Mathématiques 1ère option

E. Suong

2 mars 2025

Cours de première option

1 Analyse de l'information chiffrée 13

1 Tableaux croisés d'effectifs **14**
0 Rappels de vocabulaire . . . 14
1 Tableaux croisés d'effectifs . . . 15
2 Fréquences marginales, fréquences conditionnelles . . . 15

2 Représentations graphiques des données croisées **17**
1 Représentations des séries à un caractère . . . 17
2 Représentation des séries à deux caractères . . . 18

2 Phénomènes aléatoires 20

3 Probabilités conditionnelles, indépendance **21**
0 Rappels : vocabulaire et notations . . . 21
1 Probabilité conditionnelle . . . 23
2 Indépendance d'événements . . . 24

4 Succession d'événements aléatoires **26**
1 Arbres pondérés . . . 26

3 Phénomènes d'évolution 29

5 Notion de suite numérique **30**
1 Définitions (explicite, par récurrence) et notations . . . 30
2 Représentation graphique, variations d'une suite . . . 31

6 Modèles discrets : suites arithmétiques et géométriques **33**
1 Modèle de croissance linéaire : les suites arithmétiques . . . 33
2 Modèle de croissance exponentielle : les suites géométriques . . . 36
3 Problème de seuil . . . 39
4 Pour aller (plus) loin (HP) . . . 41

7 Modèles continus : fonctions affines et exponentielles **45**
1 Modèles de croissance linéaire : les fonctions affines . . . 45
2 Modèles de croissance exponentielle : les fonctions exponentielles . . . 48

8 Variation locale, nombre dérivé **51**
0 Rappels sur les droites . . . 51
1 De la sécante à la tangente . . . 52
2 Notion de nombre dérivé . . . 53

9 Variation globale, fonction dérivée **55**
1 Fonction dérivée . . . 55
2 Variations et signes de la dérivée . . . 56
3 Extrema d'une fonction . . . 58

Programme de première option

Préambule général

Intentions majeures

Le programme du module spécifique consacré à un enseignement mathématique intégré à l'enseignement scientifique de la classe de première de la voie générale est conçu avec les intentions suivantes :

- consolider la culture mathématique de tous les élèves et leur assurer le socle de connaissances et de compétences mathématiques qui leur sera nécessaire pour réussir leur vie sociale, citoyenne et professionnelle, quel que soit le parcours de formation qu'ils choisiront par la suite ;
- réconcilier avec les mathématiques les élèves qui ont perdu le goût et l'intérêt pour cette discipline ; communiquer le plaisir de les pratiquer à travers des activités mettant en valeur leur efficacité et éclairer sur la place qu'elles jouent dans le monde contemporain ;
- permettre à chaque élève d'appréhender la pertinence des démarches mathématiques et de développer des aptitudes intellectuelles comme la rigueur, la logique, l'esprit critique mais aussi l'inventivité et la créativité ;
- assurer les bases nécessaires à la compréhension de phénomènes quantitatifs tels qu'ils sont mobilisés dans les différents champs disciplinaires et tels qu'ils permettent d'éclairer certains débats actuels ;
- permettre aux élèves qui le souhaitent de choisir l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires en classe de terminale.

En raison de leur choix de spécialité ou d'options, les élèves de première de la voie générale ont des projets d'orientation divers qui les conduiront en terminale à une fréquentation plus ou moins importante des mathématiques. Cette variété des profils d'élèves induit une mise en œuvre différenciée prenant en compte l'hétérogénéité de leurs besoins et de leurs intérêts.

Lignes directrices pour l'enseignement

Attitudes développées

L'enseignement des mathématiques participe à la formation intellectuelle des élèves en contribuant au développement d'attitudes propices à la poursuite d'études, mais aussi à l'exercice responsable de la citoyenneté. Parmi elles, peuvent notamment être mentionnés la persévérance dans la recherche d'une solution, l'esprit critique, l'engagement réfléchi dans un débat, le souci d'argumenter sa pensée par un raisonnement logique, la qualité d'expression écrite et orale, l'esprit de collaboration dans un travail d'équipe.

La résolution d'exercices et de problèmes, individuellement ou en groupe, l'organisation de réflexions et d'échanges scientifiques pour valider un résultat ou une méthode sont des occasions fécondes pour développer ces attitudes indispensables à la formation de chaque individu et à la responsabilité du citoyen.

Les élèves prennent conscience que les mathématiques sont vivantes et en perpétuelle évolution, qu'elles s'inscrivent dans un cadre historique mais aussi dans la société actuelle. Il s'agit en particulier :

- d'insérer des éléments d'histoire des mathématiques et des sciences ;
- de présenter des faits d'actualité liés aux mathématiques ;
- de faire connaître à tous les élèves des études supérieures et des métiers où les mathématiques sont utilisées.

Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, le travail en mathématiques s'appuie sur six compétences essentielles :

- chercher, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique), changer de registre ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes offre un cadre privilégié pour travailler ces six compétences tout en développant des aptitudes transversales.

Résolution de problèmes et automatismes

La résolution de problèmes, centrale dans l'activité mathématique, est au cœur de ce programme qui privilégie une introduction des contenus mathématiques à travers des situations appropriées, puis leur mobilisation dans le cadre de problèmes qui les mettent en jeu.

Ces problèmes sont le plus souvent issus des autres disciplines, de la vie courante ou citoyenne, mais peuvent aussi être internes aux mathématiques. Le professeur de mathématiques est invité à travailler avec les professeurs des disciplines concernées afin de favoriser les articulations et les transferts, et consolider ainsi les acquis des élèves.

Les activités engagées en classe s'articulent autour du triptyque manipuler – verbaliser – abstraire. La manipulation peut être concrète ou virtuelle, prenant appui sur des instruments ou des objets réels ou des outils numériques tels qu'une calculatrice, un tableur, un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation.

Il convient de garder à l'esprit que la phase de manipulation ne constitue pas une fin en soi. Comme la verbalisation qui l'accompagne ou y fait suite, la manipulation n'est qu'une étape permettant de dégager un contenu mathématique qui fait l'objet d'une institutionnalisation bien identifiée.

L'approche par résolution de problèmes est particulièrement propice à la mise en œuvre de la compétence modéliser, en recherchant un modèle adapté à la situation étudiée ou en s'assurant de la bonne compréhension et de la validité d'un modèle donné. La compétence représenter, en vue de schématiser les données d'un problème, facilite la recherche d'une stratégie efficace pour sa résolution.

Les problèmes étudiés sont choisis de façon à mobiliser régulièrement la compétence raisonner. Parmi eux, les problèmes avec prise d'initiative permettent de travailler la compétence chercher et de renforcer la capacité à résoudre un problème dont l'énoncé n'indique pas la méthode de résolution. Ces derniers doivent faire l'objet d'un entraînement suffisamment régulier pour permettre aux élèves d'y accéder plus facilement en prenant conscience de certaines similitudes entre des situations différentes relevant d'une même démarche mathématique.

Progressivement, l'élève procède par analogie en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes ou en adaptant une méthode connue à la situation étudiée. La disponibilité d'esprit nécessaire à ces étapes essentielles suppose des connaissances, des procédures et des stratégies automatisées. Ainsi, l'installation de réflexes intellectuels en matière de calcul et d'interprétation des données facilite la résolution de problèmes, en libérant l'esprit des considérations de mise en œuvre technique.

La ritualisation, par exemple au début de chaque séance, d'activités courtes consacrées au calcul ou à la lecture et au traitement de l'information chiffrée favorise la stabilisation des connaissances et des méthodes étudiées dans les classes antérieures. Il ne s'agit pas de réduire les mathématiques à des activités répétitives, mais de permettre un ancrage solide des fondamentaux immédiatement mobilisables pour résoudre des problèmes.

Dans la partie automatismes du programme sont énumérées les connaissances et les capacités relevant du double objectif d'assurer le fondement d'une culture mathématique nécessaire à chaque futur citoyen et de développer des réflexes mathématiques utiles à la poursuite d'études.

Diversité des activités des élèves

La mise en œuvre du programme doit permettre aux élèves d'acquérir des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques.

La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches qui peuvent être proposées : «questions flash» pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes favorisant les prises d'initiatives, mises au point collectives d'une solution, productions d'écrits individuels ou collectifs, etc.

Si la classe est le lieu privilégié pour la mise en activité des élèves, les travaux hors du temps scolaire sont indispensables pour consolider les apprentissages. Leur fréquence, leur longueur et leur nature sont adaptées à la charge de travail des élèves, en tenant compte de la nature pluridisciplinaire de leur formation. Individuels ou collectifs, à l'écrit ou à l'oral, ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité des aptitudes des élèves et visent la mémorisation, la maîtrise des savoir-faire, le réinvestissement de démarches ou de méthodes.

Évaluation des acquis des élèves

La diversification des modalités d'évaluation permet d'atteindre un équilibre dans la prise en compte des six compétences mathématiques. En fonction des objectifs poursuivis et selon les compétences évaluées, l'évaluation peut prendre appui sur différents types d'activités : devoirs surveillés (avec ou sans outils numériques) pouvant comprendre des QCM ou des Vrai-Faux argumentés, «questions flash» sur des automatismes, évaluations écrites avec possibilité d'appel au professeur, rédaction de travaux de recherche individuels ou collectifs, restitution orale de connaissances, exposés.

Activités algorithmiques et numériques

Le développement d'un mode de pensée algorithmique est constitutif de la formation mathématique.

L'enseignement des mathématiques comprend une composante informatique qui recouvre l'algorithmique, la programmation et la pratique du tableur. Cette dimension s'inscrit de manière transversale dans le cours de mathématiques et repose sur la connaissance d'un nombre limité d'éléments de syntaxe et de fonctions spécifiques à l'outil utilisé. De ce point de vue, le recours au tableur ou à un logiciel de programmation offre aussi une voie de différenciation.

Parallèlement, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique enrichit le cours de mathématiques d'illustrations ou de simulations propices à l'appropriation des concepts.

Dans certaines situations, le recours à un outil de calcul permet de se libérer de contraintes techniques afin de mieux se concentrer sur l'activité de modélisation de la situation et d'interprétation des résultats obtenus. L'utilisation d'un logiciel intégrant des fonctionnalités graphiques, de calcul numérique ou d'outils statistiques participe à l'appropriation des concepts.

Place de l'oral

Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales, notamment à travers la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa réflexion et à expliciter sa démarche de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs (éventuellement sous forme de vidéo), etc.

En mathématiques, l'oral mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calculs).

Trace écrite

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée ou de débats, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, gagnant à être enrichie

par des exemples et des schémas, elle constitue pour l'élève une référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin, tout au long du cycle terminal. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité mathématique et rédactionnelle des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés (définition, propriété – admise ou démontrée –, démonstration).

Organisation du programme

Le programme est structuré autour de trois parties thématiques :

- analyse de l'information chiffrée (statistiques) ;
- phénomènes aléatoires (probabilités conditionnelles) ;
- phénomènes d'évolution (analyse : suites, fonctions, exponentielles, dérivée) ;

et d'une partie transversale :

- automatismes (lecture et production de graphiques, traitement de données, calcul numérique et algébrique).

Les trois parties thématiques sont organisées selon deux colonnes : «Situations et problèmes» et «Contenus mathématiques». Seuls sont exigibles des élèves les contenus mathématiques de la colonne de droite, mobilisés dans les capacités attendues.

Le programme repose sur des mises en situation et des problèmes issus des disciplines enseignées au lycée, mais aussi de la vie quotidienne ou de la vie citoyenne, qui peuvent, selon le choix de l'enseignant, motiver l'introduction des notions étudiées ou les illustrer. Le professeur a la possibilité de choisir d'autres situations que celles proposées dans la colonne de gauche.

Selon les projets et les centres d'intérêt des élèves, il est possible de proposer des rapprochements avec d'autres disciplines qui ne sont pas mentionnées dans ce programme (littérature, arts plastiques, etc.).

Programme

Analyse de l'information chiffrée

L'analyse de l'information chiffrée portant sur des problématiques d'actualité (développement durable, changement climatique, biodiversité, économie, démographie, santé publique, etc.) permet d'éclairer les élèves sur certains débats actuels et de développer le sens critique.

En prolongement du programme de seconde dans lequel ont été introduits des indicateurs utiles pour l'analyse d'un unique caractère statistique, cette partie aborde l'analyse statistique bivariée. Il s'agit d'une première sensibilisation aux bases de données.

Certaines données étudiées peuvent être issues de ressources d'autres enseignement dispensés au lycée (enseignement scientifique, enseignement moral et civique, enseignement de spécialité). Les possibilités offertes par l'informatique permettent le stockage et la manipulation de données massives. Certaines de ces données sont disponibles sur des sites institutionnels comme ceux de l'Institut national de la statistique et des études économiques (Insee), de l'Institut national d'études démographiques (Ined) ou dans le catalogue data.gouv des données de l'administration. D'autres figurent dans des rapports publics comme ceux du Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat (Giec).

L'analyse bivariée cherche à étudier les éventuelles relations entre deux caractères. Elle doit s'illustrer en utilisant des représentations de données réelles, qui peuvent aussi s'obtenir par le traitement à l'aide d'un tableur de fichiers d'une taille raisonnable.

Situation et problèmes	Contenus mathématiques
Analyse croisée de couples de caractères (exemples : genre, âge, revenus, indicateurs de santé, indicateurs financiers, température, niveau des océans, proportion de gaz à effet de serre, etc.). *Les données peuvent être présentées sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme obtenu à partir d'un fichier de données en utilisant un tableur.*	▸ Analyse statistique de deux caractères. ▸ Tableau croisé d'effectifs. ▸ Exemples d'analyse du croisement de deux caractères par représentation graphique (nuage de points, diagrammes en barres, diagrammes circulaires). ▸ Détermination dans un fichier de données d'un sous-ensemble d'individus répondant à un sous-caractère (filtre, utilisation des ET, OU, NON).

Capacités attendues

- Dresser un tableau croisé de deux caractères à partir d'un fichier de données.
- Utiliser un tableur pour représenter des données sous forme de tableau ou de diagramme.

Phénomènes aléatoires

L'analyse statistique bivariée abordée dans la partie précédente permet d'introduire naturellement la notion de fréquence conditionnelle. Dans le cas d'un tirage aléatoire dans une population finie, la fréquence peut être identifiée à une probabilité.

La notion de probabilité conditionnelle permet d'introduire de manière intuitive celle de l'indépendance : deux événements A et B sont dits indépendants si la probabilité conditionnelle de A sachant B est égale à la probabilité de A (sous réserve de la non-nullité de celle de B).

Grâce à des outils numériques, on simule une succession de tirages aléatoires indépendants (par exemple, des tirages avec remise dans une urne) afin de poursuivre l'approche vulgarisée de la loi des grands nombres initiée en classe de seconde. La possibilité de présenter des problèmes simples relatifs à des jeux de hasard datant du XVIIIe siècle confère à cette partie une dimension historique.

Situation et problèmes	Contenus mathématiques
Sciences de la vie ▸ Tests médicaux : faux positifs et faux négatifs. **Théorie des jeux** ▸ Modélisation ou simulation de jeux simples : pile ou face, jeu de «croix ou pile» de d'Alembert, jeu de pierre-feuille-ciseaux, jeu du lièvre et de la tortue, jeu du «passe-dix» (problème du grand-duc de Toscane). ▸ Stratégie gagnante au jeu de Monty Hall. **Histoire des mathématiques** ▸ Traduction en langage des probabilités de la correspondance épistolaire entre Fermat et Pascal à propos du problème des partis.	▸ Fréquence conditionnelle, fréquence marginale. ▸ Probabilité conditionnelle : définition, notation, calcul à partir d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre de probabilités. ▸ Indépendance de deux événements. ▸ Succession d'événements indépendants, équiprobables ou non.

Capacités attendues

- Construire un tableau croisé d'effectifs ou un arbre de probabilité associé à un phénomène aléatoire.
- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales à partir d'un tableau croisé d'effectifs.
- Interpréter un tableau croisé en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre pondéré.

