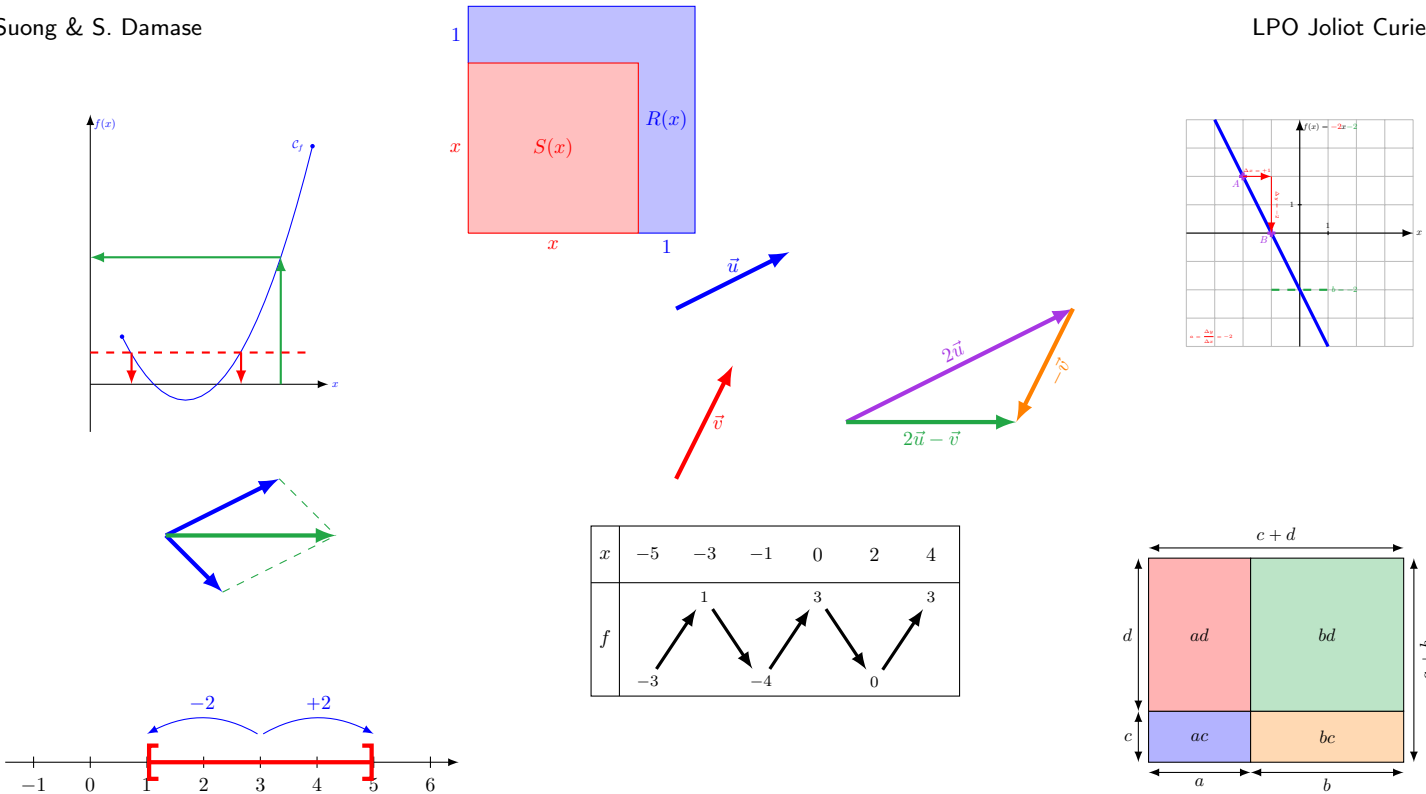
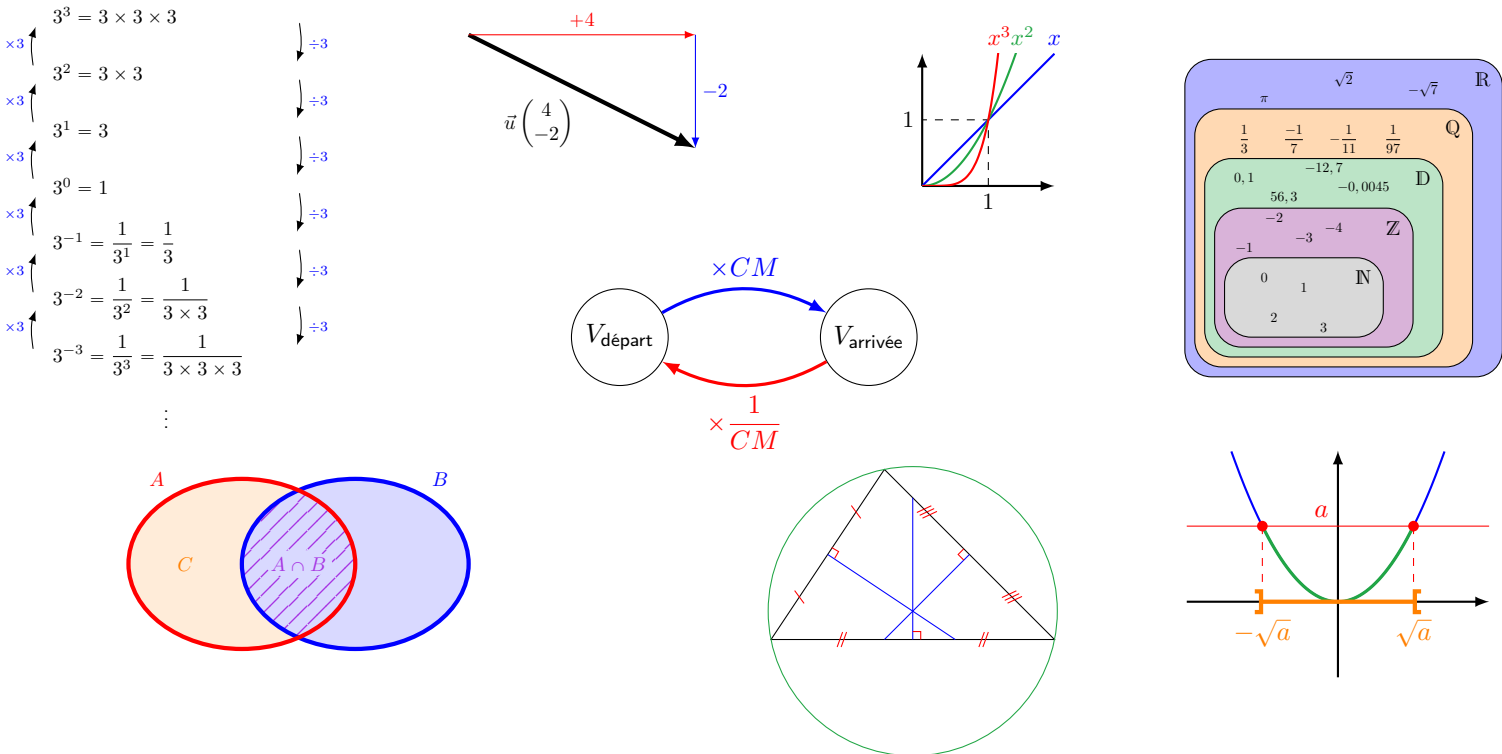




Mathématiques

Seconde GT



Cours de seconde GT

1	Ensembles et calcul	15
1	Nombres entiers naturels	17
2	Nombres entiers relatifs	20
3	Nombres décimaux	22
4	Nombres rationnels	23
	Exercices	25
	Exercices en autonomie	28
2	Généralités sur les fonctions	29
1	Le vocabulaire fonctionnel	30
2	Représentation graphique d'une fonction	31
	Exercices	34
	Exercices en autonomie	38
3	Calcul littéral	41
1	Notations standard	42
2	Développer	42
3	Identités remarquables	43
4	Factoriser	44
	Exercices	45
4	Racine carrée	49
1	Racine carrée d'un nombre positif	50
2	Relations algébriques	50
	Exercices	52
5	Nombres réels et intervalles	55
1	Nombres réels	56
2	Intervalles et droite réelle	57
3	Distance entre deux nombres, valeur absolue d'un nombre	59
4	Encadrement décimal d'un nombre réel	60
	Exercices	61
6	Vecteurs du plan	65
1	L'objet « vecteur » comme translation	67
2	Manipulations de vecteurs	68
	Exercices	74
7	(In)équations de degré 1	79
1	Notion d'équation	80
2	Équations du premier degré	81
3	Inéquations du premier degré	82
	Exercices	83
8	Fonctions affines	87
1	Point de vue algébrique	88
2	Point de vue géométrique	89
	Exercices	93

9	Inverse et puissances	95
1	Puissances	96
2	Inverse	98
	Exercices	99
10	Fonctions de référence et variations	101
1	Fonctions de référence	103
2	Positions relatives	106
3	Tableau de variations d'une fonction	106
4	Extrema d'une fonction	108
	Exercices	109
11	Géométrie repérée	115
1	Coordonnées d'un point dans un repère	117
2	Coordonnées d'un vecteur dans un repère	119
	Exercices	123
12	Systèmes d'équations	125
	Exercices	128
13	Probabilités	131
1	Modéliser le hasard : vocabulaire et notations	132
2	Quantifier le hasard : (loi de) probabilité	133
3	Expériences à plusieurs épreuves : arbres de probabilité	138
	Exercices	140
14	(In)équations graphiques, produit, quotient	143
1	Résolution graphique d'(in)équations	144
2	Tableau de signes d'une fonction	147
3	Équations produit et quotient	148
4	Inéquations produit	149
5	(In)équations simples de degré 2	150
	Exercices	152
15	Droites du plan	155
1	Vecteurs directeurs d'une droite	157
2	Équation réduite d'une droite et fonctions affines	158
3	Équations cartésiennes de droites	159
4	Positions relatives	162
	Exercices	163
16	Statistiques	169
1	Médiane et quartiles d'une série statistique	170
2	Moyenne et écart-type	171
3	Échantillonnage	173
	Exercices	175
A	Proportions	177
	Exercices	181
B	Évolutions	185
1	Évolutions simples	186
2	Évolutions successives	189
	Exercices	190
C	Logique	193

D Géométrie non repérée **197**

1 Projection orthogonale 198

2 Autour des triangles 198

3 Quadrilatères particuliers 202

Exercices 206

Programme de seconde générale et technologique

Nombres et calcul

Manipuler les nombres réels

Au cycle 4, les élèves ont étudié les inégalités pour comparer des valeurs numériques. La notion d'intervalle, présentée comme ensemble de nombres vérifiant des inégalités, est nouvelle.

La notation de la valeur absolue est introduite pour exprimer la distance entre deux nombres réels et caractériser les intervalles de centre donné. Toute autre utilisation est hors programme.

Contenus

- ▶ Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- ▶ Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- ▶ Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.
- ▶ Représentation de l'intervalle $[a - r, a + r]$ puis caractérisation par la condition $|x - a| \leq r$.
- ▶ Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- ▶ Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π .

Capacités attendues

- ▶ Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- ▶ Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- ▶ Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- ▶ Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Démonstrations

- ▶ Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- ▶ Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple d'algorithme

- ▶ Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n} .

Approfondissements possibles

- ▶ Développement décimal illimité d'un nombre réel.
- ▶ Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

Utiliser le calcul littéral

Contenus

- ▶ Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation $\sqrt{a^2} = |a|$.
- ▶ Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ à savoir utiliser dans les deux sens.

- ▶ Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- ▶ Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- ▶ Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

Capacités attendues

- ▶ Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- ▶ Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
- ▶ Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- ▶ Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.
- ▶ Modéliser un problème par une inéquation.
- ▶ Résoudre une inéquation du premier degré.

Démonstrations

- ▶ Quels que soient les réels positifs a et b , on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- ▶ Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- ▶ Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exemple d'algorithme

- ▶ Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.

Approfondissements possibles

- ▶ Développement de $(a+b+c)^2$
- ▶ Développement de $(a+b)^3$
- ▶ Inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs.

Géométrie

Manipuler les vecteurs du plan

Au cycle 4, la notion de translation fait l'objet d'une première approche, fondée sur l'observation de son effet sur les configurations planes et de manipulations diverses, notamment sur un quadrillage ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On s'y appuie en seconde pour introduire la notion de vecteur. Le professeur peut définir les opérations vectorielles à partir des coordonnées, ou bien commencer par leur construction géométrique. Dans tous les cas, la relation $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est mise en évidence. La relation de Chasles est introduite pour illustrer l'addition des vecteurs, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique.

Contenus

- ▶ Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M' . Direction, sens et norme.
- ▶ Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul.
- ▶ Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
- ▶ Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- ▶ Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B .
- ▶ Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- ▶ Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

Capacités attendues

- ▶ Représenter géométriquement des vecteurs.
- ▶ Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.

- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

Démonstration

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Approfondissement possible

- Définition vectorielle des homothéties.

Résoudre des problèmes de géométrie

Contenus

- Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Capacités attendues

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.
- Traiter de problèmes d'optimisation.

Démonstrations

- Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M .
- Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.

Approfondissements possibles

- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab \sin(C)$.
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

Représenter et caractériser les droites du plan

Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droite pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droite.

Dans cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Contenus

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues

- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Établir que trois points sont alignés ou non.

- ▶ Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- ▶ Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Démonstration

- ▶ En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Exemples d'algorithme

- ▶ Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- ▶ Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

Approfondissements possibles

- ▶ Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- ▶ Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

Fonctions

Se constituer un répertoire de fonctions de référence

Les élèves doivent se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.

Contenus

- ▶ Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.

Capacités attendues

- ▶ Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- ▶ Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.

Démonstration

- ▶ Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.

Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions

Contenus

- ▶ Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- ▶ Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$.
- ▶ Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.

Capacités attendues

- ▶ Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- ▶ Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- ▶ Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logique.
- ▶ Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- ▶ Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

Approfondissement possible

- ▶ Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

Étudier les variations et les extremums d'une fonction

Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Démonstration

- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Exemples d'algorithme

- Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).
- Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

Approfondissement possible

- Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

Statistiques et probabilités

Utiliser l'information chiffrée et statistique descriptive

Contenus

- Proportion, pourcentage d'une sous-population dans une population.
- Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage.
- Évolution : variation absolue, variation relative.
- Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs (produit, inverse).
- Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- Linéarité de la moyenne.
- Indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type.

Capacités attendues

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.
- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.
- Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.
- Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne m , l'écart type s , et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s, m + 2s]$.

Modéliser le hasard, calculer des probabilités

L'ensemble des issues est fini.

Contenus

- ▶ Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- ▶ Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- ▶ Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
- ▶ Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Capacités attendues

- ▶ Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- ▶ Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- ▶ Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

Échantillonnage

En liaison avec la partie « Algorithmique et programmation », on définit la notion d'échantillon. L'objectif est de faire percevoir, sous une forme expérimentale, la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le principe de l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon.

Contenus

- ▶ Échantillon aléatoire de taille n pour une expérience à deux issues.
- ▶ Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. »
- ▶ Principe de l'estimation d'une probabilité, ou d'une proportion dans une population, par une fréquence observée sur un échantillon.

Capacités attendues

- ▶ Lire et comprendre une fonction Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille n pour une expérience aléatoire à deux issues.
- ▶ Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur.
- ▶ Simuler N échantillons de taille n d'une expérience aléatoire à deux issues. Si p est la probabilité d'une issue et f sa fréquence observée dans un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Algorithmique et programmation

Utiliser les variables et les instructions élémentaires

Contenus

- ▶ Variables informatiques de type entier, booléen, flottant, chaîne de caractères.
- ▶ Affectation (notée $\leftarrow$ en langage naturel).
- ▶ Séquence d'instructions.
- ▶ Instruction conditionnelle.
- ▶ Boucle bornée (for), boucle non bornée (while).

Capacités attendues

- ▶ Choisir ou déterminer le type d'une variable (entier, flottant ou chaîne de caractères).

- ▶ Concevoir et écrire une instruction d'affectation, une séquence d'instructions, une instruction conditionnelle.
- ▶ Écrire une formule permettant un calcul combinant des variables.
- ▶ Programmer, dans des cas simples, une boucle bornée, une boucle non bornée.
- ▶ Dans des cas plus complexes : lire, comprendre, modifier ou compléter un algorithme ou un programme.

Notion de fonction

Contenus

- ▶ Fonctions à un ou plusieurs arguments.
- ▶ Fonction renvoyant un nombre aléatoire. Série statistique obtenue par la répétition de l'appel d'une telle fonction.

Capacités attendues

- ▶ Écrire des fonctions simples ; lire, comprendre, modifier, compléter des fonctions plus complexes. Appeler une fonction.
- ▶ Lire et comprendre une fonction renvoyant une moyenne, un écart type. Aucune connaissance sur les listes n'est exigée.
- ▶ Écrire des fonctions renvoyant le résultat numérique d'une expérience aléatoire, d'une répétition d'expériences aléatoires indépendantes.

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E , on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$, ou la notation $E \setminus A$.

Les élèves apprennent en situation à :

- ▶ reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- ▶ lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- ▶ formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- ▶ mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- ▶ formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- ▶ formuler la réciproque d'une implication ;
- ▶ lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

1 Ensembles et calcul

Table des matières

1	Nombres entiers naturels	17
A	Multiples et diviseurs	17
B	Critères de divisibilité	18
C	Nombres premiers	19
2	Nombres entiers relatifs	20
A	Méthodes de calcul	20
B	D'où viennent ces méthodes?	21
3	Nombres décimaux	22
4	Nombres rationnels	23
	Exercices	25
	Exercices en autonomie	28

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- ▶ Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.
- ▶ Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- ▶ Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
- ▶ Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π .
- ▶ Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.

Capacités attendues

- ▶ Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des écritures fractionnaires.

Démonstrations

- ▶ Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- ▶ Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple d'algorithme

- ▶ Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n} .

Approfondissements possibles

- ▶ Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

Détail

Contenus

- ▶ Nombres entiers naturels.

- ▶ Division euclidienne
- ▶ Multiples et diviseurs, critères de divisibilité
- ▶ Nombres premiers, décomposition
- ▶ Nombres entiers relatifs
 - ▶ Opposé
 - ▶ Addition de relatifs
 - ▶ Soustraction de relatifs (Addition de l'opposé)
 - ▶ Multiplication de relatifs
- ▶ Nombres décimaux
 - ▶ Écriture en fraction décimale,
 - ▶ Définition pourcentage et passage en pourcentage.
- ▶ Nombres rationnels
 - ▶ Fractions égales (même dénominateur ou simplification)
 - ▶ Addition de fractions
 - ▶ Multiplication de fractions
 - ▶ Changement d'écriture (Décimale, fraction)
 - ▶ Définition de racine de 2

Démonstrations

- ▶ Somme de deux multiples, somme d'impairs
- ▶ Infinité de nombres premiers
- ▶ Illustration de preuve sur exemple en utilisant l'opposé.
- ▶ Illustration de preuve sur exemple
- ▶ $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal
- ▶ $\sqrt{2}$ n'est pas rationnelle.

1 – Nombres entiers naturels

A – Multiples et diviseurs

Définition 1

Nombres entiers naturels

Les **nombres entiers naturels** sont les nombres 0, 1, 2, ... On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels. Autrement dit :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Exemple 2

▶ $27 \in \mathbb{N}$

▶ $3,5 \notin \mathbb{N}$

Définition 3

Division euclidienne

Soient a et b deux entiers naturels.

La **division euclidienne** de a par b c'est trouver q et r entiers naturels pour que :

$$a = b \times q + r$$

avec $0 \leq r < b$.

▶ a est appelé **dividende**,

▶ q est appelé **quotient**,

▶ b est appelé **diviseur**,

▶ r est appelé **reste**.

Exercice conseillé : 1

Remarque 4

La division euclidienne a toujours un reste. Ce reste peut être 0, on dit alors que a est un **multiple** de b ou que b **divise** a .

Définition 5

Diviseur, multiples

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = b \times k$, alors on dit que :

▶ a est un **multiple** de b ,

▶ b et k sont des **diviseurs** de a .

Exercices conseillés : 2, 3, 4

Exemple 6

▶ 24 est un multiple de 6 car $24 = 6 \times 4$, et 6 et 4 sont des diviseurs de 24.

▶ 24 n'est pas un multiple de 5 car $24 = 5 \times 4,8$ mais $4,8 \notin \mathbb{N}$.

▶ 24 n'est pas un multiple de 5 car $24 = 5 \times 4 + 4$: le reste de la division euclidienne n'est pas 0.

▶ 0 est un multiple de 7 car $0 = 7 \times 0$ et $0 \in \mathbb{N}$.

Remarque 7

On appelle nombres **pairs** tous les entiers naturels multiples de deux, ce qui veut dire que si $a \in \mathbb{N}$ est pair je peux l'écrire : $a = 2 \times k$, où $k \in \mathbb{N}$.

On appelle nombres **impairs** tous les entiers naturels qui ne sont pas pairs. $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Méthode 8 (Trouver tous les diviseurs d'un nombre)

Prenons l'exemple de 12.

- ▶ $12 = 1 \times 12$ donc 1 et 12 sont des diviseurs de 12,
- ▶ $12 = 2 \times 6$ donc 2 et 6 sont des diviseurs de 12,
- ▶ $12 = 3 \times 4$ donc 3 et 4 sont des diviseurs de 12.

La liste des diviseurs de 12 est donc : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Proposition 9

Soit a un entier naturel.

La somme de deux multiples de a est un multiple de a .

Démonstration. Soient x et y deux entiers multiples de a . On peut donc les écrire $x = ka$ et $y = k'a$ avec k et k' deux nombres entiers. Alors, en factorisant :

$$x + y = ka + k'a = (k + k')a$$

Or $k + k'$ est un nombre entier, donc on a écrit $x + y$ comme un entier fois a , donc c'est un multiple de a . □

B – Critères de divisibilité**Propriété 10**

Un nombre a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6, ou 8, si, et seulement si, ce nombre est divisible par 2.

Démonstration. (principe) Chaque dizaine du nombre est divisible par 2 donc on ne regarde que le chiffre des unités. □

Propriété 11

Un nombre a pour chiffre des unités 0 ou 5 si, et seulement si ce nombre est divisible par 5.

Démonstration. (principe) Chaque dizaine du nombre est divisible par 5 donc on ne regarde que le chiffre des unités. □

Propriété 12

Un nombre a pour chiffre des unités 0, si, et seulement si, ce nombre est divisible par 10.

Démonstration. Cela vient de l'écriture décimale des nombres. □

Propriété 13

Un nombre a a ses deux derniers chiffres qui forment un multiple de 4, si, et seulement si, ce nombre est divisible par 4.

Démonstration. Chaque centaine est divisible par 4 donc on a juste à regarder le nombre formé par les deux derniers chiffres pour tester la divisibilité. □

Propriété 14

La somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, *si, et seulement si*, ce nombre est divisible par 3.

Démonstration. (principe) 1, 10, 100, 1 000 etc... ont le même reste quand on les divise par 3. De même pour 2, 20, 200, 2 000, etc.

Par exemple, pour diviser 2 157 on divise 2 000, 100, 50 et 7 par 3 les restes seraient les mêmes que si on divisait 2, 1, 5 et 7 par 3. (Cela ferait des restes 2, 1, 2, 1 donc 6 : on redivise par 3 ça donne 0 !)

On peut le voir autrement en posant : $2 + 1 + 5 + 7 = 15 = 3 \times 5$ donc 2 157 est divisible par 3. $\square$

Propriété 15

La somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9, *si, et seulement si*, ce nombre est divisible par 9.

Démonstration. (principe) La preuve est analogue à celle des nombres divisibles par 3. $\square$

Exercices conseillés : 5

C – Nombres premiers

Définition 16

On dit qu'un nombre est **premier** lorsqu'il satisfait les deux conditions suivantes :

- ▶ il est supérieur ou égal à 2.
- ▶ il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Exemple 17

- ▶ 4 est divisible par 2 donc il n'est pas premier.
- ▶ 7 n'est divisible par aucun nombre sauf 1 et 7, il est donc premier.

Remarque 18

Pour trouver les nombres premiers, on peut utiliser le crible d'Eratosthène.

Exercice conseillé : 6

Théorème 19**Infinité des nombres premiers**

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Par l'absurde : s'il existait un nombre fini de nombres premiers, alors on pourrait tous les multiplier entre eux (le résultat serait très grand !) et ajouter 1.

Dans ce cas on obtiendrait un autre nombre qui n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, donc par aucun nombre sauf 1 et lui-même. On aurait donc créé un nouveau nombre premier.

Contradiction. $\square$

Théorème 20**Théorème fondamental de l'arithmétique**

Tout nombre entier supérieur à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. De plus, cette décomposition est unique (à l'ordre près).

Démonstration. admise □

Exemple 21

$$\triangleright 42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$\triangleright 55 = 5 \times 11$$

$$\triangleright 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Exercices conseillés : 7, 20

2 – Nombres entiers relatifs

A – Méthodes de calcul

Définition 22**Opposé**

L'**opposé** d'un nombre n est le nombre qui additionné à n donne 0.

Exemple 23

- ▶ L'opposé de 7 est (-7) car $7 + (-7) = 0$.
- ▶ L'opposé de (-4) est 4 car $(-4) + 4 = 0$.

Définition 24**Nombres entiers relatifs**

Les **nombres entiers relatifs** sont les nombres entiers naturels et leurs opposés. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs. Autrement dit :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Méthode 25 (Les rouages de l'addition de nombres relatifs)

- ▶ Additionner deux nombres négatifs, sur des exemples :

$$(-4) + (-6) = (-10) \quad (-1) + (-12) = (-13) \quad (-100) + (-20) + (-7) = (-127)$$

- ▶ Additionner un nombre positif et un négatif :

- ▶ Cas où le terme positif est plus important :

$$5 + (-3) = 2 \quad 12 + (-2) = 10 \quad (-27) + 127 = 100 \quad (-1) + 6 = 5$$

- ▶ Cas où le terme négatif est plus important :

$$(-7) + 2 = (-5) \quad (-13) + 3 = (-10) \quad 45 + (-345) = -300 \quad 12 + (-22) = (-10)$$

- ▶ Exemple avec plus de deux termes :

$$3 + (-8) + (-42) + 17 = 3 + 17 + (-8) + (-42) = 20 + (-50) = (-30)$$

Méthode 26

Soustraire un nombre à un autre c'est ajouter son opposé.

$$(-2) - (-3) = (-2) + 3 = 1$$

Exercices conseillés : 8

Méthode 27 (Les rouages de la multiplication de nombres relatifs)

- Facteurs de signes opposés :

$$(-4) \times 5 = (-20) \quad (-3) \times 7 = (-21) \quad 6 \times (-6) = (-36) \quad (-9) \times 5 = (-45)$$

- Facteurs négatifs :

$$(-3) \times (-6) = 18 \quad (-2) \times (-6) = 12 \quad (-5) \times (-5) = 25 \quad (-6) \times (-7) = 42$$

Exercice conseillé : 9, 10, 22

B – D'où viennent ces méthodes ?**Remarque 28 (Les rouages de l'addition de nombres relatifs)**

- Additionner deux nombres négatifs :

$$(-4) + (-6) + 6 + 4 = 0 \quad \text{donc} \quad (-4) + (-6) = (-10)$$

- Additionner un nombre positif et un négatif :

$$(-7) + 2 = (-5) + (-2) + 2 = (-5)$$

$$(-3) + 5 = (-3) + 3 + 2 = 0 + 2 = 2$$

Remarque 29

Les soustractions $0 - 3$, $1 - 4$, ou $2 - 5$ ont toutes pour résultat (-3) .

Remarque 30 (Les rouages de la soustraction de nombres relatifs)

Nous avons dit que soustraire un nombre à un autre c'est ajouter son opposé.

$$4 - 3 = 4 + 0 - 3 = 1$$

$$4 - (-3) = 4 - (0 - 3) = 4 - 0 + 3 = 7$$

Ici, on a utilisé la distributivité !

Remarque 31 (Les rouages de la multiplication de nombres relatifs)

$$(-4) \times 5 = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = (-20)$$

$$(-3) \times (-6) = (-3) \times (0 - 6) = (-3) \times 0 - (-3) \times 6 = 0 - (-18) = 18$$

Remarque 32

On peut décrire les nombres relatifs par leur signe et leur distance à zéro.

$$(-7) = (-1) \times 7 \qquad 9 = 1 \times 9$$

(Ici on utilise la multiplication par 1 ou (-1) pour donner le signe.)

Ce genre de décomposition est particulièrement utile pour ne pas faire d'erreur de signe.

3 – Nombres décimaux**Définition 33**

Les **nombres décimaux** sont les nombres dont l'écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Exemple 34

- ▶ $3,575 \in \mathbb{D}$ car son écriture décimale comporte quatre chiffres.
- ▶ $27 \in \mathbb{D}$ car son écriture décimale comporte deux chiffres.

Propriété 35

On peut écrire tous les nombres décimaux comme des fractions décimales, c'est-à-dire une fraction de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec a et n des nombres entiers.

Démonstration. (sur un exemple générique) $3,575$ peut se lire 3 575 millièmes donc $3,575 = \frac{3\,575}{1\,000}$. □

Exercices conseillés : 11, 12, 23

Remarque 36

- ▶ $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1\,000$ etc.
- ▶ $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ etc.

Propriété 37

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\frac{1}{3}$ est décimal, il peut donc s'écrire comme une fraction décimale, c'est-à-dire : $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ où a et n sont des nombres entiers.

D'après l'égalité des produits en croix, on a donc $1 \times 10^n = 3 \times a$, autrement dit $10^n = 3a$. Or a est entier donc 10^n est un multiple de 3.

Or 10^n s'écrit $100 \dots 0$, donc la somme de ses chiffres vaut 1, qui n'est pas divisible par 3. D'après le critère de divisibilité par 3, 10^n n'est pas un multiple de 3.

