

PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ & THÉORÈME DE RIESZ

Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. La linéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est prise à gauche dans le cas complexe.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\mathcal{H}'$ l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{H}$. Soit $C \subseteq \mathcal{H}$ un convexe fermé non vide.

Thm 1 (de projection sur un convexe fermé): $\forall x \in \mathcal{H}, \exists! P_C(x) \in C: \|x - P_C(x)\| = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$.

Prop 2: $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in C, y = P_C(x) \Leftrightarrow \forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - y | z - y \rangle) \leq 0$ (FIGURE 1)

Cor 3: Soit F un sous-espace vectoriel fermé. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a: $\forall y \in \mathcal{H}, y = P_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$. (Peut être admis)

Prop 4: Soit F un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$. On a $\mathcal{H} = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier, $\overline{F} = \mathcal{H} \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

Thm 5 (de représentation de RIESZ): Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}'$, il existe un unique $y_\varphi \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi = \langle \cdot | y_\varphi \rangle$. L'application $\varphi \mapsto y_\varphi$ est un isomorphisme isométrique.

Preuve de Thm 1: Soit $x \in \mathcal{H}$, posons $d = d(x, C)$.

► EXISTENCE: D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n)_n \in C^\mathbb{N}$ telle que $d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\|$. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, d'après l'identité du parallélogramme,

$$\|(x - y_n) + (x - y_m)\|^2 + \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2)$$

$$\text{donc } 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2)$$

$$\text{donc } \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2$$

$$\leq 2\left[\underbrace{(\|x - y_n\|^2 - d^2)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{(\|x - y_m\|^2 - d^2)}_{\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0}\right]$$

$$\text{car } d = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

Donc $\|y_n - y_m\|$ peut être rendu arbitrairement petit en prenant n et m suffisamment grands: autrement dit, $(y_n)_n$ est de Cauchy, mais $\mathcal{H}$ est complet, donc $(y_n)_n$ converge vers un $y \in \mathcal{H}$. Comme $(y_n)_n \in C^\mathbb{N}$ et C est fermé, on a $y \in C$.

► UNICITÉ: Soient $y_1 \in C$ et $y_2 \in C$ tels que $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = \inf_{y \in C} \|y - x\|$. D'après l'identité du parallélogramme,

$$\|(x - y_1) + (x - y_2)\|^2 + \|(x - y_1) - (x - y_2)\|^2 = 2(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2)$$

$$\text{donc } \left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_1 - y_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d^2 + d^2)$$

$$\text{donc } d^2 \leq \left\|x - \underbrace{\frac{y_1 + y_2}{2}}_{\in C, \text{ convexe}}\right\|^2 \leq d^2 - \left\|\frac{y_1 - y_2}{2}\right\|^2$$

$$\text{donc } \left\|\frac{y_1 - y_2}{2}\right\|^2 \leq 0, \text{ donc } y_1 = y_2 \quad \blacksquare$$

Preuve de Prop 2: Soient $x \in \mathcal{H}$ et $y \in C$.

► Supposons que $y = P_C(x)$. Soient $z \in C$ et $t \in]0, 1]$. Par convexité,

$$(1-t)P_C(x) + tz \in C, \text{ donc } \|x - P_C(x)\|^2 \leq \|x - (1-t)P_C(x) - tz\|^2 = \|x - P_C(x) + t(P_C(x) - z)\|^2$$

$$= \|x - P_C(x)\|^2 + t^2\|z - P_C(x)\|^2 + 2t\operatorname{Re}(\langle x - P_C(x) | P_C(x) - z \rangle), \text{ donc } 2t\operatorname{Re}(\langle x - P_C(x) | z - P_C(x) \rangle) \leq t^2\|z - P_C(x)\|^2. \text{ En divisant par } t \text{ et en faisant tendre } t \rightarrow 0, \text{ on obtient } \operatorname{Re}(\langle x - P_C(x) | z - P_C(x) \rangle) \leq 0.$$

► Supposons que $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - y | z - y \rangle) \leq 0$. Pour tout $z \in C$,

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) - (z - y)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|z - y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x - y | z - y \rangle) \geq \|x - y\|^2 + \underbrace{\|z - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - y\|^2 \text{ donc } y = P_C(x). \quad \blacksquare$$