Phénomènes d'évolution

Cette partie est consacrée à des notions mathématiques permettant de modéliser des phénomènes en évolution : les suites, qui modélisent des grandeurs dont l'évolution est discrète, et les fonctions, qui modélisent des grandeurs dont l'évolution est continue.

L'objectif est d'appréhender deux modèles classiques d'évolution, la croissance linéaire et la croissance exponentielle, sans exclure la présentation d'autres modèles.

La compréhension et l'interrogation critique des modèles étudiés permettent de développer des capacités de raisonnement et d'argumentation. Leur mise en pratique, tant dans des situations internes qu'externes aux mathématiques, permet de consolider des habiletés en matière de calcul, d'analyse et de production de graphiques ainsi que dans l'utilisation d'outils numériques.

Les deux modes de génération d'une suite, par récurrence et explicite, peuvent être introduits lors de la résolution de problèmes. On peut, par exemple, prendre appui sur des motifs géométriques ou sur un contexte historique, comme le problème de remboursement d'une dette posé par Euler dans Introduction à l'analyse infinitésimale.

Lors des premières modélisations d'une grandeur discrète par une suite, on veille à utiliser la notation fonctionnelle $u(n)$, préalablement à la notation indicielle u_n.

Croissance linéaire

Les suites arithmétiques et les fonctions affines modélisent des grandeurs discrètes ou continues dont le taux d'accroissement est constant. Les fonctions affines, déjà étudiées en classe de seconde, peuvent faire l'objet d'un travail succinct. Le professeur peut mettre en parallèle le sens de variation des fonctions affines et celui des suites arithmétiques.

Situation et problèmes	Contenus mathématiques
Éducation économique, financière et budgétaire ▸ Placement à intérêts simples, croissance d'un poste budgétaire. **Dénombrement** ▸ Motifs géométriques évolutifs en forme de T ou de croix, carré bordé.	**Suites arithmétiques** ▸ Définition par la relation de récurrence. ▸ Explicitation du terme de rang n. ▸ Sens de variation. ▸ Représentation graphique.
Physique ▸ Correspondance entre degrés Celsius et Fahrenheit. **Économie** ▸ Modélisation de l'offre et de la demande par des fonctions affines, point d'équilibre.	**Fonctions affines** ▸ L'objectif est de remobiliser les connaissances abordées en classe de seconde : représentation graphique, sens de variation, lien entre le taux d'accroissement et le coefficient directeur de la droite représentative.

Enseignement moral et civique ▸ Modélisation du barème de l'impôt sur le revenu par une fonction affine par morceaux (taux marginal, taux moyen). **Sciences de la Terre** ▸ Modèle linéaire de l'évolution du niveau moyen des océans.	

Capacités attendues

- Reconnaître un phénomène discret ou continu de croissance linéaire et savoir le modéliser.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite arithmétique ou d'une fonction affine.
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance linéaire.

Croissance exponentielle

Les suites géométriques modélisent des grandeurs discrètes dont le taux d'évolution est constant.

Les fonctions exponentielles sont présentées comme un prolongement des suites géométriques de raison positive à des valeurs non entières positives.

Dans le cadre d'une approche différenciée de cette introduction, il est possible :

- de se limiter au recours à la calculatrice pour obtenir la valeur de a^x pour tout réel positif x ;
- de «compléter» le nuage de points représentant une suite géométrique pour obtenir la courbe d'une fonction continue ;
- d'ajouter des «points intermédiaires» à ce nuage par dichotomies successives (moyenne arithmétique des abscisses et moyenne géométrique des ordonnées) à l'aide d'un tableur ;
- de commencer par définir la racine n-ième d'un réel positif, puis de construire les puissances à exposant rationnel positif afin de conserver les propriétés des fonctions puissances entières étudiées en seconde.

Les propriétés algébriques des fonctions exponentielles sont admises, par extension des propriétés des puissances entières.

Le professeur peut mettre en parallèle le sens de variation des fonctions exponentielles et celui des suites géométriques.

Situation et problèmes	Contenus mathématiques
Sciences de la vie ▸ Élimination d'une substance dans le sang. **Dénombrement** ▸ Motifs géométriques évolutifs (triangle de Sierpinski, etc.). **Éducation économique, financière et budgétaire** ▸ Emprunt, placement à intérêts composés, gestion d'une dette, croissance d'un poste budgétaire.	**Suites géométriques à termes strictement positifs** ▸ Définition par relation de récurrence. ▸ Explicitation du terme de rang n. ▸ Sens de variation. ▸ Représentation graphique.

Éducation économique, financière et budgétaire

- Valeur au bout d'une fraction d'annuité d'un capital placé à intérêts composés à taux annuel constant.

Économie, géographie

- Analyse comparée de l'accroissement d'une population et des ressources alimentaires (modèle de Malthus).

Sciences sociales

- Modélisation simplifiée de la propagation d'une rumeur (cascades verticales).

Physique et sciences de la vie et de la Terre

- Nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon au bout d'une fraction de demi-vie.
- Applications à la médecine et à la datation par le carbone 14.

Sciences de la vie

- Taux de reproduction R_0 d'un virus lors d'une épidémie.

Fonctions exponentielles

- Introduction de la fonction $x \mapsto a^x$ $(a > 0, x \geqslant 0)$.
- Propriétés algébriques (admises, par extension des propriétés des puissances entières).
- Variations.
- Représentation graphique.
- Cas particulier de l'exposant $1/n$.
- Taux d'évolution moyen correspondant à n évolutions successives.

Capacités attendues

- Reconnaître un phénomène discret ou continu de croissance exponentielle et savoir le modéliser.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Calculer un taux d'évolution moyen.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite géométrique ou d'une fonction exponentielle
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique.

Variation instantanée, variation globale

La notion de dérivée est utilisée pour étudier les variations de certains phénomènes.

On met en évidence par des zooms successifs qu'une courbe donnée a localement l'apparence d'une droite. Après cette sensibilisation, le nombre dérivé peut être présenté, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, comme étant le coefficient directeur de la tangente, position limite des sécantes passant par le point considéré.

Dans le cadre de la différenciation, ce nombre peut aussi être introduit en considérant la vitesse instantanée d'un mobile à un instant donné.

L'approche graphique se prolonge globalement dans la découverte du lien entre le signe de la fonction dérivée et les variations de la fonction.

Parmi les outils mathématiques permettant de traiter des problèmes d'optimisation, l'un des plus simples et des plus efficaces est le signe de la fonction dérivée. Pour identifier un extremum, la seule analyse du tableau de variation suffit. Dans le cas de fonctions donnant lieu à des calculs complexes, on peut recourir à un logiciel de calcul formel qui permet d'obtenir ou de factoriser la dérivée afin de résoudre le problème posé.

On peut s'appuyer sur des données réelles en utilisant un tableur pour modéliser leur évolution globale à l'aide d'une courbe de tendance polynomiale et étudier leurs variations.

Situation et problèmes	Contenus mathématiques
Sciences de la vie ▸ Courbe de croissance d'un enfant. **Physique** ▸ Vitesse instantanée d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne. **Chimie** ▸ Vitesse d'apparition d'un produit ou de disparition d'un réactif dans une réaction chimique. **Économie** ▸ Coût marginal défini comme la variation du coût total induite par la production et la vente d'une unité supplémentaire, et modélisé par la dérivée du coût total.	**Variation instantanée (nombre dérivé)** ▸ Tangente à une courbe en un point. ▸ Nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
Économie ▸ Modélisation par une fonction du coût de production et du chiffre d'affaires d'une entreprise, étude du bénéfice. Optimisation des dimensions d'un emballage pour en réduire le coût.	**Variation globale (fonction dérivée)** ▸ Fonction dérivée. ▸ Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la fonction dérivée sur un intervalle. ▸ Dérivée des fonctions constante, identité, carré et cube. Dérivée d'une somme, du produit par un nombre réel. ▸ Application à la dérivée d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. ▸ Tableau de variation, à l'aide si besoin d'un logiciel de calcul formel.

Capacités attendues

- Interpréter le nombre dérivé dans le cadre d'un modèle d'évolution.
- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Décrire les variations d'un phénomène en mobilisant la dérivée d'une fonction.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à trois (la forme factorisée de la dérivée pourra être donnée).
- Prévoir l'évolution d'un phénomène grâce à l'étude de la dérivée d'une fonction.

Automatismes

Cette partie du programme vise à construire et à entretenir des habiletés mathématiques (connaissances, procédures et stratégies) dans les domaines des représentations graphiques, du traitement des données et du calcul. Il s'agit à la fois de garantir un socle de connaissances et de compétences fondamentales nécessaires à tout citoyen, d'asseoir des réflexes intellectuels pour s'engager avec succès dans la résolution de problèmes et pour développer une posture critique et réfléchie dans la lecture et la représentation de données.

Sans faire l'objet d'un chapitre d'enseignement spécifique, le développement des capacités énoncées ci-dessous requiert un entraînement régulier tout au long de l'année, par exemple lors d'activités ritualisées de début de séance sous forme de "questions flash», privilégiant l'activité mentale et la verbalisation des procédures.

Il convient de s'appuyer sur des situations simples pour ne pas occulter l'objectif d'apprentissage par des difficultés inhérentes à la compréhension de l'énoncé.

Représentations graphiques

- Préciser sur un graphique les grandeurs en jeu, les unités et les échelles.
- Lire sur un graphique les variations d'une grandeur : croissance ou décroissance, doublement régulier, accélération ou ralentissement de la croissance.
- Estimer graphiquement une valeur atteinte, un antécédent, un seuil.

Traitement de données

- Appliquer un pourcentage d'augmentation ou de diminution.
- Calculer un taux d'évolution global à partir de taux d'évolution successifs, calculer un taux d'évolution réciproque.

Calcul numérique et algébrique

- Effectuer mentalement des calculs simples mettant en jeu des nombres décimaux, des fractions et des pourcentages.
- Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, sous forme de pourcentage).
- Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat.
- Effectuer une application numérique d'une formule mathématique (longueurs, aires, volumes) ou d'une formule simple provenant d'une autre discipline.
- Résoudre une équation du premier degré du type $ax + b = cx + d$ ou $a/x = b$ ou une équation du second degré du type $x^2 = a$.

Thème 1

Analyse de l'information chiffrée

1 Tableaux croisés d'effectifs

0 – Rappels de vocabulaire

Définition 1

- Quand on a un ensemble de données, on parle de *série de données*.
- Le *caractère* est la grandeur ou l'attibut que l'on observe.
- La *population* est l'ensemble des individus sur lesquels on effectue l'étude statistique.

Exemple 2

- On recense la taille des arbres d'une forêt : le caractère est la taille des arbres, et la population est l'ensemble des arbres de la forêt.
- On étudie les couleurs de cheveux dans un collège. Le caractère étudié est la couleur des cheveux, la population est l'ensemble des élèves du collège.

Définition 3

Dans une série de données,

- l'*effectif total* est le nombre de données,
- l'*effectif* d'une donnée est le nombre de fois que cette donnée apparaît,
- la *fréquence*, ou *proportion* d'une donnée est la proportion qu'elle représente dans la série, c'est-à-dire :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la donnée}}{\text{effectif total}}$$

Exemple 4

Lors d'un sondage, on demande "quel assaisonnement préférez-vous avec du poulet frit ?" Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant, dans lequel on a également calculé les fréquences de chaque valeur du caractère (chaque assaisonnement possible).

Assaisonnement	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre
Effectif	4	10	6
Fréquence			

Définition 5

Soit E une population. Une *sous-population* de E est une partie de E.

Exemple 6

Considérons la population E constituée des arbres de la forêt des Landes. L'ensemble de des arbres de E qui sont des pins en est une sous-population. L'ensemble des arbre qui mesurent plus de 15m en est une autre.

1 – Tableaux croisés d'effectifs

Définition 7

Un *tableau croisé d'effectifs* est un tableau à double entrée décrivant les effectifs d'une population selon deux caractères.
Souvent, on représente dans une ligne et une colonne supplémentaires (souvent appelées *marges* du tableau) la somme des effectifs de chaque ligne et de chaque colonne.

Exemple 8

On interroge des lycéens en classe de terminale dans les voies générale, technologique et professionnelle pour déterminer la proportion de filles dans ces filières. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant avec les totaux en marge :

	Générale	Techno	Pro	Total
Filles	1402	477	384	
Garçons	1098	523	616	
Total				

Par exemple, on lit dans ce tableau que sur _____ élèves interrogés en filière générale, _____ sont des filles. On lit également que sur les _____ garçons interrogés, _____ sont en filière professionnelle.

2 – Fréquences marginales, fréquences conditionnelles

Dans toute cette section, on reprendra les données de l'exemple 8 précédent.

Définition 9

Dans un tableau croisé d'effectifs, l'*effectif marginal* d'une valeur d'un caractère est la somme des effectifs de cette valeur, qui se lit donc dans une marge du tableau.
La *fréquence marginale* d'une valeur A d'un caractère est la proportion de la population totale représentée par cette valeur du caractère, notée $f(A)$. Autrement dit :

$$f(A) = \text{fréquence marginale de } A = \frac{\text{effectif marginal de } A}{\text{effectif total}}$$

Exemple 10

- L'effectif marginal des filles est _____.

  La fréquence marginale des filles est donc $f(\text{Filles}) =$ _____.

- L'effectif marginal de la filière technologique est .

  La fréquence marginale de la filière technologique est donc $f(\text{Techno}) =$.

Définition 11

Soient A une valeur d'un caractère et B une valeur de l'autre caractère.
La *fréquence conditionnelle de A parmi B* est la proportion que représente A au sein de la sous-population concernée par B, notée $f_B(A)$. Autrement dit :

$$f_B(A) = \text{fréquence conditionnelle de } A \text{ parmi } B = \frac{\text{effectif vérifiant à la fois} A \text{ et } B}{\text{effectif marginal de } B}$$

Exemple 12

- La fréquence conditionnelle des garçons parmi la filière professionnelle est la proportion de garçon en filière professionnelle, c'est-à-dire $f_{\text{Pro}}(\text{Garçon}) =$.
- La fréquence conditionnelle de la filière générale parmi les garçons est la proportion d'élèves en filière générale parmi les garçons, c'est-à-dire $f_{\text{Garçon}}(\text{Générale}) =$.

2 Représentations graphiques des données croisées

1 – Représentations des séries à un caractère

Définition 1

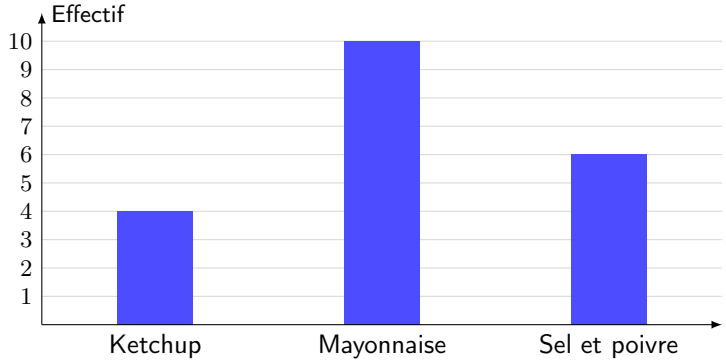
Un *diagramme en bâtons* (ou en *barre*) est un diagramme dans lequel à chaque (classe de) donnée(s) est associé une barre dont la longueur est proportionnelle à son effectif.

Exemple 2

Reprenons le sondage sur l'assaisonnement du poulet frit du chapitre précédent.

Assaisonnement	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre
Effectif	4	10	6

Une représentation possible avec un diagramme en bâtons est la suivante :

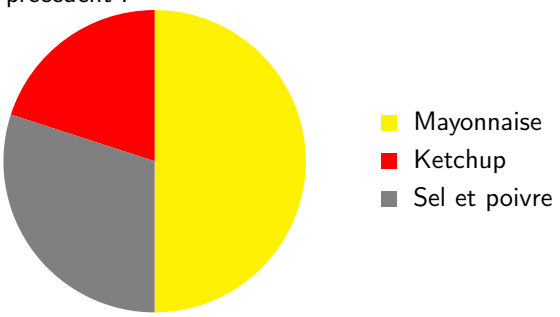


Définition 3

Un *diagramme circulaire* est un diagramme dans lequel les mesures des angles des secteurs sont proportionnels aux effectifs (ou aux fréquences) des (classes de) données.