On a donc montré que 10^n est à la fois un multiple de 3 et pas un multiple de 3 : c'est contradictoire.

Ainsi, $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. □

Méthode 38 (Encadrer et arrondir)

Prenons par exemple 2,71828, que l'on souhaite arrondir à 0,01.

- ▶ Comme le chiffre des centièmes est 1, on écrit $2,71 \leq 2,71828 \leq 2,72$.
- ▶ Comme le chiffre suivant est 8, qui est entre 5 et 9, on arrondit par excès, en écrivant $2,71828 \approx 2,72$.

Exercices conseillés : 13, 14, 15, 18

4 – Nombres rationnels

Définition 39

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ non nul.
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Exemple 40

- ▶ $\frac{3}{7}$ est rationnel.
- ▶ -12 est rationnel. On peut l'écrire comme $\frac{-12}{1}$.
- ▶ 2,5 est rationnel. On peut l'écrire comme $\frac{25}{10}$.
- ▶ 1 est rationnel. On peut l'écrire comme $\frac{1}{1}$.

Propriété 41

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction égale.

Exemple 42

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{\times 2} \\ \frac{3}{7} = \frac{6}{14} \\ \xleftarrow{\times 2} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\times 5} \\ \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \\ \xleftarrow{\times 5} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\div 2} \\ \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \\ \xleftarrow{\div 2} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\div 10} \\ \frac{320}{450} = \frac{32}{45} \\ \xleftarrow{\div 10} \end{array} \end{array}$$

Exercice conseillé : 19, 24

Méthode 43 (Addition/Soustraction de deux rationnels)

- 1▶ On ramène les deux fractions au même dénominateur.
- 2▶ On additionne/soustrait les numérateurs.

Exemple 44

- ▶ Pour calculer $\frac{6}{2} + \frac{3}{5}$, on peut écrire

$$\frac{6}{2} + \frac{3}{5} = \frac{6 \times 5}{2 \times 5} + \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{30}{10} + \frac{6}{10} = \frac{36}{10}$$

► Pour calculer $\frac{1}{6} - \frac{3}{8}$, on peut écrire

$$\frac{1}{6} - \frac{3}{8} = \frac{1 \times 8}{6 \times 8} - \frac{3 \times 6}{8 \times 6} = \frac{8}{48} - \frac{18}{48} = \frac{-10}{48}$$

Exercice conseillé : 16

Méthode 45 (Multiplication de deux rationnels)

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple 46

Par exemple, $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$.

Exercice conseillé : 17

Propriété 47

La racine carrée de 2 n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. Procédons par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ non nul.

Alors $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, donc $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc $2b^2 = a^2$.

Or $2b^2$ admet un nombre impair de facteurs premiers mais a^2 en admet un nombre pair. Ce qui est absurde car ces nombres sont égaux. $\square$

Une autre démonstration sera donnée dans le chapitre 5.

Exercices

Appliquer

Entiers naturels

Exercice 1

- 1► Effectuer la division euclidienne de 677 par 7, puis écrire l'égalité qui représente cette division.
- 2► Effectuer la division euclidienne de 720 par 9, puis écrire l'égalité qui représente cette division.

Exercice 2

Écrire en langage mathématique :

- 1► a est un multiple de 7.
- 2► d n'est pas un entier naturel.
- 3► f est un diviseur de 24.
- 4► h est un nombre pair.
- 5► l est un nombre impair.
- 6► n est un multiple de m .

Exercice 3

Donner les diviseurs de :

- a► 18 b► 17 c► 64 d► 26

Exercice 4

Vrai ou Faux ? Justifier.

- 1► Un multiple de 9 est toujours un multiple de 3.
- 2► Un multiple de 3 est toujours un multiple de 9.

Exercice 5

Est divisible par	2	3	4	5	9	10
2 028						
747						
5 600						
19						

Exercice 6 (Crible d'Eratosthène miniature)

Barrer les nombres qui ne sont pas premiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Exercice 7

Décomposer en facteurs premiers :

- a► 22 b► 24 c► 26 d► 28

Entiers relatifs

Exercice 8

- | | |
|------------------|------------------|
| a► $3 + (-4)$ | f► $5 - (-4)$ |
| b► $5 + (-7)$ | g► $7 - (-12)$ |
| c► $(-9) + (-2)$ | h► $(-9) - (-4)$ |
| d► $9 + (-4)$ | i► $17 - 8 - 8$ |
| e► $17 + (-28)$ | |

Exercice 9

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| a► $5 \times (-4)$ | c► $(-9) \times (-5)$ |
| b► $7 \times (-12)$ | |

Exercice 10

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| a► $2 - 2 \times 5$ | c► $7 \times 3 - 3 \times 2$ |
| b► $12 - 8 + 7 - (-5) + 3$ | |

Nombres décimaux

Exercice 11

Écrire sous forme décimale :

- 1► $\frac{6}{10} + \frac{1}{100} + \frac{6}{10\,000}$
- 2► 2 dizaines et 3 dixièmes
- 3► 2 douzaines

Exercice 13

Donner trois exemples de nombres qui ne sont pas décimaux.

Exercice 14

Encadrer $\frac{1}{7}$ à 0,001 près.

Exercice 12

Écrire les nombres suivants comme une fraction décimale.

- | | |
|---------|--------------|
| a► 31 | d► 2,06 |
| b► 25,2 | e► 1 |
| c► 0,05 | f► 1 000 020 |

Exercice 15

Calculer :

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a► $2,5 \times 40$ | d► $2,1 \times 3,06$ |
| b► $0,01 \times 132$ | e► $28 - 3,6 \times 2$ |
| c► $(-1,7) + 12,78$ | f► $80 \times 0,2 - 5,4$ |

Nombres rationnels

Exercice 16

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|
| a► $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ | b► $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ | c► $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ | d► $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|

Exercice 17

- | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| a► $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ | b► $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ | c► $\frac{1}{2} \times \frac{-3}{4}$ | d► $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--|

Exercice 18

Parmi les fractions suivantes, lesquels sont décimaux ?

- | | | | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| a► $\frac{2}{5}$ | b► $\frac{3}{4}$ | c► $\frac{2}{9}$ | d► $\frac{21}{25}$ | e► $\frac{9}{15}$ | f► $\frac{13}{8}$ | g► $\frac{13}{33}$ | h► $\frac{11}{66}$ |
|------------------|------------------|------------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|

Exercice 19

Écriture décimale	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire	Entier + Fraction < 1	Pourcentage
0,3				
31				
5,2				
	$\frac{5}{8}$			
	$\frac{22}{25}$			
			$4 + \frac{1}{5}$	
				128,5%

S'entraîner

Exercice 20

Décomposer en facteurs premiers :

a► 51 b► 105 c► 720 d► 743

Exercice 22

- a► $(-5) \times 3 + 2 - 2 \times (-4)$
 b► $17 \times (-3) + (2 \times (-4)) \times 2$
 c► $(5 - 6) \times (-8) \div 4$

Exercice 21

Montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Exercice 23

Donner l'écriture décimale du résultat de $325 \div 16$

Exercice 24

Écriture décimale exacte (si possible)	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire	Entier + Fraction < 1	Pourcentage exact (si possible)
	$\frac{2}{9}$			
12,06				
0,05				
	$\frac{6}{15}$			
			$-3 + \frac{1}{4}$	
				-12,30%
				140%

Exercices en autonomie

Appliquer & s'entraîner

Exercice 25

Donner les diviseurs de :

- a ▶ 19 b ▶ 27 c ▶ 42 d ▶ 91

Exercice 26

- a ▶ $7 - (-12)$ d ▶ $9 + (-12)$
 b ▶ $(-9) - (-4)$ e ▶ $(-29) - 17$
 c ▶ $17 - 8 - 8$ f ▶ $253 - 188 - 80$

Exercice 27

- a ▶ $9 \times (-4)$ c ▶ $(-6) \times (-8)$
 b ▶ $17 \times (-3)$

Exercice 28

Encadrer $\frac{6}{13}$ à 0,001 près.

Exercice 29

- a ▶ $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ c ▶ $\frac{2}{5} - \frac{2}{9}$
 b ▶ $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$ d ▶ $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

Exercice 30

- a ▶ $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ c ▶ $\frac{2}{5} \times \frac{2}{9}$
 b ▶ $\frac{5}{8} \times \frac{2}{9}$ d ▶ $\frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5}$

Approfondir

Exercice 31

Pour une sortie scolaire, un établissement doit réserver des cars pour le transport. Il y a sept classes de 23 élèves et trois accompagnateurs par classe à transporter. Chaque bus à une capacité de 44 personnes.

Combien de bus le lycée doit-il réserver ?

Exercice 32

Pour une réception, Esteban prévoit un repas pour 66 personnes (lui inclus).

Il souhaite qu'il y ait le même nombre d'invités à chaque table.

Combien de tables peut-il prévoir ? Donner toutes les configurations possibles.

Exercice 33

Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés.

Exercice 34

On considère le nombre $a = 0,123\,123\,123\ldots$

On admet que a peut s'écrire comme une fraction.

Déterminer une fraction égale à a .

Exercice 35

La moitié d'un gâteau est au frigo. Christine en mange tiers de ce qu'il reste et le remet au frigo. Une heure plus tard, Luc mange la moitié de ce qu'il reste au frigo.

Donner des fractions correspondants aux parts de Luc et de Christine.

2 Généralités sur les fonctions

Table des matières

1	Le vocabulaire fonctionnel	30
2	Représentation graphique d'une fonction	31
A	Courbe représentative	31
B	Parité	32
	Exercices	34
	Exercices en autonomie	38

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.

Capacités attendues

- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres.
- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logique.

Approfondissement

- Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

Détail

Contenus

- Définition d'une fonction
 - Image, antécédent.
 - Différence entre f et $f(x)$
 - Manipulations de variables ($\mathcal{V} = \pi r^2 h$) et représentations
 - La courbe représentative d'une fonction est $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$
 - Résoudre $f(x) = k$ graphiquement
 - Exploiter $y = f(x)$ pour calculer des coordonnées ou appartenance.
- Parité et imparité
 - Définition
 - Interprétation géométrique

1 – Le vocabulaire fonctionnel

Définition 1

Fonction, image

Soit D un ensemble de nombres.

Une **fonction** f définie sur D est un processus qui, à chaque nombre $x \in D$ **associe** un, et un seul nombre $f(x)$, lu « f de x », et appelé **l'image de x par f** .

L'ensemble D est appelé **ensemble de départ**, ou **domaine de définition** de f .

Remarque 2

Il existe une notation mathématique complète et compacte pour décrire une fonction :

$$\begin{array}{ccc} f : & D & \rightarrow A \\ & x & \mapsto f(x) \end{array}$$

A est appelé ensemble d'arrivée de la fonction mais on ne s'y intéressera pas cette année.

En pratique, on écrira plutôt : « La fonction f définie pour $x \in D$ par l'expression $f(x) = \dots$ »

Exemple 3

- Considérons la fonction f définie par $f(x) = x + 3$. Elle prend un nombre et lui ajoute 3. Par exemple, $f(2) = 5$, ou encore $f(10) = 13$.
- Considérons la fonction g définie par $f(x) = 2x$. Elle prend un nombre et le double. Par exemple, $g(2) = 4$, ou encore $g(10) = 20$.

Remarque 4

Une fonction traduit la dépendance entre deux grandeurs. Par exemple, la circonférence d'un cercle dépend de son rayon : si on note r le rayon d'un cercle, et $C(r)$ sa circonférence (en fonction du rayon), alors on a vu au collège que $C(r) = 2\pi r$.

Définition 5

Antécédent

Quand $f(x) = y$, on dit que x est UN **antécédent** de y par f .

Exemple 6

Considérons la fonction f dont l'expression est $f(x) = x^2$.

- Comme $f(2) = 4$, on dit que 4 est l'image de 2 par f , et que 2 est **un** antécédent de 4 par f .
- Comme $f(-2) = 4$, on dit que 4 est l'image de -2 par f , et que -2 est **un** antécédent de 4 par f .

À retenir : un antécédent n'a qu'une image, mais une image peut avoir plusieurs antécédents.

Exercice conseillé : 1

Remarque 7

Une fonction peut être représentée de plusieurs manières différentes :

- Algébriquement, quand on donne l'expression explicite de $f(x)$ en fonction de x (« La fonction f définie par $f(x) = 4x + 1$ »),
- On trouve parfois des **tableaux de valeurs** : sur la première ligne, on trouve les valeurs de x , et sur la seconde leurs images par f .

x	0	1	2
$f(x)$	1	5	9

On peut également représenter une fonction avec son **graphe** : c'est l'objet de la section suivante.

Exercice conseillé : 5

2 – Représentation graphique d'une fonction

Dans cette section, on munit le plan d'un repère orthonormé. Soit f une fonction dont l'ensemble de départ est D .

A – Courbe représentative

Définition 8

Courbe représentative

La **courbe représentative** (aussi appelé le **graphe**) de f est l'ensemble des points qui ont pour coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in D$, autrement dit l'ensemble :

$$\{(x; f(x)) : x \in D\}$$

ce que l'on écrit parfois :

$$\{M(x, y) \mid y = f(x)\}$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée **équation de la courbe de f** .

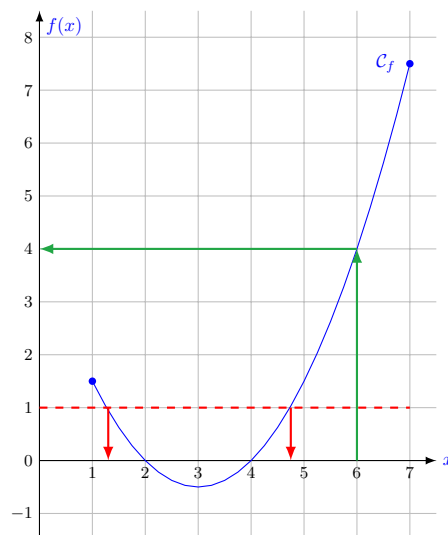
Remarque 9

- ▶ On lit les antécédents sur l'axe des abscisses (horizontal), et les images sur l'axe des ordonnées (vertical).
- ▶ On peut définir une fonction par sa courbe représentative.
- ▶ La courbe représentative de f est souvent notée $\mathcal{C}_f$.

Exemple 10

Considérons la fonction f définie par le graphe ci-contre.

- ▶ L'image de 6 par f est 4.
- ▶ On constate également que 1 possède deux antécédents : **environ** 1,2 et **environ** 4,8.



Exercices conseillés : 2, 3, 4, 9, 7, 10, 11

Remarque 11

La définition par courbe représentative d'une fonction limite la connaissance des images, à cause de l'exactitude de la lecture : on ne peut pas déterminer avec certitude une valeur exacte par lecture graphique.

Exemple 12

Considérons la fonction f définie par :

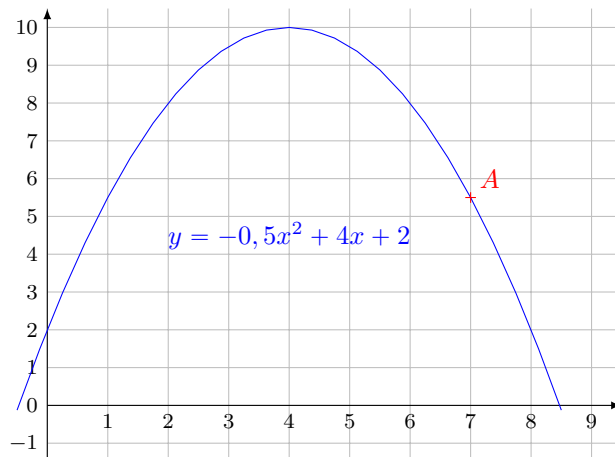
$$f(x) = -0,5x^2 + 4x + 2$$

dont le graphe est donnée ci-contre.

Le point $A \in \mathcal{C}_f$:

- pour abscisse 7,
- pour ordonnée

$$\begin{aligned} f(7) &= -0,5 \times 7^2 + 4 \times 7 + 2 \\ &= 5,5 \end{aligned}$$

**Méthode 13**

Pour savoir si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction f , on vérifie si ses coordonnées $(x; y)$ vérifie l'équation $y = f(x)$.

Exemple 14

Reprenons la fonction de l'exemple précédent.

- Le point $B(6; 8)$ est-il sur la courbe représentative de f ?

C'est le cas si $f(6) = 8$, on calcule donc $f(6)$.

$$f(6) = -0,5 \times 6^2 + 4 \times 6 + 2 = 8$$

Ainsi, on peut affirmer que $B(6; 8) \in \mathcal{C}_f$.

- Le point $C(8; 5; 0)$ est-il sur la courbe représen-

tative de f ?

C'est le cas si $f(8,5) = 0$, on calcule donc $f(8,5)$.

$$f(8,5) = -0,5 \times 8,5^2 + 4 \times 8,5 + 2 = -0,125$$

$f(8,5) \neq 0$ donc $C(8,5; 0) \notin \mathcal{C}_f$.

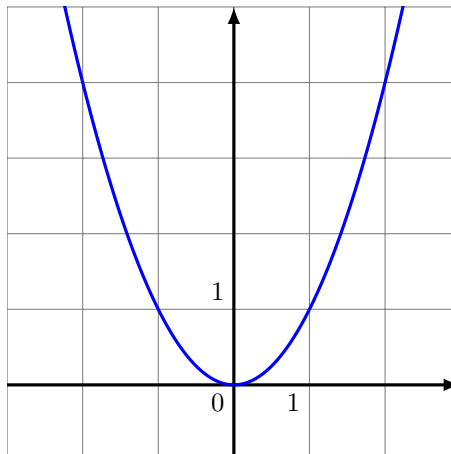
Exercices conseillés : 6, 8

B – Parité**Fonction paire, fonction impaire****Définition 15**

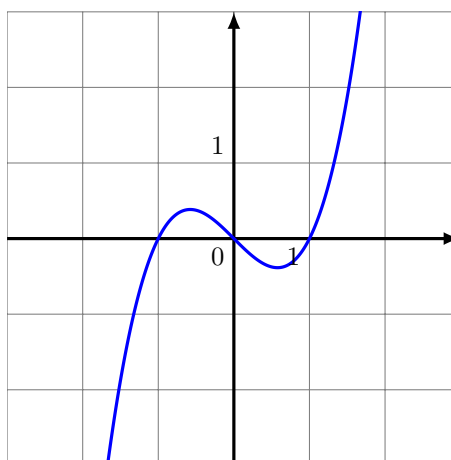
- Une fonction est **paire** lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction est **impaire** lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 16

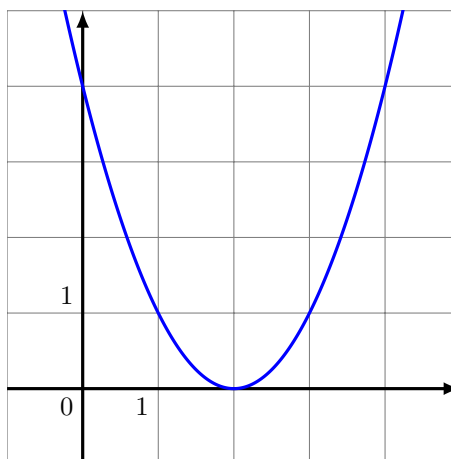
La fonction f d'expression $f(x) = x^2$ est paire :



La fonction f d'expression $f(x) = x^3 - x$ est impaire :



La fonction f définie par l'expression $f(x) = (2 - x)^2$ n'est ni paire, ni impaire :



Propriété 17

La vraie définition

- On dit que f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Exercices

Appliquer

Exercice 1 (Images et antécédents)

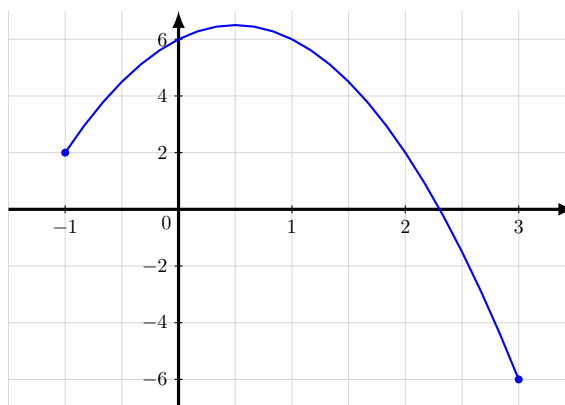
On considère la fonction f d'expression $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

- 1► Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-2)$.
- 2► Écrire une phrase réponse traduisant chacun de ces résultats en utilisant le mot « antécédent ».
- 3► Écrire une phrase réponse traduisant chacun de ces résultats en utilisant le mot « image ».
- 4► Quelle est l'image de (-4) par cette fonction ?

Exercice 2 (Lecture graphique)

Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.

- 1► Donner l'ensemble de définition de la fonction h représentée ici graphiquement.
- 2► Recopier et compléter le tableau ci-dessous si possible. Si cela est impossible, expliquer pourquoi.
- 3► Donner en **écrivant quatre phrases réponses** les images de (-1) , 0 , 1 et 2 par la fonction h .
- 4► Donner en **écrivant trois phrases réponses** les antécédents de (-6) , 2 et 6 par la fonction h .

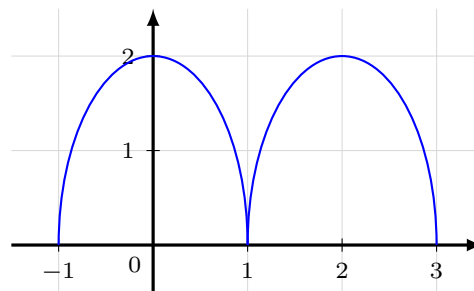


x	(-2)	(-1)	0	1	2	3	4	5
$h(x)$								

Exercice 3 (Lecture graphique)

(Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.)

- 1► Donner l'ensemble de définition de f .
- 2► En écrivant des phrases réponses, donner un nombre qui **semble** avoir...
 - a► ... pour image 2,
 - b► ... 0 pour antécédent,
 - c► ... quatre antécédents par f ,
 - d► ... deux antécédents par f ,
 - e► ... aucun antécédent par f .



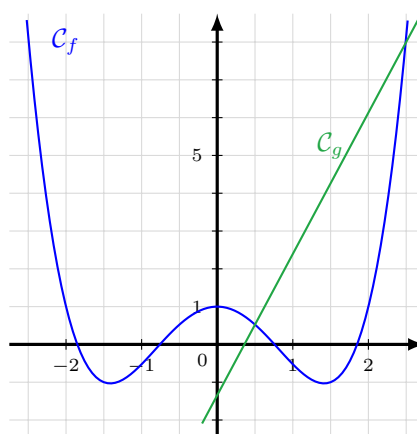
Exercice 4 (Lecture graphique)

(Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.)

- 1► Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2► Lire les images de 0 et 2 par la fonction f .
- 3► Lire les antécédents de 1 par la fonction f .
- 4► Trouver les nombres x pour lesquels $f(x) = (-1)$.
- 5► Comment peut-on lire sur la représentation graphique les abscisses pour lesquelles $f(x) = g(x)$?
- 6► (Bonus) On admet que :

$$f(x) = 0,508x^2(x+2)(x-2) + 1.$$

À l'aide de cette expression, calculer l'image de $-2,5$. Comparer à l'image que vous pouvez lire sur le graphique. Que constatez-vous ? Commenter.



S'exercer

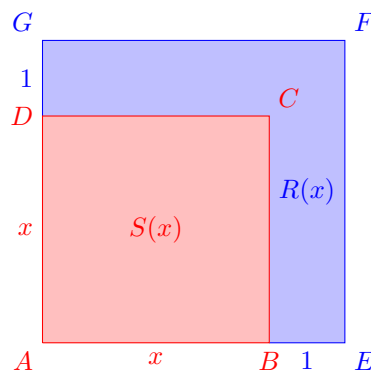
Exercice 5 (Comparaison de deux aires)

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le cm.

Dans la figure suivante, $ABCD$ est un carré dont les côtés ont pour longueur x et $AEFG$ est un carré dont les côtés ont pour longueur $x+1$.

On note $S(x)$ l'aire de $ABCD$ et $R(x)$ l'aire du polygone $BEFGDC$.

- 1► Montrer que $S(x) = x^2$.
- 2► En déduire l'expression de $R(x)$.
- 3► Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-contre.
- 4► À l'aide de ce tableau de valeurs et **en écrivant des phrases réponses** :
 - 1► Donner a , l'antécédent de 5 par la fonction R . Calculer alors $S(a)$.
 - 2► Donner b , l'antécédent de 9 par la fonction S . Calculer alors $R(b)$.
- 5► Vérifier que pour $x = 1 + \sqrt{2}$, on a $R(x) = S(x)$ (on dit alors que $1 + \sqrt{2}$ est *solution* de l'équation $R(x) = S(x)$).



x	0	1	2	3	4	5
$S(x)$						
$R(x)$						

Exercice 6 (Appartenance d'un point à une courbe)

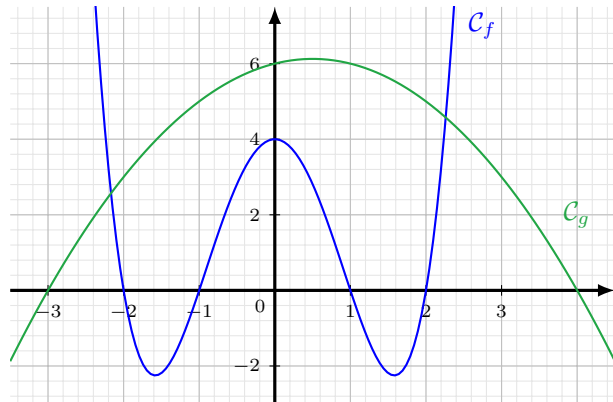
On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^2 - 2x - 3$ de courbe représentative C_f .

- 1► Calculer l'image de (-2) par la fonction f .
- 2► Le point A de coordonnées $(-2; 5)$ appartient-il à C_f ?
- 3► Quelle est l'ordonnée du point B de la courbe C_f dont l'abscisse est 2 ?

Exercice 7 (Lecture graphique)

(Dans cet exercice on se contentera de lecture graphique.)

- 1► Donner l'image de 0 par la fonction f et l'image de (-2) par la fonction g .
- 2► Donner les antécédents de 4 par la fonction f .
- 3► Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
- 4► Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 3$ et l'inéquation $g(x) > 3$.

**Exercice 8 (Bilan)**

Soit f une fonction dont on note C_f la courbe représentative dans un repère.
Recopier et compléter le tableau suivant.

Égalité	Image	Courbe	Équation	Antécédent
$f(2) = 3$				
	1 a pour image 0 par f			
		$A(-2; 3) \in C_f$		
			4 est solution de $f(x) = 5$	
				3 est un antécédent de -4 par f

Exercice 9

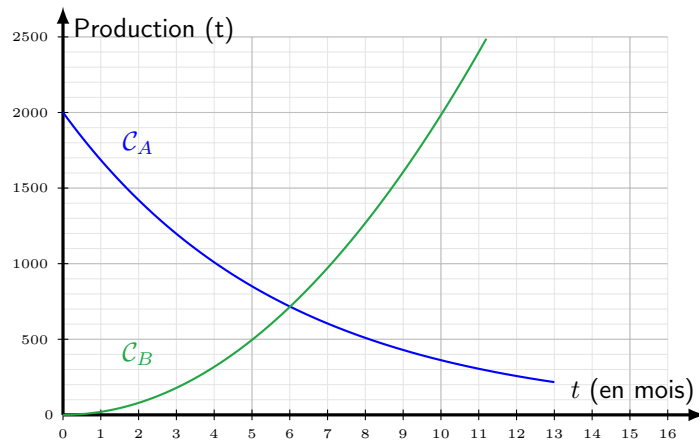
- 1► Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0, 8]$ qui vérifie $f(1) = 3$, $f(5) = (-1)$ et $f(7) = 1$.
- 2► Donner une liste de conditions que doit vérifier votre courbe pour être juste.
- 3► Dans un repère orthonormé, tracer la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-3, 5]$ qui admet une infinité d'antécédents du nombre 1.

Problème 10 (Usine)

Une usine qui fabrique un produit A décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par l'usine en fonction du temps est modélisée par la fonction A pour le produit A et par la fonction B pour le produit B.

1► Quel est le produit le plus fabriqué au cours du :

- a► troisième mois ?
- b► huitième mois ?



2► Lire graphiquement les solutions des équations :

a► $A(t) = 500$

b► $B(t) = 500$

c► $A(t) = B(t)$

3► Interpréter ces résultats en terme de production.

Problème 11 (Bactéries)

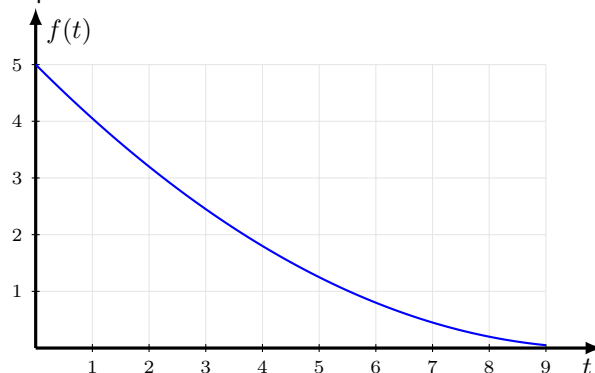
On souhaite tester l'effet d'un antibiotique sur des bactéries. On introduit l'antibiotique dans un b cher qui contient 5 000 bactéries et on mesure, à intervalles réguliers pendant 9 heures, la quantité de bactéries restantes dans le b cher au fur et à mesure de l'action de l'antibiotique.

