situations sont piégeuses, et l'interprétation est trompeuse ! Pour vérifier ou réfuter l'indépendance de deux événements, il faut impérativement passer par le calcul.

Exemple 11

Dans un jeu de 32 cartes (quatre couleurs : pique, trèfle, carreau, cœur, valeurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as), on considère les événements R : «tirer un roi» et T : «tirer un trèfle».

Il y a 4 rois, donc $\mathbb{P}(R) = \frac{4}{32}$. Il y a quatre couleurs, dont une est le trèfle, donc $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4}$. Ainsi, $\mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}(T) = \frac{4}{32} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$.

Il y a un seul roi de trèfle dans le jeu, donc $\mathbb{P}(R \cap T) = \frac{1}{32}$: on retombe sur le résultat du calcul précédent, donc les événements sont indépendants.

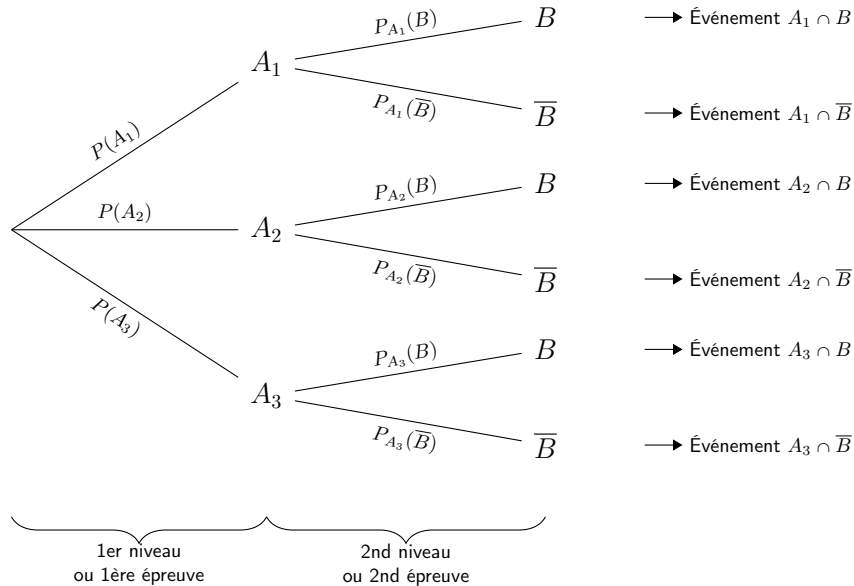
Application 12

Dans l'exemple précédent, on rajoute deux jokers dans le jeu (qui ne comptent ni comme des rois, ni comme des trèfles).

Les événements R et T sont-ils toujours indépendants ?

2 – Arbres pondérés

On représente la succession d'événements et leurs probabilités dans un *arbre*. Cet arbre est *pondéré* par les probabilités de chaque chemin :



Remarque 13

Dans un arbre de probabilités, la somme des probabilités partant d'un même nœud doit toujours valoir 1.

Avec la représentation fournie par un arbre pondéré, la formule des probabilités composées se reformule ainsi :

Proposition 14

Formule des probabilités composées

Dans un arbre de probabilités, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées en chemin.

Cette formulation fonctionnera également quand vous rencontrerez des arbres avec plus de deux niveaux !

Exemple 15

Construisons l'arbre pondéré associé au tableau croisé suivant :

	Filles	Garçons	Total
Avec lunettes	3	7	10
Sans lunettes	5	5	10
Total	8	12	20

On considère les événements A : «l'élève est une fille» et B : «l'élève porte des lunettes». Il faut d'abord calculer toutes les probabilités – on peut néanmoins réduire le travail de moitié en utilisant le fait que la somme

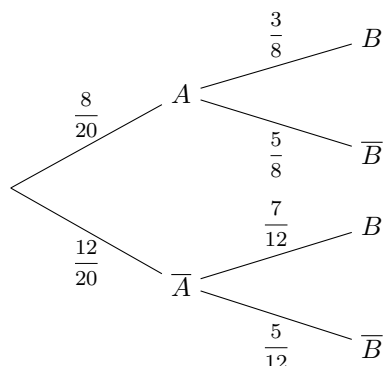
des probabilités partant d'un même nœud vaut 1.

$$\triangleright P(A) = \frac{8}{20}$$

$$\triangleright P_A(B) = \frac{3}{8}$$

$$\triangleright P_{\bar{A}}(B) = \frac{7}{12}$$

On a donc :



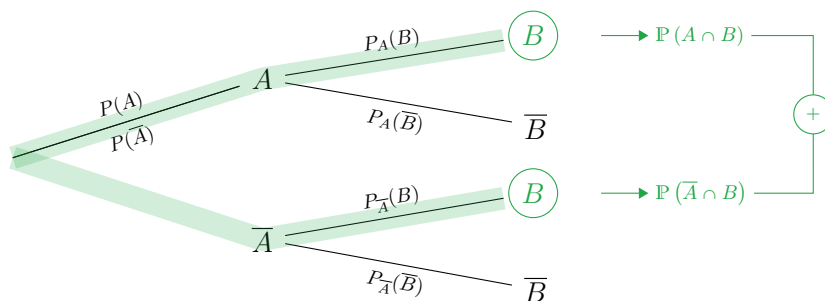
Théorème 16

Formule des probabilités totales

On considère une expérience aléatoire dans laquelle deux événements A et B se succèdent.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

Plus généralement, dans un arbre de probabilités, la probabilité d'un événement est égale à la somme de tous les chemins qui mènent à cet événement.



Exemple 17

Dans l'exemple précédent, $\mathbb{P}(A \cap B)$ est le produit des probabilités rencontrées sur le chemin du haut, soit $\frac{8}{20} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$. De même, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \frac{12}{20} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{20}$.

D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{20} + \frac{7}{20} = \frac{10}{20}$. On retrouve bien le fait que 10 élèves sur 20 portent des lunettes !

Exercices

Probabilités conditionnelles et tableaux croisés

Exercice 1

Un site internet de vente de produits multimédias propose 1 500 articles lors d'une vente exceptionnelle. Les articles sont soit fabriqués en France soit à l'étranger.

	Ordinateurs	Smartphones	Tablettes	Total
France	450		100	1 000
Étranger		50		
Total	750		250	

- 1► Compléter le tableau.
On choisit au hasard un produit parmi les 1 500 mis en vente.
- 2► Quelle est la probabilité que ce soit un smartphone ?
- 3► Quelle est la probabilité que ce ne soit pas une tablette ?
- 4► Sachant que le produit est fabriqué en France, quelle est la probabilité que ce soit un ordinateur ?
- 5► Sachant que c'est un ordinateur, quelle est la probabilité qu'il soit fabriqué en France ?

Exercice 2

Dans un sac, on dispose 100 jetons qui arborent un motif soit rond, soit carré. Chaque motif peut être soit bleu, soit vert. Il y a 10 motifs ronds bleus, 75 motifs carrés et 65 motifs verts.

On note les événements :

- C : « le motif est carré »
- R : « le motif est rond »
- B : « le motif est bleu »
- V : « le motif est vert »

	Carré (C)	Rond (R)	Total
Bleu (B)			
Vert (V)			
Total			

- 1► Compléter le tableau croisé.
- 2► Quelle est la probabilité que le motif soit vert ?
- 3► Calculer $P(V \cap R)$ et interpréter le résultat.
- 4► Déterminer la probabilité que le motif soit carré et bleu.
- 5► Déterminer la probabilité que le motif soit carré sachant qu'il est bleu.
- 6► Déterminer la probabilité que le motif soit bleu sachant qu'il est carré.

Exercice 3

Dans une pizzeria, il est possible de commander des pizzas avec une base tomate ou crème fraîche, en taille moyenne ou grande.

On note les événements :

- M : « la pizza est de taille moyenne »
- T : « la pizza est base tomate »

Les statistiques de ventes sont données par le tableau ci-contre.

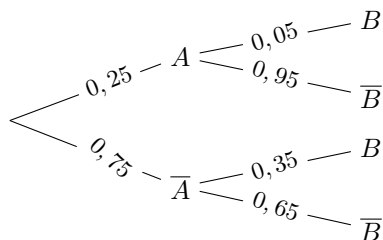
	Moyenne (M)	Grande ($\bar{M}$)	Total
Tomate (T)	22	53	75
Crème ($\bar{T}$)	16	19	35
Total	38	72	110

- 1► Calculer $P(M \cap T)$ et interpréter le résultat.
- 2► Calculer $P_M(T)$ et interpréter le résultat.
- 3► Calculer la probabilité de prendre une grande pizza sachant qu'elle a une base tomate.

Succession d'événements

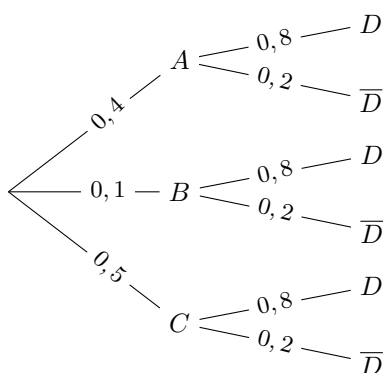
Exercice 4

On donne un arbre pondéré.
Lire $P(A)$, $P_{\bar{A}}(B)$ et $P_A(\bar{B})$.



Exercice 5

On considère une expérience aléatoire schématisée par l'arbre ci-dessous.



- 1► Quelles sont les issues de la première épreuve ? De la deuxième épreuve ?
- 2► Calculer la probabilité que A et D se réalisent. Comment note-t-on cette probabilité ?
- 3► Calculer la probabilité que D se réalise à l'issue de l'expérience.

Exercice 6

On dispose d'une urne contenant 4 boules jaunes et 2 boules bleues. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, on mélange et on tire à nouveau une boule.

- 1► Représenter la situation à l'aide d'un arbre. On définira soigneusement les différents événements.
- 2► Quelle est la probabilité de tirer deux boules bleues ?
- 3► Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?
- 4► Refaire l'exercice dans le cas où on ne remet pas la boule dans l'urne après le premier tirage.

Exercice 7

Dans un supermarché, 22% des paiements se font à la caisse automatique, dont 74% correspondent à des courses de moins de dix articles.

Pour les paiements en caisse non automatique, 11% correspondent à des courses de moins de dix articles. Pour un paiement effectué dans ce magasin, on considère les événements :

- A : «Le paiement a été fait en caisse automatique»
- M : «Le paiement correspond à des courses de moins de dix articles»

- 1► Réaliser un arbre des possibles.
- 2► Calculer $\mathbb{P}(A \cap M)$ puis $\mathbb{P}(M)$. En déduire $\mathbb{P}_M(A)$.

Exercice 8



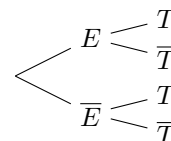
Lors de l'étude de la fiabilité d'un test de grossesse, on a obtenu les résultats suivants :

- 99% des femmes enceintes obtiennent un résultat positif à leur test ;
- 96% des femmes qui ne sont pas enceintes obtiennent un résultat négatif à leur test.

En 2020, 16,5% des femmes étaient enceintes.

On choisit au hasard une femme ayant acheté ce test de grossesse. On note les événements E : « la femme est enceinte » et T : « le test est positif ».

- 1► Recopier et compléter l'arbre suivant.



- 2► Calculer $P(T)$, arrondi au centième et interpréter le résultat.
- 3► Une femme a obtenu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit enceinte ? Arrondir au centième.

Exercice 9



Les maladies cardiovasculaires sont l'une des principales causes de mortalité. Pour évaluer la situation en France, une étude portant sur un échantillon de 1000 personnes âgées de 18 à 65 ans. On a obtenu les résultats suivants :

- ▶ 9% des personnes sont atteintes d'une maladie cardiovasculaire,
- ▶ parmi les personnes malades, 45% pratiquent une activité physique régulière,
- ▶ parmi les personnes saines, 60% pratiquent une activité physique régulière.

On choisit au hasard une personne dans l'échantillon.

On note M l'événement « la personne est malade », et S l'événement « la personne pratique une activité physique régulière ».

- 1▶ Calculer $P(M \cap S)$ et interpréter le résultat.
- 2▶ Montrer que $P(S) = 0,5865$.
- 3▶ Calculer $P_S(M)$, arrondir à 10^{-4} près.
- 4▶ Les événements M et S sont-ils indépendants? (*Indication : cela revient à vérifier si $P_S(M)$ est égal à $P(M)$.*)

Indépendance

Exercice 10

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4 puis une pièce équilibrée à Pile ou Face.

- 1▶ Les deux étapes de l'expérience aléatoire sont-elles indépendantes?
- 2▶ Représenter cette succession de deux épreuves par un arbre.
- 3▶ Déterminer la probabilité que le résultat du dé soit inférieur ou égal à 3 et que la pièce tombe sur Pile.

Exercice 11

Le samedi soir, deux amis vont au cinéma, au concert et au théâtre sans jamais faire la même activité deux samedis de suite. Le choix entre deux activités possibles pour le samedi suivant est équiprobable.

- 1▶ On considère l'expérience aléatoire dont le résultat est l'activité faite par ces deux amis un samedi soir. Expliquer pourquoi la succession de cette expérience aléatoire les trois semaines à venir n'est pas une succession d'épreuves indépendantes.
- 2▶ Représenter cette succession de trois épreuves par un arbre sachant que samedi dernier, les amis sont allés au théâtre.
- 3▶ Déterminer la probabilité qu'ils aillent deux fois au cinéma au cours des 3 prochains samedis.

Exercice 12

Une urne contient 100 boules de 5 couleurs différentes : 23 bleues, 12 rouges, 9 vertes, 45 oranges et 11 violettes. On tire trois boules avec remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.

- 1▶ Est-ce une succession de trois épreuves indépendantes?
- 2▶ Donner l'univers associé à cette succession de 3 épreuves.
- 3▶ Déterminer la probabilité d'obtenir une boule bleue puis une boule rouge puis une boule violette.

7 Fonctions polynômes de degré 2

Table des matières

1	Polynômes du second degré, paraboles	70
A	Définition et vocabulaire	70
B	Représentation graphique	70
2	Forme factorisée, signes et variations d'un polynôme de degré 2	73
A	Lien avec la forme développée	73
B	Liens avec la représentation graphique	74
C	Variations et signes	75
	Exercices	77

Programme

Automatismes

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Calcul numérique et algébrique

- Résoudre une équation produit nul.
- Déterminer le signe d'une expression du premier degré, d'une expression factorisée du second degré.
- Développer, factoriser, réduire une expression algébrique simple.

Fonctions de la variable réelle

Contenus

Fonctions polynômes de degré 2

- Éléments caractéristiques de la courbe : allure, axe de symétrie, coordonnées du sommet en lien avec la symétrie et tableau de variation de la fonction.
- Racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée (le calcul des racines à l'aide du discriminant ne figure pas au programme).

Capacités attendues

- Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2, pour les fonctions de la forme : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + c$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Aucune formule n'est attendue. On déterminera l'axe de symétrie par exemple en résolvant l'équation $f(x) = c$.
- Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2.
- Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 pour trouver ses racines et étudier son signe.

Commentaires

- Les fonctions polynômes de degré 2 fournissent des occasions de pratiquer le calcul numérique (image d'un nombre donné) et littéral (développement, factorisation) et de travailler sur les représentations graphiques.
- Les exemples prennent appui sur des situations réelles (impôts, hauteurs de marée, tarifs de courrier, évolution de l'émission de CO₂, etc.) et internes aux mathématiques (problèmes d'optimisation dans un cadre géométrique, etc.).
- Les professeurs utilisent différentes notations pour la variable : t, u , etc. et habituent les élèves à lire des graphiques reliant une grandeur y à une grandeur composée ($x^2, 1/x$, etc.), ce qui permet notamment de donner sens à l'expression « grandeurs inversement proportionnelles ».

- La recherche systématique des racines d'un polynôme de degré 2 ne figurant pas au programme, on privilégie les situations où les racines sont évidentes ainsi que les interprétations graphiques. En cas de besoin, la résolution d'une équation du second degré peut se faire à

l'aide d'un solveur.

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- Calculer une valeur approchée d'une solution d'une équation par balayage.

1 – Polynômes du second degré, paraboles

A – Définition et vocabulaire

Définition 1

Polynôme de degré 2

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des réels, et $a \neq 0$.

Les nombres a , b et c sont appelés *coefficients* de f ; le nombre c est appelé *coefficient constant*, et a est appelé *coefficient dominant*.

Exemple 2

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = 6$.
- $f(x) = x^2 - 8$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -8$.
- $f(x) = 7x + 9$ n'est pas une fonction polynôme de degré 2.

Définition 3

Racine

Soit f une fonction polynôme de degré 2.

Une *racine* de f est un réel r tel que $f(r) = 0$.

Exemple 4

Soit $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$.

- $x = 2$ est une racine de f car $f(2) = 2 \times 2^2 - 10 \times 2 + 12 = 0$
- $x = 3$ est une racine de f car $f(3) = 2 \times 3^2 - 10 \times 3 + 12 = 0$
- $x = 4$ n'est une racine de f car $f(4) = 2 \times 4^2 - 10 \times 4 + 12 = 4 \neq 0$

Propriété 5

Une fonction polynôme de degré 2 a soit 0, soit 1, soit 2 racines.

B – Représentation graphique

Définition 6

Parabole

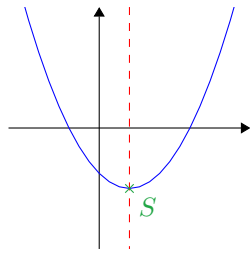
La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une *parabole*.

Propriété 7**Axe de symétrie**

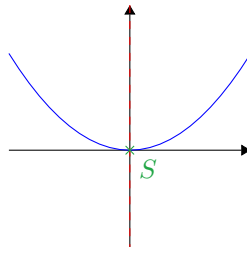
Une parabole admet un axe de symétrie vertical.

Définition 8**Sommet d'une parabole**

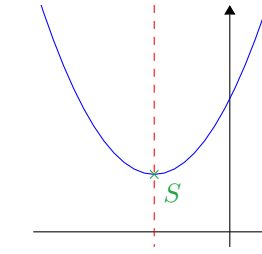
- Le *sommet* d'une parabole est le point d'intersection de celle-ci avec son axe de symétrie.
- Les deux parties de la courbe de part et d'autre de l'axe de symétrie sont appelées *branches* de la parabole.

Exemple 9

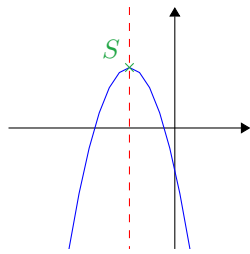
$$f(x) = x^2 + x - 0,75$$



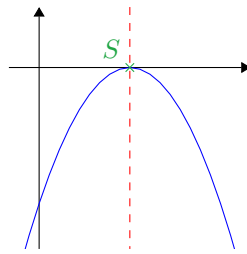
$$f(x) = 0,4x^2$$



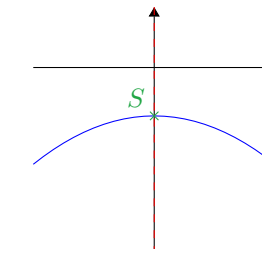
$$f(x) = 0,8x^2 + 3,2x + 4$$



$$f(x) = -4x^2 - 8x - 3$$



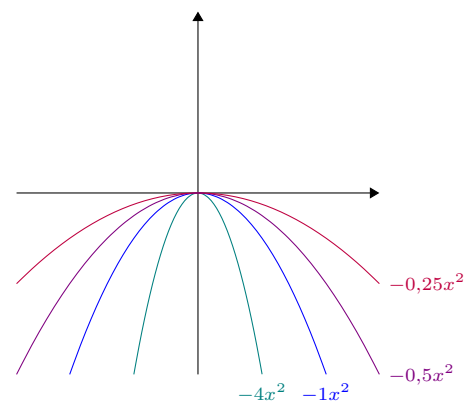
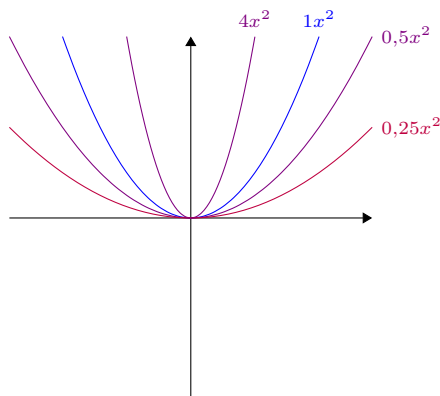
$$f(x) = -x^2 + 3x - 2,25$$



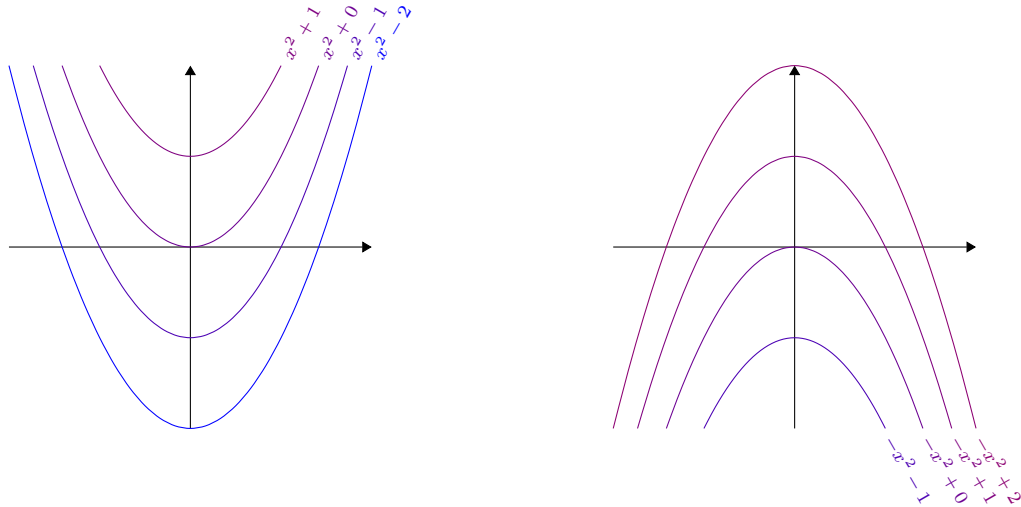
$$f(x) = -0,2x^2 - 1$$

Exemple 10 (Cas particuliers remarquables)

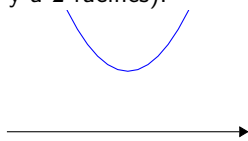
- Les paraboles des fonctions du type $f(x) = ax^2$: leur axe de symétrie est l'axe des ordonnées, et leur sommet est l'origine du repère.



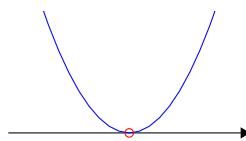
- Les paraboles des fonctions du type $f(x) = ax^2 + c$: elles correspondent à une translation de la parabole de $f(x) = ax^2$ le long de l'axe des ordonnées. L'ordonnée à l'origine est alors c .

**Remarque 11**

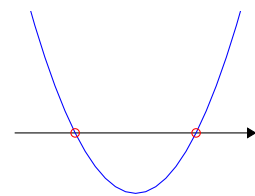
Les racines d'une fonction polynôme de degré 2 correspondent aux abscisses auxquelles la parabole coupe l'axe des abscisses. Graphiquement, on voit qu'il existe 3 cas : soit la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses (auquel cas il n'y a pas de racine), soit la parabole touche juste l'axe des abscisses et reste toujours d'un côté ou de l'autre de ce dernier (auquel cas il y a 1 racine), soit la parabole traverse deux fois l'axe des abscisses (auquel cas il y a 2 racines).



Pas de racines



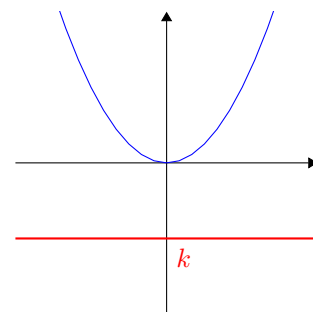
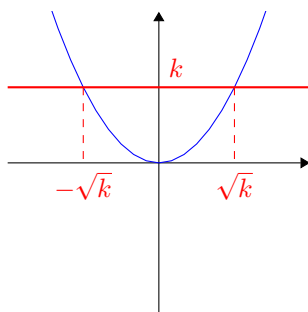
1 racine



2 racines

Remarque 12

Pour $k > 0$, les solutions de l'équation $x^2 = k$ sont $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$. Pour $k < 0$, cette équation n'a pas de solutions : cela se constate sur un graphique, la parabole de $x \mapsto x^2$ n'intersecte pas la droite horizontale $y = k$ si $k < 0$.



2 – Forme factorisée, signes et variations d'un polynôme de degré 2

A – Lien avec la forme développée

Définition 13

Forme factorisée

La *forme factorisée* d'une fonction polynôme de degré 2, si elle existe, est une réécriture de f sous la forme :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

où a , r_1 et r_2 sont des réels, avec $a \neq 0$.

Théorème 14

Forme factorisée et racines

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2.

- Si f admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors f admet la forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.
- Si f admet une unique racine r_0 , alors f admet la forme factorisée $f(x) = a(x - r_0)^2$.
- Si f n'admet pas de racines, alors elle n'admet pas de forme factorisée.

(Note importante : le a dans la forme factorisée est le même a que dans la forme développée)

Exemple 15

Vérifions que $x \mapsto 5(x - 6)(x + 2)$ est la forme factorisée de $x \mapsto 5x^2 - 20x - 60$.

$$\begin{aligned} 5(x - 6)(x + 2) &= 5[x \times x + x \times 2 - 6 \times x - 6 \times 2] \\ &= 5[x^2 - 4x - 12] \\ &= 5x^2 - 20x - 60 \end{aligned}$$

Méthode 16 (Factorisation en connaissant une racine)

Pour déterminer la forme factorisée de f lorsqu'on connaît une racine r , on nomme l'autre racine inconnue v (éventuellement $v = r$), on écrit $f(x) = a(x - r)(x - v)$, on développe l'expression, et on identifie les coefficients b et c pour déterminer v .

Exemple 17

- Déterminons une forme factorisée de $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$ sachant que $x = 2$ en est une racine. Soit v la deuxième racine (éventuellement $v = 2$). On a alors $f(x) = 3(x - 2)(x - v)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 15x + 18 &= 3(x - 2)(x - v) = 3[x^2 - 2x - vx + 2v] \\ &= 3x^2 + 3(-2 - v)x + 6v \end{aligned}$$

On en déduit que $-15 = 3(-2 - v)$ et $18 = 6v$, et donc que $v = 3$.

Ainsi, $3x^2 - 15x + 18 = 3(x - 2)(x - 3)$.

- Déterminons une forme factorisée de $f(x) = 4x^2 - 24x + 36$ sachant que $x = 3$ en est une racine. Soit v la deuxième racine (éventuellement $v = 3$). On a alors $f(x) = 4(x - 3)(x - v)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 36 &= 4(x - 3)(x - v) = 4[x^2 - 3x - vx + 3v] \\ &= 4x^2 + 4(-3 - v)x + 12v \end{aligned}$$

On en déduit que $-24 = 4(-3 - v)$ et $36 = 12v$, et donc que $v = 3$.
Ainsi, $3x^2 - 15x + 18 = 4(x - 3)(x - 3) = 4(x - 3)^2$.

B – Liens avec la représentation graphique

Méthode 18 (Trouver l'axe de symétrie par lecture graphique des racines)

L'axe de symétrie d'une parabole est toujours au milieu de ses racines, si elles existent.
Autrement dit : l'axe de symétrie de $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ (avec éventuellement $r_1 = r_2$) est la droite verticale d'équation $x = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

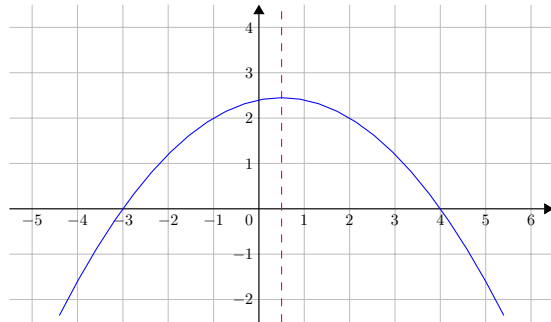
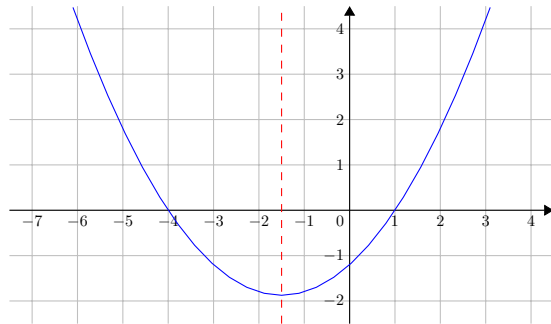
Exemple 19

On lit sur le graphique que les racines de cette parabole sont -4 et 1 : l'axe de symétrie a donc pour équation :

$$x = \frac{-4 + 1}{2} = -1,5$$

On lit sur le graphique que les racines de cette parabole sont -3 et 4 : l'axe de symétrie a donc pour équation :

$$x = \frac{-3 + 4}{2} = 0,5$$



Méthode 20 (Trouver l'axe de symétrie à partir de l'expression)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2.

- 1► On résout l'équation $f(x) = c$ à l'aide d'une équation produit nul.
- 2► L'une des solutions est 0, on note l'autre s .
- 3► L'axe de symétrie est la droite verticale passant par l'abscisse $\frac{s}{2}$.