Exemple 4

Avec les données de l'exemple précédent :



Rappel : comment calculer les tailles de secteurs : l'effectif total correspond à un tour complet, c'est-à-dire

$360°$, et on détermine les angles des secteurs par proportionnalité. (Remarque : on sait que le total des angles doit faire $360°$, donc on peut se contenter de calculer deux angles sur les trois).

	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre	Total
Effectif	4	10	6	20
Angle				

$\times$

2 – Représentation des séries à deux caractères

Définition 5

Quand on dispose d'une série statistique dans laquelle chaque individu de la population est décrit par deux variables numériques (on dit également «par deux *caractères quantitatifs*»), on peut représenter chaque individu par un point dans un repère, en plaçant en abscisse et en ordonnée les deux variables en question. On parle alors de *nuage de points*.

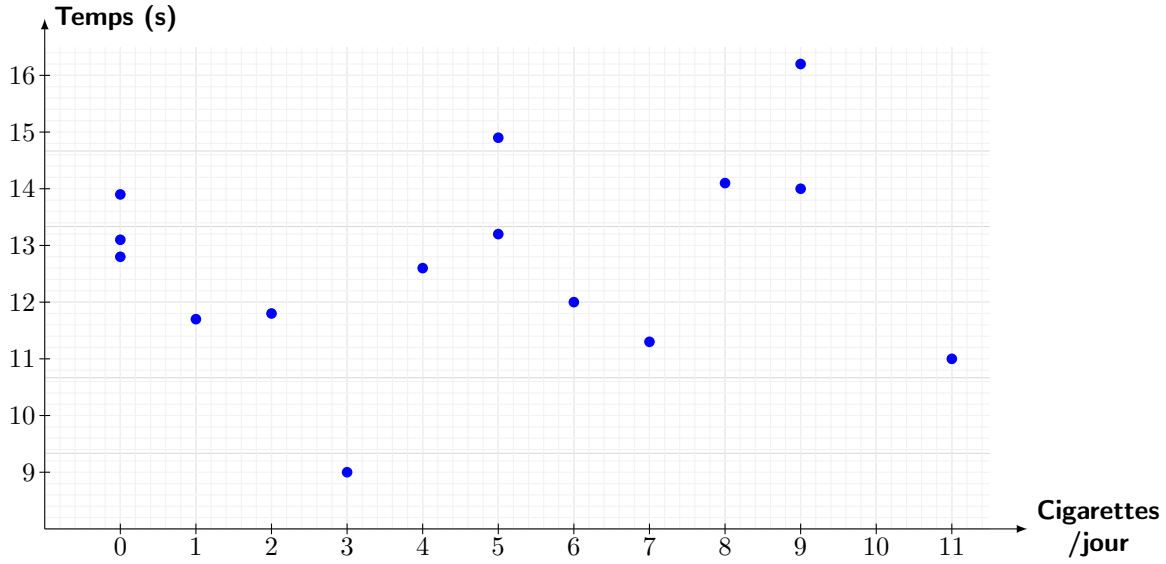
Exemple 6

On mesure les temps de course aux 50 mètres dans une classe de lycéens, et on demande à chaque coureur le nombre de cigarettes qu'ils fument chaque jour. Les données sont rassemblées dans le tableau suivant (sur deux lignes) :

Cigarettes	0	1	0	0	2	4	8	5
Temps (s)	$13,1$	$11,7$	$13,9$	12.9	$11,8$	$12,6$	$14,1$	$13,2$

Cigarettes	6	9	9	5	7	3
Temps (s)	12	14	$16,2$	$14,9$	$11,3$	$11,9$

Si on place le nombre de cigarettes en abscisse et le temps en ordonnée, on obtient le nuage de point suivant :



Remarquez que les axes ne se croisent pas en $(0,0)$: cela permet d'améliorer la lisibilité en compactant le graphique.

Définition 7

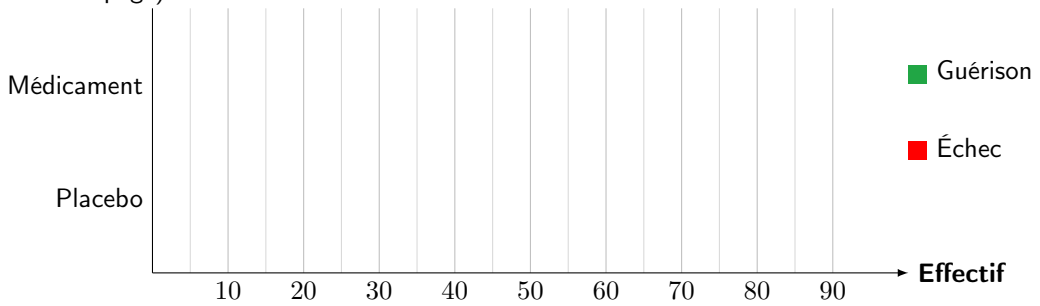
Un *diagramme en barres empilées* permet de représenter les données d'un tableau croisé d'effectifs. Le premier caractère est représenté le long de l'axe des abscisses (comme pour un diagramme en bâtons classique), et les effectifs pour chaque sous-population est représenté par des rectangles empilés, de couleurs différentes, dont les longueurs sont proportionnelles aux effectifs selon le second caractère (autrement dit, proportionnelles aux fréquences conditionnelles).

Exemple 8

On conduit une étude sur le taux de guérison de patients suite à l'administration d'un médicament face à un placebo.

	Guérison	Échec	Total
Médicament	40	32	
Placebo	40	48	
Total			

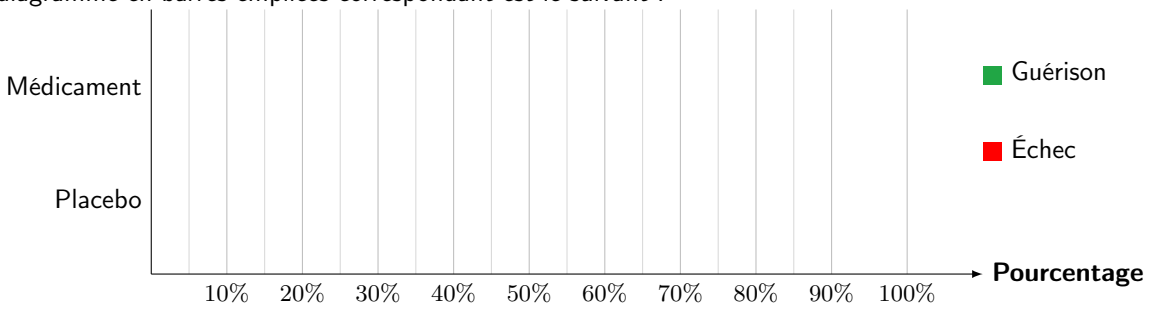
On peut réaliser le diagramme en barre superposées suivant (on présente les barres horizontalement pour gagner de la place sur la page) :



Dans ce genre de contexte où l'on souhaite comparer des caractères, *normaliser* les données est une bonne idée : calculons les taux de réussite et d'échec du médicament et du placebo.

	Guérison	Échec
Médicament	%	%
Placebo	%	%

Le diagramme en barres empilées correspondant est le suivant :



On constate donc que le médicament est plus efficace que le placebo.

Thème 2

Phénomènes aléatoires

3 Probabilités conditionnelles, indépendance

0 – Rappels : vocabulaire et notations

Définition 1

- Un phénomène dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat est appelé *expérience aléatoire*.
- Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible est appelé une *issue*.
- L'ensemble des issues est appelé l'*univers des possibles*.

Définition 2

- Un *événement* est constitué d'une ou plusieurs issues. Quand il ne contient qu'une seule issue, on parle d'*événement élémentaire*.
- Un *événement certain* est un événement qui se produit à coup sûr.
- Un *événement impossible* est un événement qui ne se réalise jamais.
- Soit A un évènement. L'*évènement contraire de* A, noté $\overline{A}$, est l'évènement qui se produit quand A ne se réalise pas.

Exemple 3

Quand on lance un dé à 6 faces, A : « obtenir un nombre pair » est un événement. Son contraire est $\overline{A}$: « obtenir un nombre impair ». Il n'est pas élémentaire, car les issues 2, 4 et 6 le réalisent. L'événement «obtenir un 5» est élémentaire. L'événement «obtenir un nombre positif» est certain. L'événement «obtenir un nombre plus grand que 7» est impossible.

Définition 4

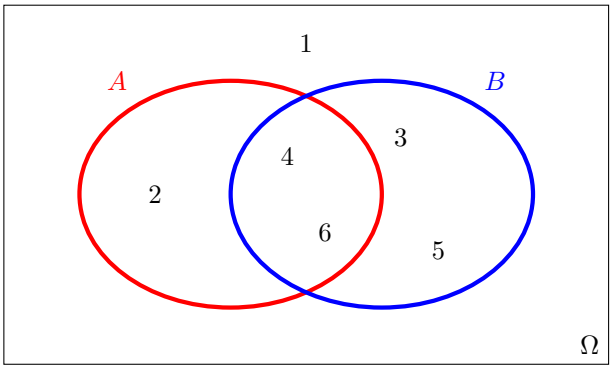
Soient A et B deux événements.

- L'événement «A et B», noté $A \cap B$, est l'événement réalisé quand A et B sont simultanément réalisés.
- L'événement «A ou B», noté $A \cup B$, est l'événement réalisé quand au moins un des deux événements parmi A et B est réalisé.

Exemple 5

On considère un lancer d'un dé à 6 faces. Considérons les événement A : «obtenir un nombre pair» et B : «obtenir un nombre supérieur ou égal à 4».

- L'événement $A \cap B$ est «obtenir un nombre pair supérieur ou égal à 4». Les issues qui le réalisent sont 4 et 6.
- L'événement $A \cup B$ est «obtenir un nombre pair ou supérieur ou égal à 4». Les issues qui le réalisent sont 2, 4, 5 et 6



Définition 6

À un évènement, on associe un nombre entre 0 et 1, appelé *probabilité* de l'évènement. Plus la probabilité est proche de 1, plus l'évènement a de chances de se produire, et plus la probabilité est proche de 0, moins l'évènement a de chances de se produire.
La probabilité d'un évènement A est notée $P(A)$.

Définition 7

Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité, on dit qu'elles sont *équiprobables*.

Proposition 8

La probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient.

Exemple 9

Lors du lancer d'un dé, l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient les issues "obtenir un 1" et "obtenir un 4". Sa probabilité est donc $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

Proposition 10

Dans une expérience aléatoire dont les issus sont équiprobables, la probabilité d'un événement A se calcule avec la formule :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple 11

Lors du lancer d'un dé, l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient 2 issues, et il y a 6 issues au total, donc la probabilité de cet évènement est $\frac{2}{6}$.

Corollaire 12

Soit A un évènement.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Pour trouver la probabilité de l'évènement contraire $\overline{A}$, on peut donc calculer $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

1 – Probabilité conditionnelle

Dans toute cette section, on note Ω l'univers, et on considère A et B deux événements de Ω.

Définition 13

Si $P(B) \neq 0$, alors on définit le nombre :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

appelé *probabilité conditionnelle de A sachant B*.

Une probabilité peut être vue comme une mesure de notre connaissance d'un sujet : par exemple, quand on lance un dé, on ne connaît pas le résultat à l'avance, mais on sait qu'il y a 1 chance sur 6 d'obtenir un 6. Le *conditionnement* en probabilité sert à tenir compte d'un gain d'information. Par exemple, vous lancez un dé, et un ami en cache le résultat. On l'a dit, sans plus d'informations, vous savez que vous avez 1 chance sur 6 s'obtenir un 6. Votre ami vous donne alors une information supplémentaire : «ton nombre est pair». La probabilité que vous ayez tiré un 6 change : elle devient $\frac{1}{3}$! En effet, il n'y a toujours qu'une seule issue favorable, mais le nombre de cas possible a changé : comme vous savez que le nombre est pair, les issues possibles sont 2, 4 et 6 ; il y en a donc 3. Le gain d'information a modifié la probabilité.

Remarque 14

Dans de nombreux livres, on rencontre plutôt la notation $P(A|B)$.

Remarque 15

La fonction P_B, qui a un événement associe un nombre, est une (mesure de) probabilité (cette propriété est admise) : à ce titre, elle vérifie les propriétés suivantes : quelque soit l'événement A,

- $P_B(A)$ est comprise entre 0 et 1
- $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$

Remarque 16

Avec la formule de la définition, en remarquant que $A \cap A = A$ (réaliser A et A simultanément, c'est la même chose que réaliser A tout court), on obtient que $P_A(A) = 1$. On peut le comprendre également *via* l'interprétation : en effet, si on vous dit que A est réalisé, alors la probabilité que A soit réalisé est de 1, puisque vous en avez la certitude...

Remarque 17

Les probabilités conditionnelles ne sont pas sans lien avec les fréquences marginales d'un tableau croisé. En effet, prenons l'exemple suivant : dans un classe, on recense le nombre de porteurs de lunettes, en distinguant les effectifs selon les filles et les garçons.

	Filles	Garçons
Avec lunettes	3	7
Sans lunettes	5	5

Vous choisissez quelqu'un au hasard dans cette classe : il y a au total 20 élèves, et 10 parmi eux portent des lunettes, donc la probabilité d'avoir choisi un ou une porteuse de lunettes est $\dfrac{10}{20} = 0,5$. C'est la fréquence marginale des porteurs de lunettes dans la classe.
Si on vous dit que la personne que vous avez choisie est une fille, alors le ce gain d'information modifie la probabilité : en effet, vous avez maintenant 5 chances sur 8 d'être tombé sur une porteuse de lunettes,

autrement dit la probabilité vaut $\frac{5}{8} = 0,625$. C'est la fréquence conditionnelle des porteuses de lunettes parmi les filles.

Le lien entre les probabilités conditionnelles et les fréquences conditionnelles est une conséquence de la proposition suivante, dont on a appliqué la formule sans le savoir :

Proposition 18

Dans une situation d'équiprobabilité, si $P(B) \neq 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{\text{Nombre d'issues vérifiant } A \text{ et } B \text{ simultanément}}{\text{Nombre d'issues vérifiant } B}$$

Exemple 19

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes, ce qui est une situation d'équiprobabilité. Considérons les événements A : «obtenir une figure» (c'est-à-dire tirer un valet, une dame ou un roi) et B : «obtenir un pique».

La probabilité d'obtenir un pique est $P(B) = \frac{13}{52}$, car 13 cartes sur 52 sont des piques.

La probabilité d'obtenir une figure *sachant que* l'on a tiré un pique est $P_B(A) = \frac{3}{13}$ car il y a 13 cartes de pique, et 3 d'entre elles sont des figures.

D'après la formule des probabilités composées, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = \frac{13}{52} \times \frac{3}{13} = \frac{\cancel{13} \times 3}{52 \times \cancel{13}} = \frac{3}{52}$.

L'événement $A \cap B$ est «obtenir une figure de pique» : il est bien réalisé par 3 issues sur les 52 possibles.

Une manipulation algébrique élémentaire de la définition d'une probabilité conditionnelle donne la nouvelle formule suivante, qui sera au centre sur chapitre suivant :

Formule des probabilités composées

Proposition 20

Si $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

2 – Indépendance d'événements

Dans cette section, on considère un univers Ω et deux événements A et B de Ω de probabilité non nulle.

Définition 21

On dit que A et B sont *indépendants* si $P_B(A) = P(A)$ (ou, de manière symétrique, si $P_A(B) = P(B)$).