Les valeurs conduisent à modéliser l'évolution du nombre de bactéries (en milliers) dans ce b cher par la fonction f définie à chaque instant entre 0h et 9h, par l'expression :

$$f(t) = 0,05t^2 - t + 5$$

où t représente la durée (en heures)  coul e depuis le début de l'expérience.

On représente la fonction f par la courbe donnée ci-contre.



Pour chaque question, répondre grâce à la courbe donnée.

- 1► Déterminer $f(0)$. Ce résultat est-il cohérent avec les données de l'énoncé ?
- 2► Déterminer, selon ce modèle, le nombre de bactéries dans le b cher au bout de deux heures.
- 3► Déterminer un antécédent de 0 par f . Interpréter ce résultat dans le contexte donné.

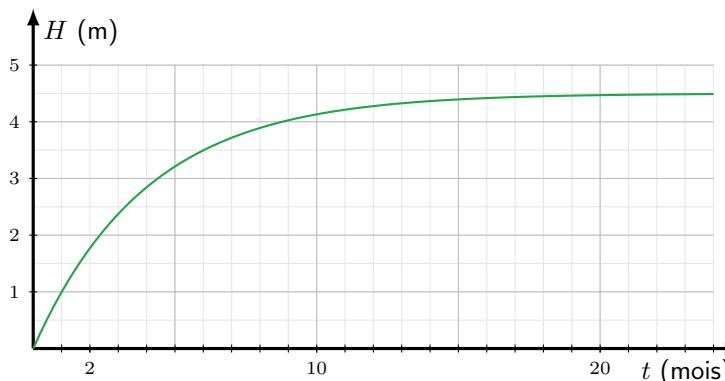
On estime qu'un antibiotique est efficace sur un humain s'il parvient à diviser par 5 le nombre de bactéries initialement présentes dans le b cher au bout de cinq heures.

- 4► L'antibiotique testé ici est-il efficace pour un humain ? Vérifier vos résultats par le calcul. Conclure.

Exercices en autonomie

Problème 12

On considère la hauteur H , d'un type d'arbre (en mètre) en fonction du temps de croissance (en mois).



- 1► Déterminer $H(1)$. Interpréter.

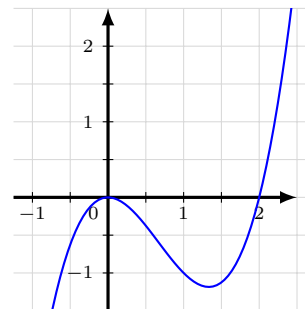
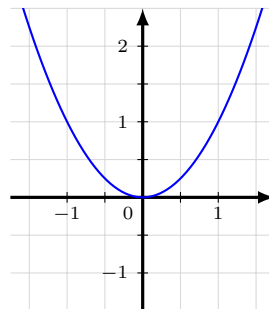
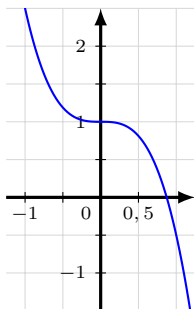
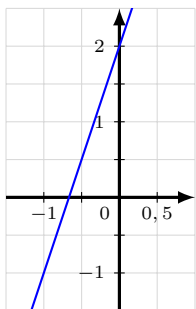
On dit que ces arbres protègent des glissements de terrains quand ils mesurent au moins 2m.

- 2► On souhaite savoir à partir de combien de temps un arbre devient efficace pour prévenir les glissements de terrain. Traduire cela par une inéquation et la résoudre graphiquement.
- 3► La mairie d'un village des Pyrénées a décidé de tailler ses arbres à hauteur de 3m dès que ceux-ci dépassent les 3,5m, pour éviter qu'ils ne tombent en cas de tempête. Quelle sera la fréquence des coupes après la première ?

Exercice 13 (Résolutions graphiques)

Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous (que l'on nommera f à chaque fois), répondre graphiquement aux questions suivantes :

- 1► Résoudre l'équation $f(x) = 0$
- 2► Résoudre l'équation $f(x) = -0,5$
- 3► Résoudre l'équation $f(x) = 1$
- 4► Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 2$
- 5► Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$



Exercice 14 (Appartenance à une courbe)

On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ d'expression $g(x) = 2x^2 - 3x - 5$, de courbe représentative $\mathcal{C}$.

- Le point A de coordonnées $(4; 3)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?
- Quel point d'abscisse 0 appartient à $\mathcal{C}$?
- Quel point d'abscisse (-3) appartient à $\mathcal{C}$?

Exercice 15 (Résolution algébrique d'équations)

On considère f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x , $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

1► Résoudre l'équation $f(x) = 2$,

2► Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

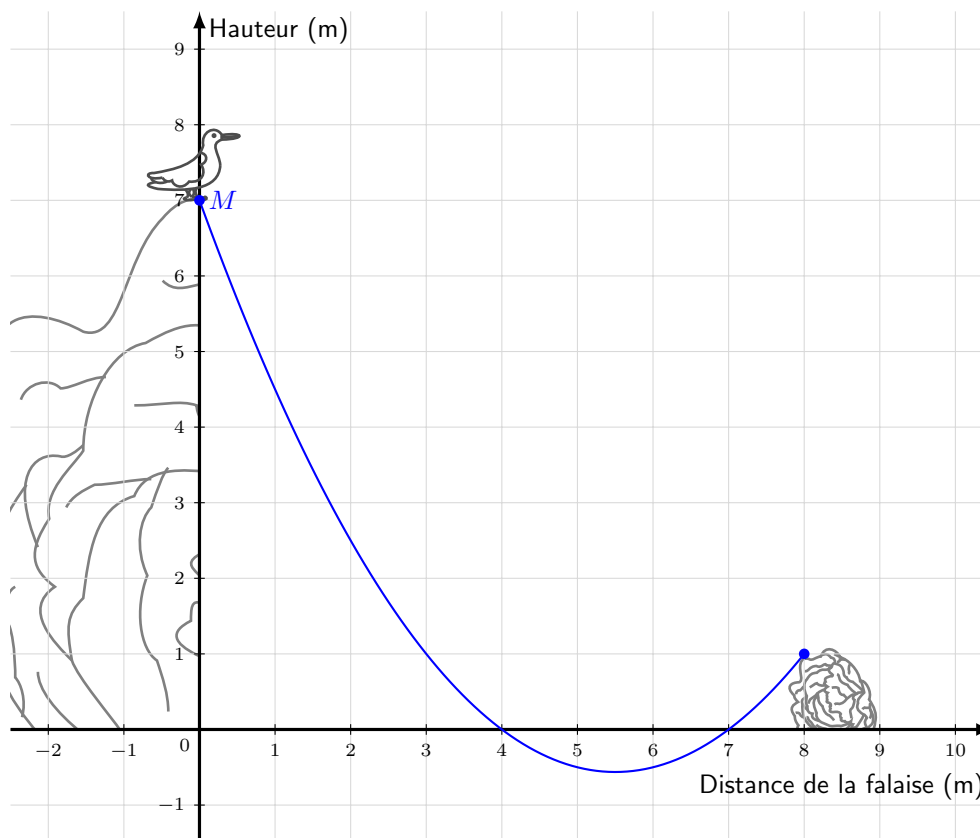
Problème 16 (Mouette)

Une mouette saute d'une falaise située à 7 mètres de haut et plonge en direction de la mer afin d'attraper un poisson, et va le manger sur un rocher situé à 8 mètres de la falaise. Sa trajectoire est décrite par la fonction :

$$h(x) = 0,25x^2 - 2,75x + 7$$

Dans cette formule, $h(x)$ est la hauteur de l'oiseau par rapport au niveau de la mer et x est la distance séparant la mouette de la falaise avec $x \in [0; 8]$. On représente la fonction dans le plan où l'axe des abscisses se situe au niveau de la mer, et l'axe des ordonnées au niveau de la falaise. La mouette part donc du point M de coordonnées $(0; 7)$.

- 1► Déterminer graphiquement l'image de 1 par la fonction h . Que signifie ce résultat pour la mouette ?
- 2► Résoudre graphiquement l'équation $h(x) = 1$. Interpréter concrètement les résultats obtenus.
- 3► Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \leq 0$. Donner les solutions sous forme d'un intervalle.
- 4► En déduire à quelles distances de la falaise la mouette entre, puis sort de l'eau.
- 5► La mouette a-t-elle eu l'occasion d'attraper un poisson à 1 mètre de profondeur ?
- 6► Calculer $h(1)$. Votre résultat est-il cohérent avec la première question ?
- 7► Le point de coordonnées $(2, 5; 1, 5)$ appartient-il à la courbe de la fonction h ? Justifier votre réponse soigneusement à l'aide d'un calcul.



3 Calcul littéral

Table des matières

1	Notations standard	42
2	Développer	42
3	Identités remarquables	43
4	Factoriser	44
	Exercices	45

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ à savoir utiliser dans les deux sens.

Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des écritures fractionnaires.

Détail

Contenus

- Manipulation d'expression
 - Développer : simple et double distributivité illustrées (/!\-)
 - Factorisation & Identités remarquables

Démonstrations

- Identités remarquables

1 – Notations standard

Notations

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 1 \times a &= a = \frac{a}{1} \\ \blacktriangleright 0 \times a &= 0 \\ \blacktriangleright \frac{0}{a} &= 0 \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright ab = a \times b$$

$$\blacktriangleright a(b + c) = a \times (b + c)$$

$$\blacktriangleright (a + b)(c + d) = (a + b) \times (c + d)$$

Notation

On parle du **carré** d'un nombre n quand on multiplie ce nombre par lui même. On le note n^2 .

$$n^2 = n \times n$$

Définition 1

Carré parfait

On appelle **carrés parfaits** les carrés des entiers naturels.

Remarque 2

Il faut connaître les premiers carrés parfaits :

$$\blacktriangleright 1^2 = 1$$

$$\blacktriangleright 3^2 = 9$$

$$\blacktriangleright 5^2 = 25$$

$$\blacktriangleright 7^2 = 49$$

$$\blacktriangleright 9^2 = 81$$

$$\blacktriangleright 2^2 = 4$$

$$\blacktriangleright 4^2 = 16$$

$$\blacktriangleright 6^2 = 36$$

$$\blacktriangleright 8^2 = 64$$

$$\blacktriangleright 10^2 = 100$$

2 – Développer

Définition 3

Développer

On dit qu'on **développe** une expression quand on transforme un produit en somme.
Pour cela on applique le principe de distributivité.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Développer}} \\ a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ \xleftarrow{\text{Factoriser}} \end{array}$$

Exemple 4

Simple distributivité :

$$3 \times (2y - 5) = 3 \times 2y + 3 \times (-5) = 6y - 15$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Développer}} \\ (a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \\ \xleftarrow{\text{Factoriser}} \end{array}$$

Exemple 5

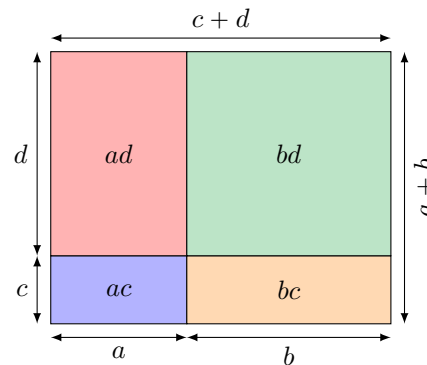
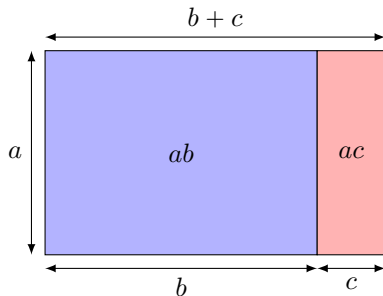
Double distributivité :

$$\begin{aligned}(y + 3)(2y + 1) &= 2y^2 + y + 6y + 3 \\ &= 2y^2 + 7y + 3\end{aligned}$$

Exercices conseillés : 1, 2, 7, 8

Remarque 6

On peut interpréter ces formules géométriquement :

**Remarque 7**

On a désormais tout ce qu'il faut pour proposer une preuve du théorème de Pythagore (voir DM).

Exercice conseillé : 12

3 – Identités remarquables

Proposition 8**IDENTITÉS REMARQUABLE**

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Démonstration. (Principe) Développer ces expressions. □

Exemple 9

- ▶ $(4a - 3b)^2 = 4a^2 - 2 \times 4a \times 3b + 3b^2 = 16a^2 - 12ab + 9b^2$
- ▶ $25 - 9a^2 = 5^2 - (3a)^2 = (5 + 3a)(5 - 3a)$
- ▶ $(10 + 7)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289$

Remarque 10

- ▶ Notez qu'une égalité se lit dans les deux sens, dans le deuxième exemple on utilise une identité remarquable à l'envers par exemple !
- ▶ Notez que dans le dernier cas on a utilisé une identité remarquable pour effectuer simplement un calcul

laborieux.

Exercices conseillés : 5, 6

4 – Factoriser

Définition 11

Factoriser

On dit qu'on **factorise** une expression quand on transforme une somme en produit.

Méthode 12 (Factoriser une expression littérale)

Lorsqu'on souhaite factoriser une expression littérale :

- ▶ Si on peut trouver des facteurs communs à chaque terme de l'expression :

$$6a^2 + 4ab = 2a(3a + 2b)$$

- ▶ Sinon on utilise une des identités remarquables :

$$25a^2 + 10a + 1 = (5a)^2 + 2 \times 5a \times 1 + 1^2 = (5a + 1)^2$$

Remarque 13

Ce n'est pas parce qu'une expression à l'air horrible qu'on ne peut pas la factoriser ! Considérons par exemple :

$$\begin{aligned} & (3x + 7)(2x - 1) + (4y - 2)(3x + 7) \\ &= (3x + 7)[(2x - 1) + (4y - 2)] && \rightarrow \text{ici le facteur commun est } (3x + 7) \\ &= (3x + 7)(2x + 4y - 3) && \rightarrow \text{après réduction} \end{aligned}$$

Exercices

Appliquer

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

A ▶ $4 \times (3y + 5)$

B ▶ $5 \times (6y - 2)$

C ▶ $(a + 2) \times (a - 2)$

D ▶ $dx(a + 7) - 3d$

Exercice 2

Développer et réduire les expressions suivantes :

A ▶ $a(5 + a) + 2$

B ▶ $b(2 + b + c)$

C ▶ $(c + 7)(c + 1)$

D ▶ $(b + 3)(a + 4)$

Exercice 3

Factoriser les expressions suivantes :

A ▶ $55a + 5b$

B ▶ $8a + 4b + 2$

C ▶ $21y + 17y$

D ▶ $18a^2 + 6a$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes :

A ▶ $12a + 3ab$

B ▶ $a^2 + 4a + 4$

C ▶ $4b + 2ab + 8b^2$

D ▶ $65a + 26c$

Exercice 5

Énoncer les trois identités remarquables en prenant pour variables u et w .

Exercice 6

Calculer en utilisant les identités remarquables :

A ▶ 14^2

B ▶ 18^2

C ▶ 998^2

D ▶ $1,12 \times 0,88$

S'entraîner

Exercice 7

Développer les expressions suivantes :

A ▶ $7 \times (4y + 6)$

B ▶ $6 \times (-6y - 2)$

C ▶ $(3c + 1) \times (2c + 3)$

D ▶ $(-2b + 3) \times (a - 4)$

Exercice 8

Développer les expressions suivantes :

A ▶ $3a \times (2 + 2a) + 2$

B ▶ $5b \times (8 + 2b + 3c)$

C ▶ $(2a + 2) \times (2a - 2)$

D ▶ $3d \times (a + 1) - 5d$

Exercice 9

Factoriser les expressions suivantes :

A► $34xy + 51x^2 - 17x$

C► $(4x - 1)(x + 5) - (4x - 1)(2x + 3)$

B► $4(-2y + 3) - 7y(-2y + 3) + (5y + 2)(-2y + 3)$

D► $16x^2 - 32x + 16$

Exercice 10

Factoriser les expressions suivantes :

A► $(2x - 3)^2 - (4x + 2)^2$

C► $26x^4 - 52x^2 + 130x^3$

B► $(7x + 2)(3x - 5) - 4x(3x - 5) - 7y(3x - 5) - 5 + 3x$

D► $(7x + 7)(-x + 3) - (7x + 7)(2x + 3)$

Approfondir**Exercice 11**1► Factoriser par x l'expression : $x^2 + 5x + 3$ 2► Factoriser par x^2 le numérateur et le dénominateur de : $\frac{x^2 + 2x + 12}{3x^3 - x + 1}$ 3► Factoriser les numérateurs et dénominateurs de : $\frac{x^2 + 2x + 1}{4x^2 - 25}$ 4► En utilisant le fait que diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse, factoriser cette somme : $\frac{3x + 6}{4x + 3} + \frac{6x + 12}{5x + 2}$ **Exercice 12 (Une preuve du théorème de Pythagore)***Indication : A la fin de la question 8 vous aurez un résultat proche du schéma du cours sur la double distributivité.*1► Tracer un segment $[XY]$ de longueur 6 cm.2► Placer un point Z pour qu'il appartienne au segment $[XY]$ et que $XZ = 2$ cm.3► Tracer le carré dont l'un des côtés est le segment $[XY]$ 4► Tracer le segment d'extrémité Z , perpendiculaire à $[XY]$ de longueur 6cm, de sorte que ce segment soit à l'intérieur du carré.5► Placer un point Z' à 2cm de X , et qui n'est pas sur le même côté du carré que Z .6► Tracer le segment d'extrémité Z' , parallèle à $[XY]$ et de longueur 6cm, de sorte que ce segment soit à l'intérieur du carré.7► On note a la longueur XZ et b la longueur ZY . Coder la figure.8► Écrire dans les deux carrés leur aire en fonction de a et b et dans les deux rectangles leur aire en fonction de a et b .*Vérifier que votre construction ressemble au schéma du cours sur la double distributivité.*On rappelle le théorème de Pythagore : Si ABC est un triangle rectangle en A , Alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ 9► Construire un autre carré de côté $a + b$.10► Couper en deux suivant les diagonales les deux rectangles d'aire ab de la figure que vous avez construit au cours des huit premières questions, puis les disposer à l'intérieur du nouveau carré. (chaque face du carré sera recouvert par une longueur et une largeur des triangles rectangles.)*Vous n'avez pas à réellement découper les rectangles, vous pouvez le faire symboliquement en les recopiant sur la deuxième figure.*

- 11► Coder la figure, on appellera c la longueur de l'hypoténuse des quatre triangles rectangles disposés dans le nouveau carré.
- 12► En utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle est toujours de 180, montrer que le losange au centre de la nouvelle figure est en réalité un carré de côté c .
- 13► Écrire l'aire du carré de côté c au centre de ce dernier.
- 14► En comparant les deux figures, en déduire le théorème de Pythagore.
On soignera particulièrement la rédaction de cette dernière question.

4 Racine carrée

Table des matières

1	Racine carrée d'un nombre positif	50
2	Relations algébriques	50
	Exercices	52

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- Règles de calcul sur les puissances entières relatives

Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des racines carrées

Démonstrations

- Quels que soient les réels positifs a et b , on a $\sqrt{ab} < \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Approfondissements possibles

- Inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs.

Détail

Contenus

- Carré & Racine carrée
 - Définition racine carrée s'appuyant sur positivité du carré.
 - Produit et quotient avec la racine carrée.
 - Réduire une racine carrée
 - Somme de racines carrées, inégalité.

Démonstrations

- Le carré d'un nombre réel est toujours positif.
- Quels que soient les réels positifs a et b , on a $\sqrt{ab} < \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1 – Racine carrée d'un nombre positif

Définition 1

Racine carrée

Soit a un nombre **positif**.

La **racine carrée de a** est l'unique nombre **positif**, noté $\sqrt{a}$, dont le carré vaut a :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Remarque 2

Autrement dit, la racine carrée de a est l'**unique** solution positive de l'équation $x^2 = a$.

Exemple 3

- | | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|
| ▶ $\sqrt{0} = 0$ | ▶ $\sqrt{9} = 3$ | ▶ $\sqrt{36} = 6$ | ▶ $\sqrt{81} = 9$ | ▶ $\sqrt{144} = 12$ |
| ▶ $\sqrt{1} = 1$ | ▶ $\sqrt{16} = 4$ | ▶ $\sqrt{49} = 7$ | ▶ $\sqrt{100} = 10$ | |
| ▶ $\sqrt{4} = 2$ | ▶ $\sqrt{25} = 5$ | ▶ $\sqrt{64} = 8$ | ▶ $\sqrt{121} = 11$ | |

Voici d'autres exemples :

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| ▶ $\sqrt{5,0625} = 2,25$ | ▶ $\sqrt{1,999396} = 1,414$ | ▶ $\sqrt{0,0001} = 0,01$ |
|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|

Propriété 4

La racine carrée du carré d'un nombre donne sa distance à zéro. Autrement dit :

- ▶ Si a est un nombre positif, alors $\sqrt{a^2} = a$ (≥ 0).
- ▶ Si a est un nombre négatif, alors $\sqrt{a^2} = -a$ (≥ 0).

Exemple 5

- | | | | |
|--------------------------|--------------------|---------------------------|-----------------------|
| ▶ $\sqrt{17,2^2} = 17,2$ | ▶ $\sqrt{3^2} = 3$ | ▶ $\sqrt{(-8,1)^2} = 8,1$ | ▶ $\sqrt{(-3)^2} = 3$ |
|--------------------------|--------------------|---------------------------|-----------------------|

Remarque 6

On rappelle qu'un nombre au carré est toujours positif.

En effet, soit a un nombre. Par définition, $a^2 = a \times a$.

- ▶ Si a est positif, alors a^2 est le produit de deux facteurs positifs, ce qui est positif.
- ▶ Si a est négatif, alors a^2 est le produit de deux facteurs négatifs, ce qui est positif.

Dans tous les cas, $a^2 \geq 0$.

2 – Relations algébriques

Le symbole racine carrée marche bien avec les produits, mais pas avec les sommes !

Proposition 7

Règles de calcul sur les racines carrées

Soient a et b sont deux nombres positifs.

$$\text{▶ } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\text{▶ Si } b \neq 0, \text{ alors } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. Rappelons que la racine carrée d'un nombre positif x est l'unique nombre positif dont le carré vaut x . Ainsi, pour montrer que $\sqrt{x} = y$, il suffit de montrer que $x = y^2$ et que $y \geq 0$.

- ▶ Comme $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = a \times b$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geq 0$, on a bien $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- ▶ D'une part, $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$. D'autre part, $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$. Comme $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$, cela montre que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. □

Exemple 8

- ▶ $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2}$
- ▶ $\sqrt{5} \times \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 20} = \sqrt{100} = 10$
- ▶ $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Propriété 9

Croissance de la racine carrée

Pour tous nombres positifs a et b , si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Exemple 10

On peut approcher la valeur d'une racine carrée en l'encadrant entre deux entiers. Par exemple, encadrons $\sqrt{55}$ entre deux entiers. Pour cela on regarde la liste des carrés parfaits :

$$\dots \quad 6^2 = 36 \quad 7^2 = 49 \quad 8^2 = 64 \quad 9^2 = 81 \quad \dots$$

Ainsi $7^2 < 55 < 8^2$, donc $7 < \sqrt{55} < 8$.

Propriété 11

Pour tous nombres a et b strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration. Cette démonstration requiert des outils de chapitres ultérieurs, nous y reviendrons donc au moment voulu. Néanmoins, la voici tout de même :

On élève le terme de gauche au carré : $\sqrt{a+b}^2 = a+b$.

On fait de même pour le terme de droite : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.

Comme a et b ne sont pas nuls, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ ne sont pas nuls non plus, donc $\sqrt{ab} > 0$, donc $0 < a+b < a+b+2\sqrt{ab}$.

Ainsi $0 < \sqrt{a+b}^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

Il nous manque un argument pour réellement conclure que : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, mais nous le verrons plus tard. □

Exercices

S'entraîner

Exercice 1

Calculer :

- a▶ $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$
- b▶ $2\sqrt{2^2} + \sqrt{3^2}$
- c▶ $\sqrt{(-4)^2} + \sqrt{49}$
- d▶ $\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$
- e▶ $(\sqrt{5})^4$

Exercice 2

Calculer :

- a▶ $\sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}$
- b▶ $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$
- c▶ $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$
- d▶ $\sqrt{0,2} \times \sqrt{500}$
- e▶ $\sqrt{484} - 1$

Exercice 3

Montrer que :

- a▶ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- b▶ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
- c▶ $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Exercice 4

Simplifier les racines carrées suivantes (c'est-à-dire les écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b dans $\mathbb{N}$ les plus petits possibles).

- a▶ $\sqrt{300}$
- b▶ $\sqrt{32}$
- c▶ $\sqrt{50}$
- d▶ $\sqrt{72}$
- e▶ $\frac{42}{\sqrt{6}}$
- f▶ $\sqrt{242}$
- g▶ $\frac{35}{\sqrt{7}}$
- h▶ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 5

Simplifier les racines carrées suivantes (c'est-à-dire les écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b dans $\mathbb{N}$ et b le plus petit possible).

- a▶ $\sqrt{50} + \sqrt{32}$
- b▶ $\sqrt{20} + \sqrt{45}$
- c▶ $\sqrt{12} + \sqrt{75}$
- d▶ $\sqrt{75} - \sqrt{27}$
- e▶ $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

Exercice 6

Simplifier les racines carrées suivantes (c'est-à-dire les écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b dans $\mathbb{N}$ et b le plus petit possible).

- a▶ $\sqrt{63} + \sqrt{28}$
- b▶ $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10}$
- c▶ $\sqrt{2}\sqrt{8}$
- d▶ $\frac{\sqrt{3}\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$
- e▶ $\sqrt{\frac{1}{100}}$
- f▶ $\sqrt{0,0009}$

Exercice 7

Développer et réduire :

- a▶ $(5 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
- b▶ $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - 1)$
- c▶ $(\sqrt{75} - \sqrt{12})(\sqrt{12} + \sqrt{75})$

Approfondir

Exercice 8 (Quantité conjuguée)

Réécrire les quotients suivant sans racine au dénominateur :

- a▶ $\frac{2}{1 - \sqrt{2}}$
- b▶ $\frac{5}{\sqrt{3} + 2}$
- c▶ $\frac{7}{4 - 2\sqrt{3}}$
- d▶ $\frac{3}{7 + 2\sqrt{2}}$
- e▶ $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

(Indication : multiplier un quotient au numérateur et au dénominateur par une certaine quantité qui fait apparaître une identité remarquable bien choisie au dénominateur.)

Exercice 9 (Inégalité arithmético-géométrique)

Soient a et b deux nombres réels positifs. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

(Indication : manipuler l'inégalité pour faire apparaître une identité remarquable.)

Exercice 10

Soit x un réel positif. Déterminer une écriture de l'inverse de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ sans fraction.

Exercice 11 (Méthode d'approximation)

► 130

► 200

► 325

► 399

Pour chacun des nombres ci-dessus, appliquer le programme suivant :

1► Choisir un nombre x .

2► Encadrer la racine de ce nombre entre deux entiers consécutifs n et $n+1$.

3► Calculer $n + \frac{1}{2n}(x - n^2)$.

Comparez les valeurs obtenues par le programme précédent et les racines carrées des nombres ci-dessus (on utilisera une calculatrice) : que remarquez-vous ?

5 Nombres réels et intervalles

Table des matières

1	Nombres réels	56
2	Intervalles et droite réelle	57
3	Distance entre deux nombres, valeur absolue d'un nombre	59
4	Encadrement décimal d'un nombre réel	60
	Exercices	61

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- ▶ Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- ▶ Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- ▶ Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.
- ▶ Relation $\sqrt{a^2} = |a|$.
- ▶ Représentation de l'intervalle $[a - r, a + r]$ puis caractérisation par la condition $|x - a| \leq r$.

Capacités attendues

- ▶ Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- ▶ Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- ▶ Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- ▶ Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Exemple d'algorithme

- ▶ Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n} .

Approfondissements possibles

- ▶ Développement décimal illimité d'un nombre réel.
- ▶ Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

Détail

Contenus

- ▶ Nombres réels. (par axe des abscisses.)
 - ▶ Existence d'irrationnels. ($\sqrt{2}$: diagonale , π : rapport)
 - ▶ Inclusions $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ avec exemples.
 - ▶ Moyenne arithmétique de deux nombres.
 - ▶ Nombre réels et nombre calculatrice. (Mémoire, arrondis)
 - ▶ Intervalles de $\mathbb{R}$.

1 – Nombres réels

Nombres rationnels et irrationnels

Définition 1

Un **nombre rationnel** est un nombre qui s'écrit sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ non nul. Ces nombres constituent l'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$. Lorsqu'un nombre n'est pas rationnel, on dit qu'il est **irrationnel**.

Exemple 2

$$\triangleright \frac{-17}{11} \in \mathbb{Q}$$

$$\triangleright 3 \in \mathbb{Q}$$

$$\triangleright \pi \notin \mathbb{Q} \text{ (admis)}$$

Propriété 3

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Lemme 4

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Si n^2 est pair, alors n est pair.

Démonstration. (par contraposée) Soit n un nombre impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On en déduit que :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$$

donc n^2 est impair. On a montré que si n est impair, alors n^2 est impair : la contraposée de cette proposition est donc que si n^2 est pair, alors n est pair. $\square$

Démonstration. (par l'absurde) Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. On peut alors l'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, et p et q premiers entre eux).

On a alors $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ d'où $2 = \frac{p^2}{q^2}$ et donc $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair.

Or d'après le lemme, p est pair, autrement dit, il existe un entier k tel que $p = 2k$ et donc $p^2 = 4k^2$. On obtient $4k^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$ et q^2 est pair. q est donc pair à nouveau d'après le lemme.