Exemple 21

Soit $f(x) = 3x^2 + 18x + 7$. On a $a = 3$, $b = 18$ et $c = 7$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 \\ \iff 3x^2 + 18x + 7 &= 7 \end{aligned} \quad \text{(on simplifie le 7 dans les deux membres)}$$

$$\iff 3x^2 + 18x = 0$$

$$\iff (3x + 18)x = 0$$

(on factorise par x)

$$\iff 3x + 18 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

(équation produit nul)

$$\iff x = -6 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Les deux solutions sont donc 0 et -6 , donc l'axe de symétrie passe par l'abscisse $\frac{-6}{2} = -3$.

Remarque 22

On peut montrer sans trop d'effort que l'axe de symétrie passe toujours par l'abscisse $\frac{-b}{2a}$.

C – Variations et signes**Définition 23****Orientation**

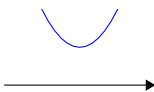
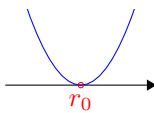
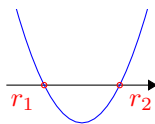
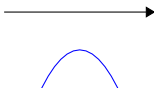
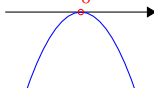
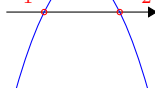
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un fonction polynôme de degré 2, notons $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.

On dit que la parabole $\mathcal{P}$ est *orientée vers le haut* si $a > 0$, et *orientée vers le bas* si $a < 0$.

Méthode 24 (Tableau de signes)

- 1► On trace un schéma de la parabole, orientée vers le haut ou le bas selon le signe de a ,
- 2► On indique les racines, si elles existent, sur le schéma,
- 3► On détermine graphiquement le tableau de signes.

Exemple 25

																											
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	+		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>r_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>$\circ$</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	r_0	$+\infty$	$f(x)$	+	$\circ$	+	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>r_1</td><td>r_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>$\circ$</td><td>-</td><td>$\circ$</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$	$f(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
x	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	+																										
x	$-\infty$	r_0	$+\infty$																								
$f(x)$	+	$\circ$	+																								
x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$																							
$f(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+																						
																											
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	-		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>r_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>$\circ$</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	r_0	$+\infty$	$f(x)$	-	$\circ$	-	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>r_1</td><td>r_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>$\circ$</td><td>+</td><td>$\circ$</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$	$f(x)$	-	$\circ$	+	$\circ$	-
x	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	-																										
x	$-\infty$	r_0	$+\infty$																								
$f(x)$	-	$\circ$	-																								
x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$																							
$f(x)$	-	$\circ$	+	$\circ$	-																						

Variations**Propriété 26**

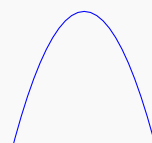
Soit f une fonction polynôme de degré 2, on note x_S l'abscisse de son sommet.

Cas $a > 0$



x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
f			

Cas $a < 0$



x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
f			

Exercices

Exercice 1

- ▶ $f(x) = 3x^2 + 8x - 2$
- ▶ $g(x) = -2x^2 + 7$
- ▶ $h(x) = 5x + 3$
- ▶ $i(x) = 8x^2$
- ▶ $j(x) = 4(3x^2 + 7x - 5)$
- ▶ $k(x) = -3(x - 4)(x - 9)$
- ▶ $\ell(x) = 7(x - 1)^2 + 3$
- ▶ $m(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2$

- 1▶ Pour chaque expression, la développer et la réduire autant que possible. Identifier les expressions correspondant à des polynômes de degré 2.
- 2▶ Pour chaque polynôme de degré 2, identifier les coefficients a , b et c (dans la forme $ax^2 + bx + c$).

Exercice 2

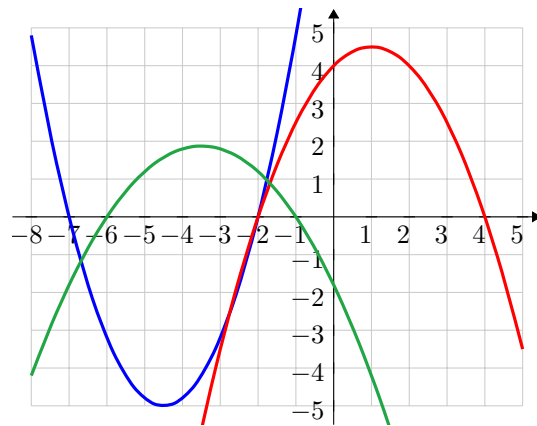
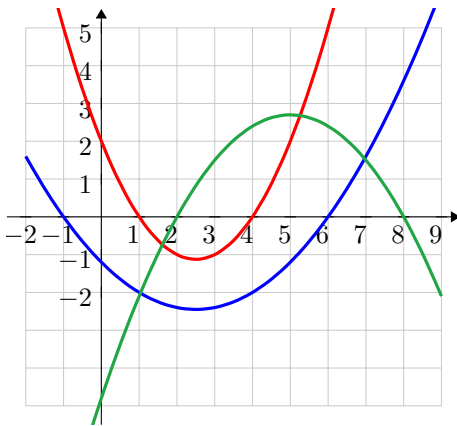
- 1▶ Pour chaque polynôme sous forme factorisée ci-dessous, déterminer les racines.

- ▶ $f(x) = (x - 1)(x - 2)$
- ▶ $g(x) = (x - 3)(x + 4)$
- ▶ $h(x) = (x + 5)(x - 6)$
- ▶ $k(x) = (x + 7)(x + 8)$

- 2▶ En vérifiant leurs racines, associer chaque expression ci-dessus à sa forme développée parmi les suivantes :

- ▶ $x^2 + x - 12$
- ▶ $x^2 + 15x + 56$
- ▶ $x^2 - 3x + 2$
- ▶ $x^2 - x - 30$

Pour les prochains exercices, on considère les courbes représentatives suivantes :



Exercice 3

- 1▶ Identifiez les racines de chaque polynôme.
- 2▶ Associez à chaque polynôme la bonne expression :

- ▶ $-0,3(x + 1)(x + 6)$
- ▶ $-0,5(x + 2)(x - 4)$
- ▶ $-0,3(x + 2)(x - 8)$
- ▶ $0,2(x + 1)(x - 6)$
- ▶ $0,8(x + 7)(x + 2)$
- ▶ $0,5(x - 1)(x - 4)$

Exercice 4

- 1▶ Donner l'équation de leur axe de symétrie.
- 2▶ Donner les coordonnées de leur sommet.

Exercice 5

- 1▶ Donner leur tableau de signes.
- 2▶ Donner leur tableau de variations.

8 Représentation de données

Table des matières

1	Indicateurs statistiques	80
A	Médiane et quartiles d'une série statistique	80
B	Moyenne et écart-type	81
2	Représentations graphique des séries à un caractère	83
3	Représentation des séries à deux caractères	84
A	Diagrammes à barres empilées	84
B	Nuages de points	85
	Exercices	88

Programme

Automatismes

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Statistiques

- Lire un graphique, un histogramme, un diagramme en barres ou circulaire, un diagramme en boîte ou toute autre représentation (repérer l'origine du repère, les unités de graduations ou les échelle, etc.).
- Passer du graphique aux données et vice-versa.
- Calculer et interpréter des indicateurs statistiques pour une série statistique.

Séries statistiques à deux variables quantitatives

Contenus

- Nuage de points associé à une série statistique à deux variables quantitatives.
- Ajustement affine, point moyen.

Capacités attendues

- Représenter un nuage de points.

- Savoir calculer les coordonnées du point moyen.
- Déterminer et utiliser un ajustement affine.
- Interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues à l'aide d'un ajustement affine.

Commentaires

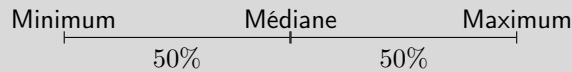
- Plusieurs ajustements sont proposés (au jugé, droite de Mayer, moindres carrés) mais aucune connaissance théorique n'est attendue. L'appréciation de leur qualité peut faire l'objet d'une discussion au sein de la classe.
- La méthode des moindres carrés est présentée : recherche d'une droite d'équation $y = ax + b$ réalisant le minimum de $\sum_i (y_i - (ax_i + b))^2$ pour le nuage de points (x_i, y_i) .
- Les situations ou contextes réels, en lien notamment avec les enseignements de spécialité, sont privilégiés :
- données issues des domaines de la santé, de l'économie, de la gestion, des sciences sociales, etc. ;
- mesures expérimentales de grandeurs liées par une relation linéaire en physique-chimie (intensité et tension ; droite d'étalonnage d'une concentration, etc.), en biotechnologies ou en sciences de l'ingénieur dans tous les domaines (industriels, génie civil, etc.).
- Les élèves sont entraînés à exercer leur esprit critique sur la pertinence, au regard des données et de la situation étudiée, d'une modélisation par ajustement affine et sur les limites des extrapolations faites dans ce cadre.

1 – Indicateurs statistiques

A – Médiane et quartiles d'une série statistique

Définition 1

La *médiane* d'une série statistique est une valeur qui sépare la série en deux parties de même effectifs : les valeurs qui sont inférieures à la médiane, et celles qui lui sont supérieures.



Méthode 2 (Déterminer la médiane d'une série statistique)

On range les données dans l'ordre croissant.

- S'il y a un nombre impair de données, on prend la valeur centrale,
- Sinon, on prend une valeur entre les deux valeurs centrales (traditionnellement le milieu).

Exemple 3

- On considère la série (déjà rangée) 2 ; 18 ; 18 ; 20 ; 22 ; 35 ; 35 ; 35 ; 40. Elle a un nombre impair de données, sa valeur centrale, et donc sa médiane, est 22. Elle sépare la série en deux groupes de 4 valeurs.
- On considère la série (déjà rangée) -2 ; -1 ; 0 ; 0 ; 3 ; 4 ; 4 ; 5 ; 15 ; 25. Elle a un nombre pair de données, ses valeurs centrales sont 3 et 4. On prend alors 3,5 comme médiane, qui scinde la série en deux parties de 5 valeurs.

Application 4

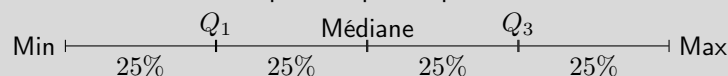
Déterminer la médiane de la série statistique suivante :

2 ; 4 ; 17 ; 8 ; 11 ; 11 ; 11 ; 16 ; 1 ; 13 ; 11

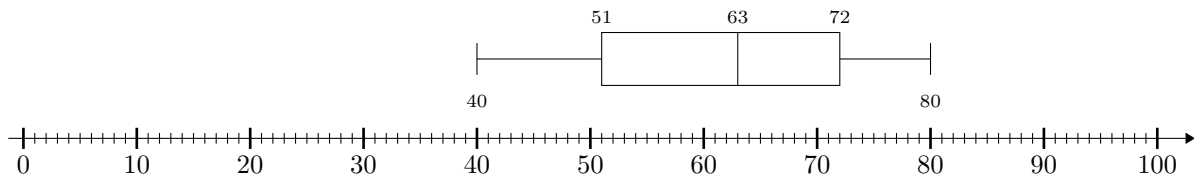
Quartiles

Définition 5

Le *premier quartile*, noté Q_1 , et le *troisième quartile*, noté Q_3 , sont les plus petites valeurs qui permettent, avec la médiane, de scinder une série statistiques en quatre quarts de mêmes effectifs.



Il existe une représentation standard de toutes ces informations : la *boîte à moustaches*. Les deux quartiles délimitent la boîte principale, la médiane scinde cette boîte en deux parties, et on fait pousser des moustaches à droite et à gauche de la boîte pour représenter le minimum et le maximum.



Sur l'exemple précédent, on peut lire :

- Min = 40
- $Q_1 = 51$
- Médiane = 63
- $Q_3 = 72$
- Max = 80

Définition 6**Indicateurs de dispersion**

- L'*étendue* d'une série est l'écart entre son minimum et son maximum.
- L'*écart interquartile* d'une série est l'écart entre ses deux quartiles.

Exemple 7

Dans l'exemple de la boîte à moustaches ci-dessus, l'étendue est de $80 - 40 = 40$, et l'écart interquartile est $72 - 51 = 21$.

Application 8

Voici les relevés de notes de deux classes :

- Classe A : 0, 0, 0, 0, 10, 10, 20, 20, 20, 20
- Classe B : 4, 6, 7, 9, 9, 11, 12, 14, 14, 15

- 1► Sans faire de calcul, peut-on dire que ces deux classes ont le même profil ? Expliquer.
- 2► Calculer la médiane de chaque classe. Que remarque-t-on ?
- 3► Calculer l'écart interquartile de chaque classe. Que remarque-t-on ?
- 4► Quelle indication l'écart interquartile d'une série semble-t-il donner ?

B – Moyenne et écart-type

On considère une série contenant une valeur x_1 avec un effectif n_1 , une valeur x_2 avec un effectif n_2 , ... Par commodité, on la présente dans un tableau :

Valeur	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Effectif	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Dans la suite, on notera $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ l'effectif total.

Définition 9**Moyenne pondérée**

La *moyenne pondérée* de la série de données est :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{N}$$

Exemple 10

Voici le relevé de notes d'Alice :

Note	13	9	12	15
Coeff	1	5	3	1

Calculons la moyenne des notes d'Alice, pondérée par les coefficients :

$$\frac{1 \times 13 + 5 \times 9 + 3 \times 12 + 1 \times 15}{1 + 5 + 3 + 1} = \frac{109}{10} = 10,9$$

Propriété 11**Linéarité de la moyenne**

Soient a et b deux nombres.

- Si on multiplie par a toutes les valeurs de la série, alors la moyenne est également multipliée par a . On peut écrire : $a\bar{x} = \overline{ax}$.
- Si on ajoute b à toutes les valeurs de la série, alors la moyenne est également augmentée de b . On peut écrire : $\overline{x+b} = \bar{x} + b$.

On dit que la moyenne est *linéaire*.

Définition 12**Écart-type**

L'écart-type de la série de données est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N}}$$

(On retiendra qu'il s'agit de la racine de la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne...)

Exemple 13

Calculons l'écart-type des notes d'Alice de l'exemple précédent. Décomposons la formule : on part des notes d'Alice, on calcule l'écart de chaque note à la moyenne d'Alice qui est de 10,9 (l'écart est positif quand la note est au-dessus de la moyenne, négatif si la note est en-dessous). Ensuite, on calcule le carré de chacun de ces écarts : cela donne une nouvelle série dont on calcule la moyenne pondérée.

Note (x_i)	13	9	12	15
$x_i - \bar{x}$	2,1	-1,9	1,1	4,1
$(x_i - \bar{x})^2$	4,41	3,61	1,21	16,81
Coeff	1	5	3	1

Ainsi,

$$\sigma^2 = \frac{1 \times 4,41 + 5 \times 3,61 + 3 \times 1,21 + 1 \times 16,81}{1 + 5 + 3 + 1} = 4,29$$

Et donc :

$$\sigma = \sqrt{4,29} \approx 2,07$$

Application 14

Voici le relevé de notes de Bob :

Note	20	12	16	18
Coeff	0	20	3	0

- 1► Sans faire de calcul, peut-on dire que Alice et Bob ont le même profil d'élève ? Expliquer.
- 2► Calculer la moyenne de Bob. Que remarque-t-on par rapport à Alice ?
- 3► Calculer l'écart-type de Bob. Que remarque-t-on par rapport à Alice ?
- 4► Quelle indication l'écart-type d'une série semble-t-il donner ?

2 – Représentations graphique des séries à un caractère

Définition 15

Diagramme en barres

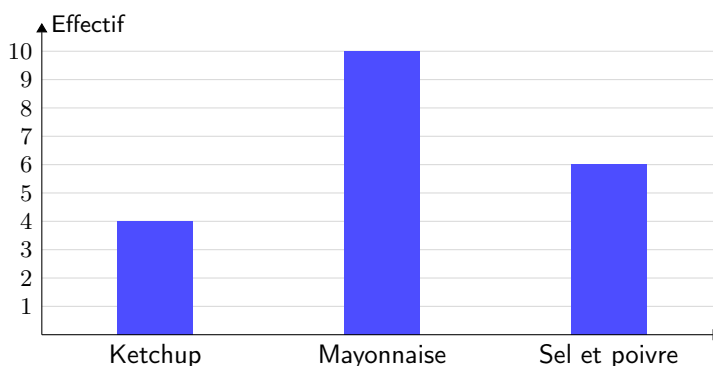
Un *diagramme en bâtons* (ou en *barres*) est un diagramme dans lequel à chaque (classe de) donnée(s) est associé une barre dont la longueur est proportionnelle à son effectif.

Exemple 16

Reprenons le sondage sur l'assaisonnement du poulet frit du chapitre précédent.

Assaisonnement	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre
Effectif	4	10	6

Une représentation possible avec un diagramme en bâtons est la suivante :



Définition 17

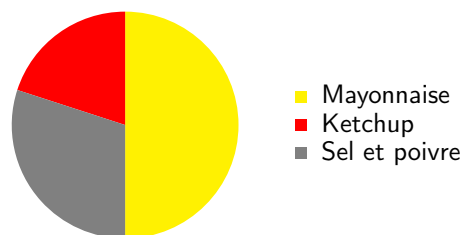
Diagramme circulaire

Un *diagramme circulaire* est un diagramme dans lequel les mesures des angles des secteurs sont proportionnels aux effectifs (ou aux fréquences) des (classes de) données.

Exemple 18

Avec les données de l'exemple précédent :

Rappel : comment calculer les tailles de secteurs : l'effectif total correspond à un tour complet, c'est-à-dire 360° , et on détermine les angles des secteurs par proportionnalité. (Remarque : on sait que le total des angles doit faire 360° , donc on peut se contenter de calculer deux angles sur les trois).



	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre	Total
Effectif	4	10	6	20
Angle	72°	180°	108°	360°

→ $\times 18$

3 – Représentation des séries à deux caractères

A – Diagrammes à barres empilées

Diagramme en barres empilées

Définition 19

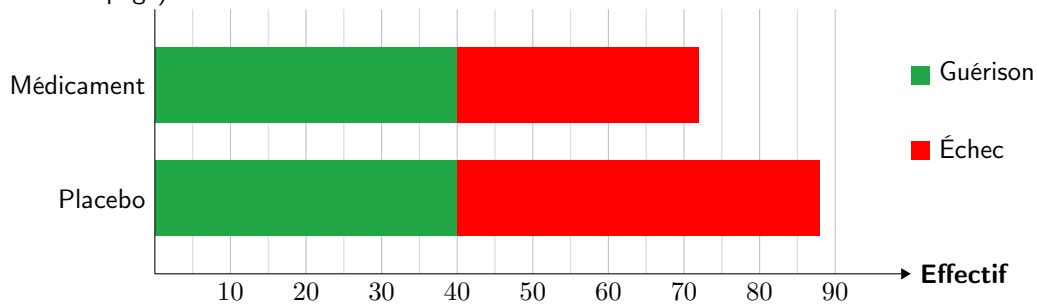
Un *diagramme en barres empilées* permet de représenter les données d'un tableau croisé d'effectifs. Le premier caractère est représenté le long de l'axe des abscisses (comme pour un diagramme en bâtons classique), et les effectifs pour chaque sous-population est représenté par des rectangles empilés, de couleurs différentes, dont les longueurs sont proportionnelles aux effectifs selon le second caractère (autrement dit, proportionnelles aux fréquences conditionnelles).

Exemple 20

On conduit une étude sur le taux de guérison de patients suite à l'administration d'un médicament face à un placebo.

	Guérison	Échec	Total
Médicament	40	32	72
Placebo	40	48	88
Total	80	80	160

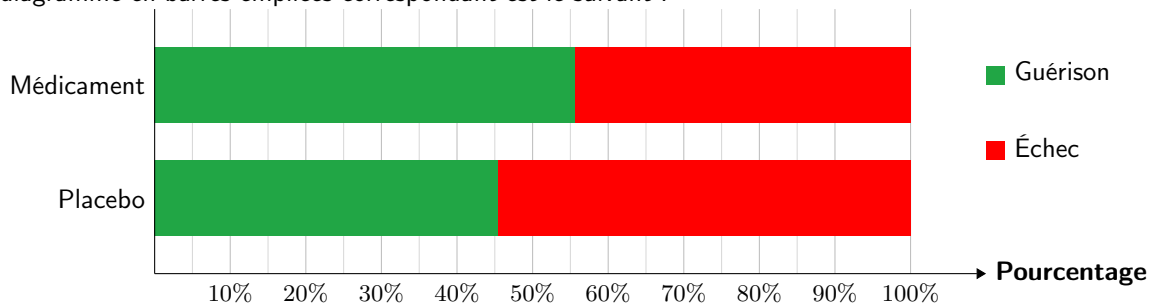
On peut réaliser le diagramme en barre superposées suivant (on présente les barres horizontalement pour gagner de la place sur la page) :



Dans ce genre de contexte où l'on souhaite comparer des caractères, *normaliser* les données est une bonne idée : calculons les taux de réussite et d'échec du médicament et du placebo.

	Guérison	Échec
Médicament	55,6%	44,4%
Placebo	45,4%	54,5%

Le diagramme en barres empilées correspondant est le suivant :



On constate donc que le médicament est plus efficace que le placebo.

Application 21 (Le paradoxe de Simpson)

On reprend le contexte et les données de l'exemple 20 ci-dessus.

Regardons les résultats de l'étude de plus près : distinguons les effectifs selon si le patient est un homme ou une femme.

HOMMES			
	Guérison	Échec	Total
Médicament	36	24	
Placebo	14	6	
Total			

FEMMES			
	Guérison	Échec	Total
Médicament	4	16	
Placebo	18	42	
Total			

- 1► Complétez les marges des tableaux.
- 2► Représentez dans deux diagrammes en barres empilées les taux de réussite et d'échec du médicament et du placebo selon le sexe.
- 3► Commentez les résultats, et proposez une explication.

(Source : [Les statistiques vues de biais / Voyage au pays des maths / ARTE sur YouTube](#))

B – Nuages de points**Nuage de points****Définition 22**

Quand on dispose d'une série statistique dans laquelle chaque individu de la population est décrit par deux variables numériques (on dit également «par deux *caractères quantitatifs*»), on peut représenter chaque individu par un point dans un repère, en plaçant en abscisse et en ordonnée les deux variables en question. On parle alors de *nuage de points*.

Point moyen**Définition 23**

Le *point moyen* d'un nuage de points est le point dont l'abscisse est la moyenne des abscisses des points du nuage, et de même pour son ordonnée.

Exemple 24

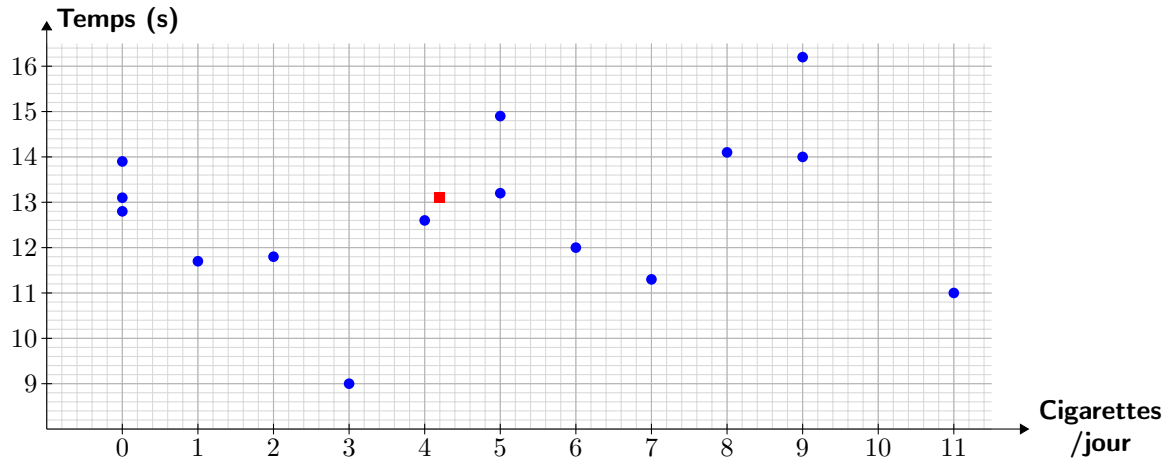
On mesure les temps de course aux 50 mètres dans une classe de lycéens, et on demande à chaque coureur le nombre de cigarettes qu'ils fument chaque jour. Les données sont rassemblées dans le tableau suivant (sur deux lignes) :

Cigarettes	0	1	0	0	2	4	8	5
Temps (s)	13,1	11,7	13,9	12,9	11,8	12,6	14,1	13,2

Cigarettes	6	9	9	5	7	3
Temps (s)	12	14	16,2	14,9	11,3	11,9

Si on place le nombre de cigarettes en abscisse et le temps en ordonnée, on obtient le nuage de point suivant (données en disques bleus). La moyenne du nombre de cigarettes fumées par jour est $\frac{59}{14} \approx 4,2$, et la moyenne des

temps de courses est $\frac{183,6}{14} \approx 13,1$ s. Le point moyen a donc approximativement pour coordonnées (4,2 ; 13,1) (carré rouge).



Remarquez que les axes ne se croisent pas en (0,0) : cela permet d'améliorer la lisibilité en compactant le graphique.

Droite d'ajustement

Définition 25

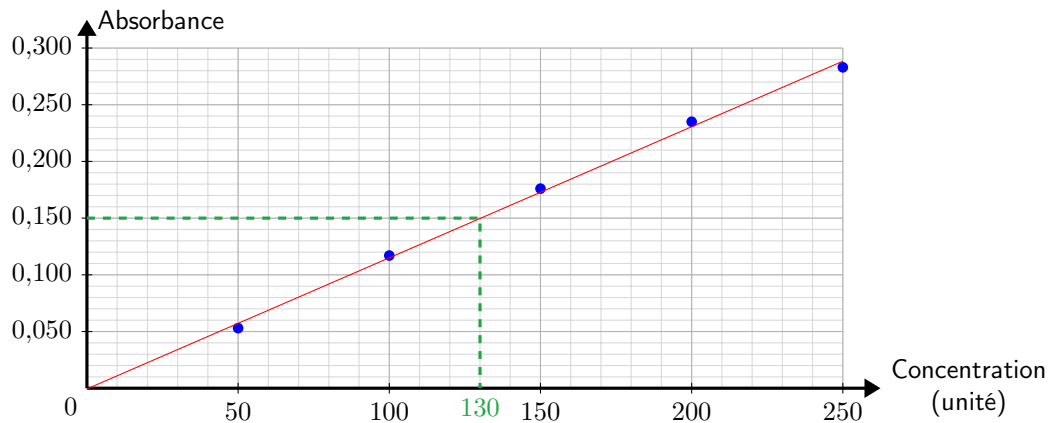
Lorsque les points d'un nuage de point semblent plus ou moins alignés, on peut essayer de chercher une droite qui passe à peu près au milieu de tous les points : on appelle une telle droite une *droite d'ajustement*.

Exemple 26

Pour déterminer la concentration en protéines dans un prélèvement, on peut mesurer l'absorbance de l'échantillon. Afin de régler l'appareil de mesure, on prépare plusieurs étalons à concentration connue. Le tableau suivant donne les résultats de ces tests (on ne se souciera pas des unités) :

Concentration (unité)	50	100	150	200	250
Absorbance	0,053	0,117	0,176	0,235	0,283

On trace à l'œil une droite d'ajustement. On peut l'exploiter directement pour effectuer la mesure recherchée : si, pour l'échantillon à tester, on trouve une absorbance de 0,150, alors la concentration en protéines de l'échantillon est l'antécédent de cette valeur selon la droite d'ajustement, soit environ 130 (dans l'unité de l'axe).



Méthode 27 (Méthode de Mayer)

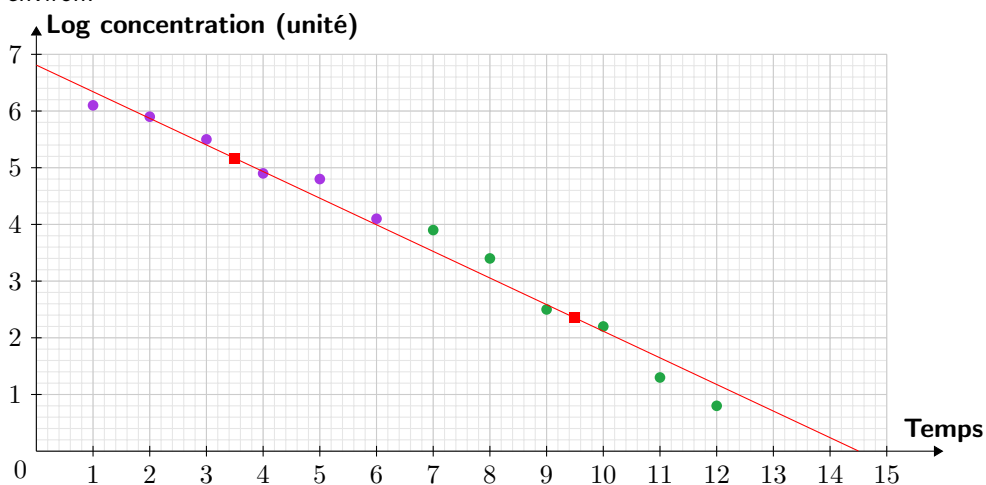
- 1► On trie la série de données selon les abscisses croissantes.
- 2► On sépare la série en deux groupes de tailles identiques (à une donnée près, si l'effectif est impair), comme si on cherchait la médiane des abscisses.
- 3► On détermine le point moyen de ces deux groupes.
- 4► On trace la droite reliant les deux points moyens calculés.