Essayons d'interpréter cette définition. On a dit précédemment qu'une probabilité conditionnelle traduisait un gain d'information. L'indépendance, elle, traduit le fait que ce gain d'information ne change pas la probabilité, car la réalisation d'un événement ne *dépend* pas de la réalisation de l'autre. Prenons un exemple : on lance deux dés à 6 faces. Considérons l'événement A : «le premier dé donne un 6» et l'événement B : «le second dé donne un 1». Le résultat du premier dé n'influence aucunement le résultat du second : ainsi, peu importe de connaître le résultat du premier dé, la probabilité d'obtenir 1 avec le second reste $\frac{1}{6}$. Autrement dit, $P(B) = P_A(B)$, les événements sont dits indépendants.

Exemple 22

Regardons un exemple un peu plus complexe. On lance deux fois un dé à 6 faces, et on considère les événements A : «le premier lancer donne un 3» et B : «la somme des deux valeurs vaut 7». Là, la valeur du premier lancer influence la valeur de la somme, donc on est en droit de se demander si A et B sont réellement indépendants.

- $P(A) = \frac{1}{6}$ (le dé est supposé équilibré, c'est une situation d'équiprobabilité)
- $P_B(A)$ est la probabilité d'obtenir un 3 au premier lancer sachant que la somme des deux vaut 7 : c'est donc la même chose qu'obtenir un 4 au second lancer, il y a donc une chance sur 6, autrement dit la probabilité vaut $\frac{1}{6}$.

Ainsi, $P(B) = P_B(A)$, donc ces événements sont indépendants.

Proposition 23

Les événements A et B sont indépendants *si, et seulement si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Démonstration. Sens direct : montrons que si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Pour cela, supposons que A et B sont effectivement indépendants. D'après la formule des probabilités composées, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$. Or, par définition de l'indépendance, $P_B(A) = P(A)$, donc $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$.

Sens indirect : montrons que si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors A et B sont indépendants. Supposons donc que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. D'après la formule des probabilités composées, on a également $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$. Ainsi, $P(A) \times P(B) = P(B) \times P_B(A)$. Or, dans toute la section, on suppose que $P(B) \neq 0$, donc on peut diviser cette égalité à droite et à gauche par $P(B)$: il reste $P(A) = P_B(A)$, ce qui est la définition de l'indépendance de A et B. □

Méthode 24

Pour montrer que deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants, il suffit de montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Proposition 25

Si A et B sont indépendants, alors :

- $\overline{A}$ et B le sont aussi,
- A et $\overline{B}$ le sont aussi,
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

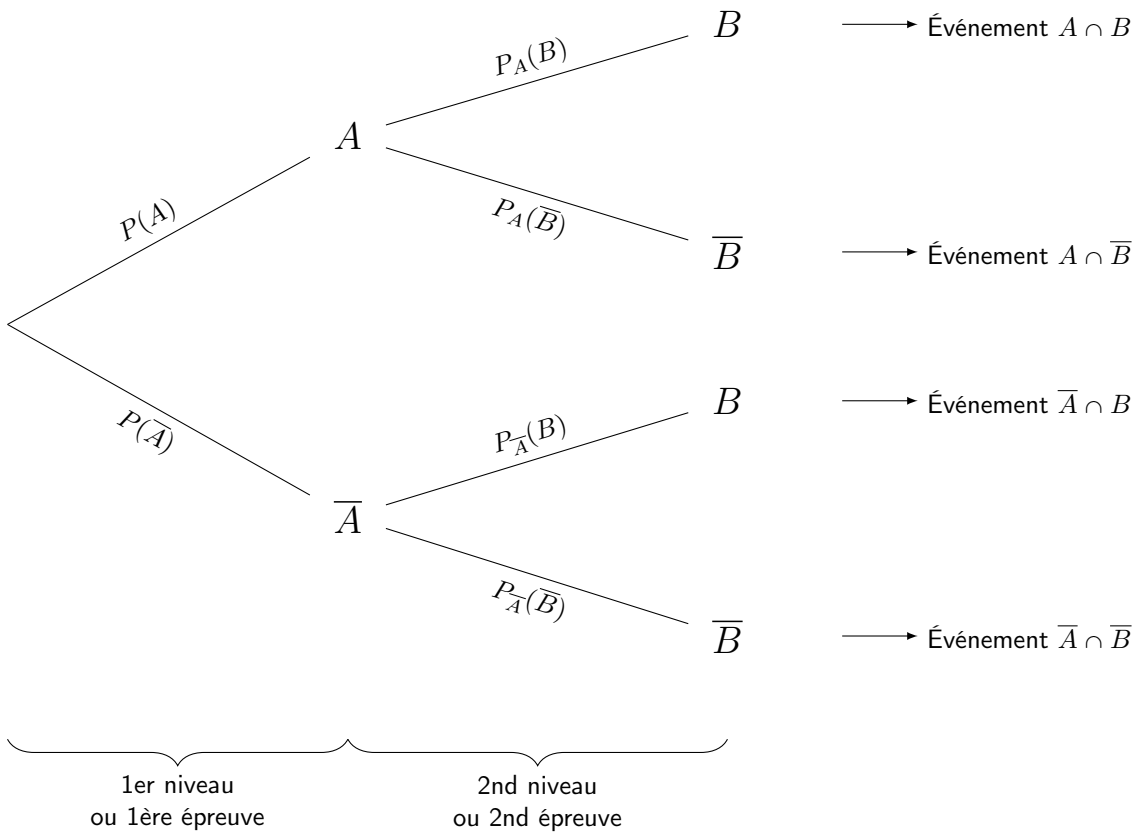
Cette proposition est admise en classe de première.

4 Succession d'événements aléatoires

Dans ce chapitre, on considère un univers Ω, un événement A de probabilité différente de 0 et 1, et un événement B que l'on réalise après A. Par exemple, tirer une boule dans une urne sans la remettre dedans, puis tirer une autre boule dans l'urne.

1 – Arbres pondérés

On représente la succession des événements A et B et leurs probabilités dans un *arbre*. Cet arbre est *pondéré* par les probabilités de chaque chemin :



Remarque 1

Dans un arbre de probabilités, la somme des probabilités partant d'un même nœud doit toujours valoir 1.

Avec la représentation fournie par un arbre pondéré, la formule des probabilités composées se reformule ainsi :

Proposition 2

Dans un arbre de probabilités, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées en chemin.

Cette formulation fonctionnera également quand vous rencontrerez des arbres avec plus de deux niveaux !

Exemple 3

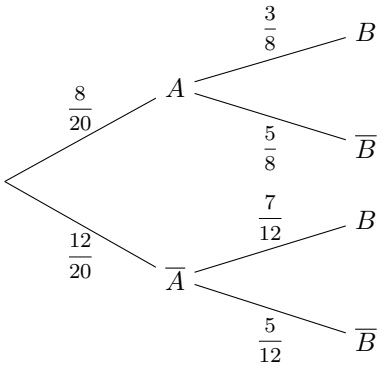
Construisons l'arbre pondéré associé au tableau croisé suivant :

	Filles	Garçons
Avec lunettes	3	7
Sans lunettes	5	5

On considère les événements A : «l'élève est une fille» et B : «l'élève porte des lunettes». Il faut d'abord calculer toutes le probabilités – on peut néanmoins réduire le travail de moitié en utilisant le fait que la somme des probabilités partant d'un même nœud vaut 1.

- $P(A) = \dfrac{8}{20}$
- $P_A(B) = \dfrac{3}{8}$
- $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{7}{12}$

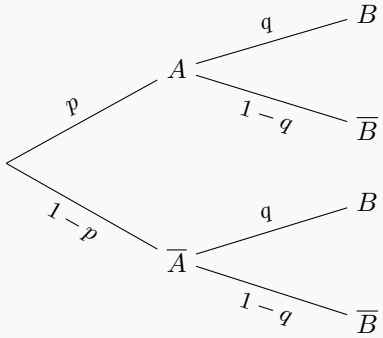
On a donc :



Succession de deux épreuves indépendantes

Propriété 4

On suppose que A et B sont indépendants. Si on note $p = P(A)$ et $q = P(B)$, l'arbre pondéré est donc de la forme :



Exemple 5

Des situations de deux épreuves successives indépendantes classiques sont les suivantes :

- Lancer un dé ou une pièce deux fois d'affilée,
- Tirer *avec remise* (on remet ce qu'on vient de tirer).

Remarque 6 (Paradoxe de pièces de monnaie)

Attention, les raisonnements sur les successions d'événements, indépendants ou non, ne sont valables que si les événements... se succèdent. En particulier, s'ils se déroulent simultanément, qu'importe si on regarde leurs résultats l'un après l'autre, ils ne se succèdent pas.

Prenons un cas fallacieux concret. Alice lance en secret et simultanément deux pièces de monnaie, et cache ces dernières dans ses deux mains. On se demande dans différents cas quelle est la probabilité qu'Alice ait obtenu deux fois Pile.

- 1er cas : sans information
  L'univers des possibles est $\{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$. Elle a donc 1 chance sur 4 de tomber sur (P,P).
- 2e cas : Alice nous informe que la pièce dans sa main gauche est tombée sur Pile.
  Dans ce cas, le gain d'informations modifie l'univers des possibles : en effet, les issues (P,F) et (F,F) sont désormais exclue. L'univers est donc $\{(P,P);(F,P)\}$, et Alice a 1 chance sur 2. Cela correspond à l'intuition que l'on se fait : comme on connaît le résultat du premier lancer, tout se joue sur le deuxième, qui a bien 1 chance sur 2 de tomber sur Pile (à supposer, raisonnablement, que le lancer d'une pièce est indépendant du lancer d'une autre pièce... mais gare à ce raisonnement : voyez la suite).
  C'est la même chose si Alice nous informe plutôt que la pièce de sa main droite est tombée sur Pile.
- 3e cas : Alice nous informe que l'une des pièces est tombée sur Pile, sans nous dire laquelle.
  L'erreur de raisonnement classique se trouve ici : certains pensent que les deux lancers de pièce étant indépendants, comme on sait que l'une des pièces est Pile, la probabilité d'un double Pile ne dépend que de la deuxième pièce, qui a 1 chance sur 2 de tomber sur Pile. Ce raisonnement n'est valable que si les pièces étaient lancées *successivement* : or, ici, l'information est donnée *après* le lancer des *deux* pièces. Il n'est pas vraiment question d'indépendance, puisqu'il n'est pas vraiment question de succession.

  Constatez que cette fois-ci l'information est moindre : comme dans le cas précédent, on sait qu'au moins une pièce est Pile, mais on ne sait pas dans quelle main. Étant donnée que la probabilité sans information est $\frac{1}{4}$, et la probabilité avec les deux informations est $\frac{1}{2}$, on imagine bien que la probabilité avec moins d'information doit se trouver quelque part entre les deux. Et en effet : l'univers des possibles est cette fois-ci $\{(P,P);(P,F);(F,P)\}$. Les issues sont toujours équiprobables, donc la probabilité d'un double Pile est $\frac{1}{3}$.

Un autre moyen de se convaincre du résultat est de simplement de poser les calculs, avec les probabilités conditionnelles adéquates.

Thème 3

Phénomènes d'évolution

5 Notion de suite numérique

1 – Définitions (explicite, par récurrence) et notations

Suite numérique

Définition 1

Une *suite numérique* est une fonction qui à tout nombre entier naturel à partir d'un certain entier p associe un nombre : $u : n \mapsto u(n)$.
Pour $n \geqslant p$, l'image de n par u est aussi notée u_n, lue «u indice n», et est appelée *terme de rang n de la suite u*.
Le terme $u(p)$ (ou u_p) est appelé *premier terme* ou *terme initial* de la suite u.

Remarque 2

La notation $u(n)$ est appelée *notation fonctionnelle*, et la notation u_n est appelée *notation indicielle*.
Pour désigner la suite de terme général $u(n)$, on utilise souvent la notation $(u(n))_n$ (ou $(u_n)_n$), voire plus simplement $(u(n))$ (ou (u_n)). Attention à bien faire la différence entre $u(n)$ qui est un nombre et $(u(n))$ qui est une suite. Pour faire une analogie, $u(n)$ désigne une paire de chaussettes et $(u(n))$ désigne le tiroir qui contient toutes les paires de chaussettes.

Définition explicite d'une suite

Définition 3

Une suite peut-être définie en donnant l'expression en fonction de n du terme de rang n : on dit que cette suite est définie *explicitement*.

Exemple 4

La suite u définie pour $n \geqslant 0$ par $u(n) = 2n + 1$ est définie explicitement.
Son terme de rang 12 est $u(12) = 2 \times 12 + 1 = 25$.

Définition par récurrence d'une suite

Définition 5

Une suite peut-être définie en donnant son terme initial et l'expression du terme d'un certain rang en fonction des termes de rangs précédents : on dit que cette suite est définie *par récurrence*.

Remarque 6

La suite u définie par son terme initial $u(0) = 1$ et par la *relation de récurrence* pour $n \geqslant 0$, $u(n+1) = u(n)+2$, est définie par récurrence.
Ses premiers termes sont $u(0) = 1$, $u(1) = u(0) + 2 = 3$, $u(2) = u(1) + 2 = 5$, $u(3) = u(2) + 2 = 7$, $u(4) = u(3) + 2 = 9$, ...

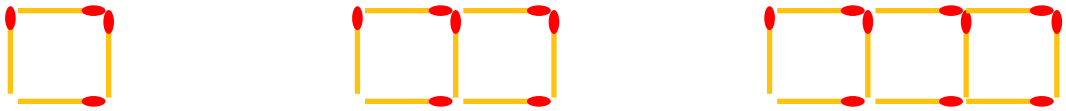
Remarque 7

Dans une définition par récurrence, on n'est pas obligé d'exprimer $u(n + 1)$ en fonction de $u(n)$: on peut également exprimer $u(n)$ en fonction de $u(n - 1)$!
Par exemple, la suite u définie par son terme initial $u(1) = 1$ et la relation de récurrence pour $n \geqslant 2$, $u(n) = n \times u(n - 1)$ est définie par récurrence.

Exercice 8

Modélisez les situations suivantes :

1. avec une suite définie explicitement :
   - a. Alice étudie une colonie de bactéries. Elle place 1 bactérie dans une boîte de pétri. Chaque heure, le nombre de bactéries double.
   - b. Bob compte le nombre de passagers dans des trains successifs numérotés 1, 2, 3, etc. Le nombre de passagers est égal au numéro du train multiplié par 3, auquel on ajoute 50.
2. avec une suite définie par récurrence :
   - a. En 2020, Carole possède 1000€ sur son compte d'épargne. Chaque année, son épargne lui rapporte $1,02$ fois le montant de l'année précédente.
   - b. David s'entraîne pour un marathon. Le premier jour, il court $1,5$km. Chaque jour, il progresse, et court 2km de plus que la veille.
3. avec une suite dont vous donnerez une expression explicite et une expression par récurrence :
   Dans la suite d'allumettes suivante, quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour réaliser chaque étape ?



Étape 1 Étape 2 Étape 3

Définition 9

Expliciter une suite, ou *déterminer son terme général*, c'est trouver sa définition explicite à partir de sa définition par récurrence.

2 – Représentation graphique, variations d'une suite

Variations d'une suite

Définition 10

- Si chaque terme de u est supérieur ou égal au précédent, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) \geqslant u(n)$, alors on dit que u est *croissante*.
- Si chaque terme de u est inférieur ou égal au précédent, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) \leqslant u(n)$, alors on dit que u est *décroissante*.
- Si chaque terme de u égal au précédent (et donc à tous les autres), c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) = u(n)$, alors on dit que u est *constante*.