Ainsi p et q sont deux nombres pairs mais la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. On a obtenu une contradiction.

Ainsi, notre supposition initiale est fausse. On conclut que $\sqrt{2}$ est irrationnel. $\square$

Nombres réels

Définition 5

L'ensemble de tous les nombres, rationnels ou non, est noté $\mathbb{R}$, et est appelé l'ensemble des **nombres réels**.

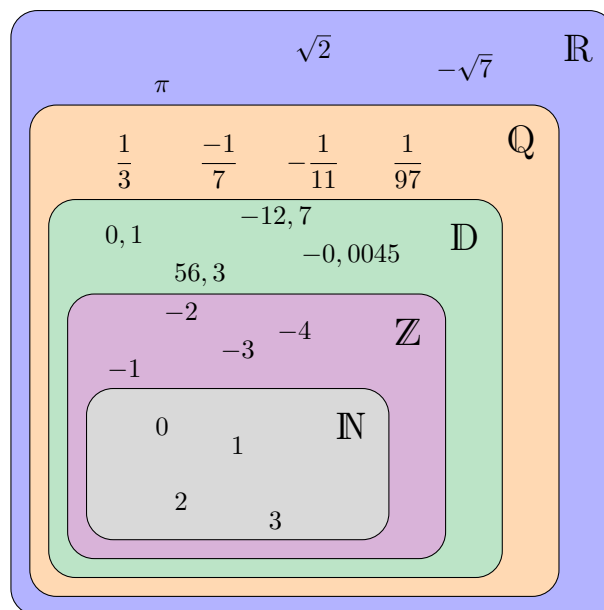
Remarque 6

Tous les nombres que vous rencontrerez cette année (au toutes les précédentes !) sont des nombres réels.

Propriété 7

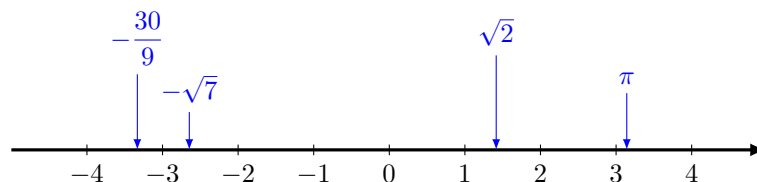
- Tous les nombres entiers naturels sont des nombres entiers relatifs.
Autrement dit, l'ensemble des nombres entiers naturels est **inclus** dans l'ensemble des nombres entiers relatifs. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Tous les nombres entiers relatifs sont des nombres décimaux.
Autrement dit, l'ensemble des nombres entiers relatifs est **inclus** dans l'ensemble des nombres décimaux. On note $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels.
Autrement dit $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- Tous les nombres rationnels sont des nombres réels.
Autrement dit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On peut résumer cette propriété avec les schéma suivant : un ensemble est représenté à l'intérieur d'un autre lorsqu'il est inclus dans ce dernier.



2 – Intervalles et droite réelle

Au collège, on se familiarise avec la **droite graduée** : à chaque abscisse correspond un nombre. On étend cette idée aux nombre réels, pour former la **droite réelle** :

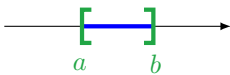
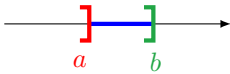
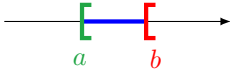
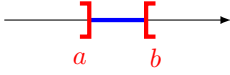
**Définition 8***Différents intervalles*

Un **intervalle** est un ensemble de nombres compris entre deux bornes

Notation

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

- ▶ $[a, b]$ contient les bornes a et b . On dit qu'il est **fermé**.
- ▶ $[a, b[$ contient a , mais pas b . On dit qu'il est **ouvert à droite**.
- ▶ $]a, b]$ ne contient pas a , mais contient b . On dit qu'il est **ouvert à gauche**.
- ▶ $]a, b[$ ne contient ni a ni b . On dit qu'il est **ouvert**.

Notation de l'intervalle	Droite numérique	Inégalités
$[a; b]$		$a \leq x \leq b$
$]a; b]$		$a < x \leq b$
$[a; b[$		$a \leq x < b$
$]a; b[$		$a < x < b$

Exemple 9

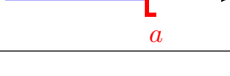
$3 \leq x < 7$ signifie " x est compris entre 3 inclus et 7 exclu" et on écrit $x \in [3; 7[$.

Remarque 10

Les bornes d'un intervalle peuvent être infinies.

Dans ce cas, l'intervalle est toujours ouvert du côté du symbole infini.

On peut donc noter l'ensemble des nombres strictement inférieurs à c : $] - \infty; c[$ par exemple.

Notation de l'intervalle	Droite numérique	Inégalités
$[a; +\infty[$		$x \geq a$
$]a; +\infty[$		$x > a$
$] - \infty; a]$		$x \leq a$
$] - \infty; a[$		$x < a$

Exemple 11

$x > -9$ signifie " x est strictement plus grand que -9 " et on écrit $x \in] - 9; +\infty[$.

Remarque 12

L'ensemble $\mathbb{R}$ est l'intervalle $] - \infty; +\infty[$.

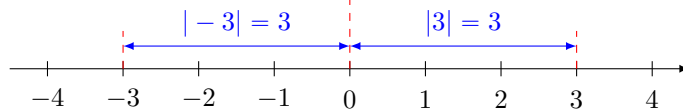
3 – Distance entre deux nombres, valeur absolue d'un nombre

Notation

La distance à zéro d'un nombre a est la distance entre a et 0 sur la droite réelle. On la note $|a|$, et on l'appelle la **valeur absolue de a** .

Exemple 13

La valeur absolue de 3 est 3. La valeur absolue de -3 est 3 aussi ! En effet une distance est positive.



Exemple 14

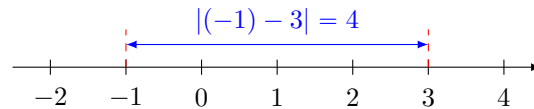
► $|6| = 6$ ► $|-0,8| = 0,8$ ► $|-3,5| = 3,5$ ► $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ ► $|0| = 0$

Notation

La distance entre x et y sur la droite réelle est notée $|x - y|$.

Exemple 15

La distance entre -1 et 3 est 4.



Méthode 16

Pour calculer la distance séparant deux nombres, on calcule la différence du plus grand et du plus petit.

Exemple 17

La distance entre 3 et 5 est donnée par $5 - 3 = 2$. La distance entre 3 et -1 est $3 - (-1) = 3 + 1 = 4$.

Remarque 18

Une distance est toujours positive.

La distance entre x et y est la distance entre y et x donc $|y - x| = |x - y|$.

Exemple 19

- La distance entre -3 et 8 est égale à $|8 - (-3)| = |11| = 11$, ce qui d'après la précédente remarque peut aussi se calculer $|(-3) - 8| = |-11| = 11$.
- De même, $|3 - 5| = |5 - 3| = 2$.

Propriété 20

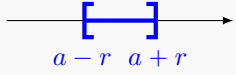
Pour tout nombre réel a ,

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Propriété 21

Soient a et x deux nombres réels et soit $r \geq 0$.

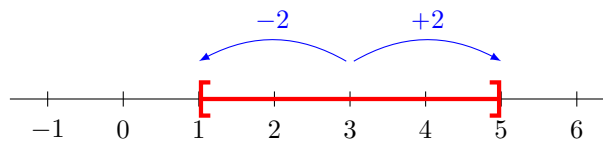
$|x - a| \leq r$ si, et seulement si $x \in [a - r; a + r]$. L'intervalle $[a - r, a + r]$ est l'ensemble des points à une distance inférieure à r de a . C'est-à-dire : pour tout $x \in \mathbb{R}$ dans $[a - r, a + r]$, x vérifie $|x - a| \leq r$.

Notation de l'intervalle	Droite numérique	Inégalités	Distance
$[a - r; a + r]$		$a - r \leq x \leq a + r$	$ x - a \leq r$

Exemple 22

Prenons $a = 3$ et $r = 2$.

$x \in [1; 5]$ si, et seulement si $|x - 3| \leq 2$. Cela revient à dire que la distance entre les nombres x et 3 est inférieure ou égale à 2.

**4 – Encadrement décimal d'un nombre réel****Définition 23**

Donner un **encadrement décimal** d'un réel x , c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$. Le nombre $b - a$ est appelé **amplitude de l'encadrement**.

On dit qu'un encadrement est à 10^{-n} **près** si son amplitude est égale à 10^{-n} .

Exemple 24

$3,14 \leq \pi \leq 3,15$ est un encadrement décimal de π à 10^{-2} près, c'est à dire à 0,01 près.

Exercice 25 (Math'x 2019)

On a mesuré une masse m et on donne comme résultat $m = 11,6$ kg. Le dernier chiffre est en fait connu à plus ou moins 0,5kg près. Donner un encadrement de m en kg et préciser son amplitude.

Remarque 26 (Pour la culture : développement décimal)

Les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Les nombres non décimaux possèdent également une écriture à virgule, infinie. (Remarque : On peut montrer qu'un nombre est rationnel si, et seulement si son écriture décimale se répète en boucle à partir d'un certain rang.) Cette écriture infinie est unique, à condition d'imposer qu'elle ne se termine pas par une succession infinie de 9. En effet, vous avez peut-être déjà croisé la curieuse égalité $0,9999 \dots = 1$: celle-ci est vraie, et illustre la nécessité de la condition d'unicité. Esquissons-en une démonstration (rigoureuse malgré tout !). Notons $x = 0,9999 \dots$. Par définition de la notation décimale,

$$x = \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots \quad \text{et donc} \quad 10x = 9 + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$$

On reconnaît x dans le deuxième membre : cela donne l'équation $10x = 9 + x$, et donc $x = 1$.

Exercices

S'exercer

Exercice 1

Cocher les cases du tableau si le nombre appartient à l'ensemble correspondant.

	N	Z	D	Q	R
-27					
189					
189,33					
$\frac{2}{3}$					
$\sqrt{3}$					

Exercice 2

Pour chacun des nombres suivants, citer tous les ensembles auxquels il appartient.

- ▶ -15,532
- ▶ 0,5856
- ▶ $\frac{51}{17}$
- ▶ $\frac{3}{8}$
- ▶ $\sqrt{50}$

Exercice 3

Pour chacun des couples de nombres suivants, déterminer la distance qui les sépare : (notation, puis valeur)

- ▶ 4 et (-2)
- ▶ 0 et $\frac{-3}{8}$
- ▶ 7,5 et 1,25
- ▶ $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$
- ▶ 3,75 et 4,20
- ▶ 2 et $\sqrt{2}$

Exercice 4

Recopier et compléter le tableau suivant :

Condition sur x	Représentation graphique	Intervalle
$1 \leq x \leq 3$		
$(-2) \leq x < 1,5$		
$4 < x \leq 7$		
$2 < x < \frac{8}{3}$		

Exercice 5

Recopier et compléter le tableau suivant :

Condition sur x	Représentation graphique	Intervalle
		$x \in [(-2); 3]$
		$x \in]3; 7]$
		$x \in]\frac{3}{4}; 2[$
		$x \in]7; \frac{25}{3}]$

Exercice 6

Recopier et compléter le tableau suivant :

Condition sur x	Représentation graphique	Intervalle
$x < 5$		
$x > 3$		
$x \leq (-4)$		
$x \geq 5, 2$		

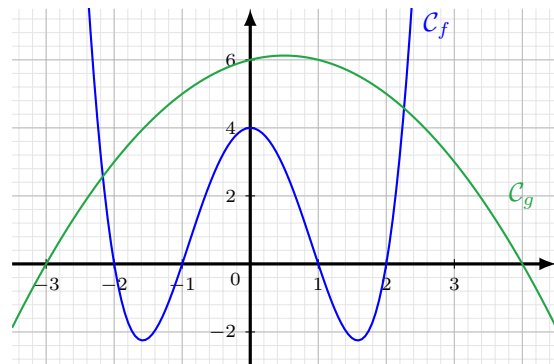
Exercice 7

Recopier et compléter le tableau suivant :

Condition sur x	Représentation graphique	Intervalle
		$x \in]-\infty; 3]$
		$x \in]3; +\infty[$
		$x \in]0; +\infty[$
		$x \in]-\infty; \frac{25}{3}]$

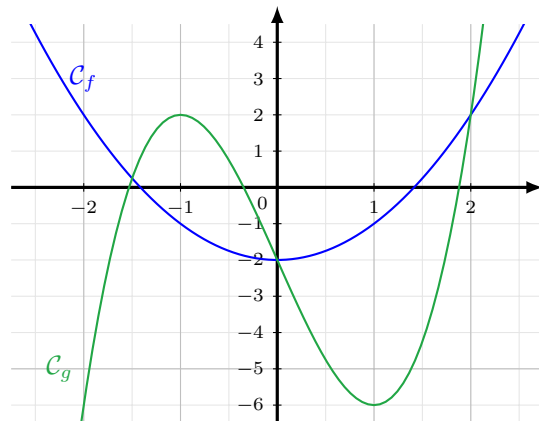
Exercice 8 (Lecture graphique)

- 1► Donner l'ensemble des abscisses pour lesquelles : le graphe de la fonction f est en dessous de l'axe des abscisses.
- 2► Donner l'ensemble de réels x vérifiant : $g(x) \geq 0$
- 3► Donner l'ensemble des réels x vérifiant $f(x) \geq 0$



Exercice 9 (Lecture graphique)

- 1► Donner les coordonnées des points d'intersections des deux graphes de fonctions.
- 2► Donner l'ensemble des abscisses pour lesquelles : le graphe de la fonction g est en dessous du graphe de la fonction f .
- 3► Donner l'ensemble de réels x vérifiant : $g(x) \geq f(x)$
- 4► Donner l'ensemble des réels x vérifiant $f(x) \geq g(x)$



Exercice 10

- ▶ Donner l'ensemble des réels dont la distance à a est inférieure ou égale à 3.
- ▶ Donner l'ensemble des réels dont la distance à b est supérieure strictement à 2.

S'entraîner

Exercice 11

Pour chacun des nombres suivants, citer tous les ensembles auxquels il appartient.

- | | | | | |
|-----------|-----------------|--------------|-------------------|-------------------|
| ▶ $-27,3$ | ▶ $-\sqrt{25}$ | ▶ $\sqrt{8}$ | ▶ $\frac{1}{250}$ | ▶ $\sqrt{144}$ |
| ▶ 16^2 | ▶ $\frac{2}{7}$ | ▶ -15 | ▶ $0,33333$ | ▶ $\frac{57}{19}$ |

Exercice 12

Déterminer tous les nombres dont :

- | | |
|--------------------------|--------------------------------------|
| ▶ La distance à 3 est 2. | ▶ La distance à 5 est $\frac{2}{5}$ |
| ▶ La distance à 7 est 9 | ▶ La distance à 12 est $\frac{1}{3}$ |

Exercice 13

Recopier et compléter le tableau suivant :

Condition sur x	Représentation graphique	Intervalle ou union
$-1,9 \leq x \leq -1,88$		
		$x \in]\frac{2}{7}; +\infty[$
$x > 269,47$		
		$x \in]-\infty; -7,5]$
$-16 < x$		
		$x \in]4; \frac{32}{7}[$
$ x - 3 < 2$		
$ x - 1 > 3$		
$2 < x - 5 < 3$		

6 Vecteurs du plan

Table des matières

1	L'objet « vecteur » comme translation	67
A	Définition et vocabulaire	67
B	Égalité, colinéarité	68
2	Manipulations de vecteurs	68
A	Somme de vecteurs	68
B	Produit d'un vecteur par un réel	71
C	Alignement de points	72
	Exercices	74

Programme

Bulletin officiel

Au cycle 4, la notion de translation fait l'objet d'une première approche, fondée sur l'observation de son effet sur les configurations planes et de manipulations diverses, notamment sur un quadrillage ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On s'y appuie en seconde pour introduire la notion de vecteur. Le professeur peut définir les opérations vectorielles à partir des coordonnées, ou bien commencer par leur construction géométrique. Dans tous les cas, la relation $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est mise en évidence. La relation de Chasles est introduite pour illustrer l'addition des vecteurs, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique.

Contenus

- ▶ Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M' . Direction, sens et norme.
- ▶ Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul.
- ▶ Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
- ▶ Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.

Capacités attendues

- ▶ Représenter géométriquement des vecteurs.
- ▶ Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- ▶ Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- ▶ Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.
- ▶ Établir que trois points sont alignés ou non.

Approfondissement possible

- ▶ Définition vectorielle des homothéties.

Détail

Contenus

- ▶ Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à translation qui transforme M en M' .
 - ▶ Direction, sens, norme.

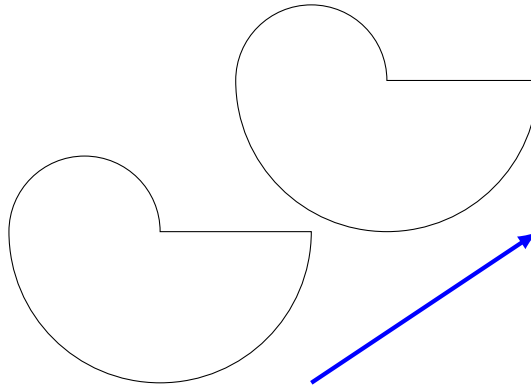
- Égalité de vecteurs, vecteurs opposés.
- Notation vecteur $\vec{u}$, le vecteur nul existe.
- Somme de deux vecteurs
- Relation de Chasles

/!\ Pas de calcul vectoriel en mode démonstration

1 – L'objet « vecteur » comme translation

A – Définition et vocabulaire

Soit $\mathcal{F}$ une figure plane. Transformer $\mathcal{F}$ par **translation**, c'est la faire glisser selon une direction, un sens et un longueur. On représente ces trois informations avec un flèche, appelée **vecteur**.



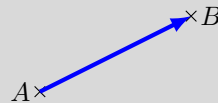
Vocabulaire vectoriel

Définition 1

Un **vecteur** est un objet géométrique représentant une translation. Il est défini par trois propriétés :

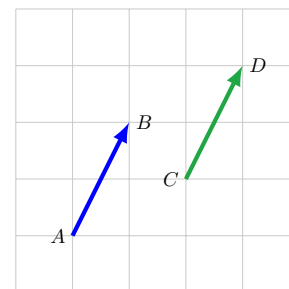
- ▶ sa **direction** (une droite selon laquelle la translation s'effectue),
- ▶ son **sens**,
- ▶ sa **norme** (la longueur du déplacement).

Lorsqu'une translation transforme un point A en un point B , on peut noter $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui lui est associé. On parle alors de **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$. Le point A est appelé **origine** de $\overrightarrow{AB}$, et le point B est appelé son **extrémité**.



Exemple 2

Dans le quadrillage ci-contre, considérons la translation qui glisse les points de 1 carreau vers la droite et de 2 carreaux vers le haut. Elle transforme le point A en le point B , et le point C en le point D . Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent donc tous deux cette translation.



Vecteur nul

Définition 3

Le vecteur associé à la translation qui ne déplace aucun point est appelé **vecteur nul**, et est noté $\vec{0}$.

B – Égalité, colinéarité

Définition 4

Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux s'ils représentent la même translation. Autrement dit, deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Proposition 5

Égalité de vecteurs

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On utilise parfois la notation $\vec{u}$ pour désigner un vecteur quand son origine et son extrémité importent peu. Un vecteur égal à $\vec{u}$ est appelé un **représentant de $\vec{u}$** .

Remarque 6

Si A et B sont deux points, alors $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$. Par convention, on dit que $\vec{0}$ n'a ni direction, ni sens.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme. Il existe une notion plus souple, avec moins de conditions :

Définition 7

Vecteurs colinéaires

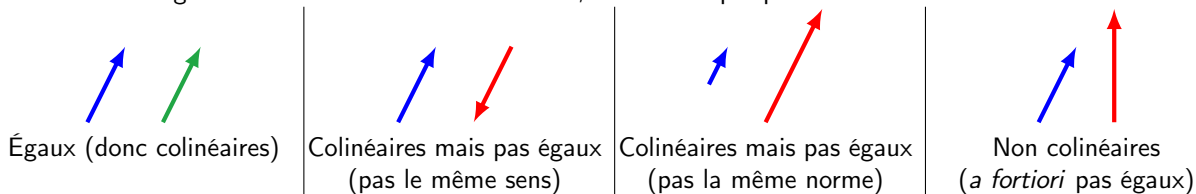
Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Remarque 8

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils forment un parallélogramme. Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils définissent un trapèze.

Remarque 9

Deux vecteurs égaux sont nécessairement colinéaires, mais la réciproque est fausse !

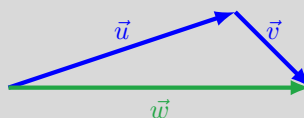


2 – Manipulations de vecteurs

A – Somme de vecteurs

Définition 10

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur représentant les deux translations successives de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Proposition 11**Relation de Chasles**

Soient A , B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

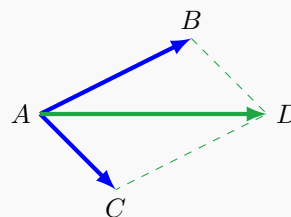
Proposition 12**Relation du parallélogramme**

Soient A , B , C et D quatre points du plan.

$ABDC$ est un parallélogramme

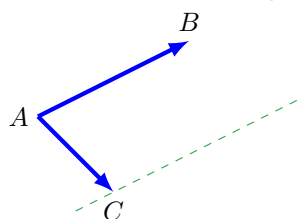
si, et seulement si

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

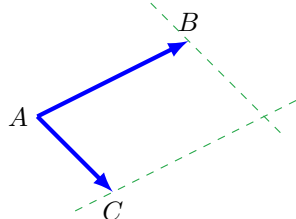
**Méthode 13 (Somme de deux vecteurs ayant même origine)**

Méthode avec parallélogramme (faire programme construction par étapes comme en 6e + rappel comment tracer une parallèle avec règle et équerre)

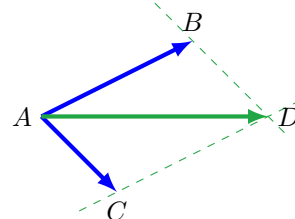
On donne A , B et C trois points du plan. On veut tracer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



ÉTAPE 1 : On trace la parallèle à (AB) passant par C



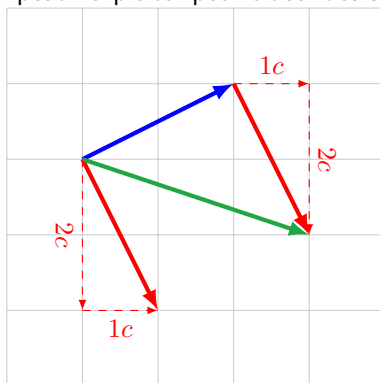
ÉTAPE 2 : On trace la parallèle à (AC) passant par B



ÉTAPE 3 : Le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ est le point d'intersection des deux parallèles.

Remarque 14

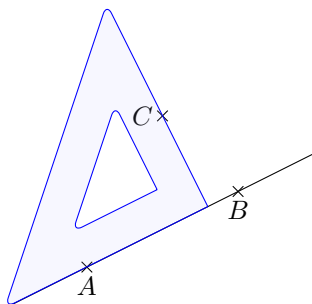
Lorsqu'on dispose d'un quadrillage, on peut l'exploiter pour tracer des sommes :



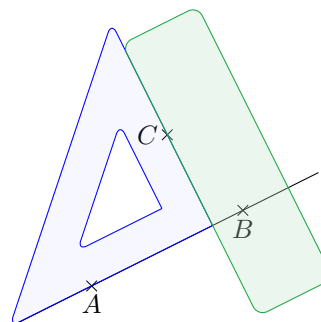
Remarque 15 (Tracer une parallèle)

Pour rappel, il y a deux méthodes pour tracer une parallèle avec les outils géométriques :

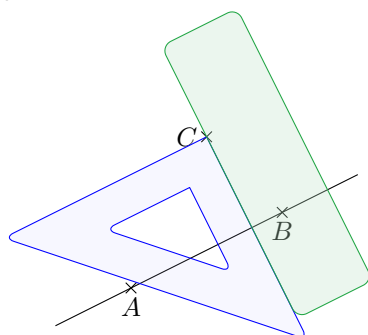
- Avec une règle et une équerre :



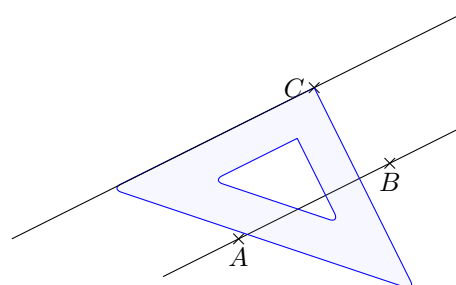
ÉTAPE 1 : On place l'équerre le long de (AB) , passant par C .



ÉTAPE 2 : On place la règle contre l'équerre.

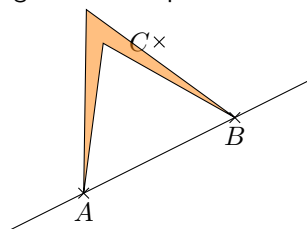


ÉTAPE 3 : On tourne l'équerre, contre la règle, le sommet en C .

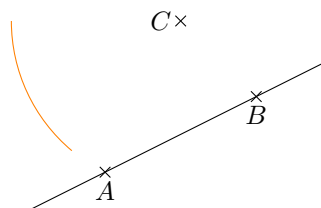


ÉTAPE 4 : On trace la parallèle.

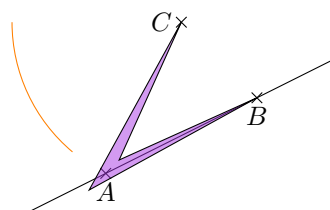
- Avec une règle et un compas :



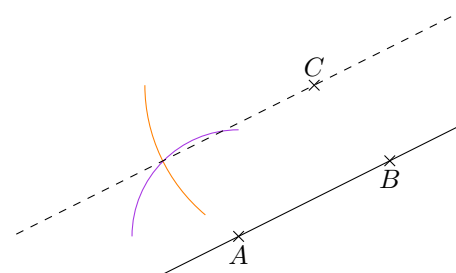
ÉTAPE 1 : On écarte le compas entre A et B .



ÉTAPE 2 : On trace un arc de cercle centré en C .



ÉTAPE 3 : On écarte le compas entre B et C .



ÉTAPE 4 : On trace un arc de cercle centré en A , qui donne un point de passage pour la parallèle.

B – Produit d'un vecteur par un réel

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On a alors bien envie d'écrire que $\overrightarrow{BA} = \vec{0} - \overrightarrow{AB}$. Comme le vecteur nul agit comme un 0 pour les vecteurs (il traduit l'absence de translation), on peut écrire $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. La notation algébrique correspond à l'intuition géométrique : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ traduit la translation qui transforme A en B ; le vecteur $\overrightarrow{BA}$ traduit la translation **opposée**, qui transforme B en A .

Opposé d'un vecteur

Définition 16

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

L'**opposé** de $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ qui a même direction, même norme, mais un sens opposé.

Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par deux points A et B du plan,

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Géométriquement, ajouter un vecteur à lui-même donne un vecteur de même sens, de même direction, mais de norme double. L'ajouter trois fois triple sa norme, et ainsi de suite. On a donc envie de parler de 2 fois un vecteur, 3 fois un vecteur, etc. En posant que multiplier un vecteur par un réel multiplie sa norme, on étend aisément cette idée aux nombres non entiers positifs. En ce qui concerne les nombres négatifs, on a envie d'écrire $-1 \times \vec{u} = -\vec{u}$: multiplier par un négatif doit avoir un effet sur le sens.

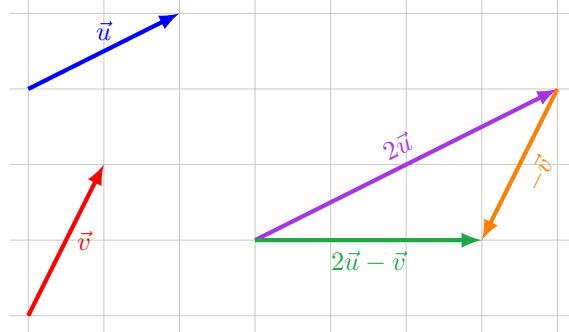
Définition 17

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et $k \in \mathbb{R}$.

- ▶ Dans ce contexte, k est appelé un **scalaire**.
- ▶ Si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et sens que $\vec{u}$, et dont la norme est k fois plus grande,
- ▶ Si $k < 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction que $\vec{u}$, un sens opposé, et dont la norme est $|k|$ fois plus grande,
- ▶ Si $k = 0$, alors $k\vec{u} = 0\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple 18

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan représentés ci-dessous. On a également représenté $2\vec{u} - \vec{v}$.



Caractérisation de la colinéarité

Proposition 19

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Proposition 20

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, soient k et k' deux scalaires.

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \quad \text{et} \quad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

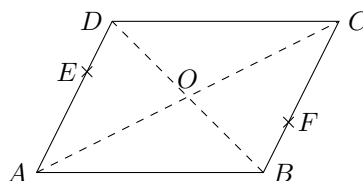
Exemple 21

$$\blacktriangleright 3(\vec{AB} + \vec{CD}) = 3\vec{AB} + 3\vec{CD}$$

$$\blacktriangleright 5 \times 3\vec{EF} = 15\vec{EF}$$

Exemple 22

Soient $ABCD$ un parallélogramme de centre O , et E et F les points tels que $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AD}$ et $\vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.