Exemple 28

On mesure le logarithme (rendez vous en terminale pour apprendre ce que cela signifie!) de la concentration d'un médicament dans le sang d'un patient en fonction du temps en heures après l'absorption. Le tableau des relevés est le suivant :

Temps (h)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Log concentration (unité)	6,1	5,9	5,5	4,9	4,8	4,1	3,9	3,4	2,5	2,2	1,3	0,8

On sépare les relevés en deux groupes : avant 6h (en violet dans le nuage de points) et après 6h (en vert). On calcule leurs points moyens (les carrés rouges dans le nuage de points) : respectivement de coordonnées (3,5 ; 5,2) et (9,5 ; 2,4) environ. En les reliant, on trouve une droite d'ajustement pour la série de données. Notamment, en prolongeant celle-ci, on trouve que le logarithme de la concentration atteint 0 après 14,5h de traitement environ.



Remarque 29

Il existe d'autres méthodes, plus précises, notamment la *méthode des moindres carrés*, utilisée par les calculatrices.

Exercices

Exercice 1

Une classe de mathématiques spécifiques a obtenu les résultats suivants lors du contrôle sur les statistiques. Pour vous faciliter la lecture, nous les avons rangés dans l'ordre croissant.

0,5 0,5 4 5 6 7 9 9 9,5 10 10 11 11 11,5 12 13 14,5 15 15,5 16

- 1► Donner les valeurs minimales et maximales de la série statistique.
- 2► En déduire l'étendue de la série statistique.
- 3► Donner une médiane de la série statistique.
- 4► Donner les premiers et troisièmes quartiles de la série statistique.
- 5► Construire un diagramme en boîte à moustache pour représenter la répartition des notes.
 - a► Tracer un segment de 20 carreaux de longueur. Graduer les extrêmes 0 et 20.
 - b► Placer deux barres verticales pour représenter les valeurs maximales et minimales de la série statistiques sur le segment.
 - c► Placer trois barres verticales pour représenter le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.
 - d► Former un rectangle dont deux des côtés sont le premier quartile et le troisième quartile.
- 6► Calculer la moyenne.

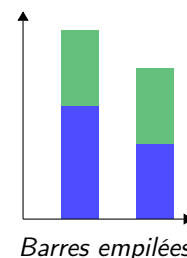
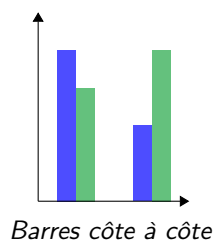
Exercice 2

On a interrogé les employés d'une entreprise sur la manière dont ils se rendent au travail chaque jour (en voiture ou en transports en commun).

Sur un total de 240 employés, un tiers sont des hommes qui prennent la voiture, trois huitièmes sont des femmes empruntant les transports en commun. Il y a 140 hommes en tout dans l'entreprise.

- 1► Construire un tableau croisé d'effectifs adapté à la situation et le compléter.
- 2► Construire un diagramme en barres illustrant les données de votre tableau croisé d'effectifs.
 - Tracez l'axe des ordonnées en fonction des quantités que vous souhaitez représenter !
 - Ne pas oublier de légender les axes et de nommer le diagramme.

Ci-dessous deux manières de réaliser des diagrammes en barres. On choisit une représentation plutôt qu'une autre en fonction des quantités qu'on souhaite comparer.



- 3► Construire un diagramme circulaire illustrant les données de votre tableau croisé d'effectifs. *Il est recommandé d'utiliser la technique vue en cours avec le tableau de proportionnalité avec les angles.*
- 4► Donner une raison pour laquelle on choisirait une représentation plutôt qu'une autre.

Exercice 3



Dans un des championnats de basket organisés entre les équipes françaises pour la saison 2024/2025, on souhaite sans avoir à regarder tous les matchs, en savoir un peu plus sur le style de jeu des équipes. Une simple recherche sur internet permet d'obtenir les statistiques par équipe, comptant sur la saison le nombre de points, de rebonds, de passes décisives, d'interceptions et d'autres informations encore.

On a ici décidé que le nombre de points marqués était un bon indicateur de la capacité d'une équipe à attaquer, et le nombre d'interceptions, un bon indicateur de la capacité d'une équipe à défendre.

Équipe	Points	Interceptions
Paris	2 847	179
Bourg en Bresse	2 685	234
Lyon Villeurbanne	2 676	192
Le Mans	2 639	210
Châlon sur Saône	2 610	195

Équipe	Points	Interceptions
Monaco	2 610	198
Cholet	2 551	204
Nancy	2 544	191
Dijon	2 533	194
Nanterre	2 478	250

1► Travail préparatoire

- a► Donner le nombre maximum et minimum de points marqués. En déduire l'étendue.
- b► En considérant un arrondi pratique de cette étendue, construire l'axe des ordonnées, sur 20 carreaux de hauteur. Légender l'axe.
- c► Donner le nombre maximum et minimum d'interceptions. En déduire l'étendue.
- d► En considérant un arrondi pratique de cette étendue, construire l'axe des abscisses, sur 20 carreaux de longueur. Légender l'axe.

2► Placer sur le repère les positions des dix équipes en inscrivant leur nom proche de chaque point.

3► Pour comparer les équipes entre elles, il peut être utile de calculer la position du point moyen.

- a► Calculer le nombre moyen de points marqués par ces équipes.
- b► Calculer le nombre moyen d'interceptions marqués par ces équipes.
- c► Placer le point moyen.

Exercice 4

On s'intéresse au nombre de buts par match dans un championnat de football.

SAISON 2023

Nombre de buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	5	9	12	6	4	2	1	0	0	1

SAISON 2024

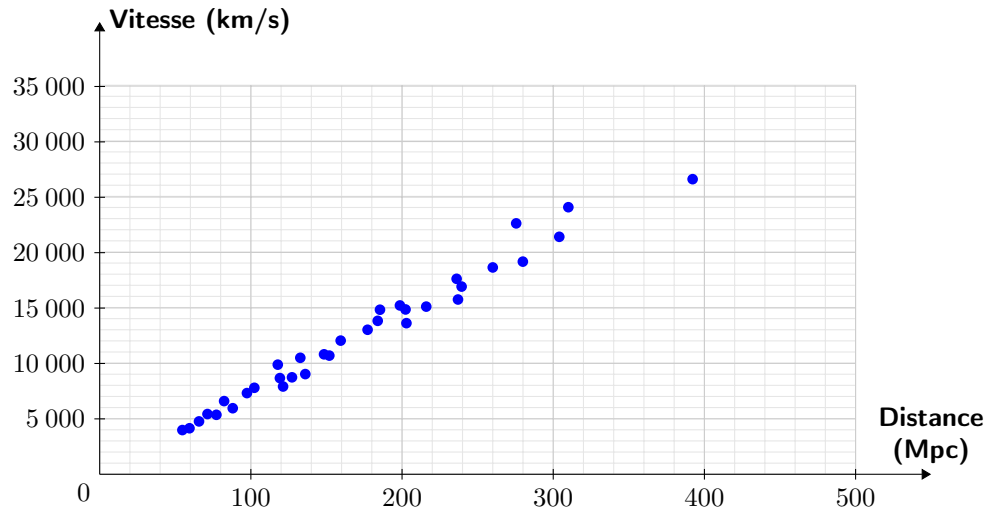
Nombre de buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	12	10	6	2	3	2	1	2	2	0

À l'aide des indicateurs statistiques que vous connaissez, décrire et comparer les deux saisons.

Exercice 5

Dans les années 1920, les physiciens découvrent que l'univers est en expansion : les galaxies s'éloignent les unes des autres. Les travaux de Georges Lemaître et Edwin Hubble ont permis de quantifier cet éloignement : plus deux galaxies sont distantes l'une de l'autre, plus elles s'éloignent rapidement.

Le graphique ci-dessous résume quelques mesures de la vitesse d'éloignement (en km/s) en fonction de la distance (en mégaparsecs, unité notée Mpc).



- 1► Comment appelle-t-on ce type de graphique ?
- 2► Quelle propriété ces données ont-elles de remarquable ?
- 3► Tracer à l'œil une droite d'ajustement, et déterminer son équation.
- 4► Des outils plus performants ont permis de mesurer la vitesse d'éloignement d'une galaxie très lointaine : à 6 000 Mpc, sa vitesse d'éloignement est de 282 000 km/s. Est-ce cohérent avec la droite d'ajustement précédente ?

Exercice 6

Lors de travaux pratiques, une classe doit mesurer la masse volumique d'un métal. Les résultats de chaque groupe sont donnés dans les colonnes du tableau suivant :

Masse (g)	20	50	10	100	50	20	500	5	75	75
Volume (mL)	2,22	5,68	1,40	11,78	5,93	2,45	58,50	0,47	8,98	9,00

- 1► Représenter les mesures des élèves dans un graphique. On choisira de manière pertinente le type de graphique et l'échelle des axes.
- 2► À l'aide de la méthode de Mayer, tracer une droite d'ajustement de ces données. En déterminer l'équation **par le calcul**.
- 3► Dans le contexte des travaux pratiques de cette classe, à quoi correspond la pente de la droite d'ajustement ?

9 Variables aléatoires

Table des matières

1	Variables aléatoires, loi de probabilités, espérance	92
2	Loi de Bernoulli	93
	Exercices	95

Programme

Variables aléatoires

Contenus

- ▶ Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance.
- ▶ Loi de Bernoulli $(0, 1)$ de paramètre p , espérance.

Capacités attendues

- ▶ Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}, \{X \leq a\}$ où X désigne une variable aléatoire et calculer les probabilités correspondantes $P(X = a), P(X \leq a)$.
- ▶ Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
- ▶ Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
- ▶ Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points.
- ▶ Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p .

Commentaires

- ▶ On s'abstient de tout formalisme sur les variables aléatoires. Elles sont essentiellement manipulées en contexte pour modéliser des situations dans lesquelles les issues sont des nombres aléatoires.
- ▶ La simulation d'échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p permet d'observer la fluctuation d'échantillonnage.

- ▶ Sur des simulations de N échantillons (N de l'ordre de plusieurs centaines), on évalue le pourcentage d'échantillons dont la fréquence observée des 1 se situe à une distance $s, 2s$ ou $3s$ de p où s désigne l'écart-type de la série des fréquences observées. Sans développer de théorie de décision ou de test, et en prenant appui sur des simulations et des représentations (histogramme, nuage de points), on fait percevoir, pour une observation donnée, la diversité des interprétations possibles de la distance à p (paramètre du modèle) de la fréquence des 1 : situation fréquente ou situation rare dans le cadre du modèle.
- ▶ Sur des simulations, on constate que la série des fréquences observées des 1 dans N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli a un écart-type de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour plusieurs valeurs de n on représente $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en abscisse et, en ordonnée, l'écart-type s des fréquences observées des 1 dans N échantillons (plusieurs centaines) de taille n . On peut commenter ce résultat en observant que pour diviser la dispersion par k il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2 .

Situations algorithmiques (sauf série STD2A)

- ▶ Simuler des échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli à partir d'un générateur de nombres aléatoires entre 0 et 1.
- ▶ Représenter par un histogramme ou par un nuage de points les fréquences observées des 1 dans N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli.
- ▶ Compter le nombre de valeurs situées dans un intervalle de la forme $[p - ks; p + ks]$ pour $k \in \{1; 2; 3\}$.

1 – Variables aléatoires, loi de probabilités, espérance

Variable aléatoire

Définition 1

Une *variable aléatoire* est une fonction qui, à une issue, associe un nombre :

$$X : \text{issue} \mapsto \text{nombre}$$

Exemple 2

- ▶ On lance un dé à 6 faces. On peut considérer la variable aléatoire X qui prend la valeur du dé. On peut aussi considérer la variable aléatoire Y qui prend le double de la valeur du dé.
- ▶ On lance deux dés successivement. On peut considérer la variable aléatoire X qui est égale au couple des deux valeurs obtenues dans l'ordre (par exemple : $(1; 3)$, $(6; 4)$, ...). On peut aussi considérer la variable Y qui prend la valeur de la somme des deux dés.
- ▶ On choisit un élève au hasard dans la classe. On peut considérer la variable aléatoire X qui vaut 1 si l'élève porte des lunettes, et 0 sinon.

Les événements liés à une variable aléatoire se notent entre parenthèses ou entre accolades. Par exemple : considérons la variable aléatoire X qui prend la valeur du lancer d'un dé à 6 faces.

- ▶ L'événement $\{X = 5\}$ correspond à l'événement «obtenir 5»
- ▶ L'événement $\{X \geq 2\}$ correspond à l'événement «obtenir 2 ou plus»
- ▶ L'événement $\{X \neq 6\}$ correspond à l'événement «ne pas obtenir 6»

Loi de probabilité

Définition 3

La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire est la donnée des probabilités de chacune de ses valeurs possibles.

Exemple 4

- ▶ Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur d'un dé à 6 faces. La loi de probabilité de X est :

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- ▶ Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur de la somme de deux dés à 6 faces. La loi de probabilité de X est :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Proposition 5

La somme de toutes les probabilités de la loi de probabilité d'une variable aléatoire vaut toujours 1.

Espérance

Définition 6

L'*espérance* d'une variable aléatoire X est la valeur moyenne prise par X , donnée par la formule :

$$E[X] = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) + \dots$$

Exemple 7

- Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur d'un dé à 6 faces. Son espérance est :

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ = 3,5$$

Conclusion : lorsqu'on effectue un grand nombre de lancers, la moyenne de tous les résultats se rapproche de 3,5.

- Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur de la somme de deux dés à 6 faces. Son espérance est :

$$E[X] = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} \\ + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

Conclusion : lorsqu'on effectue un grand nombre de lancers, la moyenne de tous les résultats se rapproche de 7.

- Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par $P(X = 0) = 0,4$ et $P(X = 1) = 0,6$. Son espérance est donc $E[X] = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,6 = 0,6$.

Remarque 8

Dans un tableur, la fonction SOMMEPROD permet exactement cette opération : elle calcule la somme des produits ligne par ligne/colonne par colonne des cellules de deux plages de données.

	A	B	C	D	E
1	i	1	2	3	4
2	P(X=i)	0,2	0,5	0,25	0,05
3					
4	=SOMMEPROD(B1:E1;B2:E2)				

2 – Loi de Bernoulli**Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli****Définition 9**

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire à 2 issues : l'une appelée *succès*, et l'autre appelée *échec*.

On dit qu'une variable aléatoire X *suit la loi de Bernoulli de paramètre p* , et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si elle mesure le succès d'une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p . Plus précisément, $X \sim \mathcal{B}(p)$ si sa loi de probabilité est :

i	0	1
$P(X = i)$	$1 - p$	p

Remarque 10

On parle parfois de *variable aléatoire de Bernoulli* comme raccourci pour désigner une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.

Exemple 11

- Lancer un pièce équilibrée constitue une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $\frac{1}{2}$.
- On lance un dé à 6 faces. La variable aléatoire X qui vaut 1 quand on obtient 1, et 0 sinon, suit la loi $\mathcal{B}(1/6)$.

Définition 12

Indépendance

On dit que deux expériences aléatoires successives sont *indépendantes* lorsque le résultat de la première n'influence pas la seconde expérience.

Définition 13

Schéma de Bernoulli

Un *schéma de Bernoulli* est la répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Un schéma de Bernoulli, avec par exemple 3 épreuves successives, correspond à l'arbre pondéré suivant (on note S l'événement correspondant au succès).

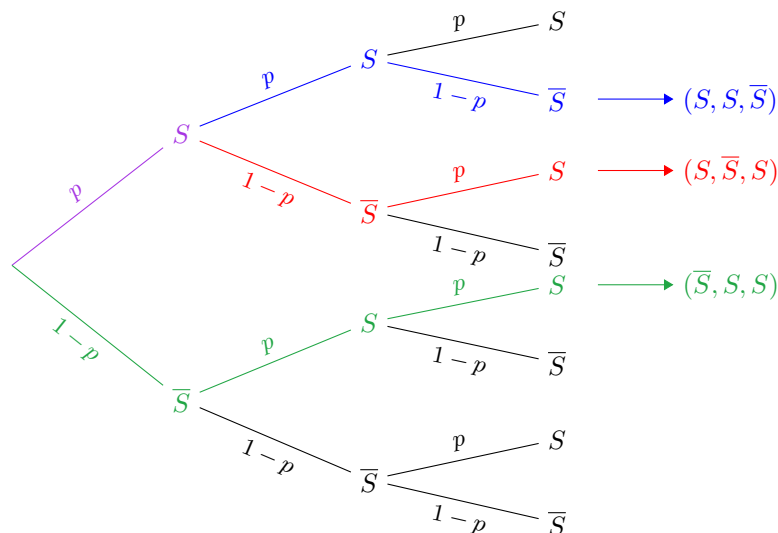
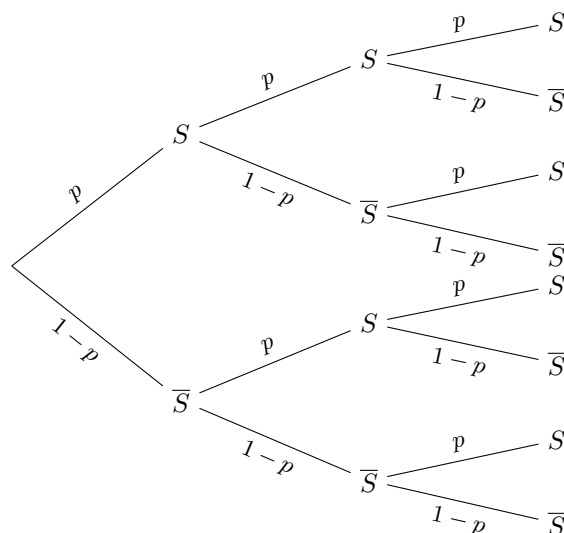
On représente les issues d'un schéma de Bernoulli par la liste des résultats de chaque épreuve : par exemple, pour représenter un succès puis deux échecs, on peut écrire $(S, \bar{S}, \bar{S})$, ou encore $(1, 0, 0)$ si on a introduit la variable aléatoire de Bernoulli adéquate.

On sait que la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées en chemin : dans le cas de l'issue $(S, \bar{S}, \bar{S})$, la probabilité est donc $p \times (1-p) \times (1-p)$.

Dans un schéma de Bernoulli, on s'intéresse le plus souvent au nombre de succès, sans s'intéresser à leur position : pour cela, il suffit d'ajouter les probabilités de tous les chemins correspondants.

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de probabilité de succès p à 3 épreuves. On se demande quelle est la probabilité que $X = 2$, c'est-à-dire d'obtenir 2 succès. Il y a 3 chemins qui y mènent : $(S, S, \bar{S})$, $(S, \bar{S}, S)$ et $(\bar{S}, S, S)$.

La probabilité de chacun de ces chemins est $p^2(1-p)$, donc $P(X = 2) = 3p^2(1-p)$.



Exercices

Exercice 1

On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On note X la variable aléatoire qui compte la somme des deux dés.

- 1► Tracer un tableau à 6 lignes, représentant les résultats du premier dé, et 6 colonnes, représentant le résultat du second dé. Dans chaque case du tableau, calculer la somme des deux dés.
- 2► À partir du tableau de valeurs, déterminer la loi de X .
- 3► Calculer l'espérance de X . Interpréter.

Exercice 2

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as de 4 couleurs : cœur, carreau, trèfle, pique).

Si on obtient un 7, 8, 9 ou 10, on perd 3 euros. Si on obtient un valet, une dame ou un roi, on gagne 2 euros. Si on obtient un as, on gagne 5 euros.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

Donner la loi de X sous forme d'un tableau, et calculer son espérance. Interpréter.

Exercice 3

Une urne contient 5 boules bleues, 3 rouges et 4 vertes. On tire simultanément 3 boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges dans un tirage.

- 1► Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2► Décrire l'événement $\{X = 2\}$ par une phrase.
- 3► Décrire l'événement $\{X \leq 1\}$ par une phrase.

Exercice 4

On lance un dé équilibré à 6 faces. On gagne 5 euros si on obtient la face 3, et 1 euro dans les autres cas. On note X la variable aléatoire qui compte les gains.

- 1► Donner $P(X = 1)$.
- 2► Donner $P(X = 5)$.
- 3► Déterminer l'espérance de X . Interpréter.

Exercice 5

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre peluches vendues par un vendeur en une heure. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, dont une probabilité est manquante (notée p) :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,45	0,3	0,15	p

- 1► Donner $P(X = 1)$.
- 2► Calculer $P(X \leq 1)$.
- 3► Déterminer la probabilité p .
- 4► Déterminer l'espérance de X . Interpréter.

Exercice 6

On lance 4 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est de 0,75, et on s'intéresse aux nombres de Pile obtenus.

- 1► Justifier que l'on peut associer la situation à un schéma de Bernoulli. Préciser les paramètres.
- 2► Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
- 3► Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois Pile.

Exercice 7

On tire 3 cartes avec remise dans un jeu complet de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de trèfles obtenus.

- 1► Justifier que l'on peut associer la situation à un schéma de Bernoulli. Préciser les paramètres.
- 2► Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
- 3► Calculer la probabilité de piocher au moins 1 trèfle.

10 Rappels sur les fonctions affines

Table des matières

1	Point de vue algébrique	98
2	Point de vue géométrique	99
	Exercices	102

Programme

Automatismes

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Fonctions et représentations

- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations.
- Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur.
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite.
- Déterminer le coefficient directeur d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points.

1 – Point de vue algébrique

Définition 1

Fonction affine

Une fonction f est dite **affine** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax + b$$

- ▶ Le nombre a est appelé **coefficient directeur** ou **pente** de f .
- ▶ Le nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de f .

Exemple 2

Les fonctions définies par $f(x) = 2x + 3$, par $g(x) = -5x + 8$, ou par $h(x) = -\frac{2}{5}x + 1,8$ sont des fonctions affines.

Les fonctions définies par $f(x) = \frac{2}{x} + 6$, ou par $g(x) = 3x^2 + 6$ ou par $h(x) = \sqrt{2x + 9}$ ne sont pas affines.

Définition 3

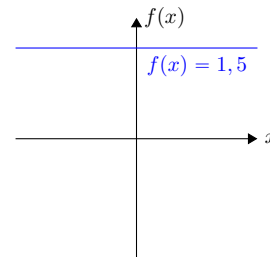
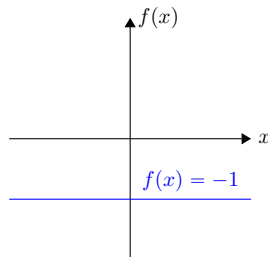
Fonction constante, fonction linéaire

Une fonction affine est dite :

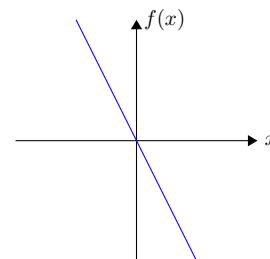
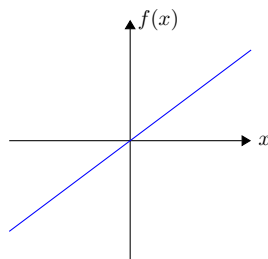
- ▶ **linéaire** lorsque $b = 0$,
- ▶ **constante** lorsque $a = 0$.

Remarque 4 (Cas constant et linéaire graphiquement)

- ▶ Si $a = 0$, alors f est constante : la droite est parallèle à l'axe des abscisses.



- ▶ Si $b = 0$, alors f est **linéaire**. Elle passe par l'origine du repère.



(Pour rappel, une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité!)

Proposition 5

Si f est affine, alors pour n'importe quelles valeurs x et y distinctes, la pente se calcule par la formule :

$$a = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Méthode 6 (Trouver l'expression de f avec 2 valeurs données)

Sur un exemple : trouvons l'expression de la fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(3) = 9$.
D'après la proposition précédente, le coefficient directeur de f peut être calculé comme :

$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine, on pose une petite équation. Notons la b , de sorte que :

$$f(x) = ax + b = 2x + b$$

On sait que $f(1) = 5$, mais $f(1) = 2 \times 1 + b = 2 + b$, donc :

$$5 = 2 + b \quad \text{donc} \quad b = 3$$

et finalement $f(x) = 2x + 3$.

Application 7

Déterminer l'expression de la fonction affine f telle que $f(3) = 12$ et $f(8) = 19$.

2 – Point de vue géométrique

Dans ce paragraphe, on munit le plan d'un repère orthonormé.

Théorème 8

Une fonction est affine *si, et seulement si* sa courbe représentative est une droite.

Méthode 9 (Trouver l'expression de f avec 2 points de passage)

Supposons que la courbe de f passe par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Cela signifie donc que $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$. On se ramène donc à la méthode algébrique précédente.

On en dégage la formule souvent vue suivante :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

On peut calculer b en faisant $b = y_A - a \times x_A$ (ou qui $y_B - a \times x_B$ qui donne le même résultat).

Remarque 10 (Erreurs fréquentes)

On peut échanger les rôles de A et de B , la seule chose qui importe est l'ordre : soit on écrit les coordonnées de B d'abord et celles de A ensuite, soit l'inverse, mais on ne les mélange pas. Attention à bien mettre les deux ordonnées en haut, et les deux abscisses en bas.

Exemple 11

Déterminons l'expression de la fonction affine passant par $A(16; 25)$ et $B(22; 34)$.

D'après la formule, $a = \frac{34 - 25}{22 - 16} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, et $b = 25 - \frac{3}{2} \times 16 = 1$.

Ainsi, $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

Application 12

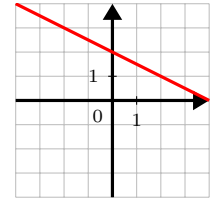
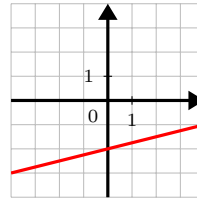
Déterminer les expressions des fonctions affines passant par les points donnés à l'aide la méthode précédente :

1► $A(12; 26)$ et $B(16; 36)$

2► $A(15; 8)$ et $B\left(15; \frac{5}{7}\right)$

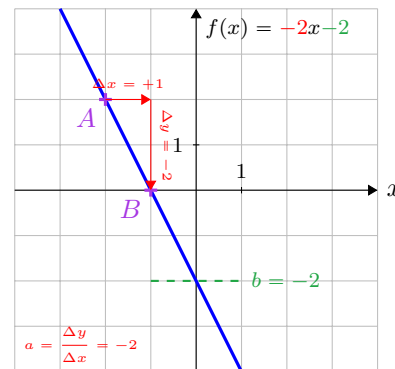
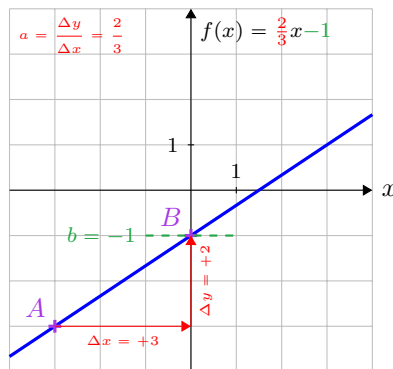
Application 13

Déterminer les expressions des fonctions affines suivantes à l'aide la méthode précédente (on choisira deux points de passage pertinents) :



Méthode 14 (Trouver a et b graphiquement)

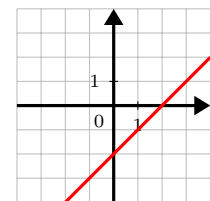
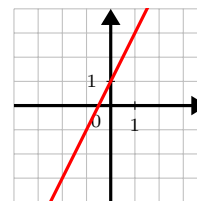
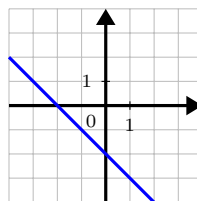
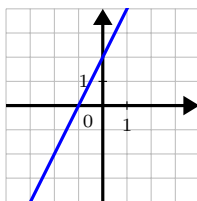
- 1► On trouve le coefficient directeur a en calculant le rapport du déplacement vertical par le déplacement horizontal entre deux points de passage bien identifiés : on trouve deux points A et B du quadrillage par lesquels la droite passe, et on applique la formule de la méthode précédente.
- 2► Regardons l'**ordonnée à l'origine**, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse 0, autrement l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées. Si elle passe pile sur une graduation, alors on a le droit de lire b directement, sinon on pose une petite équation avec un point de passage, comme dans la méthode précédente.



(Attention, quand on les compte vers la gauche ou vers le bas, les carreaux sont comptés négativement, comme dans le second exemple.)

Application 15

Déterminer les expressions des fonctions affines représentées ci-dessous :



Méthode 16 (Tracer f à partir de son expression – méthode par calcul)

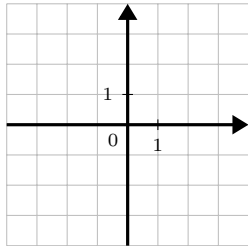
On détermine deux points A et B de passage en calculant deux images pratiques.

Exemple : on veut tracer $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$. On considère les images $f(0) = 1$ et $f(3) = 3$, qui donnent les points

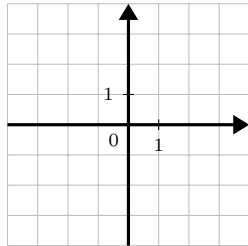
de passage A et B de coordonnées $(0; 1)$ et $(3; 3)$. On trace enfin la droite passant par ces deux points.

Application 17

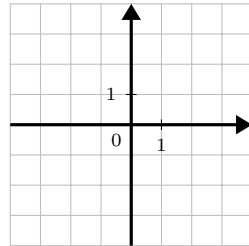
Tracer les fonctions suivantes en utilisant la méthode précédente :



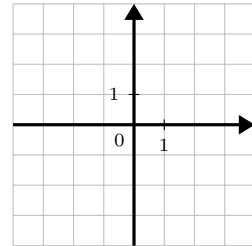
$$f(x) = -2x + 3$$



$$f(x) = x - 3$$



$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$



$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

Méthode 18 (Tracer f à partir de son expression – méthode géométrique)

1► Déterminer un point de passage de la droite sur le quadrillage (en général, l'ordonnée à l'origine est le meilleur candidat).