Variations strictes d'une suite

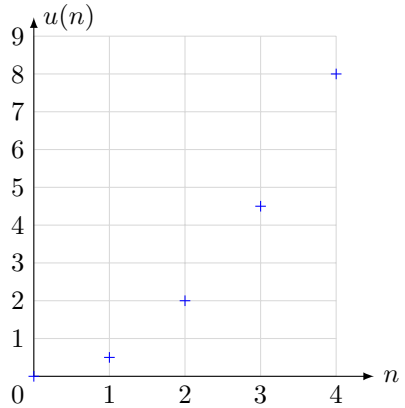
Définition 11

- Si chaque terme de u est strictement plus grand que le précédent, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) > u(n)$, alors on dit que u est *strictement croissante*.
- Si chaque terme de u est strictement plus petit que précédent, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) < u(n)$, alors on dit que u est *strictement décroissante*.

Dans un repère, on représente graphiquement une suite par un nuage de points, dont les points sont de coordonnées $(n; u(n))$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \geqslant p$ si le terme initial est de rang p).

Exemple 12

Considérons la suite u définie explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u(n) = \frac{1}{2} \times n^2$. Ses premiers termes sont $u(0) = 0$, $u(1) = 0,5$, $u(2) = 2$, $u(3) = 4,5$, $u(4) = 8$, ... Sa représentation graphique est la suivante :



Chaque terme est (strictement) plus grand que le précédent, donc cette suite est (strictement) croissante.

6 Modèles discrets : suites arithmétiques et géométriques

1 – Modèle de croissance linéaire : les suites arithmétiques

A – Définition explicite, définition récurrente

Suites arithmétiques

Définition 1

Une *suite arithmétique* est une suite qui satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où $r \in \mathbb{R}$ est appelé *raison* de la suite u.

Méthode 2

Une suite arithmétique modélise une situation dans laquelle l'évolution d'un pas à l'autre se fait en *ajoutant* toujours la même quantité.

Exemple 3

La suite u définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 2$, est une suite arithmétique de raison 2.

Remarque 4

La suite u définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + n$ n'est pas une suite arithmétique : la quantité ajoutée à chaque étape n'est pas constante, elle change en fonction du rang.

On peut schématiser une suite arithmétique de la manière suivante :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} u_5 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} u_n$$

De la définition par récurrence, on ne connaît que le terme initial ; pour expliciter la suite, on doit exprimer le terme général de rang n à partir de cette seule information, en exploitant la relation de récurrence. Cherchons une logique pour le passage de u_0 aux autres termes :

- De u_0 à u_1, on ajoute 1 fois r, autrement dit on ajoute $1 \times r$.
- De u_0 à u_2, on ajoute 2 fois r, autrement dit on ajoute $2 \times r$.
- De u_0 à u_3, on ajoute 3 fois r, autrement dit on ajoute $3 \times r$.
- De u_0 à u_4, on ajoute 4 fois r, autrement dit on ajoute $4 \times r$.
- De u_0 à u_5, on ajoute 5 fois r, autrement dit on ajoute $5 \times r$.

On devine alors que pour passer de u_0 à u_n, on ajoute n fois r, autrement dit on ajoute $n \times r$.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "+r"] \arrow[rrrrrrr, bend right, "+nr"'] & u_1 \arrow[r, "+r"] & u_2 \arrow[r, "+r"] & u_3 \arrow[r, "+r"] & u_4 \arrow[r, "+r"] & u_5 \arrow[r, "+r"] & \cdots \arrow[r, "+r"] & u_n \end{tikzcd}$$

Explicitation d'une suite arithmétique

Proposition 5

Soit u une suite arithmétique de terme initial u_0 (attention, le premier rang est 0 !) et de raison r. L'expression explicite du terme général de u est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple 6

La suite arithmétique u de terme initial $u_0 = 3$ et de raison 6 :

- Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$,
- S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 + 6n$

La suite arithmétique u de terme initial $u_0 = 0,4$ et de raison -9 :

- Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 9$,
- S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,4 - 9n$

Remarque 7

Si le rang initial n'est pas 0, alors l'expression explicite change. Il suffit de répéter le raisonnement précédent. Par exemple, si le premier rang est 1 :

- De u_1 à u_2, on ajoute 1 fois r.
- De u_1 à u_3, on ajoute 2 fois r.
- De u_1 à u_4, on ajoute 3 fois r.

On devine alors que pour passer de u_1 à u_n, on ajoute $n-1$ fois r, autrement dit on ajoute $(n-1) \times r$.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[r, "+r"] \arrow[rrrrr, bend right, "+(n-1)\times r"'] & u_2 \arrow[r, "+r"] & u_3 \arrow[r, "+r"] & u_4 & \cdots \arrow[r, "+r"] & u_n \end{tikzcd}$$

De manière générale, si le terme initial est de rang p, alors l'expression explicite est, pour tout $n \geqslant p$, $u_n = u_p + (n-p) \times r$.

B – Représentation graphique, variations

Propriété 8

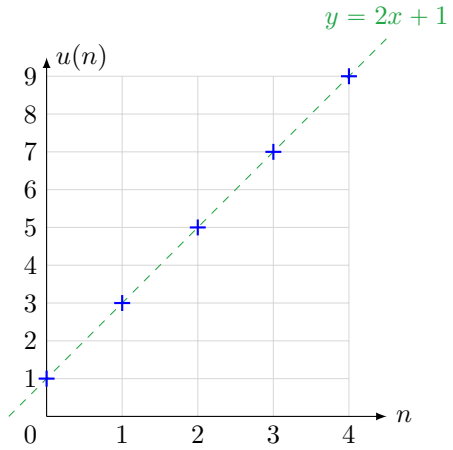
Les points du nuage de points représentant la suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r sont tous alignés, le long de la droite d'équation $y = rx + u_0$.

En effet, cette suite s'écrit explicitement $u_n = rn + u_0$, ou $u(n) = rn + u(0)$ en notation fonctionnelle : autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points de coordonnées $(n; u(n))$ vérifient l'équation de droite $y = rx + u_0$ (en notation fonctionnelle : $y = rx + u(0)$).

C'est pour cette raison que l'on dit que les suites arithmétiques modélisent des situations de croissance *linéaire*.

Exemple 9

Représentation graphique de la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison 2 :



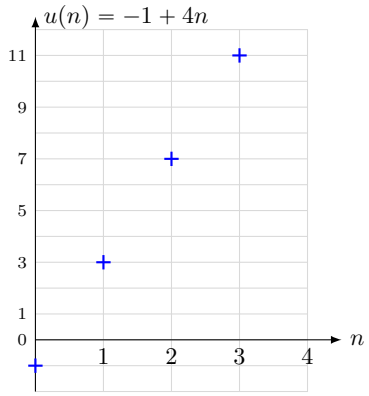
Proposition 10

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors u est strictement croissante.
- Si $r = 0$, alors u est constante.
- Si $r < 0$, alors u est strictement décroissante.

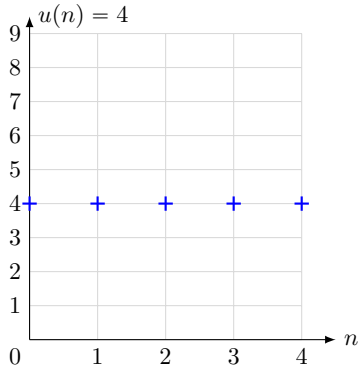
Exemple 11

Cas croissant



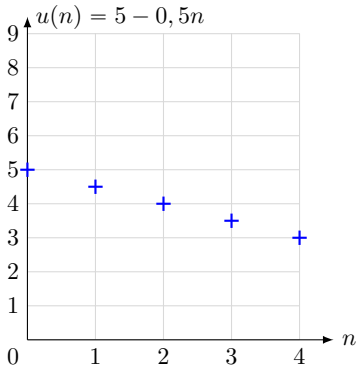
$(u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + 4)$

Cas constant



$(u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 0)$

Cas décroissant

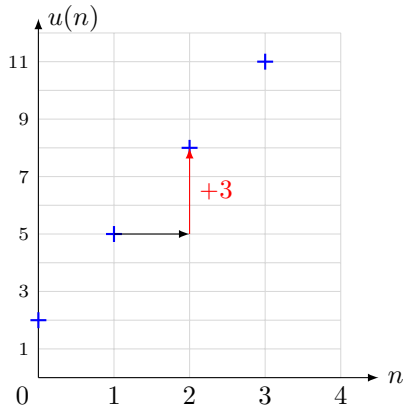


$(u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 0,5)$

Méthode 12 (Déterminer l'expression d'une suite arithmétique à partir de sa représentation graphique)

Si tous les points sont alignés sur une droite horizontale, alors la suite est constante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est égal à l'ordonnée de ces points.
Sinon, deux cas de figure : soit u est croissante, c'est-à-dire que plus n est grand, plus les points «montent», soit u est décroissante, c'est-à-dire que plus n est grand, plus les points «descendent».

Cas croissant

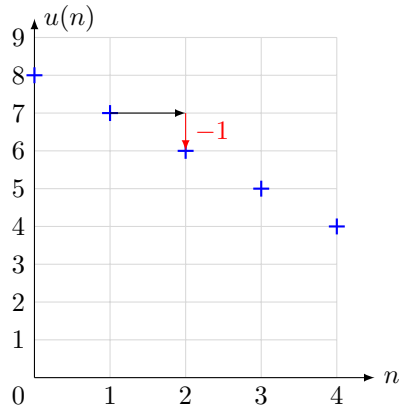


1▸ Le terme initial est l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0 : ici, on lit $u_0 = 2$.

2▸ On mesure l'accroissement entre deux points successifs : ici, d'un point au suivant, on monte de 3, donc la raison est $+3$.

Ainsi, l'expression explicite de la suite est, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + 3n$.

Cas décroissant



1▸ Le terme initial est l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0 : ici, on lit $u_0 = 8$.

2▸ On mesure l'accroissement entre deux points successifs : ici, d'un point au suivant, on descend de 1, donc la raison est -1.

Ainsi, l'expression explicite de la suite est, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8 - 1n = 8 - n$.

2 – Modèle de croissance exponentielle : les suites géométriques

A – Définition explicite, définition récurrente

Suites géométriques

Définition 13

Une *suite géométrique* est une suite qui satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

où $q \in \mathbb{R}$ est appelé *raison* de la suite u.

Méthode 14

Une suite géométrique modélise une situation dans laquelle l'évolution d'un pas à l'autre se fait en *multipliant* toujours la même quantité. Typiquement, un taux (fixe) d'évolution se modélise par une suite géométrique.

Exemple 15

La suite u définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$, est une suite géométrique de raison 2.

Remarque 16

La suite u définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = n \times u_n$ n'est pas une suite géométrique : la quantité multipliée à chaque étape n'est pas constante, elle change en fonction du rang.

On peut schématiser une suite géométrique de la manière suivante :

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} u_n$$

De la définition par récurrence, on ne connaît que le terme initial ; pour expliciter la suite, on doit exprimer le terme général de rang n à partir de cette seule information, en exploitant la relation de récurrence. Cherchons une logique pour le passage de u_0 aux autres termes :

- De u_0 à u_1, on multiplie 1 fois par par q, autrement dit on multiplie par q.
- De u_0 à u_2, on multiplie 2 fois par par q, autrement dit on multiplie par $q \times q = q^2$.
- De u_0 à u_3, on multiplie 3 fois par par q, autrement dit on multiplie par $q \times q \times q = q^3$.
- De u_0 à u_4, on multiplie 4 fois par par q, autrement dit on multiplie par $q \times q \times q \times q = q^4$.
- De u_0 à u_5, on multiplie 5 fois par par q, autrement dit on multiplie par $q \times q \times q \times q \times q = q^5$.

On devine alors que pour passer de u_0 à u_n, on multiplie n fois q, autrement dit on multiplie q^n.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "\times q"] \arrow[rrrrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, "\times q"] & u_2 \arrow[r, "\times q"] & u_3 \arrow[r, "\times q"] & u_4 \arrow[r, "\times q"] & u_5 \arrow[r, "\times q"] & \cdots \arrow[r, "\times q"] & u_n \end{tikzcd}$$

Explicitation d'une suite géométrique

Proposition 17

Soit u une suite géométrique de terme initial u_0 (attention, le premier rang est 0 !) et de raison q. L'expression explicite du terme général de u est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple 18

La suite géométrique u de terme initial $u_0 = 3$ et de raison 6 :

- Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6 \times u_n$,
- S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 6^n$

La suite arithmétique u de terme initial $u_0 = 0,4$ et de raison $\dfrac{1}{9}$:

- Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \dfrac{1}{9}$,
- S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,4 \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^n$

Remarque 19

Si le rang initial n'est pas 0, alors l'expression explicite change. Il suffit de répéter le raisonnement précédent. Par exemple, si le premier rang est 1 :

- De u_1 à u_2, on multiplie 1 fois par q.
- De u_1 à u_3, on multiplie 2 fois par q.
- De u_1 à u_4, on multiplie 3 fois par q.

On devine alors que pour passer de u_1 à u_n, on multiplie $n-1$ fois q, autrement dit on multiplie par q^{n-1}.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[r, "\times q"] \arrow[rrr, bend right, "\times q^{n-1}"'] & u_2 \arrow[r, "\times q"] & u_3 \arrow[r, "\times q"] & u_4 & \cdots \arrow[r, "\times q"] & u_n \end{tikzcd}$$

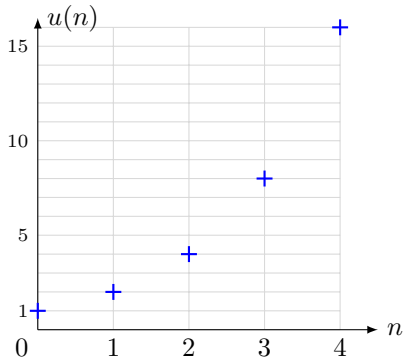
De manière générale, si le terme initial est de rang p, alors l'expression explicite est, pour tout $n \geqslant p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

B – Représentation graphique, variations

Dans cette section, on considère une suite u de terme initial $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

Exemple 20

Représentation graphique de la suite géométrique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison 2 :



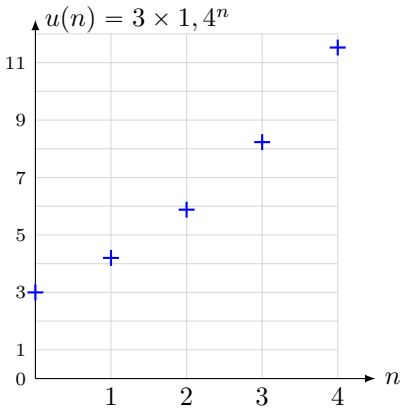
Proposition 21

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors u est constante.
- Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.

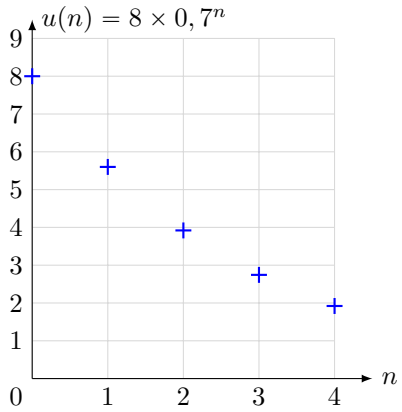
Exemple 22

Cas croissant



$(u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 1,4 \times u_n)$

Cas décroissant



$(u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 0,7 \times u_n)$

Méthode 23 (Déterminer l'expression d'une suite géométrique à partir de sa représentation graphique)

Pour déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique à partir de sa représentation graphique,

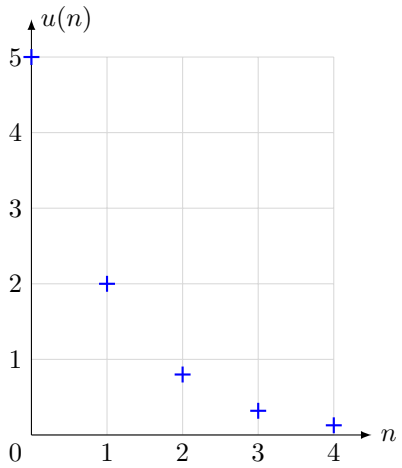
1▸ On lit le terme initial à l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0,

2▸ On lit les ordonnées de deux termes consécutifs u_n et u_{n+1},

3▸ Comme $u_{n+1} = q \times u_n$, on retrouve la raison par la formule $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple 24

Considérons la suite géométrique dont la représentation graphique est la suivante :



On lit $u_0 = 5$ et $u_1 = 2$. Comme $u_1 = q \times u_0$, on en déduit que $q = \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{2}{5} = 0,4$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 0,4^n$.