Les points E , O et F semblent alignés : montrons-le.

Commençons par montrer que $\vec{AE} = \vec{FC}$:

$$\begin{aligned} \vec{AE} &= \frac{2}{3}\vec{AD} && \text{(relation définissant } E) \\ &= \frac{2}{3}\vec{BC} && \text{(car } ABCD \text{ est un parallélogramme)} \\ &= \frac{2}{3} \times 3\vec{BF} && \text{(relation définissant } F) \\ &= 2\vec{BF} \end{aligned}$$

Remarquons que d'après la relation de Chasles, $\vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC}$, donc $3\vec{BF} = \vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC}$, donc $\vec{FC} = 2\vec{BF}$. Ainsi $\vec{AE} = \vec{FC}$.

Par conséquent, $AFCE$ est un parallélogramme. Le segment $[AC]$ en est une diagonale, et O est le milieu de cette diagonale (car $[AC]$ est aussi une diagonale de $ABCD$ dont O est le centre). Donc O est le centre de $AFCE$, donc c'est aussi le milieu de la diagonale $[EF]$. En particulier, E , O et F sont alignés.

C – Alignement de points

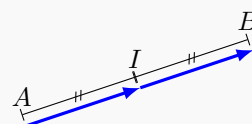
Proposition 23

Milieu d'un segment

Soient A et B deux points du plan. Soit I un point du plan.

Le point I est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$.

Autrement dit, I est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

**Proposition 24**

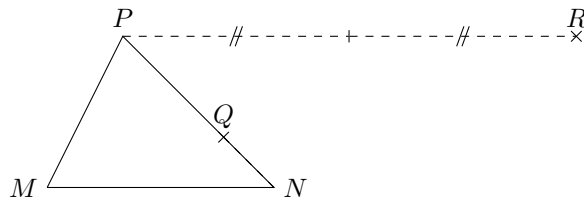
Alignement et colinéarité

Soient A , B et C trois points du plan.

A , B et C sont alignés si, et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires

Exemple 25

Soit MNP un triangle. Soit Q et R les points tels que $\overrightarrow{NQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MN}$.



Montrons que M , R et Q sont alignés. Montrons avant cela que $\overrightarrow{MR} = 3\overrightarrow{MQ} + 3\overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP}$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MR} &= \overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MN} && \text{(définition de } R) \\
 &= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP} + 2(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN}) && \text{(relation de Chasles 3 fois)} \\
 &= 3\overrightarrow{MQ} + 3\overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP}
 \end{aligned}$$

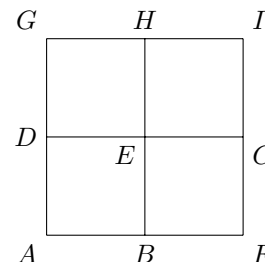
Or d'après la définition de Q , $3\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NP}$, donc $3\overrightarrow{QN} = -3\overrightarrow{NQ} = -\overrightarrow{NP}$, donc $3\overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$. Ainsi $\overrightarrow{MR} = 3\overrightarrow{MQ}$, donc $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont colinéaires, donc M , R et Q sont alignés.

Exercices

Appliquer

Exercice 1

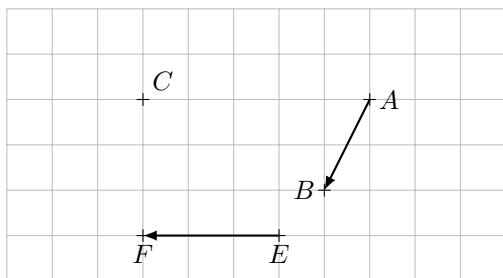
- 1► Lister quatre paires distinctes de vecteurs égaux.
- 2► Donner deux vecteurs opposés.
- 3► Donner deux paires distinctes de vecteurs colinéaires qui ne sont pas égaux.
- 4► Donner trois vecteurs qui se sont pas colinéaires deux à deux.
- 5► Donner trois vecteurs qui ont des normes différentes.



Exercice 2

Dans la figure ci-dessous, placer :

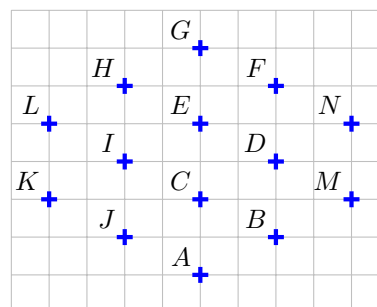
- D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$
- G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EF}$
- H tel que $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}$
- I tel que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CG}$
- J tel que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$



Exercice 3

Dans la figure ci-dessous,

- 1► Citer un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$.
- 2► Citer deux vecteur égal à $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{KE}$.
- 3► Citer deux vecteur égal à $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{IB}$.
- 4► Citer un vecteur égal à $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{NC}$.
- 5► Citer deux vecteur égal à $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{DE}$.



Exercice 4

Compléter les relations suivantes :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \dots$
- $\overrightarrow{CB} + \dots = \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{IL} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IL}$
- $\overrightarrow{E\dots} = -\overrightarrow{FE}$
- $\overrightarrow{G\dots} - \dots = \vec{0}$

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

- a► $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ}$
- b► $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}$
- c► $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LK}$
- d► $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Exercice 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

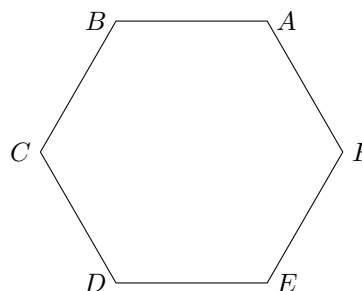
- 1► Que vaut $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$?
- 2► Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{CB}$.

S'exercer

Exercice 7

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier.

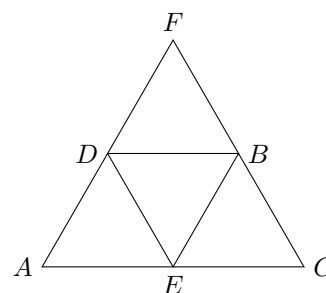
- 1► Lister tous les vecteurs égaux.
- 2► Donner deux vecteurs opposés.
- 3► Donner deux vecteurs colinéaires qui ne sont pas égaux.
- 4► Donner trois vecteurs qui se sont pas colinéaires deux à deux.
- 5► Donner trois vecteurs qui ont des normes différentes.



Exercice 8

On considère un triangle équilatéral divisé en 4 triangles équilatéraux. Exprimer les sommes suivantes sous la forme d'un unique vecteur :

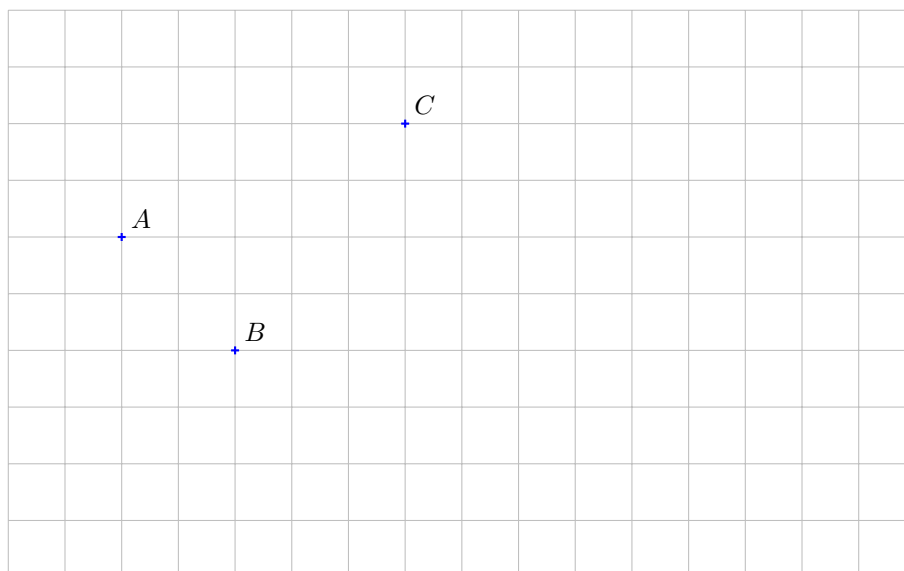
- | | |
|--|--|
| 1► $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF}$ | 4► $2\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FB}$ |
| 2► $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ | 5► $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{DE}$ |
| 3► $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$ | 6► $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{CF}$ |



Exercice 9

On a placé trois points A , B et C . Construire :

- | | |
|---|---|
| ► Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, | ► Le point P tel que $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. |
| ► Le point N tel que $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. | ► Le point Q tel que $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. |



Exercice 10

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

- a► « Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $AB = CD$. »
- b► « Si $EF = EG$, alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$. »
- c► « Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $(AB) \parallel (CD)$. »
- d► « Si $(EF) \parallel (GH)$, alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$. »
- e► « Si $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{AB}$, alors $T \in (AB)$. »

Exercice 11

On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O . On note F l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$, et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Démontrer que $ABEC$ est un parallélogramme. (On fera un schéma de la situation.)

Exercice 12

Les points A, B, C, D, O et I sont alignés sur une droite graduée représentée ci-dessous.



Déterminer les réels k, k' et k'' tels que :

$$\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{DB} \quad , \quad \overrightarrow{DB} = k'\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{IB} = k''\overrightarrow{IA}$$

S'entraîner

Exercice 13

Soit ABC un triangle non aplati. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C en M . La translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$ transforme A en N .

- 1► Faire un schéma soigné de la situation.
- 2► Quelle est la nature du quadrilatère $AMBN$? Justifier à l'aide d'égalités vectorielles. (Indication : comparer $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{CA}$.)

Exercice 14

Soit ABC un triangle non aplati, notons M le milieu de $[AB]$.

- 1► Faire un schéma soigné de la situation.
- 2► Placer M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- 3► Placer A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$.
- 4► Démontrer que $A'BCA$ est un parallélogramme.
- 5► En déduire que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MC}$.

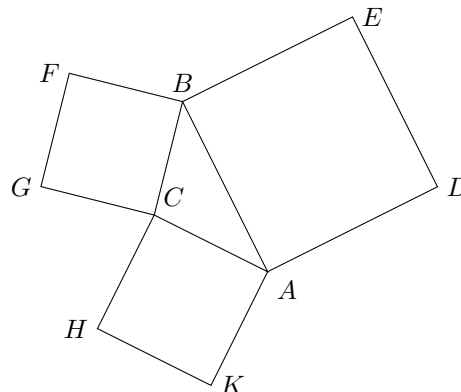
Exercice 15

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O . La translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ transforme B en E . La translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ transforme D en F .

Démontrer que O est le milieu de $[EF]$.

Exercice 16

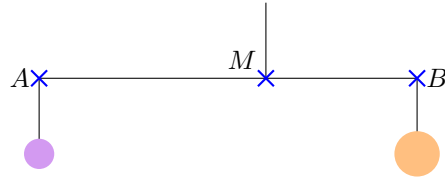
La figure ci-dessous est constituée de d'un triangle ABC et de trois carrés $ABED, CBFG$ et $ACHK$. Que vaut la somme $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{KD}$?



Exercice 17

On construit un mobile avec deux masses $m_A = 20\text{g}$ et $m_B = 30\text{g}$ aux extrémités d'une tige $[AB]$. Le mobile est suspendu par une ficelle au point $M \in [AB]$. On suppose la masse de la tige négligeable. Les lois de la physique indiquent que le mobile sera en équilibre lorsque $20\overrightarrow{MA} + 30\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. On cherche à déterminer la position du point M qui satisfait cette condition.

- 1► En utilisant la relation de Chasles avec $\overrightarrow{MB}$, montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.
- 2► Comment interpréter cette égalité dans le contexte de l'exercice ?



Exercice 18

On a placé un point O et représenté deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

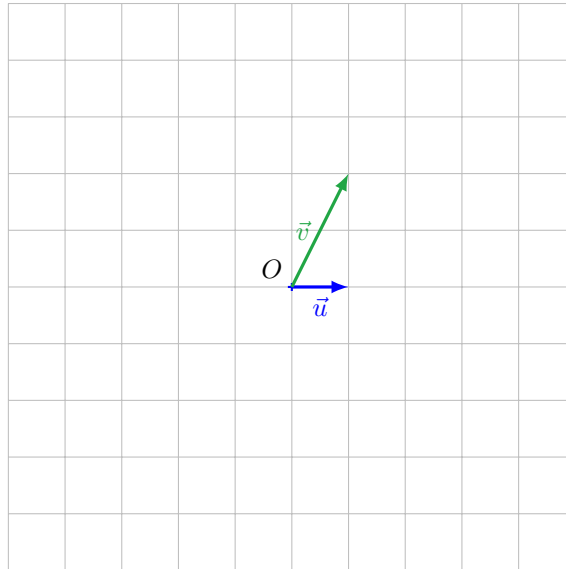
- 1► Construire (justifier) les points A , B et C tels que :

$$\triangleright \overrightarrow{OA} = 3\vec{u} + \vec{v},$$

$$\triangleright \overrightarrow{OB} = -2\vec{u} - 2\vec{v},$$

$$\triangleright \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v},$$

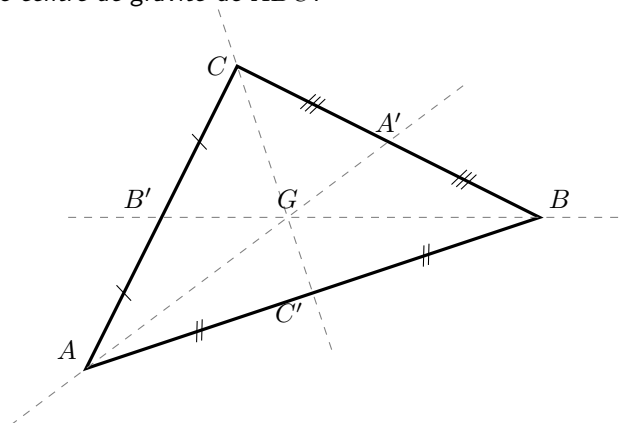
- 2► Quel conjecture peut-on énoncer sur A , B et C ?
- 3► Exprimer $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- 4► Démontrer la conjecture.



Pour aller (plus) loin

Problème 19 (Centre de gravité et médianes)

Soit ABC un triangle. On appelle *médiane issue de A* la droite passant par A et le milieu de $[BC]$. On définit de même les médianes issues des deux autres sommets. Les trois médianes sont concourantes : on note G leur point d'intersection, appelé *centre de gravité* de ABC .



L'objectif est de montrer les deux propriétés suivantes

- Le point G vérifie l'équation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,
- Le point G est situé à $\frac{2}{3}$ de la longueur de chaque médiane à partir des sommets.

1► Soit M le point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. On admet qu'un tel point M existe et est unique. L'objectif de cette question est de montrer la première propriété : pour cela, nous allons montrer que $M = G$.

On admet que l'équation vérifiée par M le place à l'intérieur de ABC . On définit les points suivants :

- a► I l'intersection de (AM) et (BC) ,
- b► J l'intersection de (BM) et (AC) ,
- c► K l'intersection de (CM) et (AB) ,

On note enfin D le symétrique de A par rapport à M .

- a► Faire un schéma soigné représentant la situation.
- b► À l'aide de la relation de Chasles et de la définition de D , exprimer $\overrightarrow{BD}$ uniquement en fonction de $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$.
- c► En déduire que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MC}$.
- d► Quelle est la nature de $BDCM$?
- e► Justifier que G , I et D sont alignés. (*Indication : justifier que par la définition de chacun, ils appartiennent à la droite (AM) .*)
- f► En déduire que I est le milieu de $[BC]$.
- g► En déduire que (AM) est la médiane de ABC issue de A .
- h► Expliquer en comment ce raisonnement se transpose pour montrer que (BM) et (CM) sont les deux autres médianes de ABC .
- i► Conclure que $M = G$.

2► Montrons désormais la seconde propriété. On reprend le schéma de la question précédente avec ses notations. On rappelle que $BDCG$ est un parallélogramme de centre I .

- a► Justifier que $GD = 2GI$, et que $AG = GD$. En déduire que $GA = 2GI$.
- b► En déduire que $GA = \frac{2}{3}GI$. Interpréter et conclure.
- c► Expliquer comment cet raisonnement se transpose aux deux autres sommets.

7 (In)équations de degré 1

Table des matières

1	Notion d'équation	80
2	Équations du premier degré	81
3	Inéquations du premier degré	82
	Exercices	83

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- Somme d'inégalités.
- Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

Capacités attendues

- Modéliser un problème par une inéquation.
- Résoudre une inéquation du premier degré.

Détail

Contenus

- Équations du premier degré
 - Modélisation dans problèmes.
 - Résolution algébrique & modèle en barres.
- Inéquation
 - Modélisation dans problèmes.
 - Résolution par équations.
 - Résolution algébrique.
 - Somme d'inégalités.
 - Multiplication d'inégalités par réel (lien variation fonction affine)

1 – Notion d'équation

Vocabulaire

Définition 1

- ▶ Une **équation** est une égalité faisant intervenir (au moins) un nombre de valeur inconnue, justement appelé **inconnue de l'équation**. Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue, et fausse pour d'autres.
- ▶ Trouver une **solution** d'une équation, c'est trouver une valeur que peut prendre l'inconnue pour l'égalité soit vraie.
- ▶ **Résoudre une équation**, c'est déterminer toutes ses solutions.
- ▶ Pour vérifier si une certaine valeur de l'inconnue d'une équation est solution de cette-dernière, on remplace chaque occurrence de l'inconnue par la valeur, et on vérifie si l'égalité est juste. On dit qu'on **substitue** la valeur à l'inconnue.
- ▶ La partie à gauche du signe $=$ est appelée **membre de gauche** de l'équation, et la partie à droite est appelée **membre de droite**.
- ▶ Une équation **du premier degré** est une équation dans laquelle les inconnues sont uniquement multipliées par des nombres et ajoutées entre elles (pas de puissances, pas de fonctions spéciales).

Exemple 2

- ▶ $2x - 1 = 0$ est une équation du premier degré d'inconnue x . L'égalité est vérifiée pour $x = \frac{1}{2}$, mais elle est fausse pour $x = 0$ puisque $2 \times 0 - 1 = -1 \neq 0$.
- ▶ $3y^2 - 1 = 2$ est une équation d'inconnue y qui n'est pas du premier degré. Elle est vraie pour $y = 1$, mais elle est fausse pour $y = 5$ puisque $3 \times 5^2 - 1 = 3 \times 25 - 1 = 74 \neq 2$.

Remarque 3

Il y a plusieurs types d'égalités en mathématiques :

- ▶ les **équations**, comme $2x + 1 = 0$, qui ne sont pas toujours vraies, seulement pour certaines valeurs de x , appelée **inconnue** de l'équation ;
- ▶ les **identités**, comme $3(x + 2) = 3x + 6$, qui sont toujours vraies, quelle que soit la valeur de x , alors appelée **variable** de l'identité.

Remarque 4

Certains concepts mathématiques sont définis comme les solutions d'un certaine équation :

- ▶ L'opposé d'un nombre a est la solution de l'équation $x + a = 0$ d'inconnue x .
- ▶ L'inverse d'un nombre $a \neq 0$ est la solution de l'équation $ax = 1$ d'inconnue x .
- ▶ La fraction $\frac{n}{d}$ est la solution de l'équation $dx = n$ d'inconnue x .
- ▶ La racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ est la solution **positive** de l'équation $x^2 = a$ d'inconnue x .

Proposition 5

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ d'inconnue x avec $a \geq 0$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Définition 6

On dit que deux équations sont **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

Méthode 7 (Manipuler une équation)

Quand on manipule une équation, toute opération effectuée d'un côté doit être appliquée également de l'autre côté.

Par exemple, si on ajoute 2 à gauche, on doit aussi ajouter 2 à droite.

2 – Équations du premier degré**Méthode 8 (Résoudre une équation du premier degré)**

Pour résoudre une équation, il faut la transformer en une autre équation plus simple équivalente. Le plus souvent, l'objectif est d'arriver à la forme $x = a$. Pour cela, on dispose de deux procédures, que l'on peut mélanger :

- **Procédure 1** : Ajouter ou soustraire une même quantité aux deux membres

On peut ajouter ou soustraire aux deux membres une même quantité, qui peut dépendre ou non de l'inconnue.

Présentation 1 : en ligne

$$\begin{aligned} 6x - 2 &= 3x + 4 \\ 6x - 2 - 3x &= 3x + 4 - 3x \\ 3x - 2 &= 4 \\ 3x - 2 + 2 &= 4 + 2 \\ 3x &= 6 \end{aligned}$$

Présentation 2 : avec des flèches

$$\begin{array}{c} -3x \quad \left(\begin{array}{l} 6x - 2 = 3x + 4 \\ 3x - 2 = 4 \end{array} \right) -3x \\ +2 \quad \left(\begin{array}{l} 3x - 2 = 4 \\ 3x = 6 \end{array} \right) +2 \end{array}$$

Présentation 3 : en colonnes

$$\begin{array}{rcl} 6x - 2 & = & 3x + 4 \\ -3x & & -3x \\ \hline 3x - 2 & = & 4 \\ +2 & +2 & \\ \hline 3x & = & 6 \end{array}$$

- **Procédure 2** : Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre

On peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre. Attention : on n'a pas le droit de diviser par une quantité qui dépend de l'inconnue, sauf mention contraire.

Présentation 1 : en ligne

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Présentation 2 : avec des flèches

$$\div 3 \left(\begin{array}{l} 3x = 6 \\ x = 2 \end{array} \right) \div 3$$

Une fois que l'on a déterminé toutes les solutions de l'équation, on écrit {solution n°1, solution n°2, ...}. Par exemple, ici, {2}.

Remarque 9

Dans la présentation en ligne, attention à ne pas oublier les parenthèses quand c'est nécessaire !

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 5x - 3 \\ 2 \times (2x + 4) &= 2 \times (5x - 3) \end{aligned}$$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

a► $x + 7 = 12$

b► $5x = 18$

c► $-x + 3 = 2x - 8$

d► $8(x + 2) = 6x + 3$

e► $4(x - 5) - 6(4 - x) = 12 + 3(1 + x)$

f► $-5(1 - x) = 2$

3 – Inéquations du premier degré

Définition 11

Une **inéquation** est une inégalité faisant intervenir (au moins) un nombre de valeur inconnue, justement appelé **inconnue de l'inéquation**. Cette inégalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue, et fausse pour d'autres.

Le vocabulaire se transpose des équations aux inéquations.

Il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou on divise par un nombre négatif.

On ne multiplie/divise jamais par du x .

Exemple 12

Réolvons l'inéquation $x - 2 \geq 5$:

$$\begin{array}{c} x - 2 \geq 5 \\ +2 \quad \quad \quad +2 \\ \hline x \geq 7 \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions $[7; +\infty[$.

Exemple 13

Réolvons l'inéquation $\frac{x}{5} \leq 9$:

$$\begin{array}{c} \frac{x}{5} \leq 9 \\ \times 5 \quad \quad \quad \times 5 \\ \hline x \leq 45 \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions est $] -\infty; 45]$.

Exemple 14

Réolvons l'inéquation $-2x \leq 11$:

$$\begin{array}{c} -2x \leq 11 \\ \div (-2) \quad \quad \quad \div (-2) \\ \hline x \geq \frac{11}{-2} \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left[\frac{-11}{2}; +\infty \right[$.

Exemple 15

Réolvons l'inéquation $-3x + 2 \geq 11$.

$$\begin{array}{c} -3x + 2 \geq 11 \\ -2 \quad \quad \quad -2 \\ \hline -3x \geq 9 \\ \div (-3) \quad \quad \quad \div (-3) \\ \hline x \geq -3 \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions est $] -\infty; -3]$.

Exercices

S'exercer

Équations

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} \triangleright 2x = 16 & \triangleright 3y - 6 = 0 & \triangleright z + 7 = 4 & \triangleright 3t - 3 = 9 & \triangleright u + 1 = 2u \end{array}$$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \triangleright 3x + 7 = 0 & \triangleright 3(z + 7) = 9 & \triangleright 2u + 3 = (-2)(5 - u) \\ \triangleright 6 - y = 4 & \triangleright 2t - 8 = 2(t - 4) & \triangleright 12u + 3 = 4(5 + 3u) \end{array}$$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} \triangleright 4x - 3 = 2x + 9 & \triangleright 6y - 9 = 3y + 4 & \triangleright 8 - (3z + 2) = 5z - 5 & \triangleright 7 + 2(3 - t) = 4t - 1 \end{array}$$

Inéquations

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} \triangleright 3x > 9 & \triangleright 5y < 25 & \triangleright z + 10 < 16 & \triangleright t - 15 \geq 30 & \triangleright -u > 2 \end{array}$$

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \triangleright 2x + 1 > 3 & \triangleright -5z + \frac{1}{2} \geq 3 & \triangleright 2 - t < 5 \\ \triangleright 3y - 2 \leq 7 & & \triangleright 5(u + 11) > (-6) \end{array}$$

Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \triangleright \frac{-9x + 1}{5} > 11 & \triangleright 2 - 4y \leq 3 & \triangleright 5t - 3 \leq 8t - 6 \\ & \triangleright 7z + 3 > 2z - 5 & \triangleright u\sqrt{2} - 1 > 1 \end{array}$$

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \triangleright -5x + 4 > 19 & \triangleright 100 - 3y < 34 & \triangleright 10 - z \leq 2z - 23 \end{array}$$

S'entraîner

Équations

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

$$\triangleright \frac{3x}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\triangleright 0 = -3 - 2y$$

$$\triangleright \frac{z-4}{3} = \frac{z+3}{4}$$

$$\triangleright \frac{3}{4}t - \frac{5}{4} = t + \frac{1}{12}$$

Exercice 9

On considère la fonction définie par l'expression : $f(x) = \frac{2x+3}{x+7}$

- 1► Donner l'ensemble de définition de f .
- 2► Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
- 3► Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -2$

Exercice 10

Alice pense à trois entier naturels consécutifs dont la somme est 135, quel sont ces nombres ?

Exercice 11

Les dépenses d'un service hospitaliers sont de deux types : les charges fixes qui s'élèvent à 1500€ et les charges variables qui s'élèvent à 300€ par patient.

- 1► Écrire en fonction du nombre p de patients le montant des dépenses du service hospitalier.
- 2► Si le service a dépensé 6900€, combien de patients a t-il soigné ?

Inéquations

Exercice 12

Pour prendre un taxi parisien, il faut régler 4,40€ de prise en charge et 1,20€ par kilomètre parcouru. Quelle distance peut on parcourir avec 20€ en poche ?

Exercice 13

Un vendeur de marrons dépense 30€ en marrons chaque jour, et doit payer 15€ d'énergie chaque jour pour alimenter son four. Le prix d'un sachet de marrons est de 2,50€. Combien de sachets de marrons doit vendre le commerçant pour gagner au moins 60€ en un jour ?

Exercice 14

On propose à un agent immobilier deux offres d'emploi.

La société A lui propose un fixe mensuel de 1000 € avec un intéressement de 15% sur montant des ventes effectuées. La société B lui propose un fixe de 600 € avec un intéressement de 25%.

L'agent hésite puis se décide pour la société B . Quel montant minimum de ventes pense-t-il réaliser par mois ?

En autonomie

Exercice 15

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

- ▶ $4x = 0$
- ▶ $z - (5z + 7) = 2z - 3$
- ▶ $2u + 2,5 = \frac{1}{3}(6u + 7,5)$
- ▶ $3y + 1 = 0$
- ▶ $3t + 1 = (-1) + 3t$

Exercice 16

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

- ▶ $8x = 4$
- ▶ $9z + 9 = 45 - z$
- ▶ $\frac{7u}{4} = \frac{16}{14}$
- ▶ $6y - 4 = 5$
- ▶ $(-2t) + 5 = t + 4$
- ▶ $x - 1 = 5x + 5$

Exercice 17

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

- ▶ $4x - 5(3 - 2x) = 4 - (2x - 7)$
- ▶ $5z - 3[7 - 4(3 - 2z)] = 5(3 - z) - 4$
- ▶ $9y - 3(4 - 3y) = 2 - [35 - 3(4 - 2y)]$
- ▶ $3t - 5(3 - 2t) = 6t - 15$

Exercice 18

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

- ▶ $7x \geq 0$
- ▶ $5y + 1 \geq 0$
- ▶ $z - 4 \geq 3$
- ▶ $2t - 3 \leq 5$
- ▶ $u - 7 < 2$

Exercice 19

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

- ▶ $5x + 1 \geq 2x + 3$
- ▶ $z + 3 \geq (-2) - z$
- ▶ $u \geq u + 1$
- ▶ $3y + 4 \geq 2y + 2$
- ▶ $\frac{t}{4} \geq 8$
- ▶ $2u + 18 \geq 2(u + 4)$

Exercice 20

Mme A a repéré une fuite d'eau sous son évier ce matin à 7h. Pour recueillir l'eau, elle a déposé une baignoire qui peut contenir 7L sous l'évier. Il tombe une goutte toute les 6 secondes. Le volume d'une goutte d'eau est de 0,05 mL.

- ▶ Mme A peut elle partir travailler et revenir vider la baignoire à 19h sans risque de débordement ?
- ▶ Déterminer le temps que mettra la baignoire à se remplir.

Exercice 21 Un problème légèrement plus corsé

Deux forfaits téléphoniques proposent SMS et appels illimités. Dans le forfait de l'opérateur A, qui coûte 9,99€ par mois on a aussi droit à 500Mo de données. Chaque Mo de données supplémentaire utilisé coûtera 0,03€. Dans le forfait de l'opérateur B, qui coûte 12,99€ par mois, on a droit à 1000 Mo de données. Chaque Mo de données supplémentaire coûtera 0,07€.