2► Ensuite,

Si le coefficient directeur est un entier :

- Partant du point précédent, on déplace le crayon de 1 carreau vers la droite.
- De là où se trouve le crayon, on monte ou on descend d'autant de carreaux que le coefficient directeur, selon son signe.

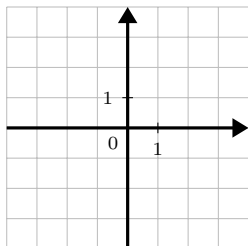
Sinon, si le coefficient directeur est une fraction :

- On déplace le crayon d'autant de carreaux vers la droite que le dénominateur.
- De là où se trouve le crayon, on monte ou on descend d'autant de carreaux que le numérateur, selon son signe.

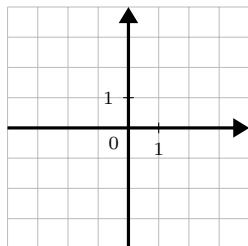
3► Cela fournit un second point de passage. On trace la droite passant par ces deux points.

Application 19

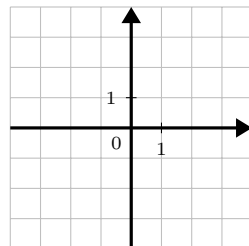
Tracer les fonctions suivantes en utilisant la méthode précédente :



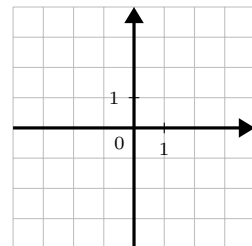
$$f(x) = 2x - 1$$



$$f(x) = -2x - 1$$



$$f(x) = \frac{2}{3}x + 3$$



$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$$

Remarque 20

- Si $a \geq 0$, alors f est croissante (« la droite monte »).
- Si $a \leq 0$, alors f est décroissante (« la droite descend »).

Exercices

S'exercer

Exercice 1

Déterminer la nature des fonctions suivantes. Si elles sont affines, donner leur coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

1► $f(x) = 189x - 1$

2► $g(x) = 19 - 5x$

3► $h(x) = \frac{2}{3}x$

4► $k(x) = \frac{7}{5x} + 2$

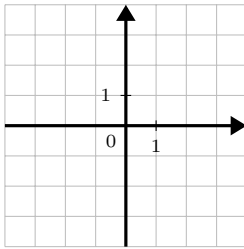
Exercice 2

1► Déterminer l'expression de la fonction affine vérifiant $f(12) = 36$ et $f(7) = 26$

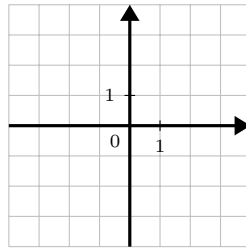
2► Déterminer l'expression de la fonction affine passant par les points $C(5; 7)$ et $D(11; 5)$

Exercice 3

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



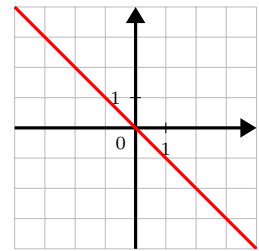
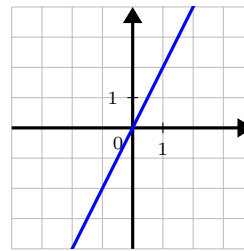
$$f(x) = 3x - 1$$



$$f(x) = -3x - 1$$

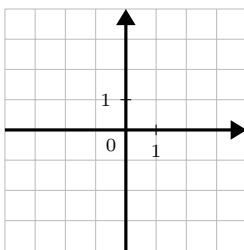
Exercice 5

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.

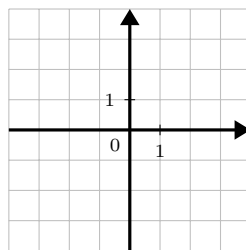


Exercice 4

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



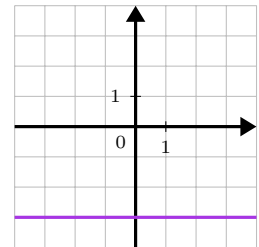
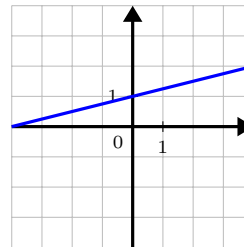
$$f(x) = \frac{1}{3}x - 1$$



$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

Exercice 6

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.



Exercice 7

Soit f définie par $f(x) = 12x - 50$.

1► Quelle est la nature de la fonction f ?

2► Calculer l'image de 19.

3► Justifier qu'il n'existe qu'un seul antécédent de

310, et le donner.

4► Quelles sont les variations de la fonction f ? Justifier.

S'entraîner

Exercice 8

Déterminer la nature des fonctions suivantes. Si elles sont affines, donner leur coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

1► $f(x) = \frac{3x}{11}$

2► $g(x) = 7 + \sqrt{3}x$

3► $h(x) = -27x + \pi^2$

4► $k(x) = 0,3x^3 - \frac{151}{3}$

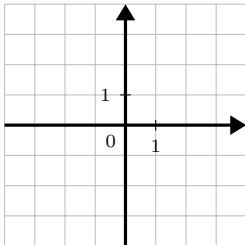
Exercice 9

1► Déterminer l'expression de la fonction affine vérifiant $f(0) = \frac{12}{7}$ et $f(4) = -1$

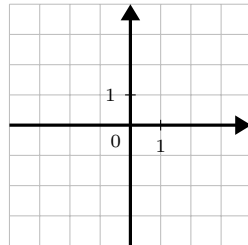
2► Déterminer l'expression de la fonction affine passant par les points $C(-10; 7)$ et $D(13; 7)$

Exercice 10

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



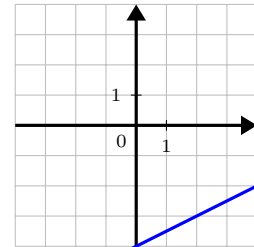
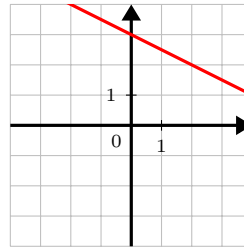
$f(x) = 2x$



$f(x) = x - 2$

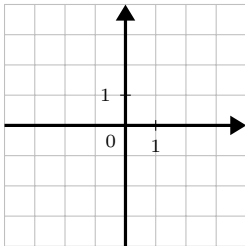
Exercice 12

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.

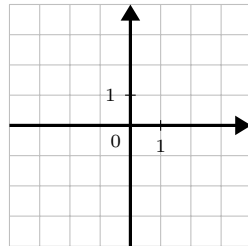


Exercice 11

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



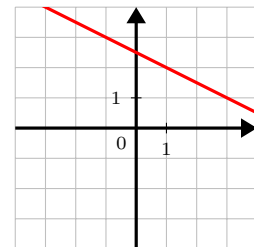
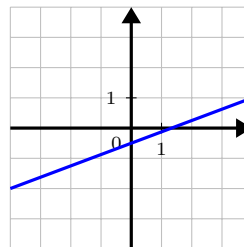
$f(x) = 2$



$f(x) = -2$

Exercice 13

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.



Exercice 14 (Voir à travers les apparences)

Démontrer que la fonction définie par l'expression $f(t) = 2t + 10 - \frac{60+t}{4}$ est affine.

11 Notion de nombre dérivé

Table des matières

1	Taux d'accroissement d'une sécante	106
2	De la sécante à la tangente	106
3	Nombre dérivé et tangente	107
	Exercices	108

Programme

Dérivation

Contenus

Point de vue local : approche graphique de la notion de nombre dérivé

- Sécantes à une courbe passant par un point donné ; taux de variation en un point.
- Tangente à une courbe en un point, définie comme position limite des sécantes passant par ce point.
- Nombre dérivé en un point défini comme limite du taux de variation en ce point.
- Équation réduite de la tangente en un point.

Capacités attendues

- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.

Commentaires

- La notion de nombre dérivé gagne à être illustrée dans des contextes variés :
 - dans le cadre d'un mouvement rectiligne, il est possible d'interpréter le taux de variation de la position du point mobile entre deux instants comme une vitesse moyenne et le nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
 - dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.
- À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on visualise la position limite des sécantes à une courbe en un point.
- Il est recommandé de ne pas donner la définition formelle de la notion de limite et de s'en tenir à une approche intuitive à partir d'exemples. Le vocabulaire et la notation correspondants sont introduits à l'occasion du travail sur la notion de nombre dérivé.
- Il est possible de démontrer que la dérivée d'une fonction monotone est de signe constant. La réciproque (admise) s'appuie sur l'interprétation géométrique du nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

1 – Taux d'accroissement d'une sécante

Définition 1

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts du plan. Le *coefficient directeur* ou la *pente* de la droite (AB) est le nombre :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

C'est une mesure du déplacement vertical proportionnellement au déplacement horizontal.

Coefficient directeur d'une droite

Il existe une infinité de manière de définir une même droite : il suffit d'en prendre deux autres points. Le coefficient directeur ne dépend pas des points que l'on choisit.

Remarque 2

Un pente positive signifie que la droite «monte» : plus les abscisses augmentent, plus les ordonnées augmentent.
Un pente négative signifie que la droite «descend» : plus les abscisses augmentent, plus les ordonnées diminuent.

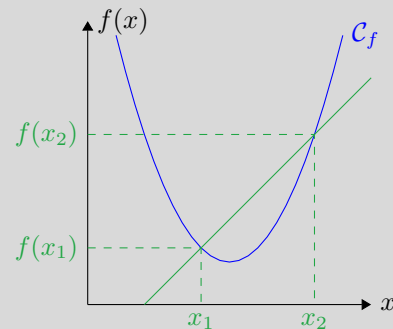
Définition 2

Soit f une fonction définie sur un ensemble D , soient x_1 et x_2 deux éléments de D .

Le *taux d'accroissement* de f entre x_1 et x_2 est le nombre :

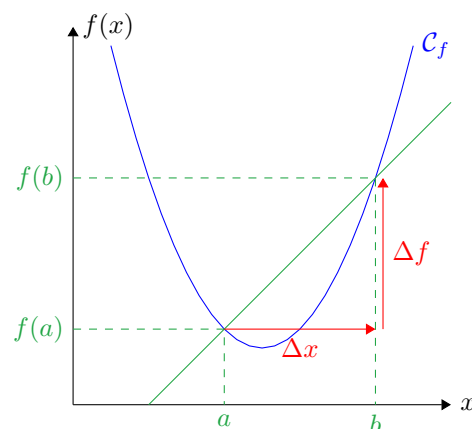
$$\tau_f(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Il correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$, droite que l'on appelle *sécante à la courbe de f entre x_1 et x_2* .



2 – De la sécante à la tangente

Si f représente une distance en fonction d'un temps, alors le taux d'accroissement entre les abscisses a et b correspond à la *vitesse moyenne* entre les instants a et b . La vitesse moyenne entre deux instants mesure le déplacement dans l'espace proportionnellement au déplacement dans le temps. Autrement dit, si vous prenez deux photos successives à deux instants a et y , la vitesse moyenne quantifie l'écart de position sur les deux photos. Mais plus on prend les photos rapidement, autrement dit plus l'intervalle de temps diminue, plus l'écart entre les positions diminue lui-même.



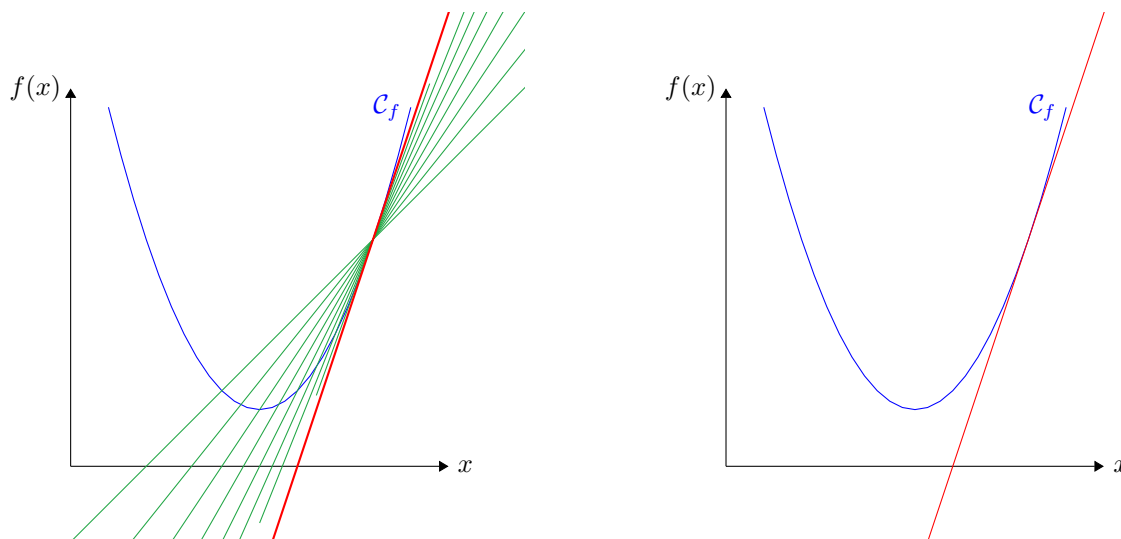
Le philosophe grec Zenon a donc formulé le paradoxe suivant : quand l'intervalle de temps entre les photos devient infiniment petit, les écarts de position deviennent également infiniment petit, si bien que selon Zenon, les objets ne bougent pas réellement, leur mouvement n'est qu'une illusion.

Ce n'est qu'au XVII^e siècle que Newton propose le formalisme mathématique qui permet de résoudre ce paradoxe. Alors que les instants a et b deviennent de plus en plus proches, la sécante qui leur correspond, quant à elle, semble

s'équilibrer autour d'une droite particulière. Ainsi, la vitesse moyenne – qui est, rappelons-le, la pente de la sécante – entre deux instants de plus en plus proche se rapproche vers un certain nombre, la pente de cette droite d'équilibre, que l'on va appeler *vitesse instantanée*.

(À voir : [Flâneries infinitésimales](#) / [Voyages au pays des maths](#) / [ARTE](#) sur YouTube)

Cette droite d'équilibre épouse la courbe représentative au niveau de l'instant limite : elle est *tangente* à la courbe.



3 – Nombre dérivé et tangente

Dans cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle I , et $a \in I$ qui n'est pas à la frontière de I .

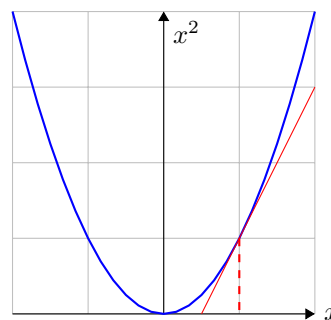
Nombre dérivé

Définition 4

Lorsque la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse a , on dit que f est *dérivable en a* . La pente de cette tangente est appelé *nombre dérivé de f en a* , il est noté $f'(a)$ (lu « f prime de a »).

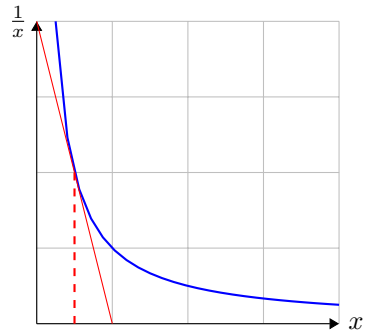
Exemple 5

- La fonction carré est dérivable en 1, et son nombre dérivé en 1 vaut 2.
Si on note $f : x \mapsto x^2$, on a alors $f'(1) = 2$.



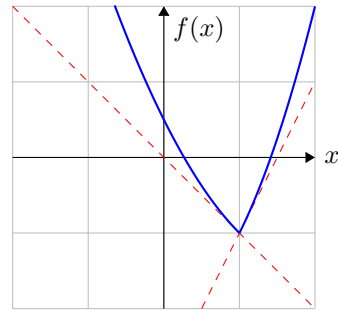
- La fonction inverse est dérivable en 0,5, et son nombre dérivé en 0,5 vaut -4 .

Si on note $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on a alors $f'(0,5) = -4$.



- La fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre n'est pas dérivable en 1 : on ne peut pas définir de tangente (il y a deux candidates).

De manière générale, si la courbe d'une fonction présente un angle ou un saut, alors la fonction associée ne sera pas dérivable en ce point.



Proposition 6

Équation de la tangente

Si f est dérivable en a , alors la tangente $T_a(f)$ a pour équation :

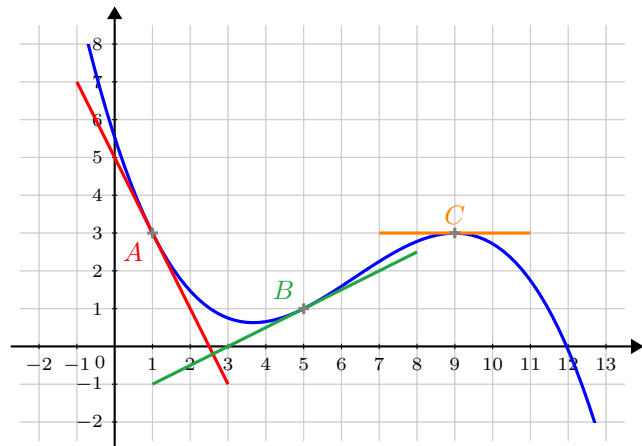
$$T_a(f) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercices

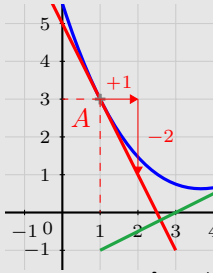
Exercice 1 (Guidé et corrigé)

Ci-contre est tracée une fonction f , et trois de ses tangentes. Pour chacune d'entre-elle, déterminer :

- l'abscisse a où la tangente est prise,
- l'image $f(a)$ de a par f ,
- le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a ,
- l'équation de la tangente en a (on rappellera la formule du cours).



Correction de l'exercice 1

**Tangente au point A :**

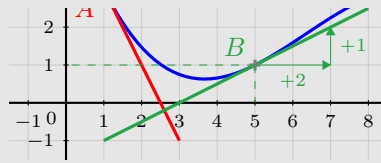
- L'abscisse du point A est 1, donc $a = 1$.
- L'ordonnée du point A est 3, donc $f(a) = 3$.
- Le coefficient directeur de la tangente est $\frac{-2}{1} = -2$ donc $f'(a) = -2$.
- On remplace les données précédentes dans la formule du cours pour avoir l'équation de la tangente en $a = 1$:

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$T_1 : y = -2(x - 1) + 3$$

$$= -2x - 2 \times (-1) + 3$$

$$T_1 : y = -2x + 5$$

**Tangente au point B :**

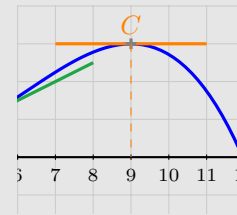
- L'abscisse du point B est 5, donc $a = 5$.
- L'ordonnée du point B est 1, donc $f(a) = 1$.
- Le coefficient directeur de la tangente est $\frac{1}{2} = 0,5$ donc $f'(a) = 0,5$.
- On remplace les données précédentes dans la formule du cours pour avoir l'équation de la tangente en $a = 5$:

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$T_5 : y = 0,5(x - 5) + 1$$

$$= 0,5x - 0,5 \times 5 + 1$$

$$T_5 : y = 0,5x - 1,5$$

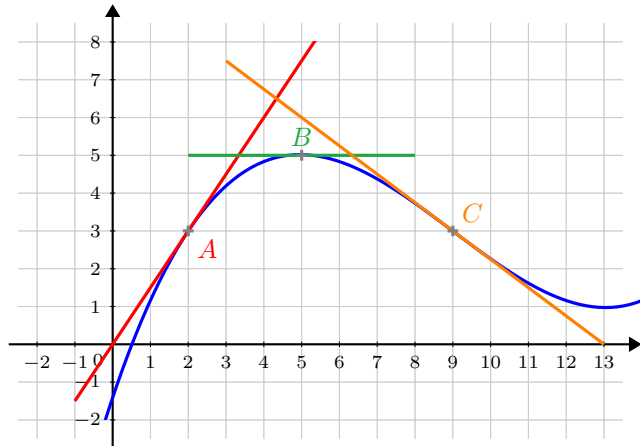
**Tangente au point C :**

- L'abscisse du point C est 9, donc $a = 9$.
- L'ordonnée du point C est 3, donc $f(a) = 3$.
- Le coefficient directeur de la tangente est 0 (car la tangente est horizontale) donc $f'(a) = 0$.
- L'équation de la tangente en $a = 9$ est $T_9 : y = f'(9)(x - 9) + f(9)$ c'est-à-dire $T_9 : y = 3$.

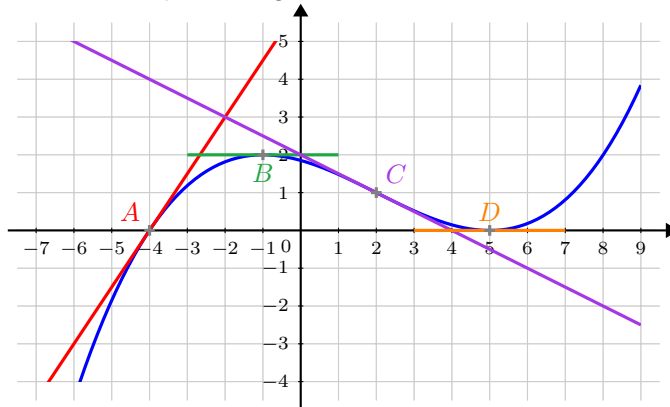
Exercice 2 (Guidé)

Ci-contre est tracée une fonction f , et trois de ses tangentes. Pour chacune d'entre-elle, déterminer :

- ▶ l'abscisse a où la tangente est prise,
- ▶ l'image $f(a)$ de a par f ,
- ▶ le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a ,
- ▶ l'équation de la tangente en a (on rappellera la formule du cours).

**Exercice 3 (À vous de jouer !)**

Déterminer l'équation de chacune des quatre tangentes ci-dessous :

**Exercice 4 (On change de forme)**

Dans chaque cas, déterminer l'équation (réduite) de la tangente :

1▶ $a = -1$; $f(a) = -1$; $f'(a) = -2$

3▶ $a = 1,5$; $f(a) = -2,5$; $f'(a) = 3$

2▶ $a = 0$; $f(a) = 0$; $f'(a) = 1$

4▶ $a = 3$; $f(a) = 8$; $f'(a) = 0$

Exercice 5 (À l'envers)

Soit f une fonction qui admet une tangente T d'équation $T : y = 2x - 8$.

- ▶ Montrer que $2x - 8 = 2(x - 3) - 2$.
- ▶ En déduire l'abscisse a correspondant à la tangente T , ainsi que $f(a)$ et $f'(a)$.

12 Dérivation et variations des fonctions numériques

Table des matières

1	Fonction dérivée	112
2	Variations et signes de la dérivée	113
3	Extrema d'une fonction	114
	Exercices	115

Programme

Dérivation

Contenus

Point de vue global

- ▶ Fonction dérivée ;
- ▶ Fonctions dérivées de : $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3$.
- ▶ Dérivée d'une somme, dérivée de kf ($k \in \mathbb{R}$), dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
- ▶ Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée.
- ▶ Tableau de variations, extrema.

Capacités attendues

- ▶ Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.
- ▶ Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- ▶ Déterminer le sens de variation et les extrema d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Commentaires

- ▶ La notion de nombre dérivé gagne à être illustrée dans des contextes variés :
 - ▶ dans le cadre d'un mouvement rectiligne, il est possible d'interpréter le taux de variation de la position du point mobile entre deux instants comme une vitesse moyenne et le nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
 - ▶ dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.
- ▶ Il est possible de démontrer que la dérivée d'une fonction monotone est de signe constant. La réciproque (admise) s'appuie sur l'interprétation géométrique du nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.

1 – Fonction dérivée

Soit f définie sur un intervalle *ouvert* I (c'est-à-dire que les bornes sont exclues).

Définition 1

Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point de I , alors on dit que f est *dérivable sur I* , et on dispose de la (fonction) *dérivée de f* qui à chaque nombre lui associe son nombre dérivé (lue « f prime »).

Proposition 2

Dérivées usuelles

Les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

Fonction	Constante	Identité	Carré	Cube
$f(x)$	(pas de x)	x	x^2	x^3
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$

Proposition 3

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I , soit $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	$u + v$	$k \times u$
Dérivée	$u' + v'$	$k \times u'$

Corollaire 4 (Dérivée d'une fonction affine)

Soient a et b deux réels.

La fonction affine $f(x) = ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

Remarque 5

La dérivée d'un produit de deux fonctions n'est pas égal au produit des dérivées des deux fonctions. Autrement dit, $(u \times v)' \neq u' \times v'$.

Contre-exemple : prenons $u(x) = x$ et $v = u$. Ainsi, $u \times v(x) = x \times x = x^2$. On sait que $u' = v' = 1$ et $(u \times v)'(x) = 2x$ (dérivée de la fonction carré, voir plus haut). On remarque que $u'(x) \times v'(x) \neq (u \times v)'(x)$.

Exemple 6

- Soit $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 8x - 9$. Sa dérivée est $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 8 \times 1 - 0 = 12x^2 - 14x + 8$.
- Soit $f(x) = -x^3 + 13x + 17$. Sa dérivée est $f'(x) = -3x^2 + 13 \times 1 + 0 = -3x^2 + 13$.

2 – Variations et signes de la dérivée

Soit f définie sur un intervalle *ouvert* I (c'est-à-dire que les bornes sont exclues).

Monotonie et dérivée 1

Théorème 7

► Si f est croissante sur I , alors $f' \geq 0$ sur I .

► Si f est décroissante sur I , alors $f' \leq 0$ sur I .

x	...	...
$f'(x)$	+	
f		

x	...	...
$f'(x)$	-	
f		

Remarque 8

En particulier, si f est constante sur I , alors $f' = 0$ (puisque une fonction constante est à la fois croissante et décroissante, et que seul 0 est à la fois négatif et positif).

Monotonie et dérivée 2

Théorème 9

► Si $f' \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .

► Si $f' \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .

Remarque 10

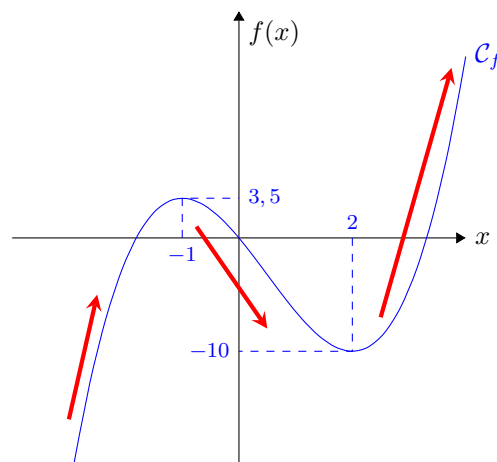
En particulier, Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

Exemple 11

Étudions la fonction $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x$. D'après les règles de calculs sur les dérivées, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1,5 \times 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$. On vérifie que $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$ en développant. On dresse alors le tableau suivant.

Ce tableau nous permet d'esquisser l'allure du graphe de f , en tenant compte des variations de f et de quelques valeurs remarquables : $f(-1) = 3,5$ (f est croissante avant ce point, décroissante après), $f(2) = -10$ (f est décroissante avant ce point, croissante après), $f(0) = 0$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	$\emptyset$	+	+
$x-2$	-	-	$\emptyset$	+
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-	+
f				



3 – Extrema d'une fonction

On a vu que la croissance ou décroissance d'une fonction était liée au signe de sa dérivée : en particulier, quand f change de sens de variation, f' change de signe. En particulier, à l'abscisse précise du changement de variation, la dérivée s'annule.

Définition 12

Minimum, maximum

Soit $c \in I$.

- ▶ On dit que f admet un *maximum* en c si $f(c)$ est la plus grande valeur de f sur I , c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(c)$. Autrement dit, le graphe fait un pic, une montagne.
- ▶ On dit que f admet un *minimum* en c si $f(c)$ est la plus petite valeur de f sur I , c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(c)$. Autrement dit, le graphe fait un creux, une vallée.

Proposition 13

Au niveau d'un maximum/minimum, la dérivée change de signe.

x	c		
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-
f	$f(c)$		

f admet un maximum en c

x	c		
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
f	$f(c)$		

f admet un minimum en c

Exemple 14

Reprenons la fonction f de l'Exemple 11. Rappelons que $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$.

- ▶ Sur l'intervalle $] -4, 0[$, f admet un maximum en -1 , et on remarque effectivement que $f'(-1) = 0$.
- ▶ Sur l'intervalle $]0, 4[$, f admet un minimum en 2 , et on remarque effectivement que $f'(2) = 0$.

Corollaire 15

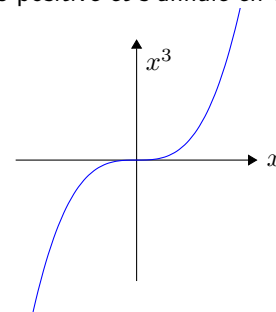
Soit $x \in I$. Si $f'(x) \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum en x .

Remarque 16

Cela donne une méthode pour chercher les extrema : on cherche les points d'annulation de la dérivée, et on regarde ensuite si ce sont vraiment des extrema.