3 – Problème de seuil

Définition 25

Un *problème de seuil* est la question suivante : étant donnée une suite croissante (respectivement décroissante), à partir de quel rang passe-t-elle au-dessus (respectivement en-dessous) d'une certaine valeur ?

Méthode 26 (Avec un tableur – cas par récurrence)

Considérons la suite arithmétique croissante u de terme initial $u_0 = 10$ et de raison 4. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 4$. On cherche à savoir quand la suite u dépasse la valeur 40.

1▸ Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).

2▸ Dans la colonne B, on inscrit le terme initial, puis on transcrit la formule de récurrence dans la cellule suivante. On étend ensuite cette formule.

3▸ On parcourt la colonne B pour chercher le moment où la suite u dépasse le seuil (ici, quand elle dépasse la valeur 40) : il suffit alors de lire le rang correspondant dans la colonne A (ici, u dépasse 40 à partir du rang 10).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	=B2+4
4	2	18
5	3	22
6	4	26
7	5	30
8	6	34
9	7	38
10	8	42

Méthode 27 (Avec un tableur – cas explicite)

Considérons la suite géométrique décroissante u de terme général donné pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 200 \times 0,8^n$. On veut savoir à partir de quel rang u passe en-dessous de la valeur 100.

1▸ Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).

2▸ Dans la colonne B, on inscrit l'expression qui définit u_n en fonction de n. On étend ensuite cette formule.

3▸ On parcourt la colonne B pour chercher le moment où la suite u dépasse le seuil (ici, quand elle passe en-dessous de la valeur 100) : il suffit alors de lire le rang correspondant dans la colonne A (ici, u passe en-dessous de 100 à partir du rang 4).

	A	B
1	n	u_n
2	0	=200*0,8^A2
3	1	160.00061
4	2	128.00098
5	3	102.40117
6	4	81.92123
7	5	65.53723
8	6	52.42998
9	7	41.94414
10	8	33.55544

Remarque 1 : L'exponentiation dans un tableur se fait avec le symbole ^ (accent circonflexe).
Remarque 2 : Les machines ne peuvent pas traiter des nombres avec une précision infinie, et doivent faire des arrondis : ici, par exemple, les premiers termes de u sont 200, 160 et 128, mais on constate que ce tableur souffre d'erreurs d'arrondis (les erreurs sont exagérées pour l'exemple...).

Méthode 28 (Cas arithmétique explicite : avec une inéquation)

▸ Considérons la suite arithmétique croissante u de terme général donné pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 6n + 1$. On veut savoir à partir de quel rang u passe au-dessus de la valeur 120.

$$\begin{aligned} 6n + 1 &\geqslant 120 \\ 6n + 1 - 1 &\geqslant 120 - 1 \\ 6n &\geqslant 119 \\ 6n \div 6 &\geqslant 119 \div 6 \\ n &\geqslant 119 \div 6 \approx 19,83 \end{aligned}$$

Or le rang n est un nombre entier : il faut donc prendre le rang qui suit le nombre $19,83$: en effet, u est croissante, donc pour $n < 19,83$, on a $u_n < 120$, et pour $n > 19,83$, on a $u_n > 120$. Le rang qui suit $19,83$ est 20 : ainsi, u dépasse la valeur 120 à partir du rang 20.
▸ Considérons la suite arithmétique décroissante u de terme général donné pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n + 500$. On veut savoir à partir de quel rang u passe en-dessous de la valeur 10.

$$\begin{aligned} -3n + 500 &\leqslant 10 \\ -3n + 500 - 500 &\leqslant 10 - 500 \\ -3n &\leqslant -490 \\ -3n \div (-3) \boxed{\geqslant} &- 490 \div (-3) \\ n &\geqslant 490 \div 3 \approx 163,33 \end{aligned}$$

(Attention, multiplier ou diviser une inéquation par un nombre négatif renverse son sens !)
Ainsi, u passe en-dessous de 10 à partir du rang 164.

Remarque 29

Le problème de seuil dans le cas géométrique par inéquation nécessite la fonction *logarithme*, qui n'est pas au programme de ce cours.

Méthode 30 (Avec Python – cas par récurrence)

Considérons la suite géométrique croissante u de terme initial $u_0 = 2$ et de raison $1,5$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,5 \times u_n$. On cherche à savoir quand la suite u dépasse la valeur 100.
Le principe est le suivant : on stocke la valeur courante de u_n dans une variable, initialisée à u_0, que l'on met à jour dans une boucle. On souhaite mettre à jour la valeur de u_n *tant que* l'on n'a pas dépassé le seuil, tout en gardant trace du rang.

```
seuil ← 100
u ← 2
n ← 0
Tant que u < seuil:
  u ← 1,5 * u
  n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

```
seuil = 100
u = 2
n = 0
while u < seuil:
    u = 1.5*u
    n = n+1
print(n)
```

Méthode 31 (Avec Python – cas explicite)

Considérons la suite arithmétique décroissante u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2000 - 9n$. On cherche le rang à partir duquel u passe en-dessous de 0.
Le principe est le suivant : on teste chaque rang n un par un, *tant que* la valeur de u_n calculée à partir de n est au-dessus du seuil.

```
seuil ← 0
n ← 0
Tant que 2000 - 9*n > seuil:
  n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

```
seuil = 100
n = 0
while 2000 - 9*n > seuil:
    n = n+1
print(n)
```

4 – Pour aller (plus) loin (HP)

Définition 32

Une suite *arithmético-géométrique* est une suite u vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Exercice 33 (Explicitation d'une suite arithmético-géométrique)

1▸ Commençons sur un exemple concret : considérons la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

a▸ On commence par réécrire la relation de récurrence de u en remplaçant u_n et u_{n+1} par la lettre ℓ : cela donne l'équation $\ell = 3\ell - 2$. Vérifiez que $\ell = 1$ en est la solution.

b▸ On définit la suite v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell = u_n - 1$. Vérifiez que v est géométrique de raison $a = 3$.

c▸ Explicitez v.

d▸ Exprimez v_0 en fonction de u_0 et ℓ.

e▸ Déduisez-en l'expression explicite de u.

2▸ Traitons maintenant le cas général avec les notations de la définition.

a▸ On commence par réécrire la relation de récurrence de u en remplaçant u_n et u_{n+1} par la lettre ℓ : cela donne l'équation $\ell = a\ell + b$. Exprimez la solution de cette équation en fonction de a et b, en justifiant la validité de vos opérations.

b▸ On définit la suite v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$. Vérifiez que v est géométrique de raison a.

c▸ Explicitez v.

d▸ Exprimez v_0 en fonction de u_0 et ℓ.

e▸ Déduisez-en l'expression explicite de u.

Exercices

Exercice 34

Soit u une suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 9.

1. Donner le forme récurrente de la suite u.
2. Donner le forme explicite de la suite u.
3. Donner le plus petit entier n à partir duquel $u_n > 1000$.

Exercice 35

Soit v une suite géométrique de premier terme 200 et de raison $0,4$.

1. Donner le forme récurrente de la suite v.
2. Donner le forme explicite de la suite v.

Exercice 36

Soit a une suite arithmétique telle que $a_5 = 24$ et $a_7 = 29$.

1. Calculer a_9.
2. Calculer a_{21}.
3. Donner a_0 et la raison de la suite.

Exercice 37

Soit g une suite géométrique telle que $a_5 = 2$ et $a_7 = 18$.

1. Calculer a_9 et a_{11}.
2. Donner la raison de la suite.

Exercice 38

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite donnée peut être arithmétique, géométrique, ou aucun des deux cas. **Justifier**.

1. $u_3 = 35$, $u_4 = 27$, $u_5 = 19$, $u_6 = 11$
2. La population de girafes augmente de 10% chaque année depuis 2020, où on en dénombrait $10\,000$. On note g_n le nombre de girafes à l'année 2020 $+n$.
3. Alice achète une plante pour son anniversaire. Elle observe que cette plante pousse de 2cm tous les mois. On note T_n la taille de la plante au n-ième mois après l'achat.

Solutions

Exercice 34

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1▸ $u_{n+1} = u_n + 9$

2▸ $u_n = 4 + 9n$

3▸ $u_n > 1000$ dès lors que $4 + 9n > 1000$, c'est-à-dire $9n > 1000 - 4 = 996$, donc $n > \dfrac{996}{9} \approx 110,666...$. Comme n est entier, on prend donc $n \geqslant 111$.

Exercice 35

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1▸ $v_{n+1} = v_n \times 0,4$

2▸ $v_n = 200 \times 0,4^n$

Exercice 36

1▸ La suite u est arithmétique de raison -8, car chaque terme s'obtient à partir du précédent en soustrayant 8.

2▸ Augmenter de 10% une quantité revient à la multiplier par $1,10$. Chaque année, le nombre de girafes est donc multiplié par $1,10$: c'est une suite géométrique de raison $1,10$.

3▸ La taille de la plante un mois donné est égale à la taille du mois précédent, plus 2 : c'est une suite arithmétique de raison 2.

Exercice 37

1▸ De a_5 à a_7, on passe de 24 à 29, donc en montant de deux rangs, la valeur augmente de 5. Comme la suite est arithmétique, cette augmentation est constante : en passant de a_7 à a_9, on gagne deux rangs, donc la valeur augmente de 5, pour arriver à 34.

2▸ De proche en proche : $a_{11} = 39$, $a_{13} = 44$, $a_{15} = 49$, $a_{17} = 54$, $a_{19} = 59$, $a_{21} = 64$.

3▸ En gagnant de deux rangs, la valeur augmente de 5. Donc en augmentant de un seul rang, la valeur doit augmenter de moitié, c'est-à-dire de $5 \div 2 = 2,5$. Donc la raison est $2,5$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + 2,5n$, et on sait que $24 = a_5 = a_0 + 2,5 \times 5 = a_0 + 12,5$, donc $a_0 = 24 - 12,5 = 11,5$.

Exercice 38

1▸ De a_5 à a_7, on passe de 2 à 18, donc en montant de deux rangs, la valeur est multipliée par 9. Comme la suite est géométrique, cette évolution est constante : en passant de a_7 à a_9, on gagne deux rangs, donc la valeur est multipliée par 9, pour arriver à 162, et de même $a_{11} = 1458$.

2▸ Notons q la raison. On sait que $a_6 = a_5 \times q$ et $a_7 = a_6 \times q$ donc $a_7 = a_6 \times q = a_5 \times q \times q$. Or, d'après les valeurs, $a_7 = a_5 \times 9$, donc $q^2 = 9$, donc $q = 3$ ou $q = -3$.

7 Modèles continus : fonctions affines et exponentielles

1 – Modèles de croissance linéaire : les fonctions affines

Activité 1

Le Réseau de Transports Publics d'Aubusson (RTPA) propose trois offres à ses clients :

- Le plein tarif : le voyage coûte $2,50$€ à l'unité,
- Un forfait de réduction : pour 40€ par mois, la carte de fidélité permet d'acheter les voyages à 1€ l'unité,
- Un abonnement à 80€ par mois qui permet de voyager en illimité sur tout le réseau.

Alice, Bob, Carole et David se demandent quelle est l'offre la plus avantageuse pour chacun d'entre eux.

- Alice voyage une fois par jour sauf le dimanche où elle reste chez elle,
- Bob voyage une fois par jours tous les jours,
- Carole voyage deux fois par jour du lundi au vendredi, et reste chez elle le week-end,
- David voyage deux fois par jour tous les jours.

Pour simplifier le problème, on supposera qu'un mois complet est constitué de quatre semaines entières.

1. a. Calculer les prix de 5, 10, 15 et 20 voyages avec les trois offres. Représentez-les de trois couleurs différentes dans un repère orthogonal.
   On prendra 1cm pour 5 unités (nombre de tickets, prix) sur les deux axes.
   b. Pour chacune des trois offres, que pouvez-vous dire de la position relative des points que vous avez tracés ? Prolongez leur représentation en conséquence.
   c. Déterminer le nombre de voyages effectués en un mois par Alice, Bob, Carole et David.
   d. À l'aide du graphique précédent, déterminer l'offre la plus adaptée à chacun.
2. On se propose d'utiliser le graphique précédent pour résoudre le problème.
   a. Déterminer le nombre de voyages effectués en un mois par Alice, Bob, Carole et David.
   b. À l'aide du graphique précédent, déterminer l'offre la plus adaptée à chacun.
3. On va maintenant explorer une solution algébrique.
   a. Notons p la fonction qui donne le prix en fonction du nombre de voyages pour le plein tarif, r pour la réduction et a pour l'abonnement. On admet que chacune de ces fonctions peut s'exprimer sous la forme $mx + b$ avec x le nombre de voyages, et m et b deux nombres que l'on va déterminer.
   Pour le moment, concentrons-nous sur le plein tarif. On a donc $p(x) = mx + b$.
      i. Si on n'effectue aucun voyage, combien paye-t-on ? En déduire la valeur de $p(0)$, puis la valeur du nombre b.
      ii. Si on voyage 1 fois, combien paye-t-on ? En déduire la valeur du nombre m.
   b. Répéter le raisonnement précédent pour déterminer les expressions de r et a.
   c. Comparons le plein tarif avec l'abonnement.
      i. Résoudre l'inéquation $p(x) \geqslant a(x)$ avec les expressions de $p(x)$ et de $a(x)$ trouvés précédemment.
      ii. À partir de combien de voyages mensuels l'abonnement devient-il rentable ?
   d. Reproduire la démarche pour comparer la réduction et l'abonnement.
   e. Reproduire la démarche pour comparer le plein tarif la réduction.

Dans cette section, on munit le plan d'un repère orthogonal.

A – Coefficient directeur d'une droite et taux de croissance d'une fonction

Coefficient directeur d'une droite

Définition 2

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts du plan. Le *coefficient directeur* ou la *pente* de la droite (AB) est le nombre :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

C'est une mesure du déplacement vertical proportionnellement au déplacement horizontal.

Remarque 3

Un pente positive signifie que la droite «monte» : plus les abscisses augmentent, plus les ordonnées augmentent.
Un pente négative signifie que la droite «descend» : plus les abscisses augmentent, plus les ordonnées diminuent.

B – Fonctions affines : définition algébrique, représentation

Définition 4

Une *fonction affine* est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = ax + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

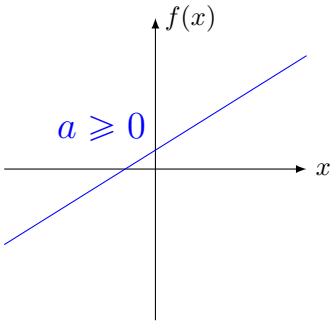
Propriété 5

La courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite de pente a.

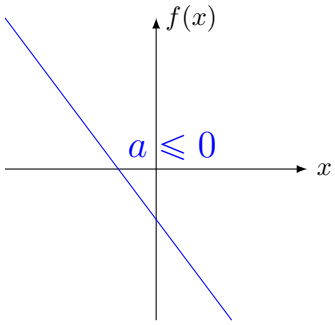
Corollaire 6

Soit $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

- Si $a \geqslant 0$, alors f est croissante.
- Si $a \leqslant 0$, alors f est décroissante.