Déterminer le forfait le plus avantageux en fonction de la quantité de données utilisée chaque mois.

8 Fonctions affines

Table des matières

1	Point de vue algébrique	88
2	Point de vue géométrique	89
	Exercices	93

Programme

Bulletin officiel

Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droite pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droite.

Contenus

- ▶ Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif : liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- ▶ Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
- ▶ Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

Capacités attendues

- ▶ Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Détail

Contenus

- ▶ Fonctions affines
 - ▶ Coefficient directeur et ordonnée à l'origine, $f(x) = ax + b$
 - ▶ Représentation graphique et lecture graphique de a et b
 - ▶ Variation de fonctions affines.

1 – Point de vue algébrique

Définition 1

Fonction affine

Une fonction f est dite **affine** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax + b$$

- ▶ Le nombre a est appelé **coefficient directeur** ou **pente** de f .
- ▶ Le nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de f .

Exemple 2

Les fonctions définies par $f(x) = 2x + 3$, par $g(x) = -5x + 8$, ou par $h(x) = -\frac{2}{5}x + 1,8$ sont des fonctions affines.

Les fonctions définies par $f(x) = \frac{2}{x} + 6$, ou par $g(x) = 3x^2 + 6$ ou par $h(x) = \sqrt{2x + 9}$ ne sont pas affines.

Définition 3

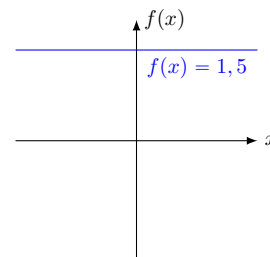
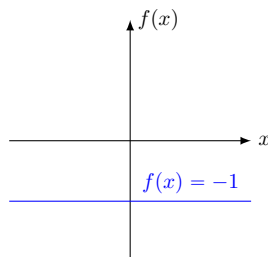
Fonction constante, fonction linéaire

Une fonction affine est dite :

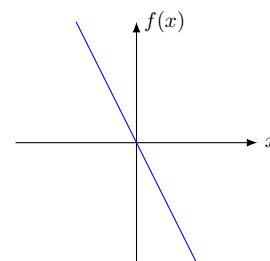
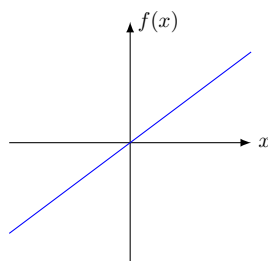
- ▶ **linéaire** lorsque $b = 0$,
- ▶ **constante** lorsque $a = 0$.

Remarque 4 (Cas constant et linéaire graphiquement)

- ▶ Si $a = 0$, alors f est constante : la droite est parallèle à l'axe des abscisses.



- ▶ Si $b = 0$, alors f est **linéaire**. Elle passe par l'origine du repère.



(Pour rappel, une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité!)

Proposition 5

Si f est affine, alors pour n'importe quelles valeurs x et y distinctes, la pente se calcule par la formule :

$$a = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Méthode 6 (Trouver l'expression de f avec 2 valeurs données)

Sur un exemple : trouvons l'expression de la fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(3) = 9$.
D'après la proposition précédente, le coefficient directeur de f peut être calculé comme :

$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine, on pose une petite équation. Notons la b , de sorte que :

$$f(x) = ax + b = 2x + b$$

On sait que $f(1) = 5$, mais $f(1) = 2 \times 1 + b = 2 + b$, donc :

$$5 = 2 + b \quad \text{donc} \quad b = 3$$

et finalement $f(x) = 2x + 3$.

Exercice 7

Déterminer l'expression de la fonction affine f telle que $f(3) = 12$ et $f(8) = 19$.

2 – Point de vue géométrique

Dans ce paragraphe, on munit le plan d'un repère orthonormé.

Théorème 8

Une fonction est affine *si, et seulement si* sa courbe représentative est une droite.

Ce théorème sera démontré dans le chapitre sur les droites du plan.

Méthode 9 (Trouver l'expression de f avec 2 points de passage)

Supposons que la courbe de f passe par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Cela signifie donc que $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$. On se ramène donc à la méthode algébrique précédente.

On en dégage la formule souvent vue suivante :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

On peut calculer b en faisant $b = y_A - a \times x_A$ (ou qui $y_B - a \times x_B$ qui donne le même résultat).

Remarque 10 (Erreurs fréquentes)

On peut échanger les rôles de A et de B , la seule chose qui importe est l'ordre : soit on écrit les coordonnées de B d'abord et celles de A ensuite, soit l'inverse, mais on ne les mélange pas. Attention à bien mettre les deux ordonnées en haut, et les deux abscisses en bas.

Exemple 11

Déterminons l'expression de la fonction affine passant par $A(16; 25)$ et $B(22; 34)$.

D'après la formule, $a = \frac{34 - 25}{22 - 16} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, et $b = 25 - \frac{3}{2} \times 16 = 1$.

Ainsi, $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

Exercice 12

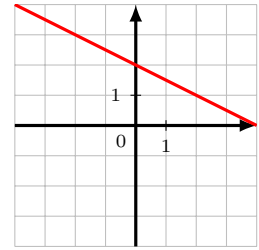
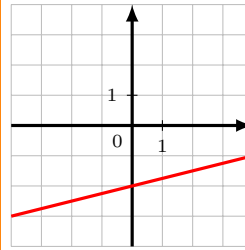
Déterminer les expressions des fonctions affines passant par les points donnés à l'aide la méthode précédente :

1► $A(12; 26)$ et $B(16; 36)$

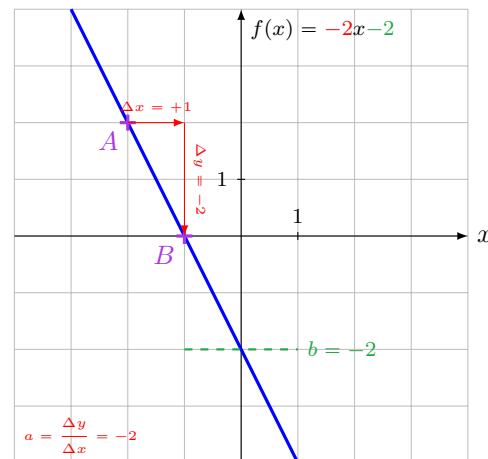
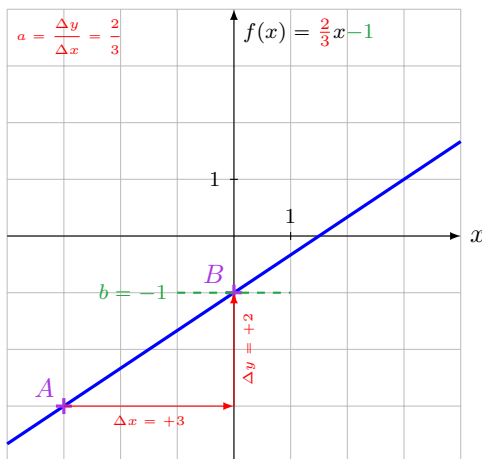
2► $A(15; 8)$ et $B\left(15; \frac{5}{7}\right)$

Exercice 13

Déterminer les expressions des fonctions affines suivantes à l'aide la méthode précédente (on choisira deux points de passage pertinents) :

Méthode 14 (Trouver a et b graphiquement)

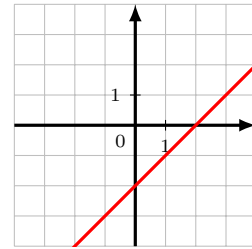
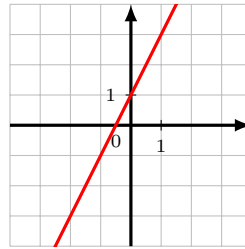
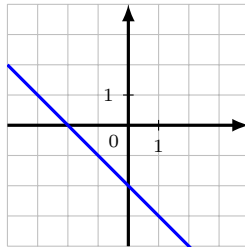
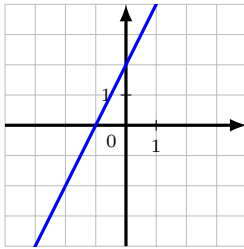
- 1► On trouve le coefficient directeur a en calculant le rapport du déplacement vertical par le déplacement horizontal entre deux points de passage bien identifiés : on trouve deux points A et B du quadrillage par lesquels la droite passe, et on applique la formule de la méthode précédente.
- 2► Regardons l'**ordonnée à l'origine**, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse 0, autrement l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées. Si elle passe pile sur une graduation, alors on a le droit de lire b directement, sinon on pose une petite équation avec un point de passage, comme dans la méthode précédente.



(Attention, quand on les compte vers la gauche ou vers le bas, les carreaux sont comptés négativement, comme dans le second exemple.)

Exercice 15

Déterminer les expressions des fonctions affines représentées ci-dessous :

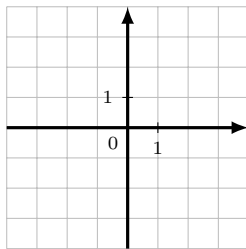
Méthode 16 (Tracer f à partir de son expression – méthode par calcul)

On détermine deux points A et B de passage en calculant deux images pratiques.

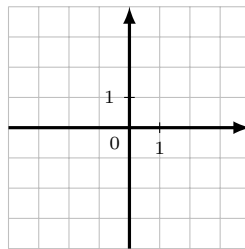
Exemple : on veut tracer $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$. On considère les images $f(0) = 1$ et $f(3) = 3$, qui donnent les points de passage A et B de coordonnées $(0; 1)$ et $(3; 3)$. On trace enfin la droite passant par ces deux points.

Exercice 17

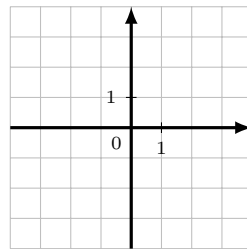
Tracer les fonctions suivantes en utilisant la méthode précédente :



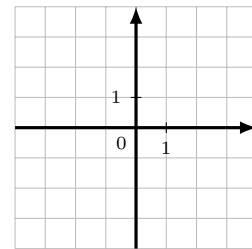
$$f(x) = -2x + 3$$



$$f(x) = x - 3$$



$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$



$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

Méthode 18 (Tracer f à partir de son expression – méthode géométrique)

1► Déterminer un point de passage de la droite sur le quadrillage (en général, l'ordonnée à l'origine est le meilleur candidat).

2► Ensuite,

Si le coefficient directeur est un entier :

- Partant du point précédent, on déplace le crayon de 1 carreau vers la droite.
- De là où se trouve le crayon, on monte ou on descend d'autant de carreaux que le coefficient directeur, selon son signe.

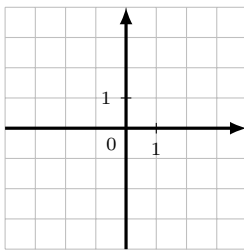
Sinon, si le coefficient directeur est une fraction :

- On déplace le crayon d'autant de carreaux vers la droite que le dénominateur.
- De là où se trouve le crayon, on monte ou on descend d'autant de carreaux que le numérateur, selon son signe.

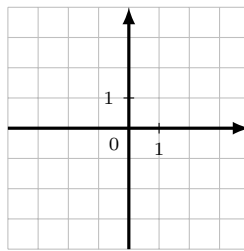
3► Cela fournit un second point de passage. On trace la droite passant par ces deux points.

Exercice 19

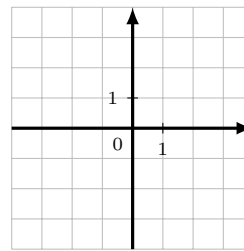
Tracer les fonctions suivantes en utilisant la méthode précédente :



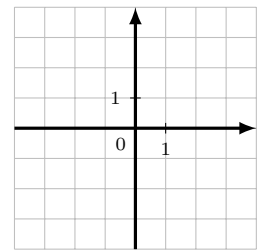
$$f(x) = 2x - 1$$



$$f(x) = -2x - 1$$



$$f(x) = \frac{2}{3}x + 3$$



$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$$

Remarque 20

- Si $a \geq 0$, alors f est croissante (« la droite monte »).
- Si $a \leq 0$, alors f est décroissante (« la droite descend »).

Exercices

S'exercer

Exercice 1

Déterminer la nature des fonctions suivantes. Si elles sont affines, donner leur coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

1► $f(x) = 189x - 1$

2► $g(x) = 19 - 5x$

3► $h(x) = \frac{2}{3}x$

4► $k(x) = \frac{7}{5x} + 2$

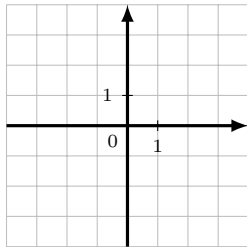
Exercice 2

1► Déterminer l'expression de la fonction affine vérifiant $f(12) = 36$ et $f(7) = 26$

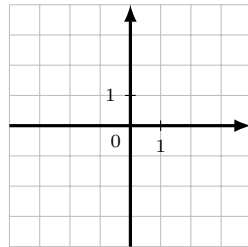
2► Déterminer l'expression de la fonction affine passant par les points $C(5; 7)$ et $D(11; 5)$

Exercice 3

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



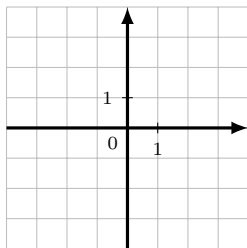
$f(x) = 3x - 1$



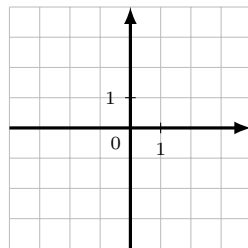
$f(x) = -3x - 1$

Exercice 4

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



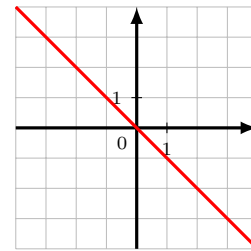
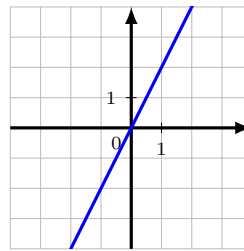
$f(x) = \frac{1}{3}x - 1$



$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$

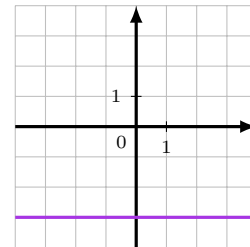
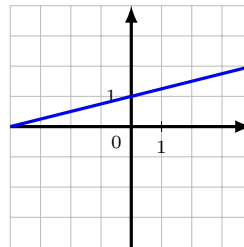
Exercice 5

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.



Exercice 6

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.



Exercice 7

Soit f définie par $f(x) = 12x - 50$.

1► Quelle est la nature de la fonction f ?

2► Calculer l'image de 19.

3► Justifier qu'il n'existe qu'un seul antécédent de

310, et le donner.

4► Quelles sont les variations de la fonction f ? Justifier.

S'entraîner

Exercice 8

Déterminer la nature des fonctions suivantes. Si elles sont affines, donner leur coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

1► $f(x) = \frac{3x}{11}$

2► $g(x) = 7 + \sqrt{3}x$

3► $h(x) = -27x + \pi^2$

4► $k(x) = 0,3x^3 - \frac{151}{3}$

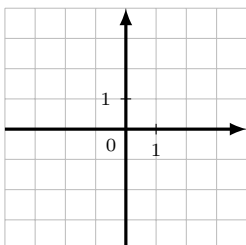
Exercice 9

1► Déterminer l'expression de la fonction affine vérifiant $f(0) = \frac{12}{7}$ et $f(4) = -1$

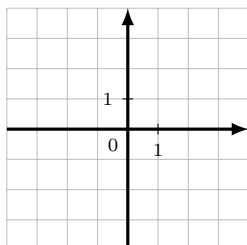
2► Déterminer l'expression de la fonction affine passant par les points $C(-10; 7)$ et $D(13; 7)$

Exercice 10

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



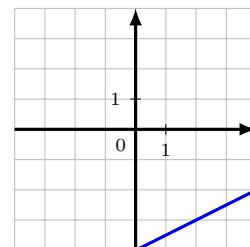
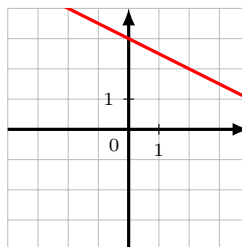
$f(x) = 2x$



$f(x) = x - 2$

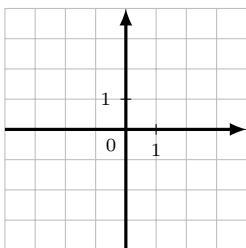
Exercice 12

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.

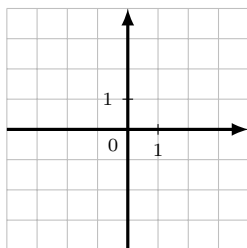


Exercice 11

Représentez dans chaque repère la fonction affine dont on donne l'expression.



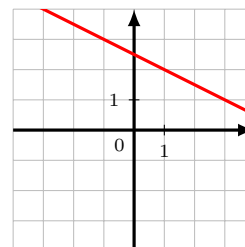
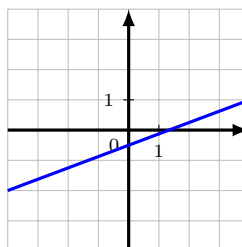
$f(x) = 2$



$f(x) = -2$

Exercice 13

Pour chaque fonction affine représentée ci-dessous, déterminer son expression.



Exercice 14 (Voir à travers les apparences)

Démontrer que la fonction définie par l'expression $f(t) = 2t + 10 - \frac{60+t}{4}$ est affine.

9 Inverse et puissances

Table des matières

1	Puissances	96
2	Inverse	98
	Exercices	99

Programme

Bulletin officiel

Capacités attendues

- ▶ Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des écritures fractionnaires.

Détail

Contenus

- ▶ Inverse (Définition)
 - ▶ L'inverse n'est pas l'opposé.
 - ▶ Diviser c'est multiplier par l'inverse, et divisions de fractions.
- ▶ Puissance (Définition)
 - ▶ Illustration sur les puissances de 10.
 - ▶ Puissance 0
 - ▶ Inverse et puissances négatives.
 - ▶ Produit, quotient et puissances de puissances.

Démonstration

- ▶ Quatre formules des puissances

1 – Puissances

Définition 1

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Soit a un nombre.

- ▶ Le nombre a^n , lu « a exposant n », ou « puissance n -ième de a », est défini par $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.
- ▶ Si $a \neq 0$, alors le nombre a^{-n} , lu « a exposant moins n », est défini par $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.
- ▶ Par convention, $a^0 = 1$.

Dans l'écriture a^n (que n soit positif ou négatif), le nombre n est appelé **exposant**, et a est appelé **base** de la puissance.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \\
 \left. \begin{array}{c} \times 3 \\ \times 3 \\ \times 3 \\ \times 3 \\ \times 3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 3^2 = 3 \times 3 \\ 3^1 = 3 \\ 3^0 = 1 \\ 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} \\ 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3} \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{c} \div 3 \\ \div 3 \\ \div 3 \\ \div 3 \\ \div 3 \end{array} \\
 \vdots
 \end{array}$$

Exemple 2

- ▶ $2^1 = 2$, $1,5^2 = 1,5 \times 1,5$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5$, ...
- ▶ $8^{-2} = \frac{1}{8 \times 8}$, $2^{-3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$, ...

Proposition 3

Soit n un nombre entier positif.

$$\text{▶ } 10^n = \underbrace{100 \cdots 00}_{n \text{ fois } 0}$$

$$\text{▶ } 10^{-n} = \underbrace{0,00 \cdots 001}_{n \text{ fois } 0}$$

Exercice 4

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 :

a▶ 10 000 000

c▶ 0,01

b▶ 10

d▶ 0,000 01

Exercice 5

Écrire sous forme décimale :

a▶ 10^9

c▶ 10^{-9}

b▶ 10^{13}

d▶ 10^{-13}

Proposition 6

Soient a et b deux nombres, et m et n deux entiers relatifs.

1▶ $a^n \times a^m = a^{n+m}$

2▶ $(a^n)^m = a^{n \times m}$

3▶ $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

4▶ Si $b \neq 0$, alors $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5▶ Si $a \neq 0$, alors $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Règles de calcul sur les puissances

Démonstration. Commençons par le cas où m et n sont positifs.

$$1 \text{▶ } a^n \times a^m = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{m \text{ fois}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n+m \text{ fois}} = a^{n+m}.$$

$$2 \blacktriangleright (a^n)^m = \underbrace{(a^n \times \cdots \times a^n)}_{m \text{ fois}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \cdots \times \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \times m \text{ fois}} = a^{n \times m}.$$

$$3 \blacktriangleright (a \times b)^n = \underbrace{(a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(b \times \cdots \times b)}_{n \text{ fois}} = a^n \times b^n$$

4 ▶ Découle de la règle de multiplication des fractions.

$$5 \blacktriangleright \text{Supposons } a \neq 0. \text{ Si } n \geq m, \text{ alors } \frac{a^n}{a^m} = \frac{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}}} = \frac{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n-m \text{ fois}}}{1} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n-m \text{ fois}} = a^{n-m} \text{ d'après la}$$

règle de simplification des fractions. À l'inverse, si $m \geq n$, alors d'après ce qui précède, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, et par définition des exposants entiers négatifs, $a^{n-m} = a^{-(m-n)} = \frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{\frac{a^m}{a^n}} = \frac{a^n}{a^m}$ (rappel : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$).

Le trois autres cas se déduisent du cas positif en observant que pour $n \geq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ (d'après 4 ▶ démontré ci-dessus). Par exemple, dans le cas où $n \geq 0$ et $m \leq 0$ (les autres cas sont laissés en exercice) :

$$1 \blacktriangleright a^n \times a^m = a^n \times \frac{1}{a^{-m}} = \frac{a^n}{a^{-m}} = a^{n-(-m)} = a^{a+m}.$$

$$2 \blacktriangleright (a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}} = \frac{1}{a^{n \times (-m)}} = \frac{1}{a^{-(n \times m)}} = a^{n \times m}.$$

$$3 \blacktriangleright (a \times b)^{-n} = \frac{1}{(a \times b)^n} = \frac{1}{a^n \times b^n} = \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{b^n} = a^{-n} \times b^{-n}.$$

$$4 \blacktriangleright \text{D'une part, } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n}. \text{ D'autre part, } \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = a^{-n} \times \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{\frac{1}{b^n}} = \frac{1}{a^n} \times b^n = \frac{b^n}{a^n}.$$

$$5 \blacktriangleright \frac{a^n}{a^m} = a^n \times \frac{1}{a^m} = a^n \times a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}. \text{ (Notez qu'ici, } -m \geq 0, \text{ donc le premier cas s'applique bien.)}$$

□

Remarque 7

- ▶ Attention au placement des parenthèses : $(a^n)^m$ n'est pas égal à $a^{(n^m)}$ en général !
- ▶ Remarquez que pour $a \neq 0$, $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ d'après les règles de calcul. La convention $a^0 = 1$ a donc du sens pour $a \neq 0$. La convention $0^0 = 1$ trouve également de nombreux avantages, mais dans des contextes un peu plus compliqués. Cette convention découle de la **convention du produit vide**, selon laquelle « multiplier rien du tout revient à ne rien faire ». Or « ne rien faire » pour la multiplication, c'est multiplier par 1.
- ▶ En général, on ne peut rien dire de $a^n \times b^m$.
- ▶ Il n'est pas rare d'écrire a^{-1} à la place de $\frac{1}{a}$ pour gagner en lisibilité.

2 – Inverse

Définition 8

Soit x un nombre réel non nul. **L'inverse** de x est le nombre qui multiplié à x donne 1.
Autrement dit c'est la solution de la multiplication à trou : $x \times \dots = 1$

Exemple 9

- ▶ L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ car $3 \times \frac{1}{3} = 1$
- ▶ L'inverse de $-\frac{1}{4}$ est 4.
- ▶ L'inverse de $\frac{2}{5}$ est $\frac{5}{2}$

Remarque 10

Il ne faut pas confondre *inverse* et *opposé*. Par exemple, l'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$, mais son opposé est (-2) .

Notation

L'inverse du nombre x est parfois noté x^{-1} .

Remarque 11

Diviser un nombre par x revient à le multiplier par l'inverse de x .

En effet $a \div x = a \times \frac{1}{x} = a \times x^{-1}$

Cela sert notamment à simplifier des calculs (des fractions de fractions par exemple).

Exemple 12

- ▶ $24 \div \frac{1}{4} = 24 \times 4 = 96$. Car 4 est l'inverse de $\frac{1}{4}$.
- ▶ $27 \times \frac{1}{3} = 27 \div 3 = 9$
- ▶ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

Exercices

Puissances

Exercice 1

Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a} \blacktriangleright 2^4 & \text{d} \blacktriangleright 3^4 & \text{g} \blacktriangleright 0,96 \times 10^2 \\ \text{b} \blacktriangleright 5^3 & \text{e} \blacktriangleright (-7)^2 & \\ \text{c} \blacktriangleright (-2)^3 & \text{f} \blacktriangleright 4,5 \times 10^3 & \text{h} \blacktriangleright 1,1^2 \end{array}$$

Exercice 2

Calculer :

$$\begin{array}{ll} \text{a} \blacktriangleright 52,5 \times 10^{-3} & \text{d} \blacktriangleright 4,3 \times 10^3 \\ \text{b} \blacktriangleright 75,2 \times 10^{-2} & \text{e} \blacktriangleright 3^{-1} \\ \text{c} \blacktriangleright 3 \times 10^{-1} & \text{f} \blacktriangleright 7^3 \times 7^{-2} \end{array}$$

Exercice 3

Simplifier sous forme a^b avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lll} \text{a} \blacktriangleright 2^4 \times 2^{15} & \text{d} \blacktriangleright \frac{2^5}{2^{10}} & \text{f} \blacktriangleright \frac{9^2}{3^3} \\ \text{b} \blacktriangleright 7^{17} \times 7^{-15} & & \\ \text{c} \blacktriangleright 5^5 \times 5^5 & \text{e} \blacktriangleright \frac{6^8}{6^3} & \text{g} \blacktriangleright \frac{16^3}{4^{-2}} \end{array}$$

Exercice 4

Simplifier sous forme a^b avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lll} \text{a} \blacktriangleright 4^4 \times 2^{15} & \text{d} \blacktriangleright \frac{3^5}{3^5} & \text{f} \blacktriangleright 8^{17} \times 4^{-15} \\ \text{b} \blacktriangleright 10^5 \times 5^{-5} & & \text{g} \blacktriangleright (3^3)^2 \\ \text{c} \blacktriangleright 5^5 \times 5^{-5} & \text{e} \blacktriangleright \frac{6^8}{12^8} & \text{h} \blacktriangleright 14^6 \div 7^6 \end{array}$$

Exercice 5

Simplifier sous forme a^b avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lll} \text{a} \blacktriangleright (4^3)^4 & \text{c} \blacktriangleright (2^3)^{-5} & \text{e} \blacktriangleright (12^2)^{-1} \\ \text{b} \blacktriangleright (7^3)^5 & \text{d} \blacktriangleright (18^{15})^5 & \text{f} \blacktriangleright (15^{-1})^2 \\ \text{g} \blacktriangleright (7^{-1})^{-1} & & \text{h} \blacktriangleright 8^4 \times \frac{(4^2)^{-3}}{16^2 \times 4^2} \end{array}$$

Exercice 6 $((a+b)^3?)$

- 1 ▶ Développer et réduire $(a+b)^3$.
- 2 ▶ En déduire la valeur de 102^3 et celle de 97^3

Inverse

Exercice 7

Donner les inverses des nombres suivants.

$$\text{a} \blacktriangleright 3 \quad \text{b} \blacktriangleright 5 \quad \text{c} \blacktriangleright (-4) \quad \text{d} \blacktriangleright 1,5 \quad \text{e} \blacktriangleright \frac{1}{3} \quad \text{f} \blacktriangleright \frac{3}{5}$$

Exercice 8

Donner les inverses des nombres suivants.

$$\begin{array}{lll} \text{a} \blacktriangleright 10 & \text{c} \blacktriangleright 0,04 & \text{e} \blacktriangleright \frac{-7}{6} \\ \text{b} \blacktriangleright 1 & \text{d} \blacktriangleright \frac{1}{4} & \text{f} \blacktriangleright \sqrt{2} \end{array}$$

Exercice 9

Calculer :

$$\begin{array}{llll} \text{a} \blacktriangleright \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} & \text{b} \blacktriangleright \frac{3}{5} \times \frac{7}{6} & \text{c} \blacktriangleright \frac{9}{5} \div 4 & \text{d} \blacktriangleright \frac{\frac{7}{2}}{\frac{6}{3}} \end{array}$$

Exercice 10

Calculer :

$$\begin{array}{llll} \text{a} \blacktriangleright \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{8}} & \text{b} \blacktriangleright \frac{9}{13} \div 4,5 & \text{c} \blacktriangleright \frac{\frac{7}{11}}{\frac{21}{22}} & \text{d} \blacktriangleright \frac{2}{\sqrt{2}} \end{array}$$

Exercice 11

Calculer ou simplifier :

$$\begin{array}{lll} \text{a} \blacktriangleright \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{d} \blacktriangleright \frac{5}{3} \times 0,6 & \text{g} \blacktriangleright \frac{6x+3}{2x+1} \\ \text{b} \blacktriangleright \frac{12}{11} \div 0,1 & \text{e} \blacktriangleright \frac{1}{7} \div \frac{3}{7} & \text{h} \blacktriangleright \frac{3x^2+5x}{x} \\ \text{c} \blacktriangleright \frac{3}{5} \div \frac{-1}{3} & \text{f} \blacktriangleright \frac{\sqrt{8}}{2} & \end{array}$$

10 Fonctions de référence et variations

Table des matières

1	Fonctions de référence	103
2	Positions relatives	106
3	Tableau de variations d'une fonction	106
4	Extrema d'une fonction	108
	Exercices	109

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- ▶ Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.
- ▶ Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle.
- ▶ Tableau de variations.
- ▶ Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- ▶ Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

Capacités attendues

- ▶ Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- ▶ Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$.
- ▶ Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- ▶ Relier représentation graphique et tableau de variations.
- ▶ Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- ▶ Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- ▶ Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Démonstration

- ▶ Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.
- ▶ Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.