Car en effet, attention, ce n'est pas une équivalence : parfois, la dérivée s'annule, mais la fonction ne change pas de variation, et donc il n'y a pas d'extremum ! C'est ce qu'on appelle un *point d'inflexion*. L'exemple le plus célèbre est celui de la fonction cube, dont la dérivée $x \mapsto 3x^2$ est toujours positive et s'annule en 0 :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	+
f			



Exercices

Exercice 1 (Automatismes et corrigé)

Dérivez les fonctions suivantes (réduisez les expressions au maximum) :

- ▶ $a(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
- ▶ $b(x) = 456$
- ▶ $c(x) = -4x^3 + 7x^2$
- ▶ $d(x) = -2x + 4$
- ▶ $e(x) = 0,7x^3 - 7,7x^2 + 7,77x - 7,77$
- ▶ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$

Corrigé

- ▶ $a'(x) = 3x^2 + 2x + 1 + 0 = 3x^2 + 2x + 1$
- ▶ $b'(x) = 0$
- ▶ $c'(x) = -4 \times 3x^2 + 7 \times 2x = -12x^2 + 14x$
- ▶ $d'(x) = -2 \times 1 + 0 = -2$
- ▶ $e'(x) = 0,7 \times 3x^2 - 7,7 \times 2x + 7,77 \times 1 - 0 = 2,1x^2 - 23,1x + 7,77$
- ▶ $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{3}{2} \times 2x + \frac{5}{6} \times 1 + 0 = x^2 + 3x + \frac{5}{6}$

Exercice 2 (Automatismes)

Dérivez les fonctions suivantes (réduisez les expressions au maximum) :

- ▶ $a_1(x) = x^3 + x^2 - x + 1$
- ▶ $b_1(x) = 5$
- ▶ $c_1(x) = 8x^3 + 5x^2$
- ▶ $d_1(x) = 12x - 30$
- ▶ $e_1(x) = 0,5x^3 + 3,1x^2 - 7,99x + 3,66$
- ▶ $f_1(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{48}{59}$
- ▶ $a_2(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
- ▶ $b_2(x) = 32$
- ▶ $c_2(x) = 5x^3 - 3x^2$
- ▶ $d_2(x) = 21x - 50$
- ▶ $e_2(x) = 0,2x^3 + 2,5x^2 - 5,66x + 4,99$
- ▶ $f_2(x) = -\frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{7}x - \frac{84}{95}$

Exercice 3 (Application)

Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, déterminer l'équation réduite de la tangente en 0.

Exercice 4 (Étude complète corrigée)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x$.

- 1▶ Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$.
- 2▶ Montrer que $3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$.
- 3▶ Recopier et compléter le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$x+1$			
$x-2$			
$f'(x)$		$\ominus$	$\ominus$

- 4▶ Dresser le tableau de variations de f .

Corrigé

1► D'après les règles de calculs sur les dérivées,

$$f'(x) = 3x^2 + 1,5 \times 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$$

2► On vérifie que $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$ en développant :

$$3(x+1)(x-2) = 3[x^2 - 2x + 1x - 1 \times 2] = 3[x^2 - x - 2] = 3 \times x^2 - 3 \times x - 2 \times 3 = 3x^2 - 3x - 6 = f'(x)$$

3► 4► On dresse alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$
f	$\swarrow \quad \quad \searrow \quad \quad \swarrow$ $3,5 \quad \quad -10$			

Exercice 5 (Commencer en douceur)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

1► Montrer que $f'(x) = 2x - 3$.

2► Justifier que $f'(x)$ est négatif quand $x \leq 1,5$, et positif sinon.

3► Recopier et compléter le tableau suivant donnant le signe de $f'(x)$ et les variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
f		

Exercice 6 (On monte le niveau)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 72$.

1► Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

2► Montrer que $3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$.

3► Recopier et compléter le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x-2$		
$x-4$		
$f'(x)$		

4► Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 7 (Vers le sommet)

Dresser le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 24$.

On commencera par vérifier que :

$$f'(x) = 6(1-x)(x+2)$$

Exercice 8 (Pour aller plus loin)

Déterminer une fonction f dont la dérivée s'écrit :

$$f'(x) = 9x^2 - 4x + 5$$

A Rappels de calcul entier, décimal, relatif

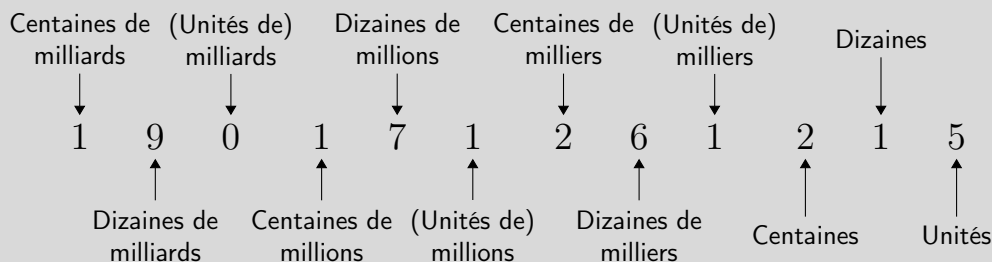
Table des matières

1	Numération décimale de position	117
2	Opérations	119
3	Techniques de calcul posé	120
A	Addition et soustraction	120
B	Multiplication de décimaux	121
C	Multiplier ou diviser par une puissance de 10	122
D	Division euclidienne	124
E	Division décimale	125
4	Nombres relatifs	126
A	Notion d'opposé	126
B	Somme et différence de nombres relatifs	128
C	Règle des signes : produit et quotient de nombres relatifs	130

1 – Numération décimale de position

Définition 1

Numération décimale de position 1



Remarque 2

Pour faciliter la lecture, on regroupe les chiffres par paquets de trois en partant des unités. Par exemple, on écrit 12 345 678 plutôt que 12345678.

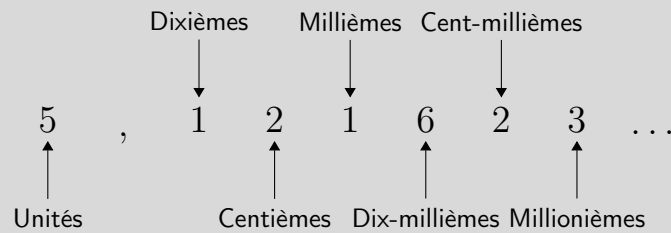
Remarque 3

Les noms associés à chaque position viennent de l'écriture suivante, appelée *décomposition d'un entier* :

$$4062 = 4 \times 1000 + 0 \times 100 + 6 \times 10 + 2 \times 1$$

Numération décimale de position 2

Définition 4



Remarque 5

Pour faciliter la lecture des nombres avec beaucoup de décimales, on peut regrouper leurs décimales par paquets de trois en partant des dixièmes.

Par exemple, 1,23456789 s'écrit 1,234 567 89.

La fraction $\frac{1}{10}$ est appelée *un dixième*, $\frac{1}{100}$ est appelée *un centième*, $\frac{1}{1000}$ est appelée *un millième*, etc., d'où les noms associés aux positions de chaque chiffre. Avec ce système d'écriture, 5,123 peut se lire «5 unités, 1 dixième, 2 centièmes et 3 millièmes», ce qui s'écrit aussi :

$$5,123 = 5 + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 3 \times \frac{1}{1000}$$

que l'on peut encore écrire :

$$5,123 = 5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$$

Remarque 6

On peut rajouter des 0 à droite du nombre sans le changer : par exemple, $8,16 = 8,1600$. En effet, 8 unités, 1 dixième et 6 centièmes ne changent pas si on ajoute 0 millièmes et 0 dix-millièmes. Cela sera utile pour poser les opérations.

Exercice 1

Complétez le tableau :

Le nombre...	est égal à ... unités, ... dixièmes, ... centièmes, ...	... ce qui s'écrit ...
1,2	1 unités et 2 dixièmes	$1 + \frac{2}{10}$
65,124	65 unités, 1 dixième, 2 centièmes et 4 millièmes	$65 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000}$
4,5	4 unités et 5 dixièmes	$4 + \frac{5}{10}$
465,13	465 unités et 1 dixième et 3 centièmes	$465 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$
894,231	894 unités, 2 dixièmes, 3 centièmes et 1 millième	$894 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$
18,5	18 unités et 5 dixièmes	$18 + \frac{5}{10}$
18,05	18 unités, 0 dixièmes et 5 centièmes	$18 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100}$
18,005	18 unités et 0 dixième, 0 centième et 5 millièmes	$18 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}$
0,3	0 unités et 3 dixièmes	$0 + \frac{3}{10}$
20,2	20 unités et 2 dixièmes	$20 + \frac{2}{10}$

2,02	0 unités, 0 dixième et 2 centièmes	$2 + \frac{0}{10} + \frac{2}{100}$
0,202	0 unité, 2 dixièmes, 0 centième et 2 millièmes	$0 + \frac{2}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1000}$

Un millimètre est un millième de mètre, puisque $1\,000\text{mm} = 1\text{m}$. Un centimètre est un centième de mètre, puisque $100\text{cm} = 1\text{m}$. Un décimètre est un dixième de mètre, puisque $10\text{dm} = 1\text{m}$. De la même manière, une milliseconde est un millième de seconde, un centilitre est un centième de litre, ...

Proposition 7**Relations**

- ▶ Dans 1 unité, il y a 10 dixièmes, ou encore 100 centièmes, ou encore 1 000 millièmes.
- ▶ Dans 1 dixième, il y a 10 centièmes, ou encore 100 millièmes.
- ▶ Dans 1 centième, il y a 10 millièmes.

2 – Opérations

Définition 8**Noms des opérations et des nombres dedans**

Opération	Symbole	Nombre de gauche	Nombre de droite	Résultat
Addition	+	Terme	Terme	Somme
Soustraction	−	Terme	Terme	Différence
Multiplication	×	Facteur	Facteur	Produit
Division	/	Dividende	Diviseur	Quotient

Propriété 9**Échanger les nombres dans une opération ?**

- ▶ Dans une addition, on peut échanger les termes sans changer le résultat.
- ▶ Dans une multiplication, on peut échanger les facteurs sans changer le résultat.
- ▶ Dans une soustraction ou une division, on **ne peut pas** effectuer un tel échange.

Propriété 10**Priorités opératoires**

Dans une ligne de calcul, on ne peut en général pas appliquer les opérations dans n'importe quel ordre. Il faut respecter l'ordre de priorités suivant :

- 1▶ On calcule d'abord ce qui est entre **P**arenthèses,
- 2▶ On calcule ensuite les puissances, autrement ce qui a des **E**xposants,
- 3▶ On calcule ensuite les **M**ultiplications et les **D**ivisions, de gauche à droite,
- 4▶ Enfin, on calcule les **A**dditions et les **S**oustractions, de gauche à droite.

Cette règle est souvent résumée par l'acronyme «PEMDAS».

Remarque 11

Pour faciliter la lecture, on peut remplacer les parenthèses par des crochets, ou ajouter des parenthèses inutiles.

Exercice 2

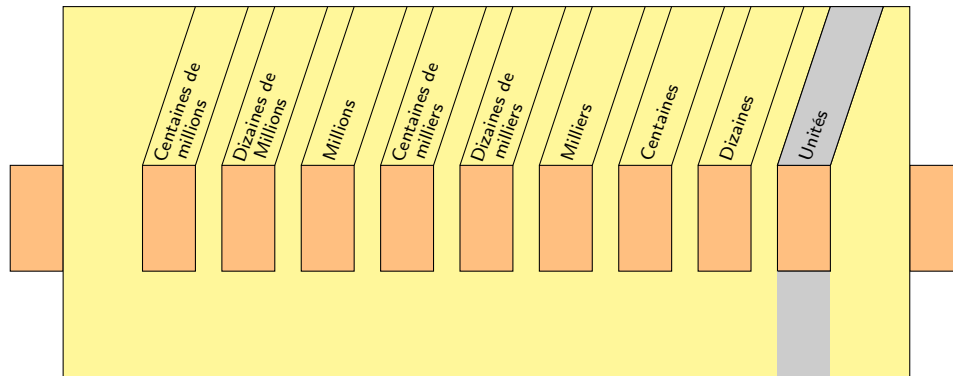
Calculer $1 + (8 \times 9 - 5 \times [4 + \underbrace{2 \times 3}_{6}] + 6) \times 2$.

Correction

$$\begin{aligned}
 & 1 + (8 \times 9 - 5 \times [4 + \underbrace{2 \times 3}_{6}] + 6) \times 2 \\
 &= 1 + (8 \times 9 - 5 \times [4 + 6] + 6) \times 2 \\
 &= 1 + (\underbrace{8 \times 9}_{72} - 5 \times 10 + 6) \times 2 \\
 &= 1 + (72 - 5 \times 10 + 6) \times 2 \\
 &= 1 + (\underbrace{72 - 50}_{22} + 6) \times 2 \\
 &= 1 + (\underbrace{22 + 6}_{28}) \times 2 \\
 &= 1 + 28 \times 2 \\
 &= \underbrace{1 + 56}_{57} \\
 &= 57
 \end{aligned}$$

Méthode 12 (Astuces de calcul)

- Pour multiplier par 10, 100, 1000, ..., on peut utiliser le tableau suivant (appelé «glisse-nombre») : multiplier par 10 décale la bande orange d'une case à droite, par 100 décale de 2 cases, ...



- Pour multiplier par 5, on peut multiplier par 10 et diviser par 2 ou inversement.
- Pour multiplier par 25, on peut multiplier par 100 et diviser par 4 ou inversement.

3 – Techniques de calcul posé**A – Addition et soustraction**

Pour poser une addition ou une soustraction de nombres décimaux, on aligne les dizaines avec les dizaines, les unités avec les unités, puis les dixièmes avec les dixièmes, etc. Il est souvent utile de rajouter des 0 à droite pour que les deux nombres aient autant de chiffres après la virgule. On procède ensuite par colonnes de droite à gauche, en écrivant une retenue dans la colonne suivante si la somme dépasse 10.

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \\
 1 \quad 2 \text{ , } 6 \quad 0 \\
 + \quad \quad 7 \text{ , } 5 \quad 8 \\
 \hline
 2 \quad 0 \text{ , } 1 \quad 8
 \end{array}$$

Pour calculer la différence de deux nombres décimaux, on les écrit l'un au-dessus de l'autre, en alignant les chiffres de même poids (les unités au-dessus des unités, etc.) On ajoute autant de zéros que nécessaire à droite et à gauche des deux termes pour que ceux-ci aient le même nombre de chiffres. *On supposera que le diminuende est plus petit que le diminueur, c'est-à-dire que le nombre en haut est plus grand que le nombre en-dessous.* On procède ensuite de droite à gauche : si le chiffre du bas est plus petit que le chiffre du haut dans la colonne en cours de calcul, on écrit la différence de ces deux chiffres en-dessous. Sinon, si le chiffre du bas est plus grand que le chiffre du haut dans la colonne en cours de calcul, on ajoute 10 au chiffre du haut et on écrit un 1 dans la colonne juste à gauche pour compenser (voir la Figure) (ce qu'on appelle une *retenue*, et on dit qu'on *propage la retenue*). On écrit ensuite la différence de 10+ le chiffre d'en haut pas le chiffre d'en bas en-dessous. S'il y a déjà une retenue sur la colonne en cours de calcul, on la soustrait à la différence des chiffres de la colonne, en propageant une autre retenue si nécessaire. Si les nombres sont décimaux non entiers, on trace la virgule de la différence en-dessous de la virgule des diminuende et diminueur.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2 \text{ , } 6 \quad 0 \\
 - \quad 0 \quad 7 \text{ , } 5 \quad 8 \\
 \hline
 0 \quad 5 \text{ , } 0 \quad 2
 \end{array}$$

Diagram illustrating the borrowing process (retenue) in decimal subtraction. Dashed arrows show the flow of borrowing from the 1 in the tens place to the 2 in the units place, and from the 2 to the 6 in the tenths place. Small boxes with '1' indicate the borrowed amount being added to the minuend's digits.

B – Multiplication de décimaux

- 1► On effectue la multiplication des deux nombres comme s'ils n'avaient pas de virgule,
- 2► On place la virgule dans le résultat : par exemple, si le premier facteur a 2 chiffres après la virgule, et si l'autre facteur en a 5, alors le résultat a $2 + 5 = 7$ chiffres après la virgule.

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad 1 \quad 2 \text{ , } 6 \\
 \times \quad 7 \text{ , } 5 \quad 8 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \\
 + \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \\
 + \quad 8 \quad 8 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \\
 \hline
 9 \quad 5 \text{ , } 5 \quad 0 \quad 8
 \end{array}$$

Diagram illustrating the multiplication of two decimal numbers. The first number is 12.6 and the second is 7.58. The partial products are calculated as if they were integers (126 × 758), and then the decimal point is placed in the result based on the total number of decimal places in the factors (2 + 3 = 5). The final result is 95.508.

C – Multiplier ou diviser par une puissance de 10

Prenons un exemple. Grâce à la décomposition en fractions décimales, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 5,121 \times 100 &= \left(5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}\right) \times 100 = 5 \times 100 + \frac{1}{10} \times 100 + \frac{2}{100} \times 100 + \frac{1}{1000} \times 100 \\ &= 5 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1 + \frac{1}{10} = 512,1 \end{aligned}$$

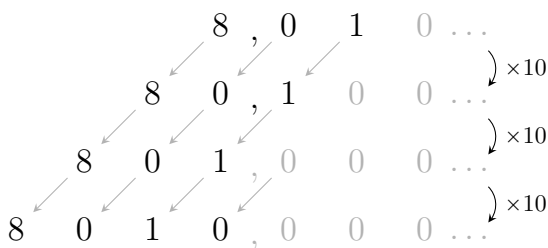
Tout se passe comme si on avait décalé la virgule de deux crans vers la droite. Essayons un autre exemple :

$$\begin{aligned} 30,05 \times 1000 &= \left(3 \times 10 + 0 \times 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100}\right) \times 1000 = 3 \times 10000 + 0 \times 1000 + \frac{0}{10} \times 1000 + \frac{5}{100} \times 1000 \\ &= 3 \times 10000 + 0 \times 1000 + 0 \times 100 + 5 \times 10 = 30050 \end{aligned}$$

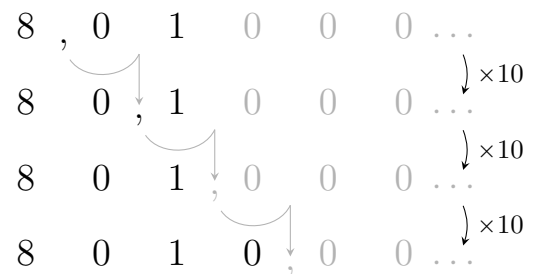
Ici aussi, tout se passe comme si on avait décalé la virgule vers la droite de trois crans, en ajoutant un 0 quand on a épuisé la partie à droite de la virgule. C'est presque ce qui se passe : quand on multiplie par 10, les unités deviennent des dizaines, les dizaines deviennent des centaines, les centaines deviennent des milliers, etc., et les millièmes deviennent des centièmes, les centièmes deviennent des dixièmes, et les dixièmes deviennent des unités. Ce n'est donc pas exactement la virgule qui se déplace vers la droite entre les chiffres, mais les chiffres qui se déplacent (vers la gauche) par rapport à la virgule, car dans la notation décimale de position, comme son nom l'indique, la position indique le poids d'un chiffre. Dans le second exemple où on finit par ajouter un 0, il faut se souvenir qu'on n'écrit pas de zéros à droite (ou à gauche) d'un nombre car ceux-ci sont inutiles, puisqu'ils n'apportent aucune information sur sa valeur, mais dans le cas présent, il faut se souvenir qu'on peut tout de même les ajouter !

Quand on multiplie un nombre décimal par 10, son chiffre des unités devient celui des dizaines, le chiffre des dixièmes devient celui des unités, etc. C'est l'inverse quand on divise par 10.

Plutôt de voir les chiffres comme fixes et la virgule se déplaçant entre les chiffres, on peut adopter le point de vue inverse : voir la virgule comme fixe, et les nombres glissant comme sur un ruban d'un côté ou de l'autre de la virgule.

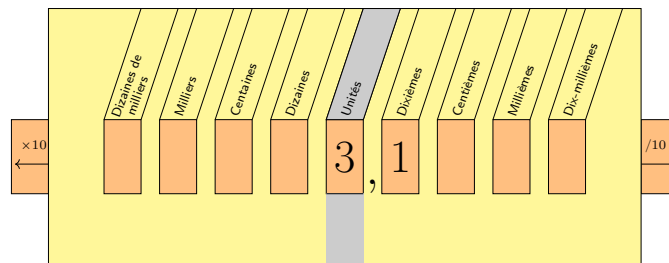


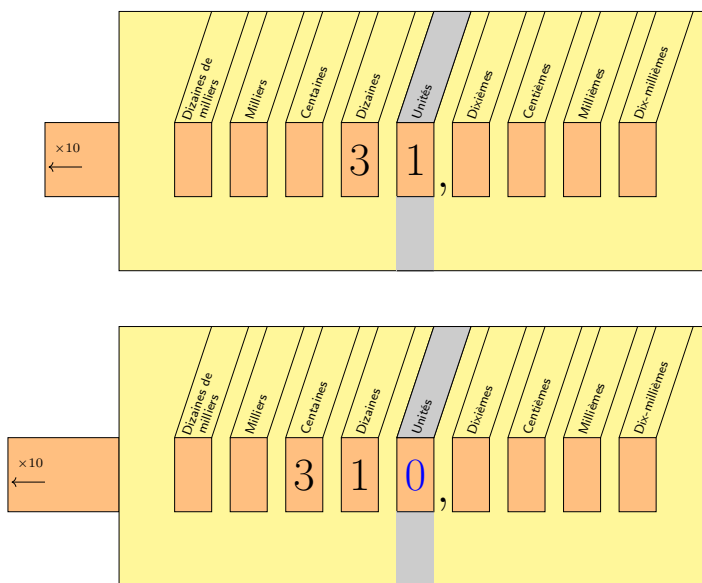
Multiplication par 10, point de vue des chiffres



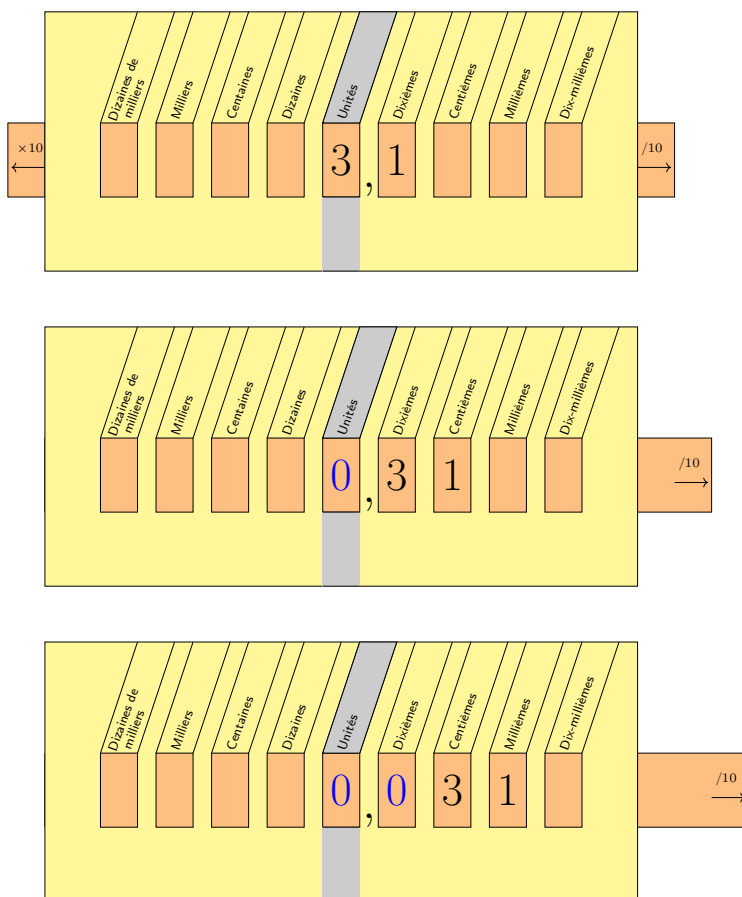
Multiplication par 10, point de vue de la virgule

Avec un peu de papier, on peut construire un glisse-nombre, qui représente le point de vue à virgule fixe :





Calcul de $3,1 \times 100 = 310$ en glissant de deux crans vers la gauche



Calcul de $3,1/100 = 0,031$ en glissant de deux crans vers la droite

D – Division euclidienne

Trouver la *division euclidienne* d'un nombre entier par un autre, disons par exemple de 34 par 5, c'est trouver combien de paquets de 5 rentrent dans 34, et combien il reste après ça. Ici, 34 contient 6 paquets de 5, et il reste 4, donc on écrit $34 = 6 \times 5 + 4$. Dans cette division euclidienne, 34 est appelé *dividende*, 5 est appelé *diviseur*, 6 est appelé *quotient* et 4 est appelé *reste*.

Exemple 13 (Exemple commenté)

$$\begin{array}{r}
 5 \ 8 \ 1 \mid 4 \\
 - \textcolor{blue}{4} \quad \downarrow \quad \textcolor{blue}{1} \textcolor{blue}{4} \textcolor{blue}{5} \\
 \hline
 1 \ 8 \\
 - \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{6} \quad \downarrow \\
 \hline
 2 \ 1 \\
 - \textcolor{teal}{2} \textcolor{teal}{0} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

On commence par essayer de rentrer des paquets de 4 dans le chiffre le plus à gauche, c'est-à-dire 5. Combien peut-on en rentrer au maximum ? On peut faire 1 paquet de 4, et il reste 1 de côté. On descend le chiffre suivant, le 8, à côté du 1 qui nous restait. On doit maintenant rentrer des paquets de 4 dans 18. Combien peut-on en rentrer au maximum ? On peut en rentrer 4 paquets de 4, soit un total de 16 que l'on met dans les paquets, ce qui laisse 2 restes à côté. On descend enfin le dernier chiffre, le 1 à côté du 2 qui restait pour écrire 21. On doit maintenant rentrer des paquets de 4 dans 21. Combien peut-on en rentrer au maximum ? On peut en rentrer 5 paquets de 4, soit un total de 20 que l'on met dans les paquets, ce qui laisse 1 reste à côté.

Remarque 14

Parfois, le diviseur ne rentre pas, on peut faire 0 paquets. Cela fonctionne de la même manière : on écrit un 0 dans le quotient et on retire 0 paquets, soit un total de... 0.

$$\begin{array}{r}
 5 \ 8 \ 1 \mid 1 \ 2 \\
 - \textcolor{blue}{0} \quad \downarrow \quad \textcolor{blue}{0} \textcolor{blue}{4} \textcolor{blue}{8} \\
 \hline
 5 \ 8 \\
 - \textcolor{red}{4} \textcolor{red}{8} \quad \downarrow \\
 \hline
 1 \ 0 \ 1 \\
 - \textcolor{teal}{9} \textcolor{teal}{6} \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

Exercice 3

Combien font 609h en semaines, jours et heures ? Combien font 34 990s en heures, minutes et secondes ?

Correction

La division euclidienne de 34 990 par 60 est $34\,990 = 60 \times 583 + 10$. Donc 34 990s = 583min et 10s.
 La division euclidienne de 583 par 60 est $583 = 60 \times 9 + 43$. Donc 583min = 9h et 43min.
 Finalement, 34 990s = 9h, 43min et 10s.

E – Division décimale

On peut adapter l'algorithme de division euclidienne pour diviser un nombre décimal par un nombre entier (on parle alors de *division décimale*). Pour cela :

- 1► On fait comme si le dividende n'avait pas de virgule, et on déroule la division euclidienne comme on sait le faire,
- 2► Dès que l'on descend le chiffre des dixièmes du dividende, on ajoute une virgule au quotient.

Example 15

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 581,00 \\
 -4 \downarrow \\
 \hline
 18 \downarrow \\
 -16 \downarrow \\
 \hline
 21 \downarrow \\
 -20 \downarrow \\
 \hline
 10 \downarrow \\
 -8 \downarrow \\
 \hline
 20 \downarrow \\
 -20 \downarrow \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \hline
 145,25
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 659,38 \\
 -0 \\
 \hline
 65 \\
 -64 \\
 \hline
 19 \\
 -16 \\
 \hline
 33 \\
 -32 \\
 \hline
 18 \\
 -16 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 8 \\
 \hline
 082,42
 \end{array}$$

Remarque 16

On peut également poursuivre une division décimale en ajoutant des zéros à droite pour améliorer la précision du quotient et, avec un peu de chance, éliminer le reste.

$$\begin{array}{r}
 659,3800 \\
 -0 \\
 \hline
 65 \\
 -64 \\
 \hline
 19 \\
 -16 \\
 \hline
 33 \\
 -32 \\
 \hline
 18 \\
 -16 \\
 \hline
 20 \\
 -16 \\
 \hline
 40 \\
 -40 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 \\
 \hline
 082,4225
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \\
 \hline
 - \ 0 \quad \downarrow \\
 \hline
 1 \ 0 \\
 - \quad \textcolor{blue}{9} \quad \downarrow \\
 \hline
 1 \ 0 \\
 - \quad \textcolor{red}{9} \quad \downarrow \\
 \hline
 1 \ 0 \\
 - \quad \textcolor{teal}{9} \quad \downarrow \\
 \hline
 1 \ 0 \\
 - \quad \textcolor{orange}{9} \quad \downarrow \\
 \hline
 1 \ 0 \\
 - \quad \textcolor{brown}{9} \quad \downarrow \\
 \hline
 1 \ 0 \\
 - \quad \textcolor{lightblue}{9} \quad \downarrow \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 \hline
 0, \textcolor{blue}{3} \textcolor{teal}{3} \textcolor{orange}{3} \textcolor{brown}{3} \textcolor{lightblue}{3}
 \end{array}$$

Exercise 4

À l'aide d'une division décimale, déterminer les deux premières décimales de $22 \div 7$ et les six premières décimales de $355 \div 113$.