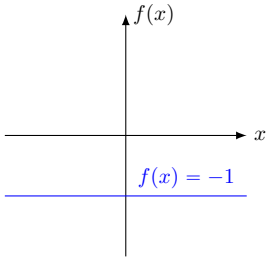
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	↗

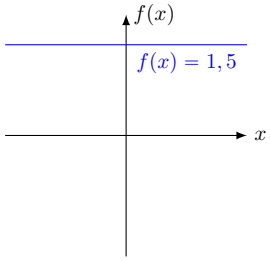


x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	↘

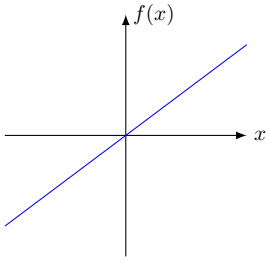
Remarque 7 (Cas particuliers)

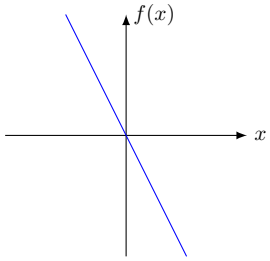
- Si $a = 0$, alors f est constante.





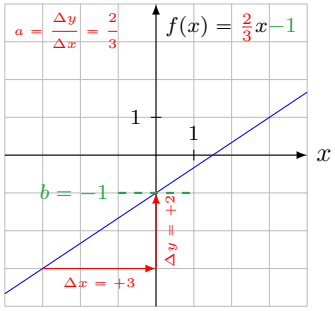
- Si $b = 0$, alors f est *linéaire*. Elle passe par l'origine du repère.

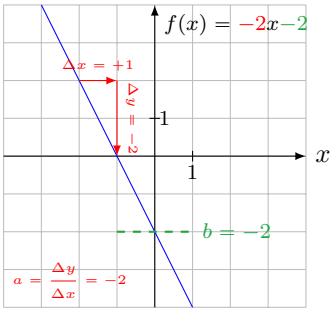




Méthode 8 (Retrouver l'équation à partir du graphique)

1. On trouve b en lisant l'*ordonnée à l'origine*, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse 0.
2. On trouve a en calculant le coefficient directeur, c'est-à-dire le rapport du déplacement vertical par le déplacement horizontal.





2 – Modèles de croissance exponentielle : les fonctions exponentielles

A – Définition et représentation

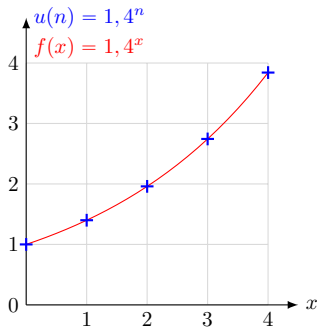
On admet qu'il existe une, et une seule manière de généraliser ainsi les puissances aux exposants non entiers. Par conséquent, on garde également la notation puissance a^x.

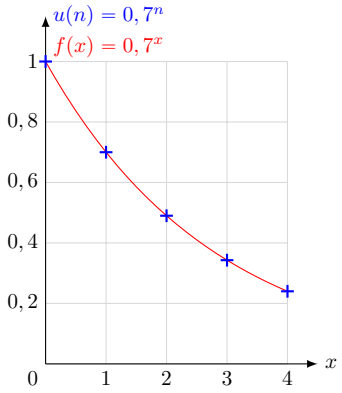
Fonctions exponentielles

Définition 9

Soit $a > 0$.
La fonction $f : x \mapsto a^x$ définie pour $x \in [0; +\infty[$ est appelée *fonction exponentielle de base* a.

La fonction $f : x \mapsto a^x$ *généralise* la suite $(a^n)_n$. Sa courbe représentative prolonge le nuage de points représentant la suite $(a^n)_n$.





Propriété 10

Soient $a > 0$ et x et y deux nombres réels tels que $x \geqslant y \geqslant 0$. (Remarque : vous verrez plus tard que cela reste vrai pour x et y quelconques).

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$

Propriété 11

Soit $a > 0$.

- Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $1^x = 1$
- $a^0 = 1$

Proposition 12

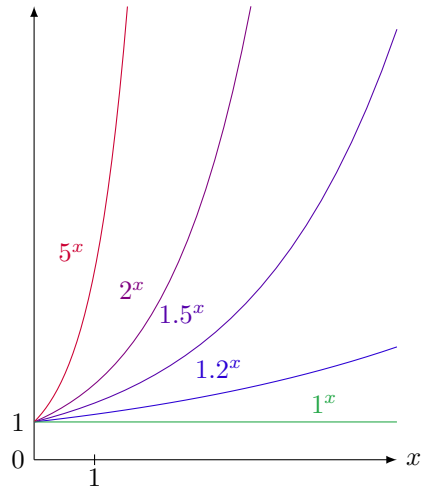
Soit $f : x \mapsto a^x$ où $a > 0$.

- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement décroissante.
- Si $a = 1$, alors f est constante égale à 1.
- Si $a > 1$, alors f est strictement croissante.

Exemple 13

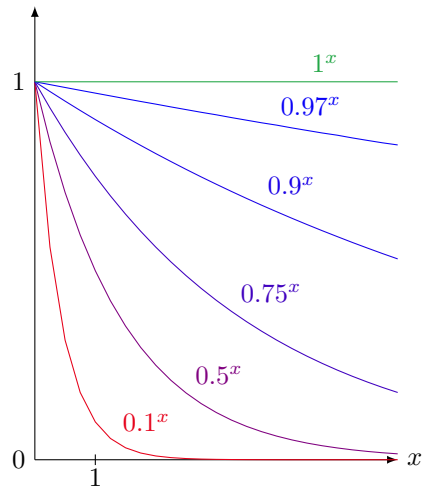
$a \geqslant 1$

x	0	$+\infty$
f	1 ↗	



$0 < a \leqslant 1$

x	0	$+\infty$
f	1 ↘	



B – Racine n-ième d'un réel positif et taux d'évolution moyen

Dans cette section, on considère $a > 0$ un nombre réel et $n \geqslant 2$ un entier.

Proposition 14

L'équation $x^n = a$ admet une unique solution positive. Cette solution est notée *racine n-ième de a*, et est notée $\sqrt[n]{a}$.
Ainsi, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Remarque 15

Une racine carrée est une racine 2-ième. En effet, au collège on définit la racine carré de $a > 0$ comme l'unique nombre positif x dont le carré vaut a, autrement dit l'unique solution positive de $x^2 = a$.

Proposition 16

La racine n-ième de a correspond à la puissance $\dfrac{1}{n}$ de a :

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Activité 17

Support vidéo : https://youtu.be/9o4cl3WYZ5s?si=CDzlXhTkwLyxlRN6
Dans ce journal télévisé, le présentateur et économiste affirme que cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre représentent une augmentation globale de 30%.

1▸ À quel *taux d'évolution*, et à quel *coefficient multiplicateur* correspond une augmentation de 6% ?

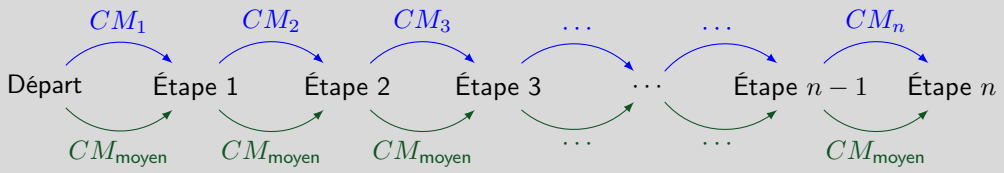
2▸ Exprimez puis calculez le taux d'évolution global et le coefficient multiplicateur global correspondant à cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre.

3▸ Commentez les propos du présentateur.

Définition 18 — ***Taux d'évolution moyen***

Lorsqu'une grandeur évolue plusieurs fois successivement, le *taux d'évolution moyen* correspond au taux d'évolution intermédiaire fixe qui aurait mené à la même évolution globale.
C'est le taux correspondant au coefficient multiplicateur qui est égal à la racine n-ième (avec n le nombre d'évolutions) du coefficient multiplicateur global :

$$CM_{\text{moyen}} = \sqrt[n]{CM_{\text{global}}} = \sqrt[n]{CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \cdots \times CM_n}$$

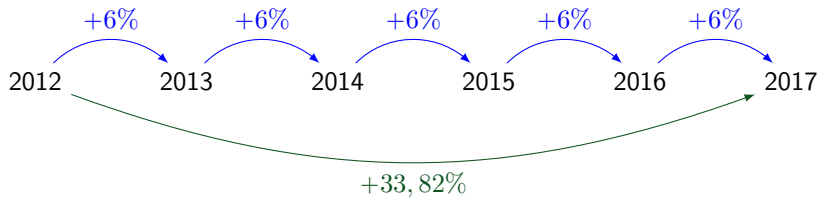


Remarque 19

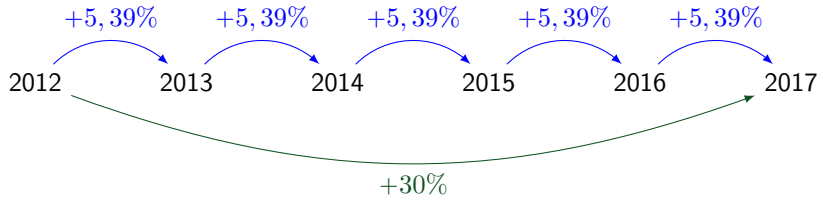
Le coefficient multiplicateur moyen est ce qu'on appelle la *moyenne géométrique* des coefficients multiplicateurs intermédiaires. C'est un autre type de moyenne : celle que vous connaissez du collège s'appelle la *moyenne arithmétique*.

Exemple 20

Reprenons l'Activité 17. D'une année à l'autre, le taux d'évolution est de 6%. Cela correspond à un coefficient multiplicateur de $CM = \dfrac{6}{100} = 0,06$. Ainsi, l'évolution globale est $CM_{\text{global}} = 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 = 1,06^5 = 1,3382255776$. Le taux d'évolution global est donc environ de $33,82\%$.



Pour obtenir un taux global de 30%, autrement dit un coefficient multiplicateur global de $1,3$, il faut un coefficient multiplicateur moyen de $CM_{\text{moyen}} = \sqrt[5]{1,3} \approx 1,0539$, autrement dit un taux moyen $\tau_{\text{moyen}} = 5,39\%$.



8 Variation locale, nombre dérivé

0 – Rappels sur les droites

Coefficient directeur d'une droite

Définition 1

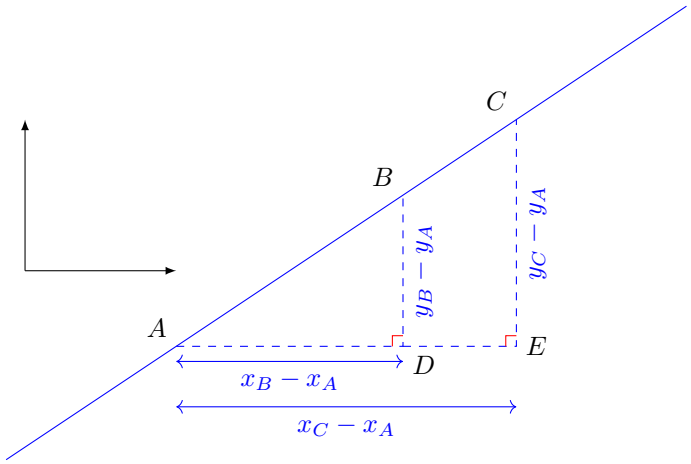
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts du plan. Le *coefficient directeur* ou la *pente* de la droite (AB) est le nombre :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

C'est une mesure du déplacement vertical proportionnellement au déplacement horizontal.

Il existe une infinité de manière de définir une même droite : il suffit d'en prendre deux autres points. Le coefficient directeur ne dépend pas des points que l'on choisit. Démontrons-le :

Démonstration. Soit $C(x_C; y_C)$ un point de (AB) distinct de A et de B. Montrons que $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$. On peut représenter un exemple de situation comme sur le schéma ci-dessous, en nommant les points D et E :



Sur ce schéma, B est droite de A, donc $AD = x_B - x_A$ et non $x_A - x_B$; comme B est au-dessus de A, on a $BD = y_B - y_A$ et non $y_A - y_B$; de même pour les autres longueurs – car une longueur est positive ! Les autres situations (B et C à gauche ou en-dessous de A, C entre A et B) se traitent de la même manière (les signes changent et se compensent).

Comme (BD) et (CE) sont toutes deux perpendiculaires à (AE), elles sont parallèles entre elles, donc cette figure est une configuration de Thalès : d'après le théorème de Thalès, $\left(\frac{AB}{AC} =\right) \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$. On remplace les longueurs par leurs expressions : $\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$. Après quelques manipulations algébriques de cette expression, on démontre l'égalité souhaitée.

Ainsi, la formule donnant le coefficient directeur avec A et B donne le même résultat qu'avec A et C. Si D est un autre point de (AB), un raisonnement similaire montre que le résultat sera le même pour C et D. Ainsi, le coefficient directeur ne dépend pas de la paire de points choisie. □

Remarque 2

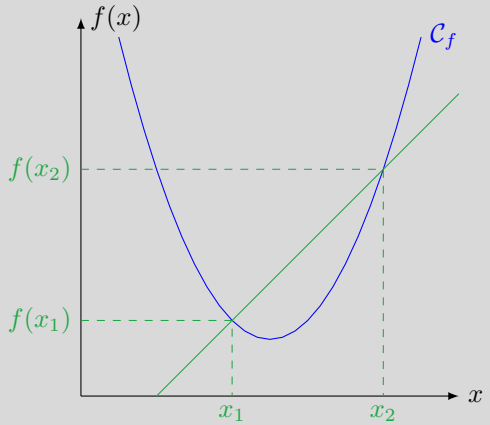
Un pente positive signifie que la droite «monte» : plus les abscisses augmentent, plus les ordonnées augmentent.
Un pente négative signifie que la droite «descend» : plus les abscisses augmentent, plus les ordonnées diminuent.

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un ensemble D, soient x_1 et x_2 deux éléments de D.
Le *taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2* est le nombre :

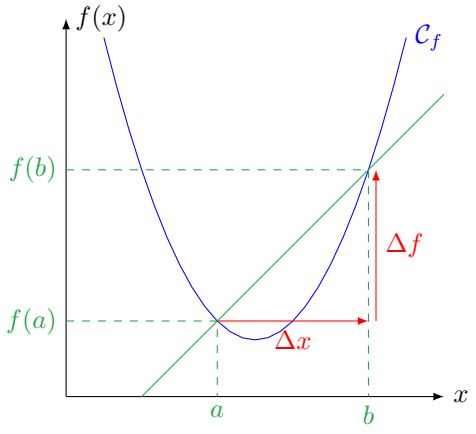
$$\tau_f(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Il correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$, droite que l'on appelle *sécante à la courbe de f entre x_1 et x_2*.



1 – De la sécante à la tangente

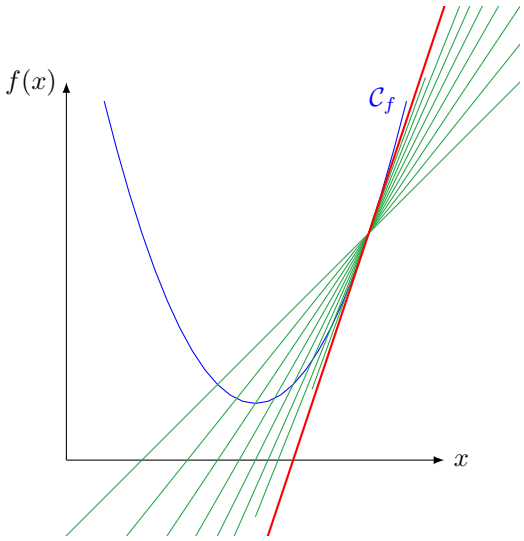
Si f représente une distance en fonction d'un temps, alors le taux d'accroissement entre les abscisses a et b correspond à la *vitesse moyenne* entre les instants a et b. La vitesse moyenne entre deux instants mesure le déplacement dans l'espace proportionnellement au déplacement dans le temps. Autrement dit, si vous prenez deux photos successives à deux instants a et y, la vitesse moyenne quantifie l'écart de position sur les deux photos. Mais plus on prend les photos rapidement, autrement dit plus l'intervalle de temps diminue, plus l'écart entre les positions diminue lui-même. Le philosophe grec Zenon a donc formulé le paradoxe suivant : quand l'intervalle de temps entre les photos devient infiniment petit, les écarts de position deviennent également infiniment petit, si bien que selon Zenon, les objets ne bougent pas réellement, leur mouvement n'est qu'une illusion.