Exemples d'algorithme

- ▶ Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).
- ▶ Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

Approfondissement possible

- ▶ Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

Exemples d'algorithme

- ▶ Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).
- ▶ Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

Détail

Contenus

- ▶ Fonctions de références : affine, carré, cube, racine carrée, inverse
 - ▶ Domaine de définition
 - ▶ Représentation graphique
 - ▶ Variations
 - ▶ Signe
 - ▶ Parité des fref
 - ▶ Décomposer une fonction en programme de calcul
- ▶ Variation de fonctions
 - ▶ Comparer algébriquement ou graphiquement $f(a)$ et $f(b)$
 - ▶ Croissance/Décroissance sur un intervalle
 - ▶ Tableau de variation à partir de représentation graphique

Soit I un intervalle.

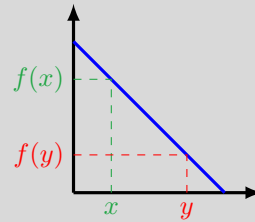
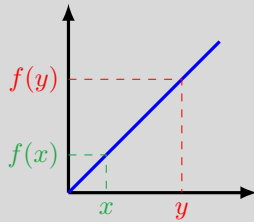
1 – Fonctions de référence

Fiches d'identité des fonctions de référence plus bas.

Définition 1

Croissance, décroissance

- Une fonction **croissante** sur un intervalle I est une fonction qui conserve les inégalités : autrement dit, une fonction f est croissante lorsque pour tous réels x et y dans I , si $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y)$.
- Une fonction **décroissante** sur un intervalle I est une fonction qui renverse les inégalités : autrement dit, une fonction f est décroissante lorsque pour tous réels x et y dans I , si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$.



Démonstration. (Variations de la fonction carré)

Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

1^{er} cas sur $[0; +\infty[$: d'une part, $x^2 < xy$ (en multipliant l'inégalité $x < y$ de l'hypothèse par x , car $x \geq 0$). D'autre part, $xy < y^2$ (en multipliant l'inégalité $x < y$ de l'hypothèse par y , car $y \geq 0$). Par conséquent, $x^2 < y^2$, et donc la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

2nd cas sur $] -\infty; 0]$: d'une part, $x^2 > xy$ (en multipliant l'inégalité $x < y$ de l'hypothèse par x , car $x \leq 0$). D'autre part, $xy > y^2$ (en multipliant l'inégalité $x < y$ de l'hypothèse par y , car $y \leq 0$). Par conséquent, $x^2 > y^2$, et donc la fonction carrée est décroissante sur $] -\infty; 0]$. $\square$

Démonstration. (Variations de la fonction racine carrée)

Soient x et y deux réels positifs tels que $x < y$.

Remarquons que :

$$x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

D'une part, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$, d'autre part, comme $x < y$, on a $x - y \leq 0$, donc nécessairement $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 0$, donc $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

Ainsi la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. $\square$

Démonstration. (Variations de la fonction inverse)

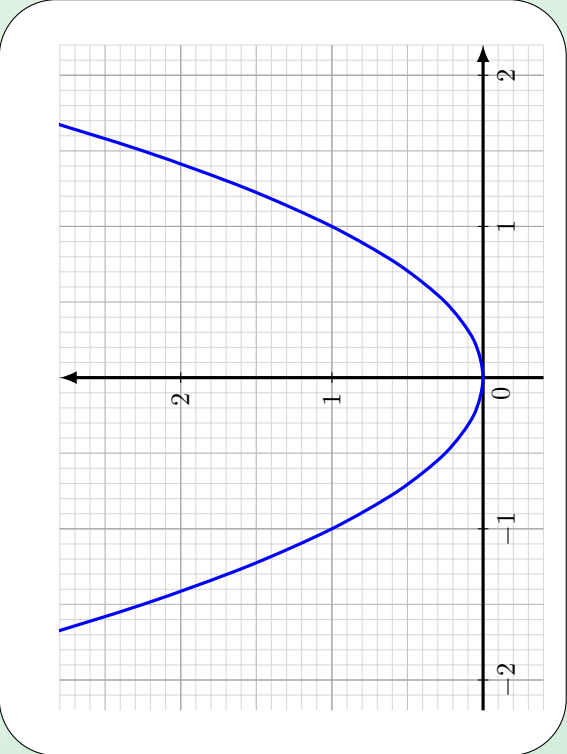
Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Remarquons que $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$. Comme $x < y$, on a $y - x \geq 0$.

- Sur $] -\infty; 0[$, $xy \geq 0$, donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \geq 0$, donc $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.
Donc la fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$.
- Sur $]0; +\infty[$, $xy \geq 0$, donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \geq 0$, donc $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.
Donc la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.

$\square$

★

FUNCTION CARRÉ



$f : x \mapsto x^2 = x \times x$

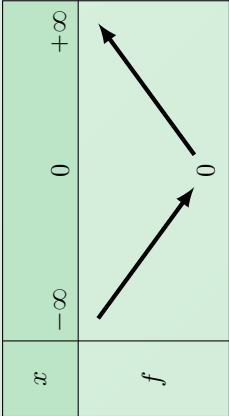
► $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

► Positive

► Paire

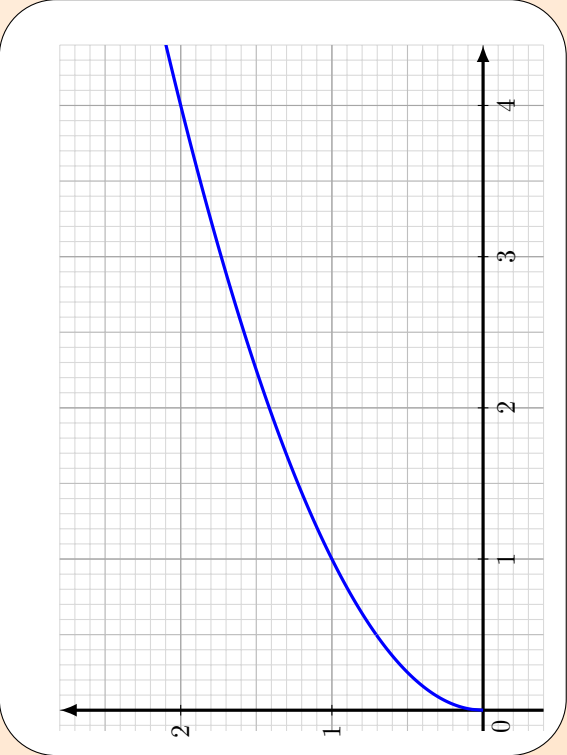
► Sa courbe représentative est appelée « parabole »

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0	



★★

FUNCTION RACINE CARRÉE



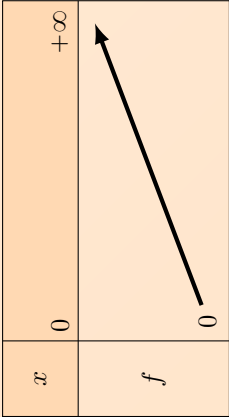
$f : x \mapsto \sqrt{x}$ où $\sqrt{x} \geq 0$ est tel que $(\sqrt{x})^2 = x$

► $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$

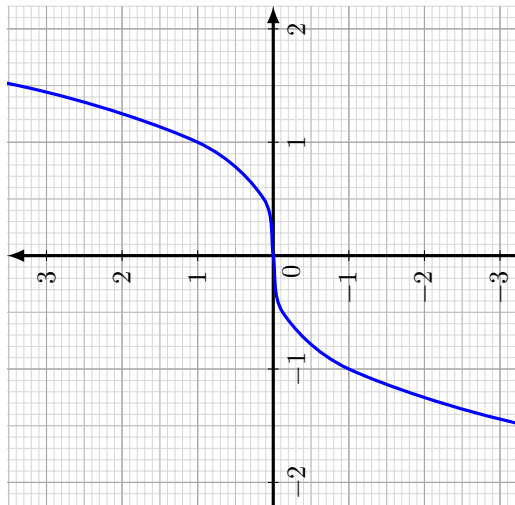
► Positive

► $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

x	0	$+\infty$
f	0	

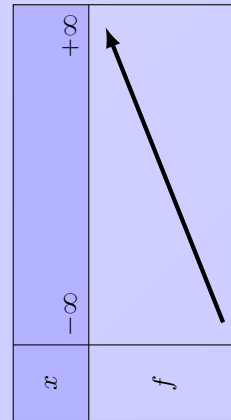


FONCTION CUBE

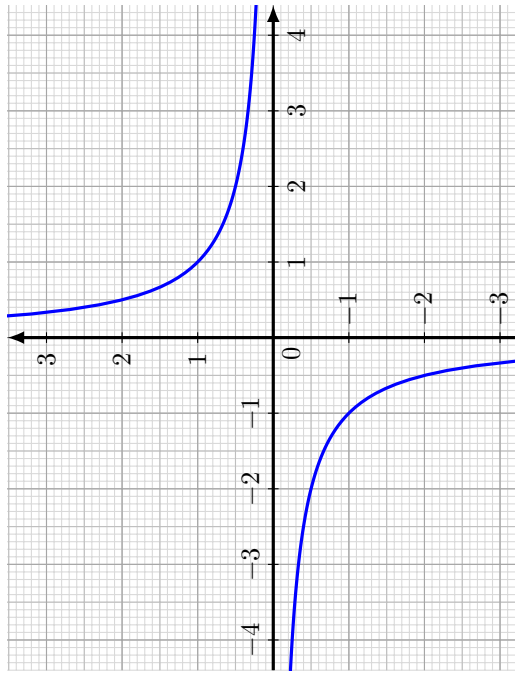


$$f : x \mapsto x^3 = x \times x \times x$$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- Impaire

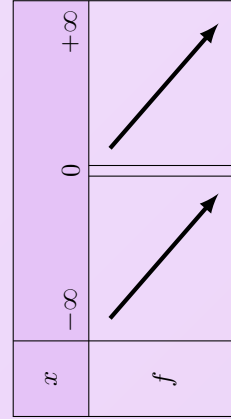


FONCTION INVERSE



$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ tel que } x \times \frac{1}{x} = 1$$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Impaire
- Sa courbe représentative est appelée «hyperbole»

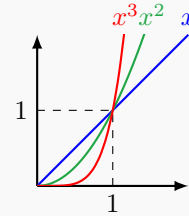


2 – Positions relatives

Proposition 2

Pour tout $x \geq 0$,

- ▶ Si $x \leq 1$, alors $x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$.
- ▶ Si $x \geq 1$, alors $x^3 \geq x^2 \geq x \geq 1$.



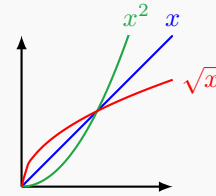
Démonstration. Soit $x \geq 0$.

- ▶ Si $x \leq 1$, alors $x^2 \leq x$ (on multiplie la première inégalité par $x \geq 0$), et donc $x^3 \leq x^2$ (on multiplie la précédente inégalité par $x \geq 0$). Finalement, $x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$.
- ▶ Si $x \geq 1$, alors $x^2 \geq x$ (on multiplie la première inégalité par $x \geq 0$), et donc $x^3 \geq x^2$ (on multiplie la précédente inégalité par $x \geq 0$). Finalement, $x^3 \geq x^2 \geq x \geq 1$.

□

Proposition 3

Dans un repère orthonormé, sur $[0; +\infty[$, les courbes des fonctions carré et racine carrée sont symétriques par rapport à la première diagonale (la droite d'équation $y = x$).



3 – Tableau de variations d'une fonction

Définition 4

Croissance, décroissance, monotonie

- ▶ Une fonction f est **croissante sur** I quand, lorsque $x \in I$ augmente, $f(x)$ augmente aussi.
- ▶ Une fonction f est **décroissante sur** I quand, lorsque $x \in I$ augmente, $f(x)$ diminue.
- ▶ On dit que f est **monotone sur** I si f ne change pas de variations sur I , autrement dit si elle est toujours croissante ou toujours décroissante.

Remarque 5

Soient a et b deux nombres dans I .

- ▶ Dire qu'une fonction f est **croissante** I c'est dire que si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$.
- ▶ Dire qu'une fonction f est **décroissante sur** I c'est dire que si $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

Remarque 6

Autrement dit f est croissante si elle conserve les inégalités, et décroissante si elle renverse les inégalités.

On parle aussi de **stricte croissance** ou **stricte décroissance** si f conserve ou renverse les inégalités strictes.

Variations et lecture graphique

Propriété 7

En lisant de gauche à droite :

- Si la courbe représentative de f « monte », alors f est croissante.
- Si la courbe représentative de f « descend », alors f est décroissante.

Définition 8

Étudier les variations de f , c'est déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante.

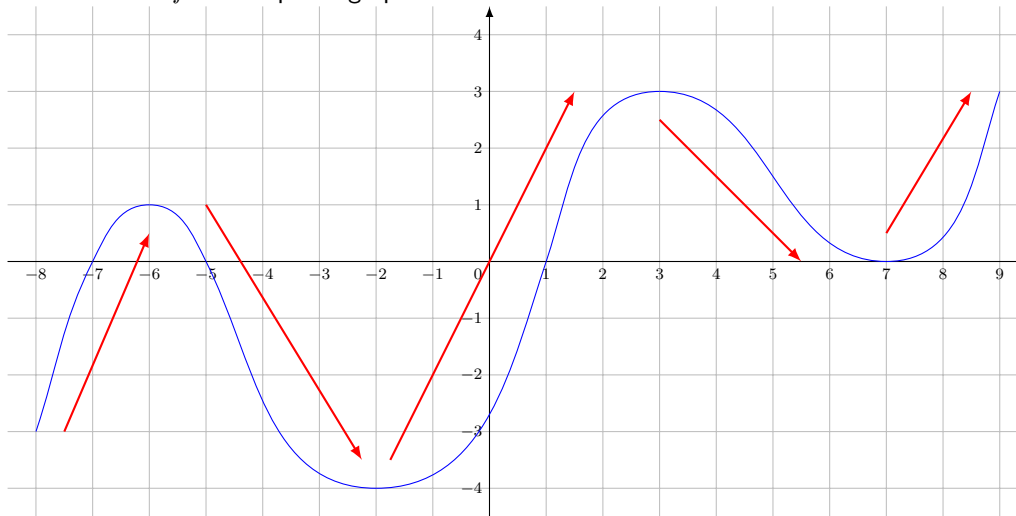
Méthode 9 (Tableau de variations)

Pour dresser le tableau de variations d'une fonction f :

- On trace un tableau à 2 lignes : la première contient des valeurs de x , l'autre représente les variations de f .
- Sur la première ligne, on écrit aux deux extrémités les bornes de l'intervalle de définition de f .
- Entre les deux bornes, on inscrit dans l'ordre les valeurs de x auxquelles f change de variation (autrement dit là où son graphe fait « une bosse » ou « un creux »).
- Dans la deuxième ligne, on trace $\nearrow$ ou $\searrow$ entre deux valeurs consécutives de x , selon si f est croissante ou décroissante sur l'intervalle correspondant.
- Éventuellement, on inscrit aux bouts des flèches les images des nombres écrits au-dessus.

Exemple 10

Considérons la fonction f définie par le graphe suivant :



Son tableau de variations est :

x	-8	-6	-2	3	7	9
f		$\nearrow$ 1	$\searrow$ -4	$\nearrow$ 3	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 3

4 – Extrema d'une fonction

Minimum, maximum, extremum

Définition 11

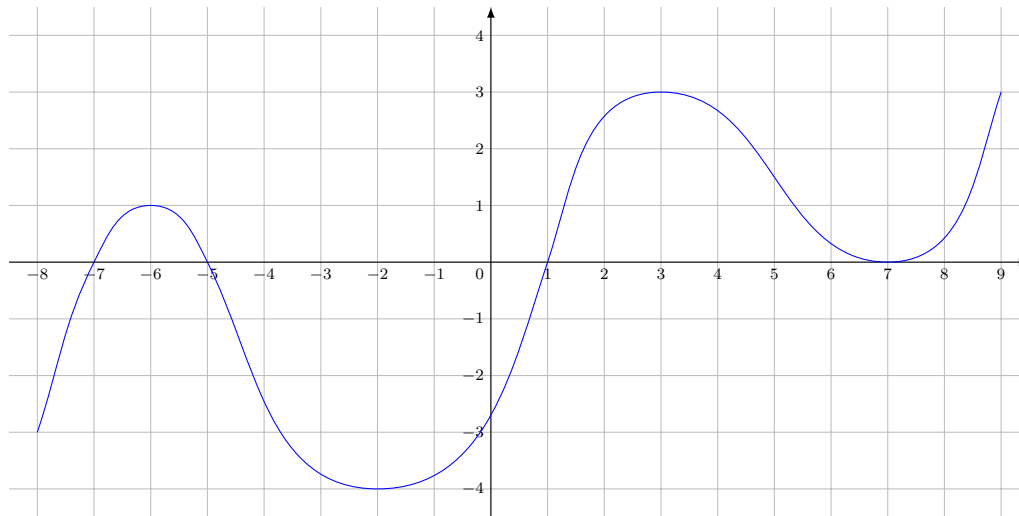
- ▶ On dit que f admet un **minimum en** a si pour tout $x \in I$, on a $f(a) \leq f(x)$. On dit également que $f(a)$ est un **minimum** de f sur I .
- ▶ On dit que f admet un **maximum en** a si pour tout $x \in I$, on a $f(a) \geq f(x)$. On dit également que $f(a)$ est un **maximum** de f sur I .
- ▶ Un **extremum de** f est soit un maximum, soit un minimum de f .

Remarque 12

On dit « **un** extremum » et « **des** extrema ». La forme « des extremums » est toutefois acceptée.

Remarque 13

Attention, les extrema dépendent fortement de l'intervalle ! Reprenons l'exemple de la fonction f définie par le graphe suivant :



- ▶ Sur $[-8; 9]$, f admet un maximum en $x = 3$ qui vaut $f(3) = 3$. Ce maximum est aussi atteint en $x = 9$.
- ▶ En revanche, sur $[-8; -4]$, f admet un maximum en $x = -6$, qui vaut $f(-6) = 1$.
- ▶ Sur $[-8; 9]$, f admet un minimum en $x = -2$ qui vaut $f(-2) = -4$.
- ▶ En revanche, sur $[1; 9]$, f admet un minimum en $x = 7$, qui vaut $f(7) = 0$. Ce minimum est aussi atteint en $x = 1$.

Quand la courbe de f forme un creux ou une bosse, elle forme ce qu'on appelle un **extremum local** : *localement*, autour de cette abscisse, l'extremum est celui de la bosse ou du creux. Cependant, quand on parle d'extremum, on sous-entend un extremum **global** : il faut regarder sur tout l'intervalle choisi, s'il n'y a pas une bosse plus haute ou un creux plus bas.

Exercices

Appliquer

Pour chaque tableau de variation ci-dessous,

- ▶ Tracer deux allures de graphes possibles (utilisez deux couleurs dans un même repère),
- ▶ Déterminer le domaine de définition,
- ▶ Déterminer le maximum et le minimum sur le domaine de définition, et les abscisses en lesquels ils sont atteints.

Exercice 1

x	-5	-3	-1	0	2	4
f	$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\ & 1 & & 3 & & 3 \\ \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\ -3 & & -4 & & 0 & \end{array}$					
h	-8	-6	-5	-1	1	
	$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & & \nearrow & \\ & -1 & & 2 & \\ \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow \\ -3 & & -3 & & 1 \end{array}$					
ℓ	1	2	5			
	$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \\ & 1 & \\ \nwarrow & & \nwarrow \\ -3 & & -1 \end{array}$					

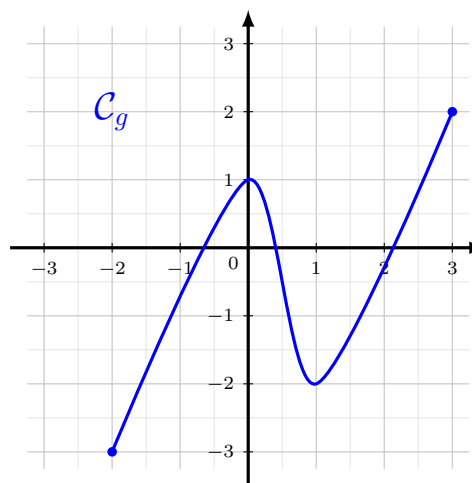
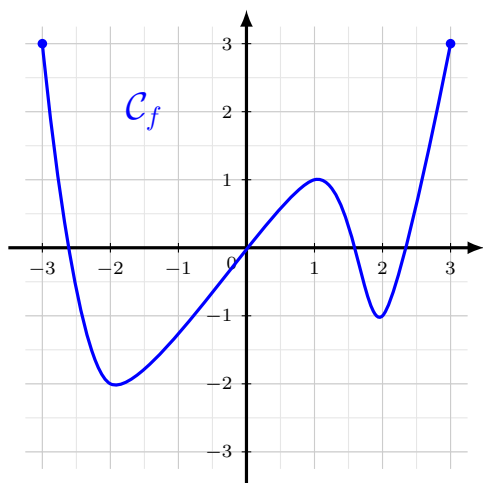
Exercice 2

x	0	3	4,5	7	7,5	9
g	$\begin{array}{ccccc} & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\ & 5 & & 1 & & 5 \\ \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ 0,5 & & 0 & & 1 & \end{array}$					
k	-3	-1	1	3		
	$\begin{array}{ccccc} & \searrow & & \nearrow & \\ & -3 & & -4 & \\ \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\ 1 & & 1 & & 3 \end{array}$					
m	1	4				
	$\begin{array}{ccc} 4 & \searrow & \\ & & 1 \end{array}$					

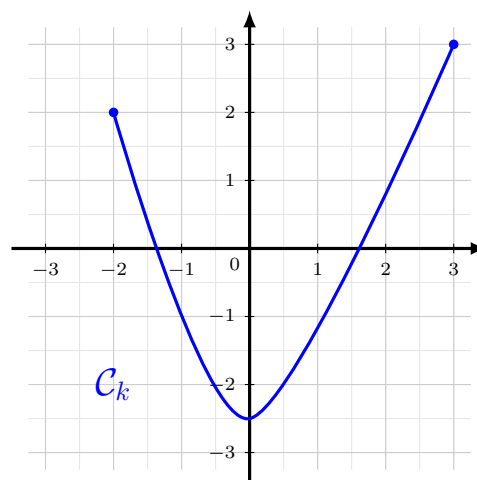
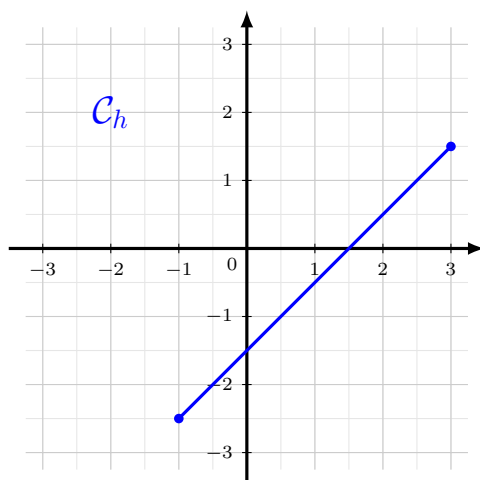
Pour chaque fonction ci-dessous,

- ▶ Dresser le tableau de variations complet,
- ▶ Déterminer le domaine de définition,
- ▶ Déterminer le maximum et le minimum sur le domaine de définition, et les abscisses en lesquels ils sont atteints.
- ▶ Déterminer le maximum et le minimum sur $[0; 3]$ et les abscisses en lesquelles ils sont atteints.

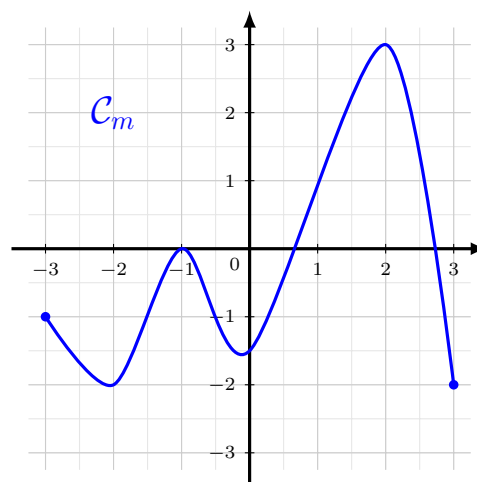
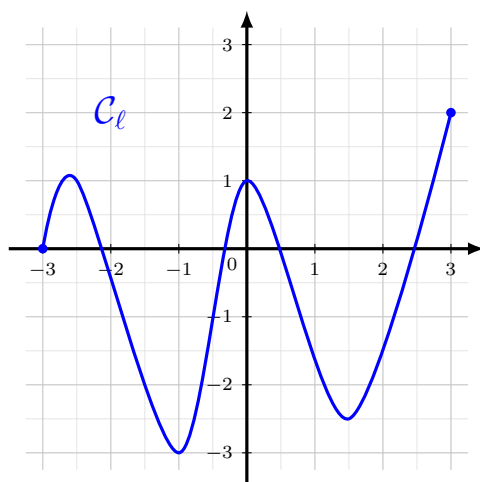
Exercice 3



Exercice 4



Exercice 5



Exercice 6

Déterminer graphiquement les antécédents de 5 par la fonction carré.

On donnera une valeur approchée des solutions au dixième.

Exercice 7

Calculer les images des nombres suivants par les fonctions carré, cube, inverse et racine carrée, si possible.

- | | | |
|------|-------|------------------|
| 1► 4 | 3► 0 | 5► $\frac{5}{4}$ |
| 2► 9 | 4► -2 | |

Exercice 8

Comparer les nombres suivants :

- 1► $1,36^2$ et $1,37^2$
- 2► $(-2,5)^2$ et $(-2,4)^2$
- 3► $0,11^2$ et $(-0,10)^2$
- 4► $(-\pi)^2$ et $3,1^2$
- 5► $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$ et $\left(\frac{-5}{3}\right)^3$

Exercice 9

Sans calcul, comparer les nombres suivants :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1► $\frac{1}{13}$ et $-\frac{1}{5}$ | 4► $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{7}$ |
| 2► $\frac{1}{2,4}$ et $\frac{1}{3,8}$ | 5► $-\frac{1}{0,02}$ et $-\frac{1}{0,001}$ |
| 3► $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{1}{3}$ | 7► $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{-3}$ |

Exercice 10

Sans calcul, comparer les nombres suivants :

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1► $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2,03}$ | 3► $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et 1 |
| 2► $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2\pi}$ | |

Exercice 11

Graphiquement, déterminer :

- 1► l'image de 1,2 par la fonction cube.
- 2► un antécédent de 5 par la fonction cube.
- 3► le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction cube.

Exercice 12

Résoudre les inéquations suivantes graphiquement :

- | | |
|-----------------|---------------|
| 1► $x^2 < 8$ | 3► $x^2 < -1$ |
| 2► $x^2 \geq 8$ | 4► $x^2 > 0$ |

Exercice 13

À l'aide de la représentation graphique de la fonction racine carrée, résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1► $\sqrt{x} \leq 3$ | 4► $\sqrt{x} \geq -2$ |
| 2► $\sqrt{x} > 2$ | 5► $-3\sqrt{x} \geq 6$ |
| 3► $\sqrt{x} > 0$ | 6► $2\sqrt{x} \leq 2,5$ |

Exercice 14

Résoudre les inéquations suivantes graphiquement :

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1► $\frac{1}{x} \geq 2$ | 4► $\frac{1}{x} \leq 3$ | 7► $\frac{1}{x} \geq 1$ |
| 2► $\frac{1}{x} < -2$ | 5► $\frac{1}{x} > 2$ | 8► $\frac{2}{x} \geq 1$ |
| 3► $\frac{1}{x} \leq -1$ | 6► $\frac{1}{x} \leq 2$ | |

Exercice 15

Résoudre algébriquement les équations suivantes :

- | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------------------|
| 1► $\frac{1}{x} = 3$ | 2► $\frac{1}{x} = 4$ | 3► $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ |
|----------------------|----------------------|--------------------------------|

Exercice 16

Résoudre les équations suivantes algébriquement :

- | | |
|-------------------|---------------|
| 1► $x^2 - 25 = 0$ | 3► $x^2 = 11$ |
| 2► $x^2 = 36$ | |

Exercice 17

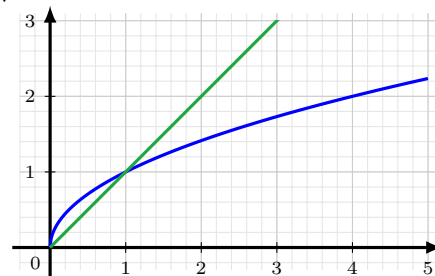
Résoudre algébriquement les équations d'inconnue x positive ou nulle.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1► $4\sqrt{x} = 0$ | 4► $5\sqrt{x} = 5$ |
| 2► $\sqrt{x} = 4$ | 5► $3\sqrt{x} = 12$ |
| 3► $\sqrt{x} - 10 = 0$ | 6► $2\sqrt{x} - 8 = 0$ |

Exercice 18

On considère les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$.