Correction

$$22 \div 7 \approx 3,14 \quad \text{et} \quad 355 \div 113 \approx 3,141592.$$

4 – Nombres relatifs

A – Notion d'opposé

Activité 17

Compléter :

$$\triangleright 5 + \underline{7} = 12$$

$$\triangleright 2 + \underline{3} = 5$$

$$\triangleright 9 + \underline{0} = 9$$

$$\triangleright 4 + \underline{(-4)} = 0$$

Définition 18

Opposé d'un nombre

Soit a un nombre. L'*opposé* de a est le nombre qu'il faut ajouter à a pour obtenir 0. On note $-a$ l'opposé de a , qui se lit « moins a ». À retenir :

$$a + (-a) = 0$$

Remarque 19

Dans l'identité précédente, on entoure $-a$ de parenthèses pour que les symboles $+$ et $-$ ne soient pas consécutifs. À l'inverse, on écrira $-a + a = 0$ sans parenthèses car deux symboles ne se suivent pas.

Définition 20

Nombre positif, nombre négatif, signe, relatifs

- ▶ Un nombre *négatif* est un nombre inférieur ou égal à 0, un nombre *positif* est un nombre supérieur ou égal à 0.
- ▶ Le caractère positif ou négatif d'un nombre est appelé son *signe*. Deux nombres qui n'ont pas le même signe sont dits *de signes opposés*.
- ▶ Les nombres positifs et les nombres négatifs forment l'ensemble des nombres dits *relatifs*.

Remarque 21

- ▶ Un nombre négatif s'écrit avec un signe moins, comme -5 , -18 ou -2048 par exemple.
- ▶ 0 est à la fois positif et négatif (et c'est le seul). À noter : $0 = -0$, ce qui ne contredit pas la remarque précédente.

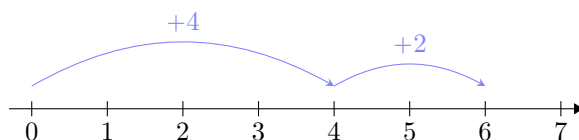
Remarque 22

Parfois, on écrit le symbole $+$ devant un nombre positif. Par exemple, on peut écrire $+5$ à la place de 5, pour mettre son signe (positif) en valeur.

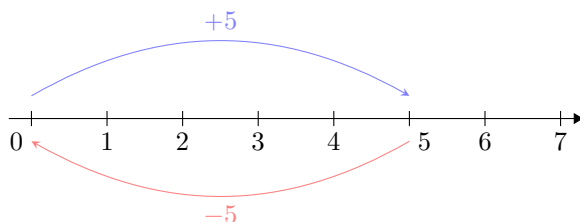
Exemple 23

- ▶ Le nombre 12 est (de signe) positif. Son opposé est -12 (car $12 + (-12) = 0$), qui lui est (de signe) négatif.
- ▶ Le nombre -57 est (de signe) négatif. C'est l'opposé de 57 (car $57 + (-57) = 0$), qui lui est positif.

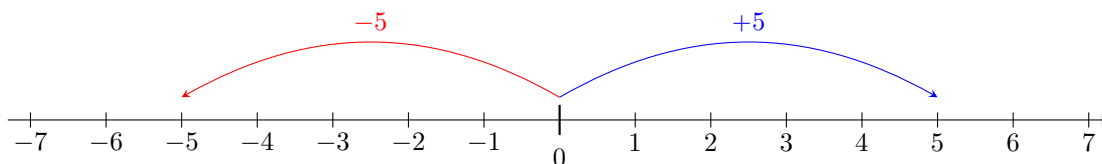
Jusqu'ici, on s'est servi de la demi-droite graduée pour représenter les nombres positifs en termes de longueurs. On peut aussi l'interpréter en termes de déplacements : par exemple, le nombre $+4$ correspond à un déplacement de 4 unités vers la droite. L'opération $4 + 2$ correspond à faire 4 puis 2 pas vers la droite, soit un total de 6 pas vers la droite.



En ajoutant des nombres positifs, on ne peut se déplacer que vers la droite. Pour se déplacer vers la gauche, on a besoin des nombres négatifs. Le schéma suivant illustre l'égalité $5 + (-5) = 0$: 5 pas vers la droite, puis 5 vers la gauche.



Suivant cette idée, on prolonge la demi-droite en une droite graduée, avec les nombres négatifs à gauche de 0 :



Propriété 24

Sur la droite graduée, un nombre et son opposé sont symétriques par rapport à 0.

Distance à 0

Définition 25

On appelle *distance à zéro* d'un nombre relatif la distance (positive) entre ce nombre et 0 sur la droite graduée.

Exemple 26

- ▶ La distance à 0 de 2 et 2.
- ▶ La distance à 0 de -2 et 2.
- ▶ La distance à 0 de 47 et 47.
- ▶ La distance à 0 de -28 et 28.

Activité 27

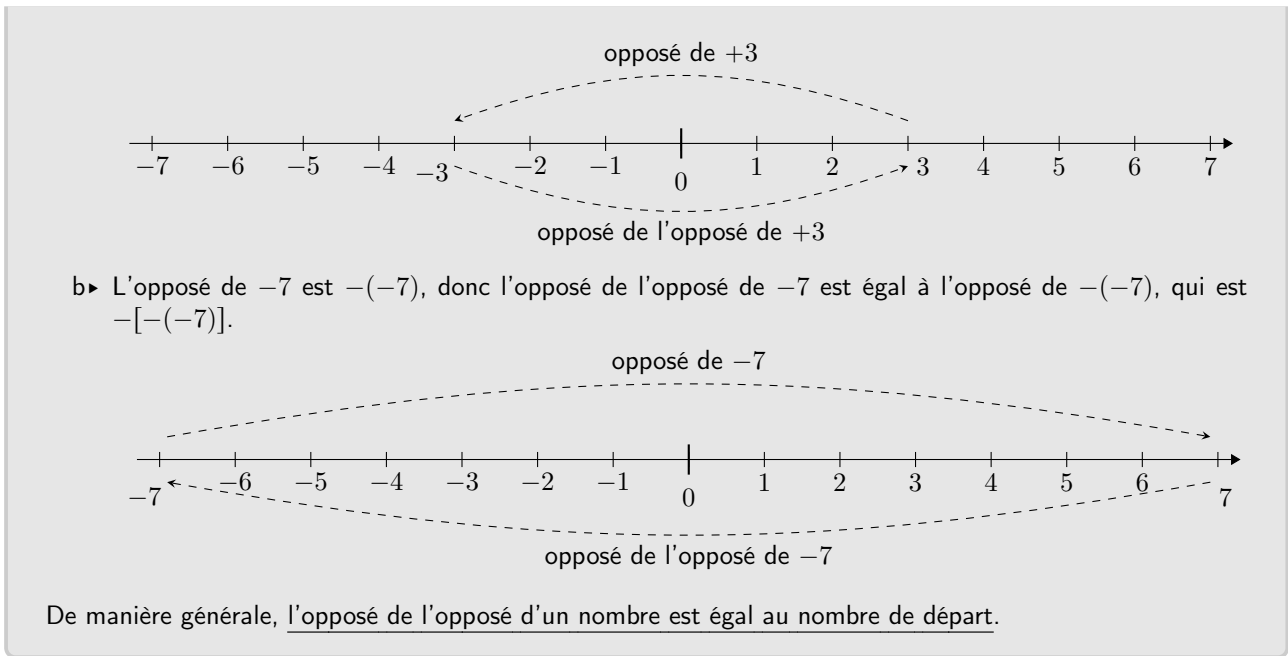
Écrivez les nombres suivants en chiffre, puis placez-les sur la droite graduée :

- a▶ L'opposé de l'opposé de +3
- b▶ L'opposé de l'opposé de -7

De manière générale, que peut-on dire de l'opposé de l'opposé d'un nombre ?

Correction

- a▶ L'opposé de +3 est $-(+3)$, donc l'opposé de l'opposé de +3 est égal à l'opposé de $-(+3)$, qui est $-[-(+3)]$.



Opposé de l'opposé

Propriété 28

Pour tout nombre a (qu'importe s'il est positif ou négatif),

$$-(-a) = a$$

B – Somme et différence de nombres relatifs

Activité 29

Compléter le tableau suivant suivant le modèle (on pourra s'aider de la droite graduée) :

	Somme	Dist. à 0 des termes	Signes des termes	Dist. à 0 de la somme	Sg. de la somme
$1 + 2$	3	1 et 2	Même signe	$3 = 1 + 2$	+
$7 + (-4)$	3	7 et 4	Opposés	$3 = 7 - 4$	+
$8 + (-6)$	3	8 et 6	Opposés	$3 = 1 + 2$	+
$2 + (-5)$	-3	5 et 5	Opposés	$3 = 5 - 2$	-
$(-1) + 7$	6	1 et 7	Opposés	$6 = 7 - 1$	+
$(-9) + 3$	-6	9 et 3	Opposés	$6 = 9 - 3$	+
$(-2) + (-3)$	-5	2 et 3	Même signe	$5 = 2 + 3$	-

En déduire une méthode pour ajouter les nombres relatifs.

Méthode 30 (Somme de relatifs)

Soient a et b deux nombres. Pour calculer $a + b$:

- ▶ Si a et b sont de même signe, on ajoute leurs distances à 0 et on garde leur signe commun,
- ▶ Si a et b sont de signes opposés, alors on calcule la différence entre les distances à 0 de a et de b , et on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à 0.

Depuis le début, on utilise de symbole $-$ pour désigner l'opposé... mais vous le savez depuis la maternelle, le symbole $-$ sert surtout à désigner la soustraction ! Pourquoi utiliser le même symbole alors pour deux usages différents ? Eh bien dans un premier temps je vous répondrai que ça n'a pas toujours été le cas ! Par exemple, Hankel en 1867 désignait l'opposé d'un nombre a par $\text{opp}(a)$. Mais de nos jours alors, pourquoi faisons-nous avec le signe $-$? C'est parce qu'opposé et soustraction sont les deux revers d'une même médaille :

Définition 31

Soustraire un nombre (relatif) revient à ajouter l'opposé.
Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b ,

$$a - b = a + (-b)$$

Remarque 32

La notation $a + (-b)$ sert pour faire les calculs de tête, mais sinon il suffit d'écrire $a - b$ (c'est plus court !).

Exemple 33

- ▶ $7 - 4 = 7 + (-4)$
- ▶ $2 - 9 = 2 + (-9)$
- ▶ $3 - (-5) = 3 + [-(-5)] = 3 + 5$

Méthode 34 (Calculs à plus de deux termes)

Dans le doute, on procède de proche en proche, de gauche à droite.

Pour calculer plus astucieusement des sommes et différences de plus de deux termes,

- 1▶ On transforme toutes les soustractions en additions (en utilisant $a - b = a + (-b)$),
- 2▶ On calcule les sommes (on peut regrouper les termes comme ça nous arrange, en particulier on peut calculer la somme de tous les termes positifs d'abord, puis la somme de tous les termes négatifs).

Exemple 35

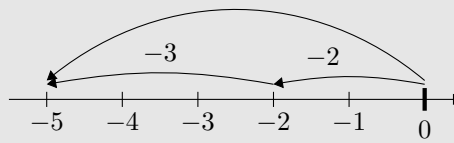
$$\begin{aligned} & -2 + 3 + 2 + (-5) - (-7) \\ &= -2 + 3 + 2 + (-5) + 7 \\ &= (-2) + (-5) + 2 + 3 + 7 \\ &= (-7) + 12 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Activité 36

Avec la droite graduée, déterminer ce que vaut $-(2 + 3)$ en fonction de -2 et -3 . Généraliser cette observation avec une phrase utilisant les mots « somme » et « opposé(s) » deux fois chacun.

Correction

$$-(2 + 3) = -5$$



Ce dessin illustre la phrase suivante : reculer de $2 + 3$ pas, c'est la même chose que reculer de 2 pas et reculer de 3 pas. En termes mathématiques, cela s'écrit $-(2 + 3) = (-2) + (-3)$: l'opposé de la somme de 2 et 3 est égal à la somme de l'opposé de 2 et de l'opposé de 3.

De manière générale, l'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés (de ses termes).

Propriété 37

L'opposé d'une somme est la somme des opposés. Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b ,

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

Remarque 38

Imaginons un instant que l'on sait multiplier les nombres par -1 , et que pour tout nombre x , $-x = (-1) \times x$. Alors $-(a + b) = (-1) \times (a + b)$, et distribuer le -1 donne $-(a + b) = (-1) \times a + (-1) \times b = (-a) + (-b)$. On retombe sur nos pieds ! Le but du prochain paragraphe est de définir la multiplication des relatifs de manière à conserver les bonnes propriétés, comme par exemple ici avec la distributivité.

C – Règle des signes : produit et quotient de nombres relatifs

On a étendu les règles d'addition et de soustraction que l'on connaissait avant aux nombres relatifs. L'enjeu de ce paragraphe est d'étendre les règles de multiplication et de division aux nombres relatifs, de manière à ce qu'on retrouve les propriétés de calcul bien connues, comme par exemple la distributivité.

Activité 39

Calculer et écrire plus simplement les sommes suivantes :

- ▶ $A = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$
- ▶ $B = (-5) + (-5) + (-5)$
- ▶ $C = (-1, 2) + (-1, 2) + (-1, 2) + (-1, 2)$

Plus généralement, comment calcule-t-on le produit d'un nombre positif par un nombre négatif ?

Correction

- ▶ $A = -15$. On ajoute 5 fois (-3) , donc on a envie d'écrire $A = 5 \times (-3)$. On remarque que A est négatif, et sa distance à 0 est 3×5 .
- ▶ $B = -15$. On ajoute 3 fois (-5) , donc on a envie d'écrire $B = 3 \times (-5)$. On remarque que B est négatif, et sa distance à 0 est 5×3 .
- ▶ $C = -4, 8$. On ajoute 4 fois $(-1, 2)$, donc on a envie d'écrire $C = 4 \times (-1, 2)$. On remarque que C est négatif, et sa distance à 0 est $4 \times 1, 2$.

On imagine que le produit d'un nombre négatif par un nombre positif est négatif, et sa distance à 0 est le produit des distances à 0 de ses facteurs.

Ces exemples montrent bien l'idée intuitive que l'on peut avoir sur la multiplication d'un négatif par un entier positif. On étend naturellement cette intuition au produit d'un négatif par un positif qui n'est pas forcément entier.

Propriété 40**Produit de deux nombres de signes opposés**

Le produit de deux nombres de signes opposés est égal à l'opposé du produit de leurs distances à 0.

Activité 41

En développant l'expression $(-2) \times (5 + (-5))$, déterminer la valeur de $(-5) \times (-2)$.
Plus généralement, comment calculer le produit de deux nombres négatifs ?

Correction

On développe le produit : $(-2) \times (5 + (-5)) = (-2) \times 5 + (-2) \times (-5) = (-10) + (-2) \times (-5)$ d'après la règle sur le produit d'un positif par un négatif.

On calcule avec les priorités opératoires : $(-2) \times (5 + (-5)) = (-2) \times 0 = 0$ (n'importe quoi fois 0 donne 0). On en déduit que $0 = (-10) + (-2) \times (-5)$. Or par définition, l'opposé de -10 est le nombre qui complète l'addition à trou $(-10) + \dots = 0$, donc $(-2) \times (-5)$ est l'opposé de -10 . Or l'opposé de -10 est $-(-10) = 10$, donc $(-2) \times (-5) = 10$.

Il semble que le produit de deux nombres négatifs est positif, et sa distance à 0 est le produit des distances à 0 des facteurs.

Propriété 42**Produit de deux nombres même signe**

Le produit de deux nombres négatifs est positif, et égal au produit de leurs distances à 0.

On peut désormais énoncer la *règle des signes* :

Proposition 43

Règle des signes

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.

Remarque 44

Dans une multiplication, on peut placer les signes là où ça nous arrange. Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b ,

$$-(a \times b) = (-a) \times b = a \times (-b)$$

Exemple 45

$$-(2 \times 3) = (-2) \times 3 = 2 \times (-3).$$

Remarque 46

En français, ces égalités se lisent : « l'opposé du produit de 2 par 3 est égal au produit de l'opposé de 2 par 3, qui est égal au produit de 2 par l'opposé de 3 ».

Dans le cas où $b = 1$, cette propriété dit en particulier que $-(a \times 1) = a \times (-1)$, donc que $-a = (-1) \times a$. On peut alors constater que la règle des signes est cohérente avec le reste : en effet, on a vu plus tôt que $-(-a) = a$. Or on vient de dire que $-(-a) = (-1) \times (-1) \times a$, donc il est logique que $(-1) \times (-1) = 1$, et

donc que le produit de deux nombres négatifs soit positif.

Pour rappel, le *quotient* de deux nombres a et b , noté a/b , ou $a \div b$, ou encore $\frac{a}{b}$, est le nombre qui donne a quand il est multiplié par b , c'est-à-dire :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

Fort de cette observation, on étend la règle des signes aux quotients :

Proposition 47

Soient a et b deux nombres, avec b différent de 0.

$$-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$$

ce qui se réécrit avec la notation fractionnaire :

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Proposition 48

Règle des signes

- Le quotient de deux nombres de même signe est positif.
- Le quotient de deux nombres de signes opposés est négatif.

Exercice 5

Calculer :

a► $\frac{-100}{10}$

b► $216/(-3)$

c► $\frac{-196}{-7}$

d► $-(-360)/(-12)$

Correction

a► $\frac{-100}{10} = -\frac{100}{10} = -10$

b► $216/(-3) = -(216/3) = -72$

c► $\frac{-196}{-7} = -\frac{196}{7} = -28$

d► D'abord, $360/(-12) = -(360/12) = -30$. Ensuite, $(-360)/(-12) = -[360/(-12)] = -[-30] = 30$.
Enfin, $-(-360)/(-12) = -[(-360)/(-12)] = -30$

B Rappels de calcul fractionnaire

Table des matières

1	Comprendre les fractions	133
A	Les fractions comme partage de gâteaux	133
B	Du partage au quotient : des activités	134
C	Les fractions comme quotients – nombres rationnels	142
2	Calculer avec les fractions	143
A	Simplifier, mettre au même dénominateur	143
B	Ajouter, soustraire deux fractions	144
C	Multiplier, diviser deux fractions	146
D	Comparer, encadrer deux fractions	148
3	Décomposition, encadrement, comparaison de fractions	149

1 – Comprendre les fractions

A – Les fractions comme partage de gâteaux

Définition 1

Numérateur, dénominateur, fraction-partage

Dans la fraction $\frac{22}{7}$, lu «vingt-deux septièmes», ou «22 sur 7», le nombre 22 en haut est appelé *numérateur*, et le nombre en bas est appelé *dénominateur*. La fraction $\frac{22}{7}$ représente 22 parts prises d'une unité partagée en 7 parts égales.

Remarque 2

On dit $\frac{1}{2}$: «un demi», $\frac{5}{3}$: «cinq tiers» et $\frac{3}{4}$: «trois quarts».

Proposition 3

- ▶ La fraction $\frac{2}{5}$ est plus petite que 1 car $2 < 5$.
- ▶ La fraction $\frac{22}{7}$ est plus grande que 1 car $22 > 7$.
- ▶ La fraction $\frac{10}{10}$ est égale à 1 car $10 = 10$ (le numérateur est égal au dénominateur).

Proposition 4

Sur un exemple

$\frac{9}{1} = 9$: découper 9 gâteaux en 1 part égale, c'est prendre les 9 gâteaux en entier.

Proposition 5*Sur un exemple*

$\frac{22}{7} = 22 \times \frac{1}{7}$: la fraction $\frac{22}{7}$ représente 22 fois un septième d'une unité.

Définition 6*Fraction décimale*

On appelle *fraction décimale* une fraction dont le dénominateur est 10, ou 100, ou 1000, ou 10 000, etc.

Exemple 7

Les fractions $\frac{5}{10}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{365}{1000}$ sont des fractions décimales.

B – Du partage au quotient : des activités

Exercice 1

Voici une situation : « Lors d'un tournoi de football, il y a 176 joueurs inscrits, c'est-à-dire 16 équipes de 11 joueurs. »

Écris trois problèmes reprenant cette situation en utilisant deux nombres de l'énoncé et de sorte que le troisième nombre soit la réponse au problème.

Pour chaque problème, écris le calcul qui permet d'obtenir la réponse.

- 1► Dans un tournoi de football, il y a 16 équipes de 11 joueurs. Combien y a-t-il de joueurs au total ?
Calcul : 16×11
- 2► Dans un tournoi de football, les 176 participants sont répartis en 16 équipes qui contiennent le même nombre de joueurs. Combien y a-t-il de joueurs dans chaque équipe ?
Calcul : $176 \div 16$
- 3► Dans un tournoi de football, les 176 participants forment des équipes de 11 joueurs. Combien y a-t-il d'équipes ?
Calcul : $176 \div 11$

Exercice 2

Voici une situation : « Un lot de cahiers coûte 12€, il contient 24 cahiers à 0,50€ l'un. »

Écris trois problèmes reprenant cette situation en utilisant deux nombres de l'énoncé et de sorte que le troisième nombre soit la réponse au problème.

Pour chaque problème, écris le calcul qui permet d'obtenir la réponse.

- 1► On achète 24 cahiers à 0,5€. Combien paye-t-on ?
Calcul : $24 \times 0,5$
- 2► Un lot de 24 cahiers coûte 12€. Combien coûte 1 cahier ?
Calcul : $24 \div 12$
- 3► On achète des cahiers à 0,5€ l'unité, et on paye 12€. Combien a-t-on acheté de cahiers ?
Calcul : $12 \div 0,5$

Exercice 3

Voici des problèmes. Pour chacun d'eux, trouve, sans l'effectuer, parmi les calculs proposés celui qui donne la bonne réponse au problème.

Écris ensuite comment tu peux vérifier que cette réponse est juste.

Énoncé du problème	Entourez le calcul qui conduit à la réponse	Expliquez comment faire pour savoir si c'est juste
10 rochers chocolatés tous identiques coûtent 5€. Quel est le prix d'un rocher chocolaté ?	$5 \div 10$ $10 \div 5$ 5×10	On vérifie si $10 \times \text{prix à l'unité} = 5$
Je vends mes œufs par boîtes de 12. J'ai 96 œufs à vendre aujourd'hui. Combien me faut-il de boîtes ?	$12 \div 96$ $96 \div 12$ 12×96	On vérifie si $12 \times \text{nombre de boîtes} = 96$
Je veux faire 7 paquets identiques de 98 dragées chacun. Combien me faut-il de dragées ?	$7 \div 98$ $98 \div 7$ 7×98	On vérifie si $7 \times 98 = \text{nombre de dragées}$
1 mètre de câble vaut 6€. Combien de mètres mesure un câble qui vaut 750€ ?	$1 \div 6$ $1 \div 750$ $6 \div 750$ $750 \div 6$ $6 \div 1$ $750 \div 1$ $1 \times 6 \times 750$	On vérifie si $6 \times \text{longueur du câble} = 750$
32 000 grains de sable (tous identiques) pèsent 800 grammes. Combien pèse un seul grain de sable ?	$32000 \div 800$ $800 \div 32000$ 32000×800	On vérifie si $32000 \times \text{masse d'un seul grain} = 800$

Exercice 4

Voici des opérations à trou appelées aussi équations. Il s'agit de trouver le nombre inconnu. Écris le calcul qui permet de trouver ce nombre. Avec la calculatrice, effectue ce calcul ainsi que la vérification.

	Calcul à effectuer pour trouver le nombre manquant	Vérification
$2 \times \dots = 6$	$6 \div 2 = 3$	$2 \times \boxed{3} = 6$
$3 + \dots = 7$	$7 - 3 = 4$	$3 + \boxed{4} = 7$
$\dots - 3 = 15$	$15 + 3 = 18$	$\boxed{18} - 3 = 15$
$\dots \div 2 = 10$	$10 \times 2 = 20$	$\boxed{20} \div 2 = 10$
$0,4 \times \dots = 5$	$5 \div 0,4 = 12,5$	$0,4 \times \boxed{12,5} = 5$
$\dots \times 50 = 0,8$	$0,8 \div 50 = 0,016$	$\boxed{0,016} \times 50 = 0,8$
$35,8 \times \dots = 229,12$	$229,12 \div 35,8 = 6,4$	$35,8 \times \boxed{6,4} = 229,12$
$\dots \div 4 = 6,4$	$6,4 \times 4 = 25,6$	$25,6 \div 4 = 6,4$
$\dots + 12,5 = 40$	$40 - 12,5 = 27,5$	$\boxed{27,5} + 12,5 = 40$
$\dots \times 4,5 = 90$	$90 \div 4,5 = 20$	$\boxed{20} \times 4,5 = 90$
$56 \times \dots = 716,8$	$716,8 \div 56 = 12,8$	$56 \times \boxed{12,8} = 716,8$

$$\dots \div 0,14 = 7$$

$$7 \times 0,14 = 0,98$$

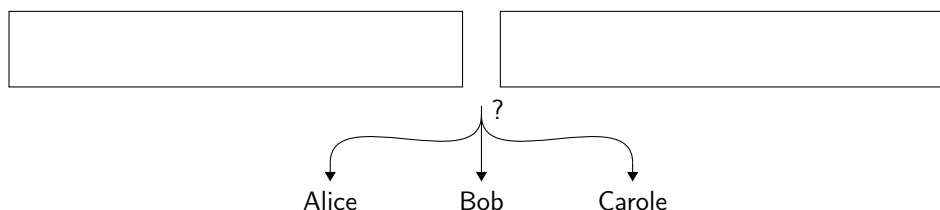
$$0,98 \div 0,14 = 7$$

Proposition 8

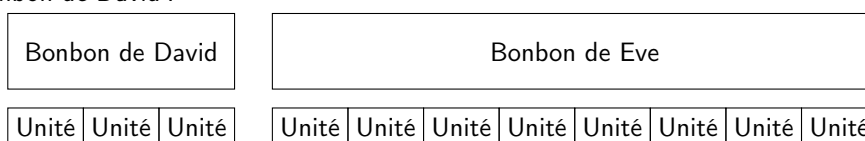
- Pour compléter une addition à trou, on fait une soustraction.
- Pour compléter une multiplication à trou, on fait une division.

Activité 9

- 1► Alice, Bob et Carole achètent des « bonbons-rubans » (des longues bandes très sucrées – on représentera les bonbons par des rectangles). Malheureusement, ils se sont trompés... ils ont acheté seulement 2 bonbons, alors qu'ils sont trois ! Aidez-les à partager équitablement ces bonbons.



- 2► David et Eve partent acheter des bonbons-rubans spéciaux. David achète un bonbon qui fait 3 unités de longueur, et Eve en achète un qui fait 8 unités de longueurs. Le bonbon de Eve est long comme combien de fois le bonbon de David ?



- 1► On peut partager chaque bonbon en 3 parts égales, puis donner deux parts à chacun.



Autre méthode : on peut accoler les deux bonbons pour faire un grand bonbon, et diviser ce grand bonbon en trois parts égales.



- 2► On veut compléter la multiplication à trou Bonbon de Eve = ... $\times$ Bonbon de David. Autrement dit, on veut compléter $8 = \dots \times 3$. On a vu que pour cela, il faut faire une division : on calcule $8 \div 3$. La calculatrice donne $8 \div 3 = 2,66666667$. On vérifie qu'on ne s'est pas trompé en complétant l'égalité à trou : la calculatrice donne $2,66666667 \times 3 = 8,00000001$: ce n'est pas exactement 8 !

Bilan : Pour certaines divisions, on ne peut pas écrire le résultat exact sous forme décimale. On les écrit alors sous la forme d'une fraction : le résultat de $8 \div 3$ est noté $\frac{8}{3}$.

Le bonbon de Eve est donc $\frac{8}{3}$ fois plus grand que le bonbon de David.

Définition 10

Soient a et b deux nombres, avec $b \neq 0$.

Le *quotient* de a par b , c'est-à-dire le résultat de la division de a par b , est le nombre noté $\frac{a}{b}$ qui, multiplié

par b , donne a . Autrement dit :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

Exemple 11

$$3 \times \frac{2}{3} = 2 \quad , \quad 11 \times \frac{56}{11} = 56$$

Définition 12

- L'écriture $\frac{a}{b}$ est appelée *écriture fractionnaire*.
- Lorsque a et b sont des nombres entiers, on dit que $\frac{a}{b}$ est une *fraction*.

Exemple 13

$\frac{6}{2}$ et $\frac{1,3}{5}$ sont deux écritures fractionnaires, mais $\frac{1,3}{5}$ n'est pas une fraction.

Remarque 14

Quelle est la différence entre $3 \div 4$ et $\frac{3}{4}$? Réponse : le premier est une opération, et le deuxième est un nombre !

En effet, $3 \div 4$ désigne l'opération de division de 3 par 4, et $\frac{3}{4}$ désigne le résultat de cette opération, c'est-à-dire $\frac{3}{4} = 0,75$.

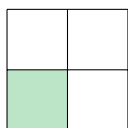
Méthode 15

Pour trouver l'écriture décimale d'un nombre à partir d'une écriture fractionnaire, on pose une division décimale, ou on utilise la calculatrice.

Activité 16

Pour chaque situation, complétez en écrivant vos calculs (sans oublier les unités). S'il s'agit d'une division, écrire le résultat sous forme fractionnaire et sous forme décimale. Enfin, écrire une égalité du type $b \times \frac{a}{b} = a$.