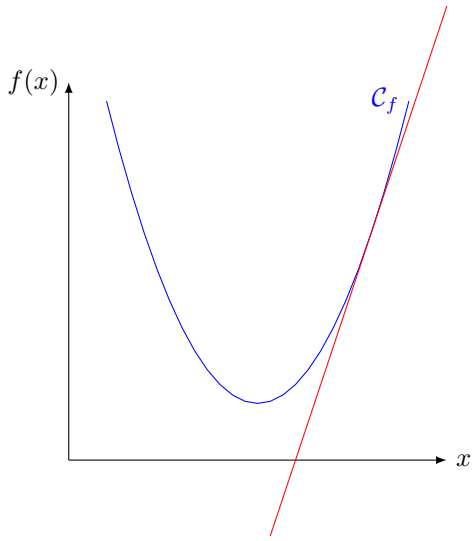


Ce n'est qu'au XVIIe siècle que Newton propose le formalisme mathématique qui permet de résoudre ce paradoxe. Alors que les instants a et b deviennent de plus en plus proches, la sécante qui leur correspond, quant à elle, semble s'équilibrer autour d'une droite particulière. Ainsi, la vitesse moyenne – qui est, rappelons-le, la pente de la sécante – entre deux instants de plus en plus proche se rapproche vers un certain nombre, la pente de cette droite d'équilibre, que l'on va appeler *vitesse instantanée*.

(À voir : Flâneries infinitésimales | Voyages au pays des maths | ARTE sur YouTube)

Cette droite d'équilibre épouse la courbe représentative au niveau de l'instant limite : elle est *tangente* à la courbe.





2 – Notion de nombre dérivé

Dans cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle I, et $a \in I$ qui n'est pas à la frontière de I.

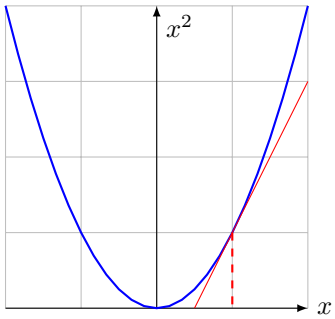
Nombre dérivé

Définition 4

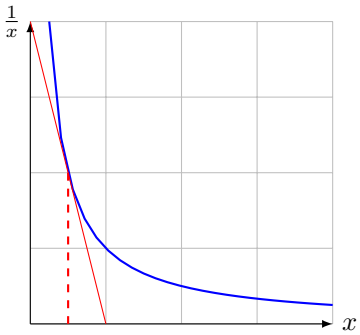
Lorsque la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse a, on dit que f *est dérivable en* a. La pente de cette tangente est appelé *nombre dérivé de* f *en* a, il est noté $f'(a)$ (lu «f prime de a»).

Exemple 5

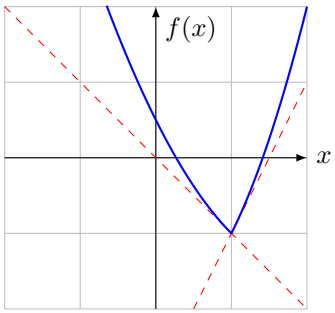
- La fonction carré est dérivable en 1, et son nombre dérivé en 1 vaut 2.
  Si on note $f : x \mapsto x^2$, on a alors $f'(1) = 2$.



- La fonction inverse est dérivable en $0,5$, et son nombre dérivé en $0,5$ vaut -4.
  Si on note $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on a alors $f'(0,5) = -4$.



- La fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre n'est pas dérivable en 1 : on ne peut pas définir de tangente (il y a deux candidates).
  De manière générale, si la courbe d'une fonction présente un angle ou un saut, alors la fonction associée ne sera pas dérivable en ce point.



Équation de la tangente

Proposition 6

Si f est dérivable en a, alors la tangente $T_a(f)$ a pour équation :

$$T_a(f) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration. Supposons f dérivable en a. Comme la tangente $T_a(f)$ est une droite, il existe deux nombres m et p tels que l'équation cartésienne de $T_a(f)$ est $T_a(f) : y = mx + p$.

- La pente de $T_a(f)$ est m. Or, par définition, $f'(a)$ en est aussi la pente, donc $m = f'(a)$.
- On sait que la $T_a(f)$ «touche» la courbe de f en a, autrement le point de la courbe de f d'abscisse a appartient à $T_a(f)$. Ce point a pour coordonnées $(a; f(a))$, et vérifie l'équation de $T_a(f)$: on a donc $f(a) = ma + p = f'(a)a + p$. On en déduit que $p = f(a) - f'(a)a$.

L'équation de $T_a(f)$ est donc, en factorisant :

$$T_a(f) : y = mx + p = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$$

□

9 Variation globale, fonction dérivée

Soit f définie et dérivable sur un intervalle *ouvert* I (c'est-à-dire que les bornes sont exclues).

1 – Fonction dérivée

Définition 1

SI f est dérivable en tout point de I, alors on dit que f est *dérivable sur* I, et on dispose de la *(fonction) dérivée de* f qui à chaque nombre lui associe son nombre dérivé (lue «f prime») :

$$f' : x \in I \mapsto f'(x)$$

Dérivées usuelles

Proposition 2

Les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

Fonction	Constante	Identité	Carré	Cube
$f : x \mapsto$	k	x	x^2	x^3
$f' : x \mapsto$	0	1	$2x$	$3x^2$

Démonstration. La démonstration suivante n'est pas parfaitement rigoureuse : pour le devenir, elle nécessite la notion de *limite* mathématique et les outils qui vont avec. Néanmoins, elle peut vous donner une intuition – elle reste correcte dans l'ensemble, seules certaines justifications manquent.

- La courbe représentative d'une fonction constante est une droite horizontale, donc son coefficient directeur est 0. La tangente à un droite en n'importe quel point est confondue avec la droite elle-même, donc en tout point, le nombre dérivé est 0.
- La courbe représentative de $f : x \mapsto x$ est une droite de coefficient directeur 1, donc par le même raisonnement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$.
- Soient a et b deux réels distincts. Le taux d'accroissement de $f : x \mapsto x^2$ entre a et b est le suivant :

$$\tau_f(a;b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = \frac{(a+b)\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}} = a+b$$

  En introduction, on a vu que la tangente en a s'obtient en rapprochant de plus en plus b de a jusqu'à ce qu'ils soient confondus. Or, plus b se rapproche de a, plus $a+b$ se rapproche de $a+a=2a$. Quand b se rapproche de a, les pentes des sécantes se rapprochent de la pente de la tangente, autrement dit les taux d'accroissement se rapprochent du nombre dérivé en a. Ainsi, le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = 2a$.
- Reproduisons le même raisonnement pour $f : x \mapsto x^3$. Soient a et b deux réels distincts. On vérifie en distribuant que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (exercice). Par conséquent,

$$\tau_f(a;b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{b-a} = a^2+ab+b^2$$

  Quand b se rapproche de a, $\tau_f(a;b)$ se rapproche donc de $a^2+aa+a^2 = 3a^2$. Donc $f'(a) = 3a^2$.

□

Opérations sur les dérivées

Proposition 3

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.

- La fonction $u+v$ est dérivable, de dérivée $(u+v)' = u' + v'$.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $k \times u$ est dérivable, de dérivée $(f \times u)' = k \times u'$.

Démonstration. Calculons les taux d'accroissement entre deux réels distincts a et b :

- Taux d'accroissement de $u+v$:

$$\tau_{u+v}(a;b) = \frac{(u+v)(b)-(u+v)(a)}{b-a} = \frac{u(b)+v(b)-u(a)-v(b)}{b-a} = \frac{u(b)-u(a)}{b-a} + \frac{v(b)-v(a)}{b-a} = \tau_u(a;b) + \tau_v(a;b)$$

  Quand b se rapproche de a, $\tau_u(a;b)$ se rapproche de $u'(a)$, et $\tau_v(a;b)$ se rapproche de $v'(a)$. Ainsi $\tau_{u+v}(a;b)$ se rapproche de $u'(a)+v'(a) = (u'+v')(a)$.
- Soit $k^{\in}\mathbb{R}$. Taux d'accroissement de $k \times u$:

$$\tau_{k\times u}(a;b) = \frac{(k\times u)(b)-(k\times u)(a)}{b-a} = \frac{k\times u(b) k\times u(b)}{b-a} = k \times \frac{u(b)-u(a)}{b-a} = k \times \tau_u(a;b)$$

  qui, quand b se rapproche de a, se rapproche de $k \times u'(a) = (k \times u')(a)$.

□

Corollaire 4 Dérivée d'une fonction affine

Soient a et b deux réels.
La fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

Démonstration. Notons $t : x \mapsto x$, $u : x \mapsto ax = a \times t(x)$ et $v : x \mapsto b$. On sait que t est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée constante égale à 1, donc u est dérivable de dérivée $u' = (at)' = at' = a \times 1 = a$. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée constante égale à 0. Ainsi, $f = u+v$, donc $f' = (u+v)' = u' + v' = a + 0 = a$. □

Remarque 5

La dérivée d'un produit de deux fonctions n'est pas égal au produit des dérivées des deux fonctions. Autrement dit, $(u \times v)' \neq u' \times v'$.
Contre-exemple : prenons $u : x \mapsto x$ et $v = u$. Ainsi, $u \times v : x \mapsto x \times x = x^2$. On sait que $u' = v' = 1$ et $(u \times v)'(x) = 2x$ (dérivée de la fonction carré, voir plus hait). On remarque que $u'(x) \times v'(x) \neq (u \times v)'(x)$.

Exemple 6

- Soit $f : x \mapsto 4x^3 - 7x^2 + 8x - 9$. Sa dérivée est $f' : x \mapsto 4 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 8 \times 1 - 0 = 12x^2 - 14x + 8$.
- Soit $f : x \mapsto -x^3 + 13x + 17$. Sa dérivée est $f' : x \mapsto -3x^2 + 13 \times 1 + 0 = -3x^2 + 13$.

2 – Variations et signes de la dérivée

Monotonie et dérivée 1

Théorème 7

- Si f est croissante sur I, alors $f' \geqslant 0$ sur I.
- Si f est décroissante sur I, alors $f' \leqslant 0$ sur I.

x	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	
f	$\nearrow$	

x	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	
f	$\searrow$	

Démonstration. Traitons le cas croissant, le cas décroissant se traite de manière similaire. Soient a et b deux réels distincts de I (là encore, nous n'avons pas les outils nécessaires à une démonstration parfaitement rigoureuse).

- **Premier cas** : Si $b > a$, alors $f(b) \geqslant f(a)$ car f est croissante. De là, $\tau_f(a;b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le quotient de deux quantités positives, donc il est positif (autrement dit, les sécantes sont orientées «vers le haut»). Quand b se rapproche de a, puisque tous les taux d'accroissements sont positifs, le nombre dérivé $f'(a)$ le sera également.
- **Second cas** : Si $b < a$, alors $f(b) \leqslant f(a)$ car f est croissante. Cette fois-ci, le taux d'accroissement sera un quotient de deux nombres négatifs, donc il sera toujours positifs. Par le même raisonnement, on trouve aussi que $f'(a) \geqslant 0$.

Dans tous les cas, $f'(a) \geqslant 0$. □

Remarque 8

En particulier, si f est constante sur I, alors $f' = 0$ (puisqu'une fonction constante est à la fois croissante et décroissante, et que seul 0 est à la fois négatif et positif).

Monotone et dérivée 2

Théorème 9

- Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

Démonstration. La démonstration rigoureuse est trop complexe sur ce cours, mais repose sur la même idée que la démonstration précédente : pour résumer, quand a et b sont proches, les taux d'accroissements sont du même signe que $f'(a)$. □

Remarque 10

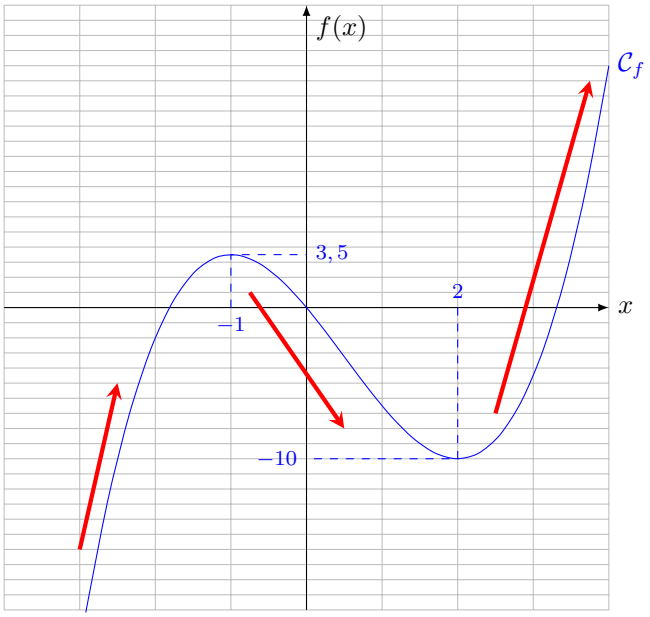
En particulier, Si $f' = 0$ sir I, alors f est constante sur I.

Exemple 11

Étudions la fonction $f : x \mapsto x^3 - 1,5x^2 - 6x$. D'après les règles de calculs sur les dérivées, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1,5 \times 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$. On vérifie que $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$ en développant. On dresse alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$3,5$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	

Ce tableau nous permet d'esquisser l'allure du graphe de f, en tenant compte des variations de f et de quelques valeurs remarquables : $f(-1) = 3,5$ (f est croissante avant ce point, décroissante après), $f(2) = -10$ (f est décroissante avant ce point, croissante après), $f(0) = 0$.



3 – Extrema d'une fonction

On a vu que la croissance ou décroissance d'une fonction était liée au signe de sa dérivée : en particulier, quand f change de sens de variation, f' change de signe. En particulier, à l'abscisse précise du changement de variation, la dérivée s'annule.

Définition 12

Soit $c \in I$.

- On dit que f admet un *maximum* en c si $f(c)$ est la plus grande valeur de f sur I, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(c)$.
- On dit que f admet un *minimum* en c si $f(c)$ est la plus petite valeur de f sur I, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(c)$.

Proposition 13

Au niveau d'un maximum/minimum, la dérivée change de signe.

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

f admet un maximum en c

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

f admet un minimum en c

Exemple 14

Reprenons la fonction f de l'Exemple 11. Rappelons que $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$.

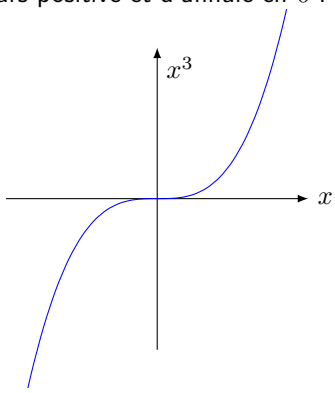
- Sur l'intervalle $]-4,0[$, f admet un maximum en -1, et on remarque effectivement que $f'(-1) = 0$.
- Sur l'intervalle $]0,4[$, f admet un minimum en 2, et on remarque effectivement que $f'(2) = 0$.

Corollaire 15

Soit $x \in I$. Si $f'(x) \neq 0$, alors f n'admet pas d'extremum en x.

Démonstration. C'est la contraposée de la proposition précédente. □

Remarque 16

Cela donne une méthode pour chercher les extrema : on cherche les points d'annulation de la dérivée, et on regarde ensuite si ce sont vraiment des extrema.
Car en effet, attention, ce n'est pas une équivalence : parfois, la dérivée s'annule, mais la fonction ne change pas de variation, et donc il n'y a pas d'extremum ! C'est ce qu'on appelle un *point d'inflexion*. L'exemple le plus célèbre est celui de la fonction cube, dont la dérivée $x \mapsto 3x^2$ est toujours positive et d'annule en 0 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$