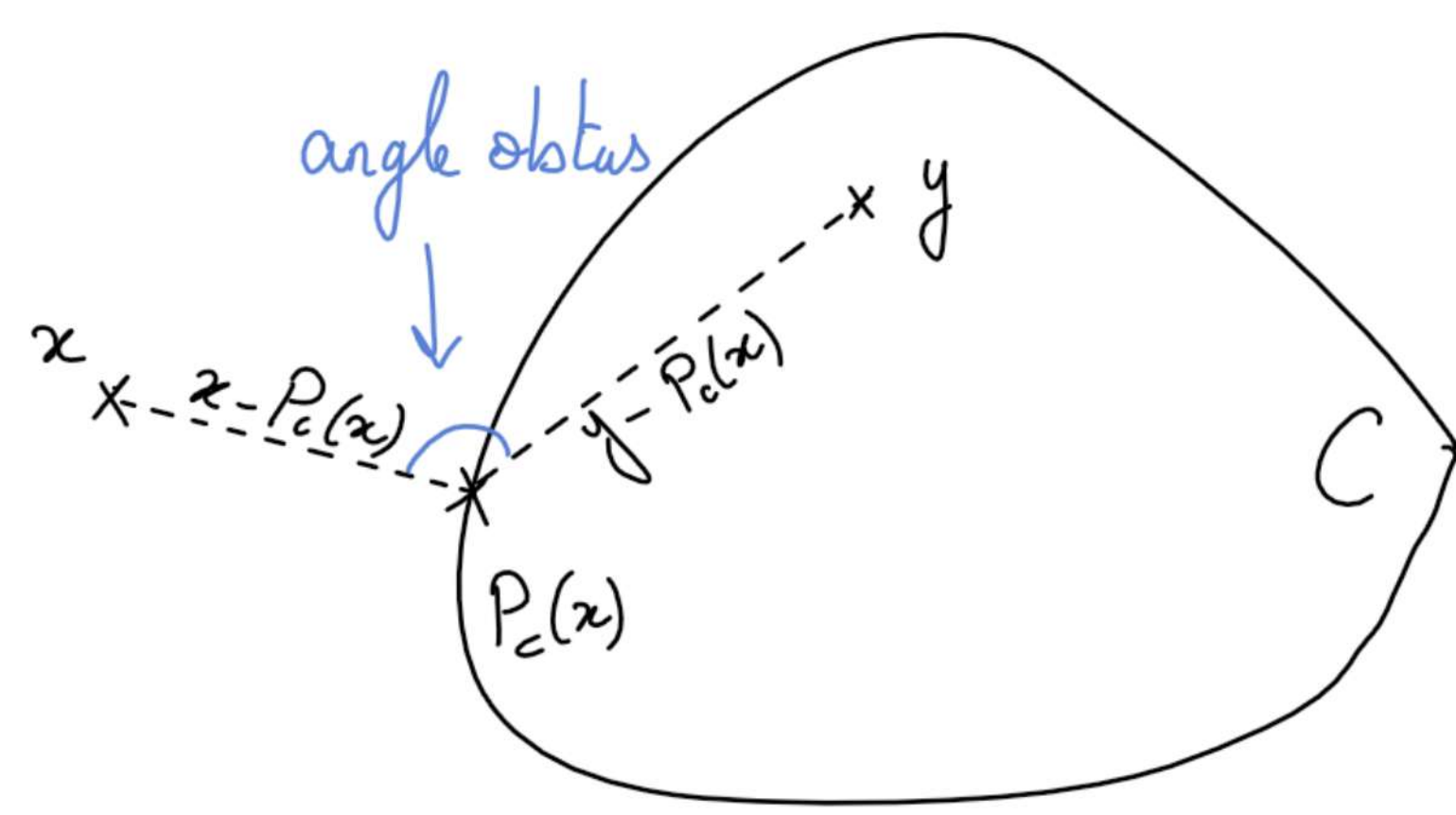


FIGURE 1

Preuve de Cor 3: Soit $(x, y) \in \mathcal{H}^2$. Comme F est un convexe fermé non vide, $P_F(x)$ existe bien.