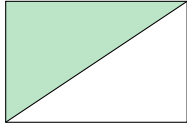
Exemple :



Prix de la tablette : 5€

Prix d'un carré : $\frac{5}{4} \text{€} = 1,25 \text{€}$

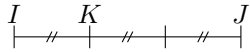
Égalité : $4 \times \frac{5}{4} \text{€} = 5 \text{€}$



Aire totale : 1 unité

Aire verte : $\frac{1}{2}$ unité = 0,5 unité

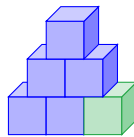
Égalité : $2 \times \frac{1}{2} = 1$



$IJ = 5\text{km}$

$IK = 5 \div 3\text{km} = \frac{5}{3}\text{km} \approx 1,6666666\text{km}$

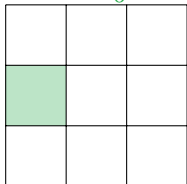
Égalité : $3 \times \frac{5}{3} = 5$



Masse de l'empilement = $6 \times 17,3\text{kg} = 103,8\text{kg}$

Masse d'un cube = 17,3g

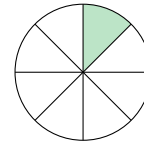
Égalité : $6 \times \frac{103,8}{6} = 103,8$



Prix de la tablette = 3,6€

Prix d'un carré = $3,6 \div 9 = \frac{3,6}{9} = 0,4\text{€}$

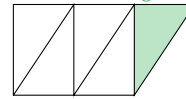
Égalité : $9 \times \frac{3,6}{9} = 3,6$



Prix du gâteau : 50€

Prix d'une part : $50 \div 8\text{€} = \frac{50}{8}\text{€} = 6,25\text{€}$

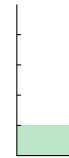
Égalité : $8 \times \frac{50}{8} = 50$



Aire totale = $5 \times 1,8$ unités = 9 unités

Aire verte = 1,8 unités

Égalité : $5 \times \frac{9}{5} = 9$



Contenance totale = 14L

Volume vert = $14 \div 5 = \frac{14}{5} = 2,8\text{L}$

Égalité : $5 \times \frac{14}{5} = 14$



Aire totale = $4 \times 15,2 = 60,8$ unités

Aire verte = 15,2 unités

Égalité : $4 \times \frac{60,8}{4} = 60,8$

Remarque 17

Il existe plusieurs manières d'écrire un même nombre : par exemple, l'écriture fractionnaire $\frac{1}{2}$ et l'écriture décimale 0,5 sont deux manières d'écrire le même nombre. Une autre manière de l'écrire est $\frac{5}{10}$.

Activité 18

Complétez le tableau suivant :

OU

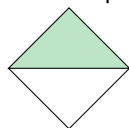
Lecture de la fraction	Écriture fractionnaire	Écriture décimale exacte si possible,	Écr. décimale approchée avec 9 chiffres après la virgule	2 autres écritures fractionnaires
un cinquième	$\frac{1}{5}$	0,2		$\frac{2}{10}$, $\frac{20}{100}$
un demi	$\frac{1}{2}$	0,5		$\frac{5}{10}$, $\frac{50}{100}$
trois demis	$\frac{3}{2}$	1,5		$\frac{15}{10}$, $\frac{150}{100}$
un sixième	$\frac{1}{6}$		0,166666666	$\frac{2}{12}$, $\frac{3}{18}$
trois quarts	$\frac{3}{4}$	0,75		$\frac{75}{100}$, $\frac{6}{8}$
cinq tiers	$\frac{5}{3}$		1,666666666	$\frac{10}{6}$, $\frac{50}{30}$
neuf septièmes	$\frac{9}{7}$		1,285714286	$\frac{90}{70}$, $\frac{900}{700}$
un huitième	$\frac{1}{8}$	0,125		$\frac{2}{16}$, $\frac{3}{24}$
deux-cent-quatre-vingts quarts	$\frac{280}{4}$	70		$\frac{700}{10}$, $\frac{35}{2}$
cent-deux onzièmes	$\frac{102}{11}$		9,272727273	$\frac{1020}{110}$, $\frac{10200}{1100}$
un tiers	$\frac{1}{3}$		0,333333333	$\frac{10}{30}$, $\frac{2}{6}$
deux douzièmes	$\frac{2}{12}$		0,166666666	$\frac{4}{24}$, $\frac{1}{6}$
cinq seizièmes	$\frac{5}{16}$	0,3125		$\frac{50}{160}$, $\frac{3125}{10000}$
neuf neuvièmes	$\frac{9}{9}$		1	$\frac{2}{2}$, $\frac{90}{90}$

Remarque 19

L'écriture fractionnaire permet d'écrire des nombres qui ont une écriture décimale infinie.

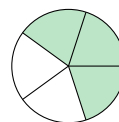
Activité 20

Pour chacune des figures ci-dessous, on écrit son aire totale dans une unité ua. Calculez l'aire de la partie verte. (Les découpages sont faits en parts égales.)



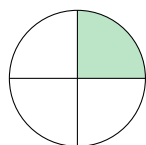
Aire totale : 6,24ua

Aire verte : $6,24 \div 2 = 3,12ua$



Aire totale : 1500ua

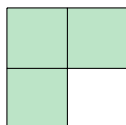
Aire verte : $(1500 \div 5) \times 3 = 900ua$



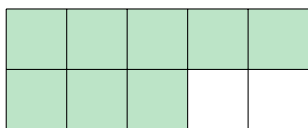
Aire totale : 14ua

Aire verte : $14 \div 4 = 3,5\text{ua}$ 

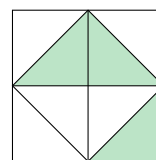
Aire totale : 11ua

Aire verte : $11 \div 5 = 2,2\text{ua}$ 

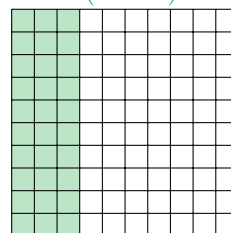
Aire totale : 880ua

Aire verte : $(880 \div 4) \times 3 = 660\text{ua}$ 

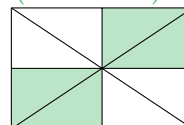
Aire totale : 10,2ua

Aire verte : $(10,2 \div 10) \times 8 = 8,16\text{ua}$ 

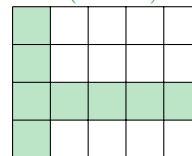
Aire totale : 16ua

Aire verte : $(16 \div 8) \times 3 = 6\text{ua}$ 

Aire totale : 2200ua

Aire verte : $(2200 \div 100) \times 30 = 660\text{ua}$ 

Aire totale : 12ua

Aire verte : $(12 \div 8) \times 4 = 6\text{ua}$ 

Aire totale : 20ua

Aire verte : $(20 \div 20) \times 8 = 8\text{ua}$ **Proposition 21**

- Pour calculer la moitié d'un nombre, on divise par 2 ou on multiplie par $\frac{1}{2}$,
- Pour calculer le tiers d'un nombre, on divise par 3 ou on multiplie par $\frac{1}{3}$,
- Pour calculer le quart d'un nombre, on divise par 4 ou on multiplie par $\frac{1}{4}$,
- ...

Diviser par n , c'est la même chose que multiplier par $\frac{1}{n}$.

Exemple 22

$$11 \div 2 = 11 \times \frac{1}{2} \quad , \quad 9 \div 5 = 9 \times \frac{1}{5}$$

Méthode 23

Pour calculer les trois quarts d'un nombre, on peut au choix :

- ▶ multiplier par 3 puis diviser par 4,
- ▶ multiplier par $\frac{3}{4}$ (ou par 0,75 puisque $\frac{3}{4} = 0,75$)
- ▶ diviser par 4 puis multiplier par 3,

Exemple 24

Pour calculer les trois quarts de 28, on peut calculer au choix :

- ▶ $(28 \times 3) \div 4$
- ▶ $28 \times \frac{3}{4}$
- ▶ $(28 \div 4) \times 3$

En écriture fractionnaire, cela correspond aux égalités :

$$\frac{28 \times 3}{4} = \frac{28}{4} \times 3 = 28 \times \frac{3}{4}$$

Exercice 5

Reliez les nombres aux calculs dont ils sont le résultat exact :

- | | |
|------------------|--------------------------|
| 3 • | • $14 \div 10$ |
| | • $3 \div 1$ |
| 1,4 • | • $1 \div 3$ |
| | • $3 + \frac{3}{7}$ |
| $\frac{1}{3}$ • | • $3 \times \frac{3}{7}$ |
| | • $7 \times \frac{3}{7}$ |
| $\frac{3}{7}$ • | • $7 \div 24$ |
| | • $24 \div 7$ |
| $\frac{24}{7}$ • | • $1 \div 4$ |

Exercice 6

Complétez les opérations à trou :

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| ▶ $3 \times \dots = 1$ | ▶ $3 \div 2 = \dots$ |
| ▶ $\dots \times \frac{5}{4} = 5$ | ▶ $\dots \times 5 = 4$ |
| ▶ $\dots \div \dots = \frac{7}{6}$ | ▶ $14\,000 \times \dots = 14$ |
| ▶ $\frac{8}{3} = \dots \div \dots$ | ▶ $25 \div 1000 = \dots$ |
| ▶ $\dots \div \dots = \frac{2}{5}$ | ▶ $1000 \div 25 = \dots$ |
| ▶ $10 \times \dots = 2$ | ▶ $1000 \times \dots = 25$ |
| ▶ $3 \div 24 = \frac{\dots}{\dots}$ | ▶ $\dots \times 10 = 3$ |
| | ▶ $\dots \div \dots = 0,8$ |
| | ▶ $\dots \times 0 = 5$ |

Exercice 7

Énoncés	Opérations	Réponses de la vie courante
On partage de manière équitable 17 billes entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
On partage de manière équitable 17 euros entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
On partage de manière équitable 17 bandes-unité entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
Un camion peut contenir 7 tonnes. Combien de voyages devra-t-il effectuer pour évacuer 17 tonnes de terre ?		
Quel est le quotient exact de 17 par 7 ?		

C – Les fractions comme quotients – nombres rationnels

Fraction quotient

Définition 25

Soient n et d deux nombres entiers *relatifs*, avec d différent de 0.

La fraction $\frac{n}{d}$ est le nombre dont le produit par d vaut n , c'est-à-dire $\frac{n}{d} \times d = d \times \frac{n}{d} = n$.

Autrement dit, c'est le résultat de la division de n par d .

Exemple 26

$$\frac{12}{5} \times 5 = 12 \quad , \quad \frac{3}{8} \times 8 = 3$$

Nombre rationnel

Définition 27

Un nombre *rationnel* est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction, c'est-à-dire le quotient de deux nombres entiers (relatifs).

Exemple 28

$$\frac{123}{51} \text{ est un nombre rationnel, } \frac{-4}{2} \text{ en est un autre.}$$

Remarque 29

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels ! Par exemple, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Proposition 30

Pour tout nombre entier n ,

$$\frac{n}{1} = n$$

Remarque 31

Par conséquent, tout nombre entier (relatif) est rationnel.

La réciproque n'est pas vraie : $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel qui n'est pas entier.

Propriété 32

On peut mettre les signes où ça nous arrange dans une fraction : par exemple, $\frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

2 – Calculer avec les fractions**A – Simplifier, mettre au même dénominateur****Proposition 33**

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou divisant) son numérateur et son dénominateur par le même nombre.

Proposition 34

- ▶ Diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$,
- ▶ Diviser par 3 revient à multiplier par $\frac{1}{3}$,
- ▶ Diviser par 4 revient à multiplier par $\frac{1}{4}$,
- ▶ ...

Exemple 35

$$12 \div 2 = 12 \times \frac{1}{2}, \quad 12 \div 3 = 12 \times \frac{1}{3}, \quad 12 \div 4 = 12 \times \frac{1}{4}$$

Définition 36**Simplifier une fraction**

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par le même nombre.

On dit qu'une fraction est *irréductible* si le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur positif commun autre que 1.

Exemple 37

Trois manières de présenter :

Barrer le facteur commun : Diviser le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{15}{10} = \frac{3 \times \cancel{5}}{2 \times \cancel{5}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{15}{10} = \frac{15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{3}{2}$$

Avec des flèches :

$$\begin{array}{c} \div 5 \\ \curvearrowright \\ \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \\ \div 5 \end{array}$$

Méthode 38 (Simplification d'une fraction)

Pour simplifier une fraction, on peut déterminer les décompositions en produits de facteurs premiers de son numérateur et de son dénominateur, et simplifier leurs facteurs communs.

Exemple 39

$$\frac{24}{420} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times 7} = \frac{2}{35}$$

Définition 40**Mettre au même dénominateur**

Réduire au même dénominateur deux fractions, c'est réécrire chacune de ces fractions comme d'autres fractions qui leurs sont égales, mais qui ont le même dénominateur.

Exemple 41

- Pour réduire $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.
- Pour réduire $\frac{12}{6}$ et $\frac{7}{8}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{12}{6} = \frac{48}{24}$ et $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$.

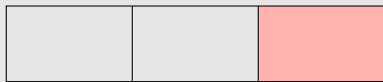
Méthode 42 (Réduction au même dénominateur)

- Pour réduire $\frac{6}{2}$ et $\frac{3}{5}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 5} = \frac{30}{10}$ et $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$.
- Pour réduire $\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{8}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{1}{6} = \frac{1 \times 8}{6 \times 8} = \frac{8}{48}$ et $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 6}{8 \times 6} = \frac{18}{48}$.

Autrement dit, on multiplie en haut et en bas une fraction par le dénominateur de la deuxième fraction.

B – Ajouter, soustraire deux fractions**Activité 43**

À l'aide d'une représentation par découpage de gâteau ou de tablette de chocolat, comparer $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{8}$. En vertu de cet exemple, est-il juste d'ajouter les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux pour ajouter deux fractions ?

Correction

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$$



$$\frac{2}{8}$$

On constate sur ces dessins que $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{8}$ ne sont pas égaux, car le total des longueurs bleue et rouge dépasse l'orange. Il n'est donc pas juste d'ajouter les numérateurs et le dénominateurs.

Méthode 44 (Addition de deux fraction)

Pour ajouter deux fractions, il *faut* les réduire au même dénominateur, puis ajouter les numérateurs. *On ne peut pas* ajouter directement les dénominateurs et les numérateurs. C'est pareil pour la soustraction.

Exemple 45

► Pour calculer $\frac{6}{2} + \frac{3}{5}$, on peut écrire

$$\frac{6}{2} + \frac{3}{5} = \frac{6 \times 5}{2 \times 5} + \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{30}{10} + \frac{6}{10} = \frac{36}{10}$$

► Pour calculer $\frac{1}{6} + \frac{3}{8}$, on peut écrire

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{1 \times 8}{6 \times 8} + \frac{3 \times 6}{8 \times 6} = \frac{8}{48} + \frac{18}{48} = \frac{26}{48}$$

Remarque 46

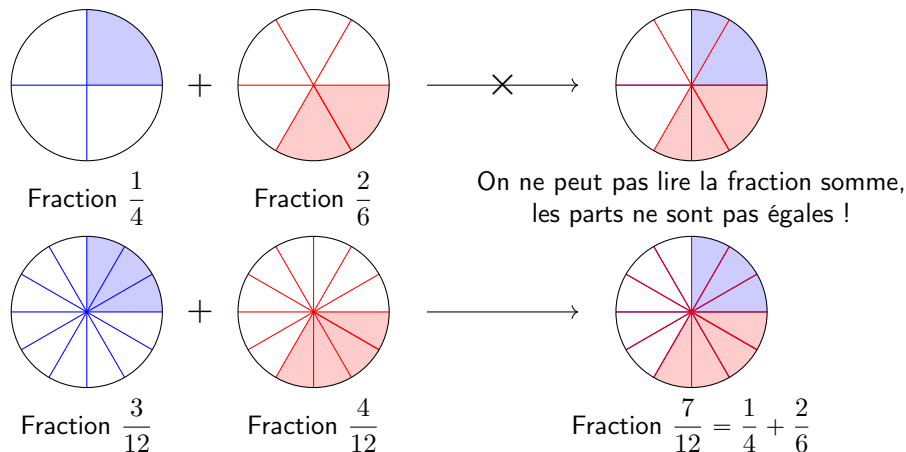
C'est une méthode qui fonctionne toujours, mais ce n'est pas la seule ! On peut tout à fait remarquer, à vue, un multiple commun qui convient.

Exemple 47

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Remarque 48

Le découpage de gâteaux permet de visualiser pourquoi il est nécessaire de réduire au même dénominateur pour calculer : sans ça, les parts de gâteaux n'ont pas la même taille !

**Exercice 8 (Énigme des 17 chameaux)**

Un chamelier sentant sa fin approcher, il décide de léguer son troupeau de 17 chameaux à ses trois enfants. L'aîné recevra la moitié du troupeau, le cadet en recevra le tiers, et le benjamin en recevra le neuvième. Le problème est que l'on ne peut diviser équitablement une troupe de 17 chameaux en 2, 3 ou 9 sans couper l'un des chameaux en petits morceaux ! Ne sachant quoi faire, les trois enfants consultent un collègue chamelier.

Celui-ci dit aux enfants : « Je vous prête l'un de mes chameaux. Effectuez la division de votre troupeau en comptant ce chameau. Mais attention, je tiens à le récupérer ensuite ! ». Les enfants, étonnés, pensent qu'il est impossible de restituer le chameau prêté s'ils en tiennent compte dans la répartition de la troupe. Et pourtant... Représentez la situation avec un dessin. Comment expliquer le fait que le chameau prêté puisse être rendu ?

Méthode 49 (Soustraction de deux fractions)

Pour soustraire deux fractions, on procède comme pour l'addition.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} - \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$$

C – Multiplier, diviser deux fractions

Méthode 50 (Multiplication de deux fractions)

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple 51

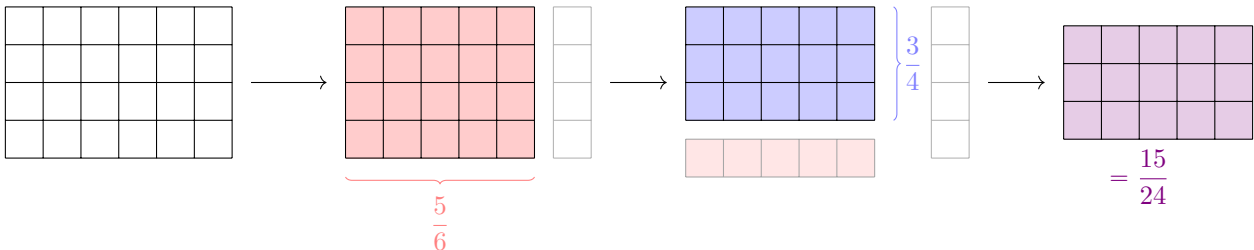
$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}.$$

Remarque 52

Cas particulier : multiplier une fraction par un entier : $5 \times \frac{2}{3} \left(= \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{1 \times 3} \right) = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}.$

Remarque 53

On peut illustrer la multiplication des fractions à nouveau à l'aide des fractions-partage :



Propriété 54

Prendre une fraction d'un nombre revient à multiplier ce nombre par la fraction.

Exemple 55

Pour calculer « $\frac{5}{6}$ de 12 », on calcule $\frac{5}{6} \times 12 = \frac{5 \times 12}{6} = \frac{60}{6}.$

Inverse**Définition 56**

Soit x un nombre différent de 0. On appelle *inverse de x* l'unique nombre dont le produit par x vaut 1. On note $\frac{1}{x}$ l'inverse de x . On a donc $x \times \frac{1}{x} = 1$.

Exemple 57

L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$, l'inverse de 10^n est 10^{-n} .

Méthode 58

Pour trouver d'inverse d'une fraction, on échange son numérateur et son dénominateur.

Exemple 59

L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$, l'inverse de $\frac{5}{9}$ est $\frac{9}{5}$, l'inverse de $\frac{1}{2}$ est $\frac{2}{1}$, ...

Propriété 60

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse. Autrement dit, pour tous nombres a et b avec $b \neq 0$,

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

Remarque 61

En particulier, $\dots \div \frac{a}{b} = \dots \times \frac{b}{a}$.

Remarque 62

Pour un nombre non nul, $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Pour cette raison, on utilise parfois des exposants négatifs pour parler de certains grandeurs quotient. Par exemple, des km/h sont parfois notés $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. En effet, des km/h sont des kilomètres divisés par des heures, c'est-à-dire des kilomètres multipliés par l'inverse d'heures.

Exemple 63

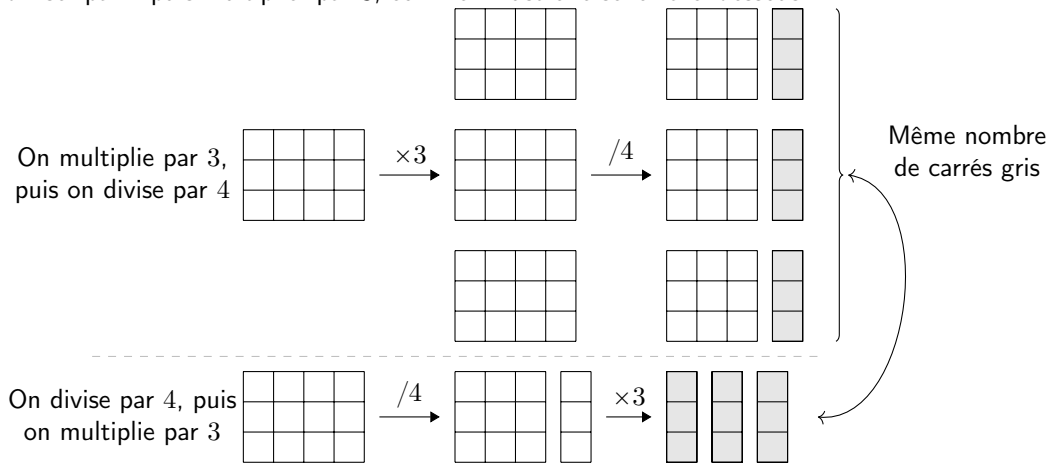
Diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$, diviser par 3 revient à multiplier par $\frac{1}{3}$, Diviser par $\frac{5}{9}$ revient à multiplier par $\frac{9}{5}$, ...

De même,

- ▶ diviser par $\frac{2}{3}$ revient à multiplier par $\frac{3}{2}$: par exemple, $\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{2}$
- ▶ diviser par $\frac{5}{9}$ revient à multiplier par $\frac{9}{5}$: par exemple, $\frac{7}{8} \div \frac{5}{9} = \frac{7}{8} \times \frac{9}{5}$
- ▶ ...

Remarque 64

Quand on multiplie un nombre, disons par $\frac{3}{4}$, cela revient à multiplier par 3 et diviser par 4, mais on peut aussi d'abord diviser par 4 puis multiplier par 3, comme l'illustre le schéma ci-dessous.

**D – Comparer, encadrer deux fractions****Méthode 65 (Décomposition d'une fraction)**

Toute fraction peut s'écrire comme somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure (strictement) à 1.

On veut écrire la fraction $\frac{45}{7}$ sous la forme d'un entier plus une fraction plus petite que 1. Pour cela, on calcule la division euclidienne de 45 par 7 : $45 = 7 \times 6 + 3$. Dans 45, il y a 6 paquets de 7, et il reste 3 unités, donc $\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}$.

Exercice 9

Écrire $\frac{53}{6}$ sous la forme d'un entier plus une fraction plus petite que 1.

Correction

Comme $53 = 6 \times 8 + 5$, on en déduit que $\frac{53}{6} = 8 + \frac{5}{6}$ (53 contient 8 paquets de 6 et 5 unités, donc en partageant en 6, on se retrouve avec 8 paquets entiers et 5 sixièmes d'unité).

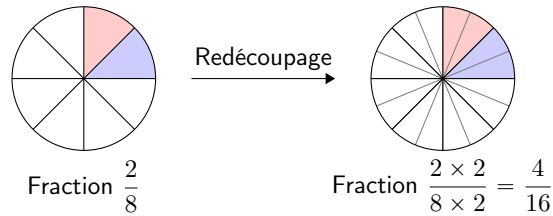
Proposition 66

Toute fraction est comprise entre deux nombres entiers consécutifs (c'est-à-dire qui se suivent). (On dit qu'on *encadre* la fraction entre deux entiers consécutifs.)

Proposition 67

On peut multiplier simultanément le numérateur et le dénominateur d'une fraction sans changer la valeur de celle-ci.

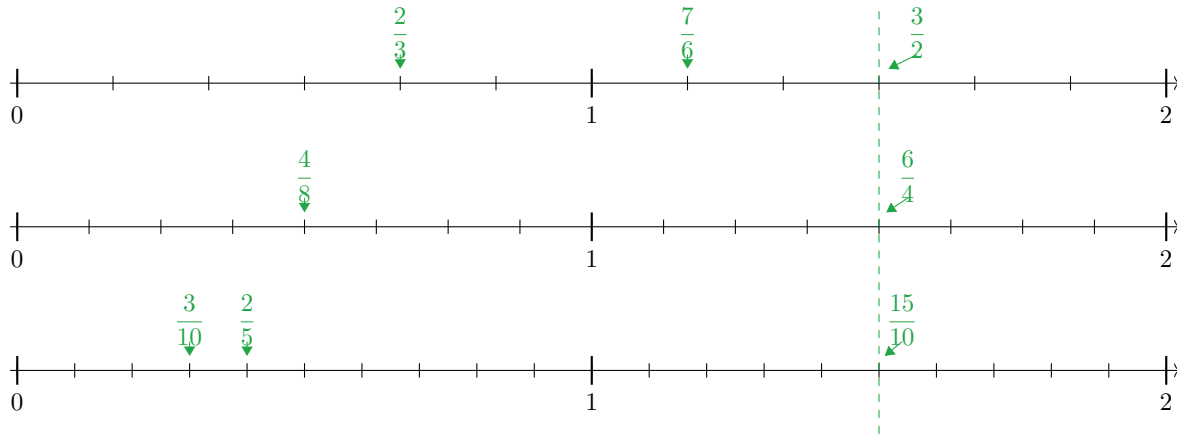
Remarque 68



Exercice 10

Pour chacune des fractions suivantes, décomposez-la en la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1, puis placez-la sur une demi-droite avec une graduation adaptée parmi les demi-droites graduées ci-dessous :

$\frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{7}{6}, \frac{3}{4}, \frac{6}{10}, \frac{2}{3}, \frac{15}{10}$.



Méthode 69

Pour comparer deux fractions de même dénominateur, on compare leurs numérateurs.

3 – Décomposition, encadrement, comparaison de fractions

Méthode 70

((Comparaison de fractions)) Pour comparer deux fractions, on les réduit d'abord au même dénominateur, puis on compare leurs numérateurs.

Exemple 71

On souhaite comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. On les réduit au même dénominateur : $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$, et $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$.

Comme $\frac{3}{12} < \frac{4}{12}$, on en conclut que $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

Remarque 72

Anecdote : dans les années 1980, pour concurrencer le burger "Quarter pounder" de Mc Donalds (un burger dont le steak pèse un quart de livre), la chaîne de fast food A&W a sorti un burger "Third pounder" (un burger

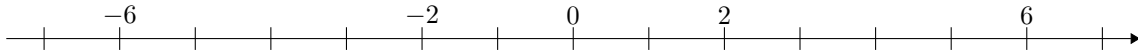
dont le steak pèse un tiers de livre) au même prix. Malheureusement, les américains de l'époque ont cru que c'était une arnaque, pensant que $\frac{1}{3}$ était plus petit que $\frac{1}{4}$...

Rappel : comparaison et nombres négatifs

- ▶ Un nombre négatif est toujours plus petit que n'importe quel nombre positif.
- ▶ Quand on compare deux nombres négatifs, ils sont rangés à l'envers par rapport à leurs distances à 0 !

Exemple 73

- ▶ $-5 < 2$, $-5 < 56,4$ $-3,16565 < 21,798$
- ▶ $6 > 2$ mais $-6 < -2$!



Proposition 74

Toute fraction peut s'écrire comme somme d'un nombre entier (appelé *partie entière* de la fraction) et d'une fraction comprise entre 0 (inclus) et 1 (exclu).

Exemple 75

- ▶ $\frac{15}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7}$,
- ▶ $\frac{27}{8} = \frac{24}{8} + \frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8}$.

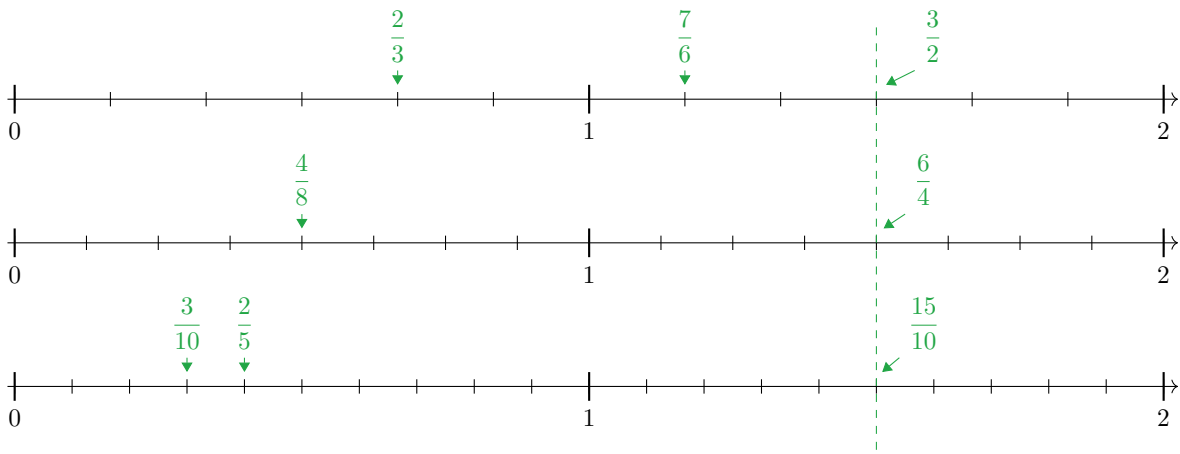
Proposition 76

Toute fraction est comprise entre deux nombres entiers successifs (c'est-à-dire qui se suivent, comme 1 et 2, comme 9 et 10, ...).

Exercice 11

Pour chacune des fractions suivantes, décomposez-la en la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1, puis placez-la sur une demi-droite avec une graduation adaptée parmi les demi-droites graduées ci-dessous :

- ▶ $\frac{3}{2}$ ▶ $\frac{2}{5}$ ▶ $\frac{4}{8}$ ▶ $\frac{7}{6}$ ▶ $\frac{3}{10}$ ▶ $\frac{6}{4}$ ▶ $\frac{2}{3}$ ▶ $\frac{15}{10}$



C Rappels de calcul littéral

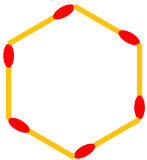
Table des matières

1	Expressions littérales et programmes de calcul	151
2	Simplifier/réduire une expression	154
3	Distributivité	154
A	Développement et factorisation	154
B	Identities remarquables	155
C	Factoriser	156

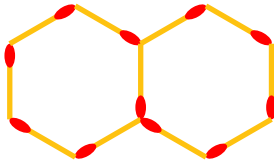
1 – Expressions littérales et programmes de calcul

Activité 1

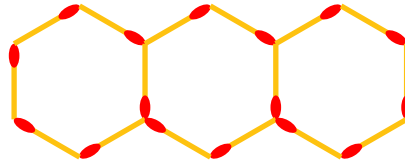
On fabrique des figures suivantes à l'aide d'allumettes :



ÉTAPE 1



ÉTAPE 2



ÉTAPE 3

- 1► Combien d'allumettes sont utilisées à l'étape 1 ? à l'étape 2 ? à l'étape 3 ?
- 2► Donner le nombre d'allumettes nécessaires pour construire l'étape 4, puis pour l'étape 5.
- 3► Établir une formule qui permet de calculer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire n'importe quelle étape. *Détaillez le raisonnement.*
- 4► Si on dispose de 1 725 allumettes, jusqu'à quelle étape peut-on faire la construction ?

Correction

- 1► À l'étape 1, on utilise 6 allumettes. À l'étape 2, on utilise 11 allumettes. À l'étape 3, on utilise 16 allumettes.
- 2► en faisant un dessin, on voit qu'à l'étape 4, on utilise 21 allumettes, et à l'étape 5, on utilise 26 allumettes.
- 3► Pour construire une étape donnée, on peut multiplier le numéro de l'étape par 5 et ajouter 1. En effet, à une étape donnée, on compte le nombre d'hexagones ouverts à gauche (qui constituent une chaîne de 5 allumettes) : il y en a autant que le numéro de l'étape. On ajoute 1 pour fermer l'hexagone le plus à gauche.
- 4► Si on note n le numéro de l'étape, alors le nombre d'allumettes s'exprime $5 \times n + 1$ d'après la question précédente. Comme $1725 = 5 \times 345$, on peut utiliser $5 \times 344 + 1 = 1721$ allumettes pour aller jusqu'à l'étape 344, et il reste 4 allumettes.

Expression littérale

Définition 2

Une *expression littérale* est une expression dans laquelle certaines valeurs sont remplacées par des lettres, appelées *variables* de l'expression littérale.

Exemple 3

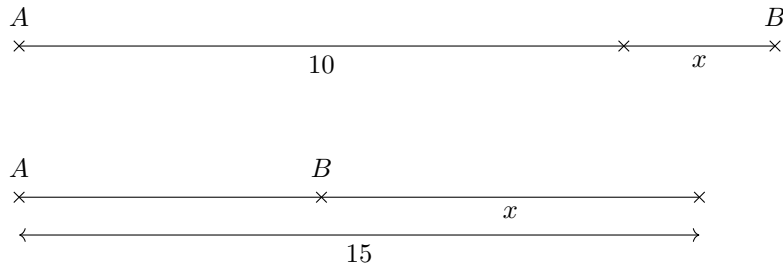
- ▶ L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est $L \times \ell$.
- ▶ Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2 \times \pi \times r$.

Remarque 4

Dans l'expression $2 \times \pi \times r$, r est une variable, et π est un nombre !

Exercice 1

- a▶ Exprimer la longueur de $[AB]$ en fonction de x dans les deux cas suivants :



Dans le premier cas, $AB = 10 + x$, et dans le second cas, $AB = 15 - x$.

- b▶ Exprimer le résultat P du programme de calcul ci-contre appliqué à un nombre n .

Le résultat s'exprime $P = 3n + 5$.

- 1▶ Choisir un nombre.
- 2▶ Le multiplier par 3.
- 3▶ Ajouter 5 au résultat.

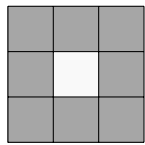
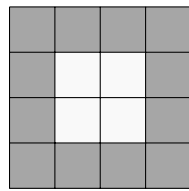
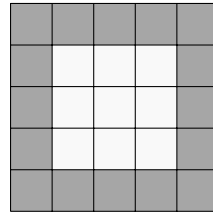
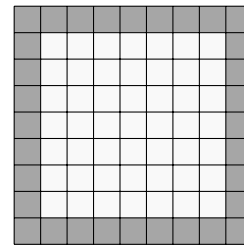
Lorsqu'on connaît les valeurs de ses variables, on peut *calculer la valeur* d'une expression littérale, en remplaçant les variables par leurs valeurs.

Exemple 5

- ▶ Le périmètre d'un cercle de rayon $r = 3$ est $2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 3 = 6 \times \pi$.
- ▶ L'aire d'un rectangle de largeur $\ell = 2$ et de longueur $L = 5$ est $\ell \times L = 2 \times 5 = 10$.

Activité 6

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque. Il dispose des carreaux gris autour de différents carrés constitués de carreaux blancs. En voici quatre :

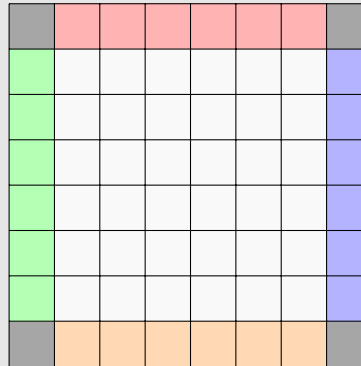
CARRÉ DE TAILLE
1CARRÉ DE TAILLE
2CARRÉ DE TAILLE
3

CARRÉ DE TAILLE 7

- 1► Combien de carreaux gris entourent le carré blanc de taille 1 ? Celui de taille 2 ? Celui de taille 3 ?
- 2► Combien de carreaux gris entourent le carré blanc de taille 7 ?
- 3► On construit un carré blanc de taille 56. Combien y aurait-il de carreaux gris entourant celui-ci ?
- 4► Expliquez par une phrase ou par un calcul comment on peut trouver le nombre de carreaux gris entourant un carré blanc de l'importe quelle taille.
- 5► Si on double le côté du carré blanc, double-t-on aussi le nombre de carreaux gris de la bordure ?
- 6► Peut-on obtenir des bordures de 214 carreaux gris ? 348 ? 1 700 ?

Correction

- 1► Il y a 8 carreaux autour du carré de taille 1, 12 carreaux autour du carré de taille 2, et 16 carreaux autour du carré de taille 3.
- 2► Il y a 32 carreaux autour du carré de taille 7. On peut faire un dessin ou utiliser le raisonnement expliqué dans la question suivante.
- 3► Pour compter les carreaux autour d'un carré d'une certaine taille, on peut multiplier la taille du carré par 4 (pour les 4 côtés) et ajouter 4 au résultat (pour les 4 sommets), en vertu du découpage suivant :



Ainsi, à l'étape 56, il y a $4 \times 56 + 4 = 228$ carreaux.

- 4► Pour entourer un carré blanc de n'importe quelle taille, il suffit de multiplier le côté du carré par 4 puis d'ajouter 4 au résultat.
- 5► Non, car par exemple, pour passer de l'étape 1 à l'étape 2 = 2×1 , on ne multiplie pas par 2 le nombre de carreaux ($12 \neq 8 \times 2$).
- 6► Avec la formule que l'on a donné à la question 4►, on remarque le nombre de carreaux est toujours un multiple de 4. Comme 214 n'est pas un multiple de 4, on ne peut pas réaliser une bordure de 214 carreaux. À l'inverse, $348 = 344 + 4 = 4 \times 86 + 4$ donc 348 est le nombre de carreaux à l'étape 86, et $1700 = 1696 + 4 = 4 \times 424 + 4$ donc 1700 est le nombre de carreaux à l'étape 424.

Définition 7**Nature d'une expression**

La *nature* d'une expression littérale est la dernière opération que l'on effectue lors de son calcul : une somme, un produit, une différence, une division.

Exemple 8

- ▶ L'expression $18 \times 3 + 5$ est une somme.
- ▶ L'expression $2 \times x + 8$ est une somme.
- ▶ L'expression $6,2 \times (1 + 3,7)$ est un produit.

Convention d'écriture : Lorsqu'il est placé devant une lettre ou une parenthèse, on peut ne pas écrire le symbole $\times$ de la multiplication.

Exemple 9

On peut écrire $2(a + b)$ à la place de $2 \times (a + b)$, ou $5x$ à la place de $5 \times x$. On ne peut pas écrire $(1 + y)2$ à la place de $(1 + y) \times 2$, ni $z3$ à la place de $z \times 3$.

Remarque 10 (Cas particuliers)

- ▶ On écrit toujours 0 au lieu de $0x$.
- ▶ On écrit toujours x au lieu de $1x$.
- ▶ On n'écrit jamais un même symbole plusieurs fois de suite : on écrit x^2 au lieu de xx (ce que se lit « x au carré»), on écrit x^3 au lieu de xxx (ce que se lit « x au cube»).

2 – Simplifier/réduire une expression

Définition 11**Simplifier, réduire**

Simplifier (ou *réduire*) une expression littérale, c'est la réécrire sous une forme plus concise/compacte, sans redondance ou complexité inutile.

Exemple 12

$$4x - 2y + 6x + 3y - 5 + y = 10x + 2y - 5$$

3 – Distributivité

A – Développement et factorisation

Propriété 13**Distributivité simple**

Pour tous nombres a , b et c ,

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{Développer}} \\
 a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\
 \xleftarrow{\text{Factoriser}}
 \end{array}$$

Exercice 2

Développer :

a► $4(x + 3)$

b► $3(4x - 5)$

c► $5(2y - 6)$

d► $7x(2 - 3x)$

Factoriser :

e► $2m + 2 \times 7$

f► $15 - 10y$

g► $3x^2 - 18x$

Correction

a► $4(x + 3) = 4 \times x + 4 \times 3 = 4x + 12$

e► $2m + 2 \times 7 = 2(m + 7)$

b► $3(4x - 5) = 3 \times 4x - 3 \times 5 = 12x - 15$

f► $15 - 10y = 5 \times 3 - 5 \times 2y = 5(3 - 2y)$

c► $5(2y - 6) = 5 \times 2y - 5 \times 6 = 10y - 30$

g► $3x^2 - 18x = 3x \times x - 3x \times 9 = 3x(x - 9)$

Définition 14

Double distributivité

Développer

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Factoriser

Exemple 15

Double distributivité :

$$\begin{aligned}(y + 3)(2y + 1) &= 2y^2 + y + 6y + 3 \\ &= 2y^2 + 7y + 3\end{aligned}$$

B – Identités remarquables

Identités remarquables

Proposition 16

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemple 17

- $(4a - 3b)^2 = 4a^2 - 2 \times 4a \times 3b + 3b^2 = 16a^2 - 12ab + 9b^2$
- $25 - 9a^2 = 5^2 - (3a)^2 = (5 + 3a)(5 - 3a)$
- $(10 + 7)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289$

Remarque 18

- ▶ Notez qu'une égalité se lit dans les deux sens, dans le deuxième exemple on utilise une identité remarquable à l'envers par exemple !
- ▶ Notez que dans le dernier cas on a utilisé une identité remarquable pour effectuer simplement un calcul laborieux.

C – Factoriser**Définition 19****Factoriser**

On dit qu'on **factorise** une expression quand on transforme une somme en produit.

Méthode 20 (Factoriser une expression littérale)

Lorsqu'on souhaite factoriser une expression littérale :

- ▶ Si on peut trouver des facteurs communs à chaque terme de l'expression :

$$6a^2 + 4ab = 2a(3a + 2b)$$

- ▶ Sinon on utilise une des identités remarquables :

$$25a^2 + 10a + 1 = (5a)^2 + 2 \times 5a \times 1 + 1^2 = (5a + 1)^2$$

Remarque 21

Ce n'est pas parce qu'une expression à l'air horrible qu'on ne peut pas la factoriser ! Considérons par exemple :

$$\begin{aligned} & (3x + 7)(2x - 1) + (4y - 2)(3x + 7) \\ &= (3x + 7)[(2x - 1) + (4y - 2)] && \rightarrow \text{ici le facteur commun est } (3x + 7) \\ &= (3x + 7)(2x + 4y - 3) && \rightarrow \text{après réduction} \end{aligned}$$

D Rappels de probabilités

1 – Modéliser le hasard : vocabulaire et notations

Définition 1

- ▶ Un phénomène dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat est appelé **expérience aléatoire**.
- ▶ Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible est appelé une **issue**.
- ▶ L'ensemble des issues est appelé l'**univers des possibles**. Traditionnellement, on le note Ω .

Exemple 2

Expérience	Issues
Lancer un dé	1, 2, 3, 4, 5, 6
Tirer une carte	As de pique, 2 de cœur, 3 de trèfle, ...
Lancer une pièce	Pile, Face

Définition 3

- ▶ Un **événement** est constitué d'une ou plusieurs issues. Quand il ne contient qu'une seule issue, on parle d'**événement élémentaire**.
- ▶ Un **événement certain** est un événement qui se produit à coup sûr.
- ▶ Un **événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais.
- ▶ Soit A un événement. L'**événement contraire de A** , noté $\overline{A}$, est l'évènement qui se produit quand A ne se réalise pas.

Exemple 4

Voici quelques exemples d'évènements associés à différentes expériences aléatoires :

- ▶ Lancer d'un dé : "obtenir un nombre pair", "obtenir un 2", ou "obtenir un nombre plus grand que 4"
- ▶ Tirage d'une carte : "obtenir un trèfle", "obtenir une tête ou un as", "obtenir une carte de carreau et qui porte un nombre pair"
- ▶ Lancer une pièce : "obtenir pile", "ne pas obtenir face"

Exemple 5

Lors du lancer d'un dé,

- ▶ "obtenir un nombre" est un événement certain
- ▶ "obtenir un 0, 5" est un événement impossible
- ▶ L'évènement contraire de "obtenir un nombre pair" est "obtenir un nombre impair"

Lors du tirage d'une carte,

- ▶ "obtenir un nombre ou une figure" est un événement certain

- ▶ "obtenir un trèfle et un cœur" est un évènement impossible
- ▶ L'évènement contraire de "obtenir une carte rouge" est "obtenir une carte noire"

Définition 6

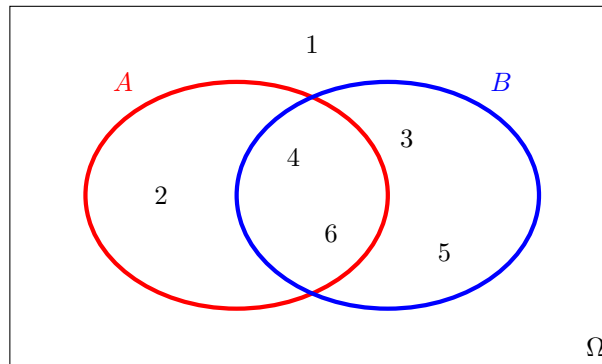
Soient A et B deux évènements.

- ▶ L'évènement « A et B », noté $A \cap B$, est l'évènement réalisé quand A et B sont simultanément réalisés.
- ▶ L'évènement « A ou B », noté $A \cup B$, est l'évènement réalisé quand au moins un des deux évènements parmi A et B est réalisé.

Exemple 7

On considère un lancer d'un dé à 6 faces. Considérons les évènements A : «obtenir un nombre pair» et B : «obtenir un nombre supérieur ou égal à 3».

- ▶ L'évènement $A \cap B$ est «obtenir un nombre pair supérieur ou égal à 3». Les issues qui le réalisent sont 4 et 6.
- ▶ L'évènement $A \cup B$ est «obtenir un nombre pair ou supérieur ou égal à 3». Les issues qui le réalisent sont 2, 3, 4, 5 et 6.

**Application 8**

On tire au hasard un nombre entre 1 et 20. On considère les évènements A : «tirer un multiple de 3» et B : «tirer un multiple de 15».

- 1▶ Décrire l'évènement $A \cap B$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 2▶ Décrire l'évènement $A \cup B$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 3▶ Décrire l'évènement $\overline{A}$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 4▶ Décrire l'évènement $\overline{A \cup B}$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 5▶ Représenter Ω , A et B comme dans l'exemple précédent.

2 – Quantifier le hasard : (loi de) probabilité

A – Probabilité d'un événement

Définition 9

À un évènement, on associe un nombre entre 0 et 1, appelé **probabilité** de l'évènement. Plus la probabilité est proche de 1, plus l'évènement a de chances de se produire, et plus la probabilité est proche de 0, moins l'évènement a de chances de se produire.

La probabilité d'un évènement A est notée $P(A)$.

Exemple 10

- ▶ Quand on lance une pièce, on a 1 chance sur 2 de tomber sur Pile. La probabilité de l'évènement "obtenir Pile" est donc $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 0,5, ou encore 50%. On peut écrire $P(\text{"obtenir Pile"}) = \frac{1}{2}$.
- ▶ Dans un jeu de cartes, un quart des cartes sont des trèfles, on a donc 1 chance sur 4 de tirer un trèfle. La probabilité de l'évènement "tirer un trèfle" est donc $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire 0,25, ou encore 25%. On peut écrire $P(\text{"tirer un trèfle"}) = \frac{1}{4}$.
- ▶ En particulier, on a 3 chances sur 4 de ne pas tirer un trèfle. La probabilité de l'évènement "ne pas tirer un trèfle" est donc $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire 0,75, ou encore 75%. On peut écrire $P(\text{"ne pas tirer un trèfle"}) = \frac{3}{4}$.

Proposition 11

- ▶ La probabilité d'un évènement certain est 1.
- ▶ La probabilité d'un évènement impossible est 0.

Remarque 12

Il est impossible que rien n'arrive : autrement dit, $P(\emptyset) = 0$.

Définition 13

Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**.

Exemple 14

Les issues d'un lancer de pièce, d'un lancer de dé ou d'un tirage de cartes sont équiprobables.

B – Calculer une probabilité

Proposition 15

La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient.

Exemple 16

Lors du lancer d'un dé, l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient les issues 1 et 4. Sa probabilité est donc $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

Méthode 17

Dans une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A se calcule avec la formule :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple 18

Lors du lancer d'un dé, qui est une situation d'équiprobabilité (puisque chaque face a la même chance d'apparaître), l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient 2 issues, et il y a 6 issues au total, donc la probabilité de cet évènement est $\frac{2}{6}$.

Corollaire 19

Soit n un nombre entier plus grand que 1. Si une expérience aléatoire possède n issues équiprobables, alors la probabilité de chacune des issues vaut $\frac{1}{n}$.

Exemple 20

Expérience aléatoire	Probabilité des issues
Lancer de dé	$1/6$
Lancer d'une pièce	$1/2$
Tirage d'une carte	$1/52$

Corollaire 21

Soit A un évènement.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Pour trouver la probabilité de l'évènement contraire $\bar{A}$, on peut donc calculer $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple 22

Soit A l'évènement "obtenir un multiple de 3" lors du lancer d'un dé. C'est une situation d'équiprobabilité, les issues réalisant A sont 3 et 6, donc $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. L'évènement $\bar{A}$ est "ne pas obtenir un multiple de 3 : sa probabilité est $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Définition 23**Événements incompatibles**

On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Lemme 24

Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

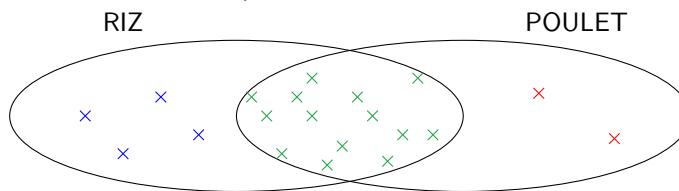
Théorème 25**Formule du crible**

Pour tous événements A et B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque 26

Cette formule est très fautive si A et B ne sont pas incompatibles ! Prenons un exemple : à midi, à la cantine, les élèves de la classe d'Alice peuvent prendre du riz et du poulet. Parmi eux, 4 ne prennent que du riz, 2 d'entre eux ne prennent que du poulet, et les 14 élèves restants prennent des deux. Au total, il y a donc 18 élèves qui prennent du riz, et 16 qui prennent du poulet. Mais il n'y a pas $18 + 16 = 34$ élèves qui prennent du riz ou du poulet ! (il n'y a que 20 élèves dans la classe !)

**Méthode 27 (Tableau à double entrée)**

Lorsqu'on manipule plusieurs événements qui peuvent se chevaucher, on peut réaliser un diagramme comme le précédent (appelé **diagramme de Venn**), ou réaliser un **tableau à double entrée**.

Exemple 28

Alice possède deux paquets de bonbons de deux marques différentes : celui de la marque Haribel contient 3 bonbons rouges, 5 verts et 2 bleus, alors que celui de la marque Dragicar contient 6 bonbons rouges, 1 vert et 3 bleus.

On peut représenter ces données dans un tableau :

	Rouge	Vert	Bleu	Total
Haribel	3	5	2	10
Dragicar	6	1	3	10
Total	9	6	5	20

Voici comment interpréter ce tableau :

- ▶ Chaque paquet contient 10 bonbons,
- ▶ Alice possède en tout 9 bonbons rouges, 6 verts et 5 bleus,
- ▶ Au total, Alice possède 20 bonbons.

Alice mélange les deux paquets dans un bol et tire un bonbon au hasard. On considère les événements D : « Le bonbon vient du paquet Dragicar » et R : « Le bonbon est rouge ».

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité, il suffit donc de dénombrer les cas favorables pour calculer les probabilités.

- ▶ $P(D) = \frac{10}{20}$ car 10 bonbons sur les 20 au total proviennent du paquet Dragicar.
- ▶ $P(R) = \frac{9}{20}$ car 9 bonbons sur les 20 au total sont rouges (indépendamment de la marque).
- ▶ $P(R \cap D) = \frac{6}{20}$ car 6 bonbons sur les 20 au total sont rouges et proviennent du paquet Dragicar.
- ▶ $P(R \cup D) = P(D) + P(R) - P(R \cap D) = \frac{13}{20}$ d'après la formule du crible.

Application 29

On considère la répartition des élèves dans un lycée. On sélectionne un élève au hasard. On considère les événements F : « L'élève est une fille » et G : « L'élève est en filière générale ».

- 1► Calculer $P(F)$ et $P(G)$.
- 2► Décrire $P(F \cap G)$ et $P(F \cup G)$ par une phrase, puis calculer leurs probabilités.

	Générale	Techno	Pro	Total
Filles	1402	477	384	2263
Garçons	1098	523	616	2237
Total	2500	1000	1000	4500

Application 30

Dans un jeu de 52 cartes, les cartes numériques se voient attribuées leur propre valeur. Les figures valent 10 points.

On pioche une carte au hasard. On considère les événements T : « La carte est une carte de trèfle », et M : « La carte vaut 5 points ou moins ».

- 1► Recopier et compléter le tableau ci-dessous, dénombrant les cartes qui sont de trèfle ou non, et les cartes qui valent plus ou moins de 5.
- 2► Calculer $P(T)$ et $P(M)$.
- 3► Décrire $P(T \cap M)$ et $P(T \cup M)$ par une phrase, puis calculer leurs probabilités.

	T	$\bar{T}$	Total
M			
$\bar{M}$			
Total			

C – Loi de probabilité d'une expérience aléatoire**Activité 31**

On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On s'intéresse à la somme des deux dés.

- 1► Tracer un tableau à 6 lignes, représentant les résultats du premier dé, et 6 colonnes, représentant le résultat du second dé. Dans chaque case du tableau, calculer la somme des deux dés.
- 2► Quel est l'univers des possibles de cette expérience aléatoire ? Combien y a-t-il d'issues ?
- 3► Coloriez les cases du tableau correspondant à une même issue.
- 4► À partir du tableau de valeurs, déterminer la probabilité de chaque issue.
- 5► Ce tableau a une particularité. Laquelle ? Expliquer son origine.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Définition 32**Loi de probabilité**

La **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire est la donnée des probabilités de chacune de ses issues.

Exemple 33

Il est courant d'exprimer la loi de probabilité d'une expérience aléatoire sous forme de tableau.

- On lance dé à 6 faces. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

Valeur	1	2	3	4	5	6
Proba	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On s'intéresse à la somme des deux dés. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

Valeur	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Propriété 34**Somme des probabilités**

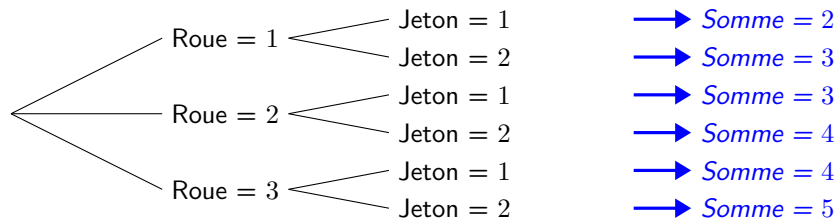
La somme des probabilités de toutes les issues vaut toujours 1.

3 – Expériences à plusieurs épreuves : arbres de probabilité

Exemple 35

On fait tourner une roue numérotée de 1 à 3 pouvant tomber de manière équiprobable sur chacune des valeurs, puis on lance un jeton équilibré dont les faces sont numérotées 1 et 2. On s'intéresse à la somme des deux résultats.

Comme les deux expériences n'ont aucune influence l'une sur l'autre, et que ce sont des situations d'équiprobabilité, on peut dénombrer les issues à l'aide d'un arbre des possibilités :



Il y a donc 6 résultats possibles pour le couple roue-jeton, et 2 d'entre eux font une somme de 4, donc la probabilité d'obtenir une somme de 4 vaut $\frac{2}{6}$.

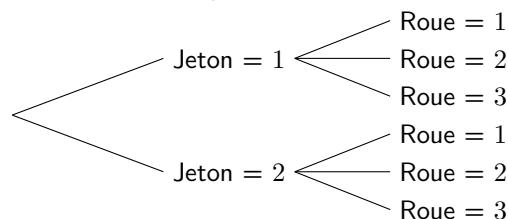
Application 36

On lance trois fois successivement une pièce équilibrée.

- 1► Dessiner l'arbre associé à cette situation.
- 2► Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une fois Pile.
(Indication : combien de chemin dans l'arbre ne rencontrent qu'une fois Pile ?)
- 3► Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au moins une fois au cours des 3 lancers.

Application 37

Voici un arbre associé à une succession de deux expériences aléatoires :



- 1► Décrire l'expérience aléatoire.
- 2► On s'intéresse au produit des deux résultats. Quelle est la probabilité que celui-ci soit supérieur ou égal à 3 ?
- 3► On s'intéresse à la différence du jeton moins la roue. Quelle est la probabilité que celle-ci soit strictement négative ?

Mathématiques

Première technologique (hors ST2A) – Cours complet

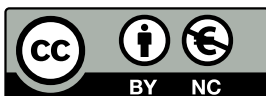
La série « Mathématiques – Première technologique (hors ST2A) » est composée de trois ouvrages :

- *Cours complet* est une version complète et enrichie du cours. Cette version a été écrite avec plusieurs objectifs en tête : permettre aux absents et absentes de rattraper le cours sans trop de pertes, et donner à celles et ceux qui souhaitent s'avancer suffisamment de matériel pour le faire en autonomie. Des rappels des techniques calculatoires de collège sont aussi proposées en annexe.
- *Squelette de cours* est, comme son nom le suggère, une extraction de la version complète, qui ne contient que les essentiels du cours parfois à compléter, et les exercices. Il n'y a pas les démonstrations ni les détails supplémentaires. Cet élagage a pour objectif de créer un support de cours à la fois synthétique et fourni, afin d'optimiser la prise de notes en classe.
- *Corrections* rassemble tous les exercices présents dans les feuilles de fin de chapitre, ainsi que leur correction plus ou moins rédigée. Il s'agit d'un support d'aide pour le travail en autonomie, aussi certains exercices ne bénéficient que d'éléments de correction. Voir la préface du manuel en question pour plus d'explications.

Cours complet (et *Squelette de cours* par conséquent) regroupe tous les cours et exercices dispensés lors de l'année de seconde générale et technologique. Les chapitres sont ordonnés selon une progression arbitraire, qui n'est pas la seule envisageable.

Cours et illustration par E. Suong

Les exercices sont issus de sources multiples. Pour tout ajout de référence, adaptation ou retrait, merci de me contacter.



Version du 27 septembre 2026