(Peut être admise)

- Supposons que $y = P_F(x)$. Déjà, $P_F(x) \in F$. Pour tout $z \in F$, d'après Prop 2, $\operatorname{Re}(\langle x - P_F(x) | z - P_F(x) \rangle) \leq 0$. En particulier, comme F est un espace vectoriel, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall z \in F$, $\lambda z + P_F(x) \in F$ et $\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle x - P_F(x) | z \rangle) \leq 0$. En remarquant que $\forall S \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(iS) = -\operatorname{Im}(S)$, en prenant $\lambda = \pm 1$ et $\lambda = \pm i$, on montre que $\forall z \in F$, $\langle x - P_F(x) | z \rangle = 0$, i.e. $x - P_F(x) \in F^\perp$.
- Supposons que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Pour tout $z \in F$, $\|x - z\|^2 = \underbrace{\|x - y\|}_{\in F^\perp}^2 + \underbrace{\|z - y\|}_{\in F}^2 = \|x - y\|^2 + \|z - y\|^2 \geq \|x - y\|^2$ donc $y = P_F(x)$. ■

Preuve de Prop 4: Pour tout $x \in \mathcal{H}$, $P_F(x) \in \bar{F}$ et $x - P_F(x) \in \bar{F}^\perp = F^\perp$ d'après Cor 3, donc $\mathcal{H} = \bar{F} + F^\perp$. De plus, $\bar{F} \cap F^\perp = \{0\}$, donc $\mathcal{H} = \bar{F} \oplus F^\perp$. ■

Preuve de Thm 5: Soit $\varphi \in \mathcal{H}'$.

- EXISTENCE: Si $\varphi = 0$, alors $y_\varphi = 0$ convient. Supposons que $\varphi \neq 0$. Alors $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace fermé (car φ est continue) de $\mathcal{H}$ distinct de $\mathcal{H}$, donc d'après Prop 4, on peut choisir $u \in \operatorname{Ker}(\varphi)^\perp \setminus \{0\}$. En particulier, $u \notin \operatorname{Ker}(\varphi)$, donc $\varphi(u) \neq 0$, et on peut poser $y_\varphi = \frac{u}{\varphi(u)}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\langle x | y_\varphi \rangle y_\varphi \in \operatorname{Ker}(\varphi)^\perp$, mais $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi)^\perp$ (Cor 3) et $\operatorname{Ker}(\varphi)^\perp$ est de dimension 1 (car $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan), donc par unicité d'écriture, $x - \langle x | y_\varphi \rangle y_\varphi \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. De là,

$$\varphi(x) = \varphi(\langle x | y_\varphi \rangle y_\varphi + \underbrace{x - \langle x | y_\varphi \rangle y_\varphi}_{\in \operatorname{Ker}(\varphi)}) = \langle x | y_\varphi \rangle \varphi(y_\varphi) + \varphi(x - \langle x | y_\varphi \rangle y_\varphi) = \langle x | y_\varphi \rangle \cdot 1 + 0 = \langle x | y_\varphi \rangle$$

Donc $\varphi = \langle \cdot | y_\varphi \rangle$.

- UNICITÉ: Si $\tilde{y}_\varphi \in \mathcal{H}$ vérifie $\varphi = \langle \cdot | \tilde{y}_\varphi \rangle = \langle \cdot | y_\varphi \rangle$, alors $\forall x \in \mathcal{H}$, $\langle x | y_\varphi - \tilde{y}_\varphi \rangle = \langle x | y_\varphi \rangle - \langle x | \tilde{y}_\varphi \rangle = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, donc $y_\varphi - \tilde{y}_\varphi \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$, donc $y_\varphi = \tilde{y}_\varphi$.

- ISOMÉTRIE: Soient $\varphi \in \mathcal{H}'$ et $y_\varphi \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi = \langle \cdot | y_\varphi \rangle$. Si $y_\varphi = 0$, alors $\|y_\varphi\| = \|\varphi\| = 0$. Supposons que $y_\varphi \neq 0$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|\varphi(x)| = |\langle x | y_\varphi \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y_\varphi\|$ donc $\|\varphi\| \leq \|y_\varphi\|$. De plus, $\varphi(y_\varphi) = \langle y_\varphi | y_\varphi \rangle = \|y_\varphi\|^2$, donc $\|\varphi\| = \|y_\varphi\|$. Ainsi $\varphi \mapsto y_\varphi$ est une isométrie. ■