En utilisant les courbes représentatives des fonctions f et g ci-dessous, résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x} \leq x$.

**Exercice 19**

Vrai ou faux ? Justifier.

- 1► L'image de -5 par la fonction carré est -25 .
- 2► L'image de 4 par la fonction carré est 2.
- 3► Les solutions de l'équation $x^2 = 5$ sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.
- 4► Les antécédents de -5 par la fonction carré sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.
- 5► Si $x^2 = 9$, alors $x = 3$.

Exercice 20

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- a► $x^2 + 1 = 5$ c► $2x^2 - 18 = 0$
 b► $x^2 + 3 = -2$ d► $3x^2 + 1 = 10$

Exercice 21

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- a► $x^2 \leq 9$ c► $x^2 \geq 16$
 b► $x^2 > 4$ d► $x^2 < -2$

S'exercer

Exercice 22

Vrai ou faux ? Justifier.

- 1► Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.
 2► Si $x^2 = 4$, alors $x = 2$.
 3► Si $-4 < x < -1$, alors $1 < x^2 < 16$.
 4► Si $1 < x^2 < 16$, alors $-4 < x < -1$.

Exercice 24

Résoudre algébriquement sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- a► $3x^2 - 5 = x^2 - 1$ c► $\frac{x^2 - 2}{5} = 1$
 b► $-2x^2 + 6 = 3x^2$ d► $\frac{4x^2 - 1}{3} = 5$

Exercice 23

Résoudre algébriquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- a► $2x^2 - 3 \leq 6$
 b► $-x^2 + 4 < 2$
 c► $-7x^2 + 5 \leq 2x^2 - 11$
 d► $-5x^2 + 10 > x^2 - 8$

Exercice 25

Résoudre algébriquement sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- a► $2x^2 + 3 = -x^2 + 4$
 b► $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4x$
 c► $(x - 3)(x + 3) = 20$
 d► $4(x^2 + 1) = 15$

S'entraîner

Exercice 26

On considère les deux nombres suivants :

$$a = \sqrt{\sqrt{3} - 1} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

- 1► Justifier, en utilisant la courbe de la fonction racine carrée, que $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.
 2► En déduire que $\sqrt{3} - 1 > \sqrt{2} - 1$.
 3► Comparer alors a et b .

Exercice 28

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation $x^3 = 27$.

- 1► Combien d'antécédents 27 a-t-il par la fonction cube ? Justifier graphiquement.
 2► Déterminer une solution de l'équation $x^3 = 27$.
 3► Résoudre l'équation $x^3 = 27$ grâce aux deux questions précédentes.

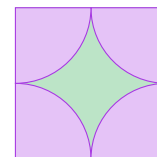
Exercice 27

Vrai ou faux ? Justifier.

- 1► Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés.
 2► Pour tout réel x , les nombres x et $-x$ ont le même cube.

Exercice 29

Exprimer l'aire du motif à l'intérieur du carré en fonction de la longueur x du côté du carré.



Exercice 30

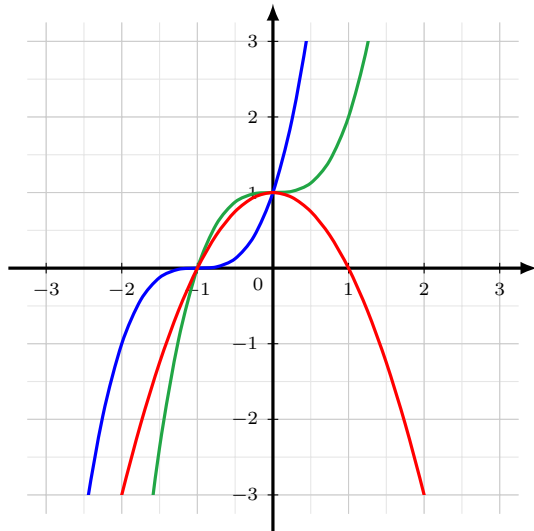
On a représenté ci-dessous les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^3$$

$$g(x) = x^3 + 1$$

$$h(x) = -x^2 + 1$$

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



Exercice 31

La fonction f est définie par l'algorithme ci-dessous.

```

1 Choisir un réel non nul
2 Prendre l'inverse
3 Prendre l'opposé
4 Ajouter 2
5 Renvoyer le résultat

```

- 1► Quelle est l'image de 1 ? Et celle de 4 ?
- 2► Donner l'expression de l'image $f(x)$ d'un nombre x non nul quelconque.
- 3► Résoudre algébriquement les équations suivantes :

a► $f(x) = 1$ c► $f(x) = 2$

b► $f(x) = -4$

Exercice 32

- 1► Justifier graphiquement que $2 < \sqrt{7} < 3$.
- 2► On définit la fonction Python suivante.

```

1 def approche(pas):
2     a = 2
3     b = 4
4     while b < 7:
5         a = a+pas
6         b = a*a
7     return (a-pas, a)

```

À l'aide d'un tableau d'avancement, déterminer ce que renvoie l'appel de fonction `approche(0.1)`.

- 3► Interpréter le résultat trouvé.
- 4► Écrire une fonction Python permettant de trouver une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 0,01 près.

Exercice 33

- a► $x^1 - 1 < 0$
- b► $3x^2 \geq 2$
- c► $-x^2 - 4 > -2x^2 + 5$
- d► $\frac{x^2 - 4}{2} > 3$

Exercice 34

- a► $2x^2 - 3 \leq 6$
- b► $-x^2 + 4 < 2$
- c► $-7x^2 + 5 \leq 2x^2 - 11$
- d► $-5x^2 + 10 > x^2 - 8$

Exercice 35

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

- a► $2x^2 - 7 \leq 0$ c► $-3x^2 + 9 < 0$
- b► $5(x^2 - 2) + 4 \geq 3$ d► $8 - (6 - x^2) < 1$

Pour aller (plus) loin

Exercice 36

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a► $x^3 + x = 0$

b► $2x^3 - 3x = 0$

c► $4x^3 + 2(x - 3) = -6$

Approfondir

Exercice 37

Dans cet exercice, on propose une démonstration des positions relatives des fonctions carré et racine carrée qui n'utilise pas la symétrie.

Notons $f : x \mapsto x$, $c : x \mapsto x^2$ et $r : x \mapsto \sqrt{x}$ définies sur $[0; +\infty[$.

- 1►
 - a► Montrer que pour tout $x \geq 0$, $c(x) - f(x) = x(x - 1)$.
 - b► En déduire le signe de $c(x) - f(x)$ en fonction de x . (*Indication : le tableau de signes est un outil adapté.*)
 - c► En déduire la position relative des courbes de c et de f .
- 2►
 - a► Montrer que pour tout $x \geq 0$, $r(x) - f(x) = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$.
 - b► En déduire le signe de $r(x) - f(x)$ en fonction de x . (*Indication : le tableau de signes est un outil adapté.*)
 - c► En déduire la position relative des courbes de r et de f .
- 3► Conclure : donner la position relative des courbes de c et de r (*Indication : utiliser la fonction f comme intermédiaire.*)

Exercice 38

Dans cet exercice, on cherche à démontrer que les courbes des fonctions carré et racine carrée sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- 1► Dans cette question, on va montrer que deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ si leurs coordonnées sont sous la forme $A(a, b)$ et $B(b, a)$.
On considère donc deux points A et B avec de telles coordonnées.
 - a► Justifier que les points de la droite d'équation $y = x$ ont des coordonnées de la forme (x, x) .
 - b► Justifier que le milieu I de $[AB]$ appartient à la droite d'équation $y = x$.
 - c► Justifier que A et B sont à la même distance de l'origine.
 - d► En déduire que la droite d'équation $y = x$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
 - e► En déduire que A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- 2► Démontrons maintenant la proposition. Soit $x > 0$.
 - a► Justifier que $A(x, x^2)$ appartient au graphe de la fonction carré.
 - b► Justifier que $B(x^2, x)$ appartient au graphe de la fonction racine carrée.
 - c► Justifier que A et B sont symétriques. Conclure.

11 Géométrie repérée

Table des matières

1	Coordonnées d'un point dans un repère	117
A	Repères du plan	117
B	Milieu et distances	118
2	Coordonnées d'un vecteur dans un repère	119
A	Coordonnées d'un vecteur, d'une somme, d'un produit	119
B	Colinéarité et coordonnées	121
	Exercices	123

Programme

Bulletin officiel

Au cycle 4, la notion de translation fait l'objet d'une première approche, fondée sur l'observation de son effet sur les configurations planes et de manipulations diverses, notamment sur un quadrillage ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On s'y appuie en seconde pour introduire la notion de vecteur. Le professeur peut définir les opérations vectorielles à partir des coordonnées, ou bien commencer par leur construction géométrique. Dans tous les cas, la relation $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est mise en évidence. La relation de Chasles est introduite pour illustrer l'addition des vecteurs, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique.

Contenus

- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$.
- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

Capacités attendues

- Représenter géométriquement des vecteurs.
- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.
- Établir que trois points sont alignés ou non.

Démonstration

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Approfondissement possible

- Définition vectorielle des homothéties.

Détail

Contenus

- ▶ Base orthonormée et coordonnées. $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Illustrée.
- ▶ Tracer un vecteur suivant ses coordonnées.
- ▶ Expression de la norme en lien avec la racine carrée.
- ▶ Expression du vecteur en fonction des coordonnées de A et de B .
- ▶ Produit vecteur-réel
- ▶ Colinéarité de vecteurs.
- ▶ Déterminant de deux vecteurs en BON expliqué comme critère de colinéarité (Application à l'alignement et au parallélisme.)

Démonstration

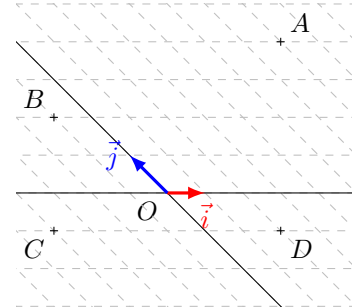
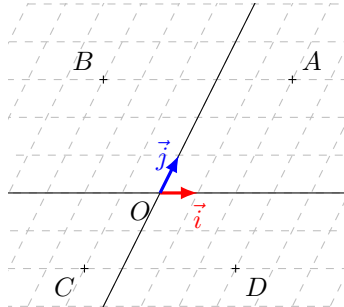
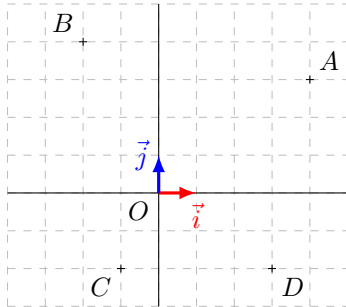
- ▶ Deux vecteurs colinéaires ssi déterminant nul (Sens direct et Contraposée)

1 – Coordonnées d'un point dans un repère

A – Repères du plan

Activité 1

Dans chacun des cas, exprimer $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



Définition 2

Repère du plan

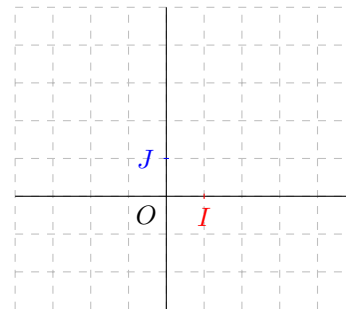
Un **repère du plan** est la donnée d'un point, traditionnellement noté O , et de deux vecteurs non colinéaires, traditionnellement notés $\vec{i}$ et $\vec{j}$. On note un tel repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Le point O est appelé **origine** du repère.
- Le point O et le vecteur $\vec{i}$ définissent une droite orientée, appelée **axe des abscisses**, dont l'unité de longueur est donnée par la norme de $\vec{i}$.
- Le point O et le vecteur $\vec{j}$ définissent une droite orientée, appelée **axe des ordonnées**, dont l'unité de longueur est donnée par la norme de $\vec{j}$.

Remarque 3

On peut également définir un repère à partir de trois points non alignés, traditionnellement notés O , I et J .

L'axe des abscisses est alors défini par la droite orientée (OI) , l'ordonnée par (OJ) , et les unités de chacun de ces axes sont les longueurs OI et OJ .



Définition 4

Repère orthogonal, orthonormé

On dit qu'un repère est **orthogonal** si ses axes sont perpendiculaires. On dit qu'un repère est **orthonormé** si ses axes sont perpendiculaires, et si leurs deux unités de distance sont égales.

Concrètement, un rectangle définit un repère orthogonal, et un carré définit un repère orthonormé.

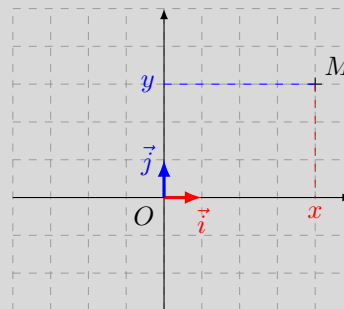
Théorème 5

Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère et M un point du plan.

Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Définition 6**Coordonnées d'un point**

Dans le théorème précédent, le couple (x, y) est appelé **coordonnées** de M (dans le repère choisi), et on note $M(x, y)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Le nombre x est appelé **abscisse** de M , et y son **ordonnée**.



Dans toute la suite, on fixe un repère $\mathcal{R}$ dans lequel toutes les coordonnées seront données.

B – Milieu et distances**Proposition 7****Milieu d'un segment**

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Exemple 8

Soient $A(3; 4)$ et $B(5; 6)$. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3+5}{2} ; \frac{4+6}{2} \right) = (4; 5)$.

Exercice 9

Soient $A(-2; -3)$, $B(4; 3)$ et $C(8; 1)$. Calculer les coordonnées des milieux de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

Proposition 10**Distance entre deux points**

On suppose le repère orthonormé.

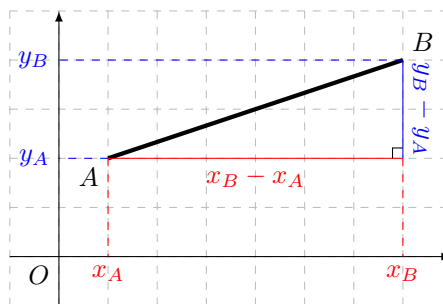
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points. La distance entre A et B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration.

Il s'agit du théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle représenté ci-dessous, d'hypoténuse $[AB]$, et dont les deux autres côtés mesurent $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$. On a donc la relation $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$. Attention, cela ne fonctionne que dans un repère orthonormé !

Sur le schéma ci-contre, on place A et B d'une manière particulière (rien ne dit que A est à gauche de B ...), la le raisonnement est le même dans les autres cas.



Exemple 11

Soient $A(3;4)$ et $B(5;6)$. Alors :

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} (= 2\sqrt{2})$$

Exercice 12

Calculer les distances AB , AC et BC de l'exercice 9.

Exercices conseillés : 9, 14.

2 – Coordonnées d'un vecteur dans un repère

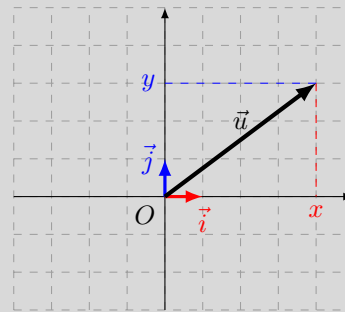
A – Coordonnées d'un vecteur, d'une somme, d'un produit

Définition 13

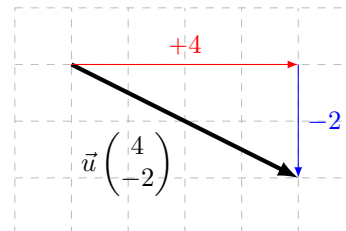
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **coordonnées** de $\vec{u}$ (dans le repère choisi) les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Concrètement, on trace le représentant de $\vec{u}$ d'origine O , et on regarde les coordonnées de son extrémité.

On note $\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

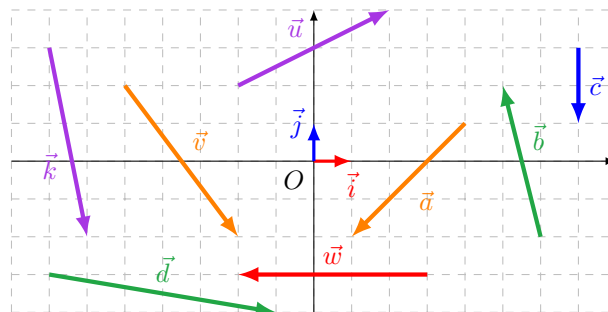
Le nombre x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$, et y son **ordonnée**.

Coordonnées d'un point, d'un vecteur**Méthode 14 (Lire directement les coordonnées d'un vecteur)**

Dans des conditions favorables, il suffit de compter les carreaux du quadrillage : l'abscisse d'un vecteur $\vec{u}$ correspond à son déplacement selon les abscisses, et idem pour les ordonnées.

**Exercice 15**

Lire les coordonnées des vecteurs suivants (n'oubliez pas celles de $\vec{i}$ et $\vec{j}$!) :



Proposition 16**Calculer les coordonnées d'un vecteur**

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Exemple 17

Soient $A(3; 4)$ et $B(5; 6)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 18

Soient $A(-2; -3)$, $B(4; 3)$ et $C(8; 1)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Corollaire 19 (Égalité et coordonnées)

Deux vecteurs sont égaux *si, et seulement si* ils ont les mêmes coordonnées.

Exercices conseillés : 1, 2, 4, 8.

Exemple 20

Soient $A(3; 4)$, $B(5; 6)$, $C(6; 10)$. Déterminons les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

On note $D(x, y)$, le but du jeu étant de déterminer les valeurs de x et y telles que $ABCD$ est un parallélogramme. Or pour cela, il faut et il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Calculons les coordonnées de ces deux vecteurs : les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 6 - 4 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, et celles de $\overrightarrow{DC}$ sont $\begin{pmatrix} 6 - x \\ 10 - y \end{pmatrix}$. Pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, il faut et il suffit que leurs coordonnées soient égales, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - x \\ 10 - y \end{pmatrix}$. Cela revient à prendre $x = 4$ et $y = 8$, donc $D(4; 8)$.

Exercice 21 (Exercice-type)

Soient $A(-2; -3)$, $B(4; 3)$, $C(8; 1)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice conseillé : 5.

Corollaire 22 (Norme d'un vecteur)

- Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ un vecteur. Sa norme est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$.

Propriété 23**Somme et produit**

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, et $k \in \mathbb{R}$.

► $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

► $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple 24

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Alors le vecteur $\vec{u} - 10\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 5 - 10 \times 2 \\ -3 - 10 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -83 \end{pmatrix}$$

Exercices conseillés : 3, 12, 13.

Corollaire 25

Soient $\vec{u}$ un vecteur et $k \geq 0$. Alors $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
(Attention à la positivité de k ! Une norme est toujours positive.)

B – Colinéarité et coordonnées

Colinéarité et coordonnées

Proposition 26

Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple 27

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car leurs coordonnées sont proportionnelles (avec un coefficient de proportionnalité de -2).
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles (le facteur entre les abscisses est de 2, alors qu'entre les ordonnées, le facteur est de 3).

Exercice 28

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix}$ avec y un nombre inconnu.

En utilisant un argument de proportionnalité, déterminer la valeur de y qui fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercices conseillés : 6, 7.

Déterminant de deux vecteurs

Définition 29

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Le **déterminant** du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est la quantité :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

Remarque 30 (Astuce mnémotechnique)

On rencontre parfois une notation du déterminant sous forme d'un « tableau » :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

La formule du déterminant correspond alors à la différence des produits en croix. On rappelle que deux grandeurs sont proportionnelles *si, et seulement si* leurs produits en croix sont égaux. On en déduit le critère suivant :

Propriété 31**Déterminant et colinéarité**

Deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si, et seulement si* $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple 32

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car leur déterminant est nul :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times (-8) - 4 \times (-6) = -24 + 24 = 0$$

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, car leur déterminant n'est pas nul :

$$\det(\vec{u}, \vec{w}) = 3 \times 6 - 4 \times 12 = 18 - 48 = -30 \neq 0$$

Exercice 33

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix}$ avec y un nombre inconnu.

En utilisant le déterminant, déterminer la valeur de y telle que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercices conseillés : 6, 7.

Méthode 34 (Déterminant et alignement)

Pour vérifier si trois points A , B et C sont alignés ou non, on peut vérifier si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est nul ou non.

Exercice 35

Soient $A(-2; -3)$, $B(4; 3)$ et $C(8; y)$, avec y un nombre inconnu.

Déterminer la valeur de y telle que A , B et C sont alignés.

(Indication : calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis leur déterminant. On cherchera la valeur de y qui annule ce déterminant en résolvant une équation.)

Exercices conseillés : 10, 11.

Exercices

Appliquer

Exercice 1

Soient $A(-3; 2)$, $B(5; -1)$ et $C(3; 1)$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

Exercice 2

Soient $A(-2; 0)$, $B(3; -1)$, $C(5; 4)$ et $D(0; 5)$.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 3

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées de :

- ▶ $2\vec{u}$ ▶ $-3\vec{v}$ ▶ $\vec{u} + \vec{v}$ ▶ $10\vec{u}$
- ▶ $-32\vec{v}$ ▶ $10\vec{u} - 32\vec{v}$ ▶ $\frac{1}{2}\vec{u}$

Exercice 4

On note $A(-5; 2)$ et $B(-3; 5)$.

- 1▶ Placer A et B dans un repère.
- 2▶ Placer le point C , image de A par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- 3▶ Placer le point D , image de B par la translation de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

S'exercer

Exercice 9

Déterminer par le calcul la nature du triangle ABC dans chaque cas.

- ▶ $A(1; \sqrt{3})$, $B(4; 2\sqrt{3})$ et $C(1; 3\sqrt{3})$
- ▶ $A(-4; 3)$, $B(3; -1)$ et $C(4; 4)$
- ▶ $A(5; 1)$, $B(10; 4)$ et $C(2; 6)$
- ▶ $A(-1; -1)$, $B(4; 2)$ et $C(1; 6)$

Exercice 10

Soient $A(1; 1)$, $B(6; 2)$ et $C(21; y)$, avec y un nombre inconnu. Déterminer la valeur de y telle que A , B et C sont alignés.

Exercice 5

Soient $R(-1; 3)$, $S(5; -4)$, $T(8; -2)$. Déterminer les coordonnées du point U tel que $RSTU$ est un parallélogramme.

Exercice 6

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}$ avec y un nombre inconnu.
Déterminer la valeur de y qui fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 7

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ avec x un nombre inconnu.
Déterminer la valeur de x qui fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 8

On considère $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Dans chaque cas, déterminer des valeurs pour a et b qui rendent l'égalité vraie :

- a▶ $5\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$ c▶ $\sqrt{2}\vec{u} = -\frac{3}{4}\vec{v}$
- b▶ $\frac{2}{3}\vec{u} = -\frac{3}{4}\vec{v}$

Exercice 11

Soient $A(-3; 7)$, $B(-1; 5)$ et $C(x; -4)$, avec y un nombre inconnu. Déterminer la valeur de x telle que A , B et C sont alignés.

Exercice 12

Soient $A(1; 1)$, $B(8; 2)$, $C(3; 6)$ et $G(4; 3)$.

- 1▶ Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
- 2▶ En déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

S'entraîner

Exercice 13

Soient $A(2;1)$, $B(8;2)$ et $C(-1;6)$. Soit G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Déterminer les coordonnées de G .

Exercice 14

Soient $A(1;11)$, $B(1;1)$ et $C(7;3)$.

- 1► Justifier que ABC est isocèle en A .
- 2► Déterminer les coordonnées du milieu H de $[BC]$.
- 3► Calculer BC et AH .
- 4► En déduire l'aire de ABC .
(Indication : dans un triangle isocèle, la médiane et la hauteur issues du sommet sont confondues.)

Problèmes de recherche

Problème 15 (Théorème de Varignon)

On souhaite démontrer un théorème fonctionnant pour tous les quadrilatères.
 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. On définit les points I, J, K et L par les relations :

$$\blacktriangleright \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \blacktriangleright \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad \blacktriangleright \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \qquad \blacktriangleright \overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

Partie A

On suppose que, dans un repère orthonormé, $A(2;-1)$, $B(3;2)$, $C(15;4)$ et $D(8;-5)$.

- 1► Réaliser une figure.
- 2► Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L .
- 3► Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.
- 4► Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $IJKL$?

Partie B

On se place dans un repère orthonormé. On note $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ et $D(x_D; y_D)$.

- 1► Exprimer les coordonnées de I, J, K et L en fonction des coordonnées de A, B, C et D .
- 2► En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

Partie C

- 1►
 - a► En remarquant que $\overrightarrow{IJ}$ peut s'écrire $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
 - b► En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
- 2►
 - a► En remarquant que $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK}$, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.
 - b► En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{LK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
- 3► Conclure quant à la nature du quadrilatère $IJKL$.

12 Systèmes d'équations

Table des matières

Exercices 128

Programme

Bulletin officiel

Capacités attendues

- Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Détail

Contenus

- Résoudre un système 2×2
 - Résolution par substitution
 - Résolution par combinaison
 - Illustration graphique de la résolution.

Définition 1

Un **système linéaire à 2 équations et 2 inconnues** (parfois abrégé «**système** 2×2 ») est la donnée de deux équations du premier degré dépendant des deux mêmes inconnues.

Résoudre un tel système, c'est trouver tous les *couples* de valeurs qui satisfont simultanément les deux équations.

Exemple 2

Le système (noté avec une accolade) $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases}$ est un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Le couple $(x; y) = (3; 5)$ en est une solution, car $3 \times 3 + 5 = 14$ et $7 \times 3 - 4 \times 5 = 1$.

Méthode 3 (Résoudre un système par substitution)

- 1► Utiliser une des équations pour exprimer une variable en fonction de l'autre.
- 2► Injecter cette expression dans la seconde équation pour la transformer en une équation simple à 1 seule inconnue.
- 3► Résoudre cette équation à 1 inconnue.
- 4► En utilisant la valeur trouvée pour une inconnue et l'expression de la seconde inconnue, en déduire l'autre à l'aide des équations.

Exemple 4

Réolvons $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases}$ par substitution. En arrangeant la première équation, on écrit $y = 14 - 3x$. On injecte cette expression dans la seconde équation :

$$\begin{aligned}
 7x - 4y &= 1 \\
 7x - 4(14 - 3x) &= 1 && \text{(On injecte l'expression)} \\
 7x - 4 \times 14 + 4 \times 3x &= 1 && \text{(On développe ...)} \\
 19x - 56 &= 1 && \text{(... et on réduit...)} \\
 19x &= 1 + 56 = 57 && \text{(... puis on résout)} \\
 x &= \frac{57}{19} = 3
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $y = 14 - 3x = 14 - 3 \times 3 = 5$. Ainsi l'ensemble des solutions de ce système est $S = \{(3; 5)\}$

Méthode 5 (Résoudre un système par combinaison)

- 1► On multiplie les deux équations par deux nombres afin de faire apparaître le même coefficient devant l'une des inconnues.
- 2► On soustrait membre à membre les deux équations.
- 3► On résout la nouvelle équation à 1 inconnue qui en résulte.
- 4► On se sert de cette valeur trouvée et d'une des équations pour trouver la deuxième inconnue.

Exemple 6

Réolvons $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases}$ par combinaison. Multiplions la première équation par 7 et la seconde par 3 :

$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 7(3x + y) = 7 \times 14 \\ 3(7x - 4y) = 3 \times 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 21x + 7y = 98 \\ 21x - 12y = 3 \end{cases}$$

On soustrait les deux équations :

$$\begin{aligned} 21x + 7y &= 98 \\ 21x - 12y &= 3 \\ \longrightarrow \quad \cancel{21x} - \cancel{21x} + 7y - (-12y) &= 98 - 3 \\ \longrightarrow \quad 19y &= 95 \end{aligned}$$

Et on résout cette nouvelle équation : on trouve $y = \frac{95}{19} = 5$.

D'après la première équation, $3x + y = 14$, donc $3x = 14 - y = 14 - 5 = 9$, donc $x = 3$. Ainsi l'ensemble des solutions de ce système est $S = \{(3; 5)\}$.

(**Remarque** : on pouvait également multiplier la première équation par 4 et ajouter les deux équations : cela aurait fait disparaître les termes en y .)

Remarque 7 (Cas particuliers)

- ▶ Si par des manipulations vous montrez que l'une des équations est équivalente à une égalité absurde (typiquement, $0 = 1$), alors le système n'a pas de solution.
- ▶ Si par des manipulations vous montrez que les deux équations du système sont identiques, alors le système a une infinité de solutions, qui sont les couples $(x; y)$ liés par l'équation du système.

Exemple 8

- ▶ $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 6x + 8y = 7 \end{cases}$ n'a pas de solution.
- ▶ $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 6x + 2y = 28 \end{cases}$ a une infinité de solutions.

Exercices

Applications

Exercice 1

Justifier que $(x; y) = (5; -3)$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 4x + 7y = -1 \end{cases}$$

Exercice 2

Justifier que $(x; y) = (1; 8)$ n'est solution pas du système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 4x + 7y = -1 \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre le système suivant d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre le système suivant d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$$

Exercice 5

Résoudre le système suivant d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$

Exercice 6

Résoudre le système suivant d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Exercice 7

Justifier que le système suivant n'admet aucune solution :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Exercice 8

Justifier que le système suivant admet une infinité de solutions :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = -3 \end{cases}$$

Problèmes

Exercice 9

Dans un magasin, tous les articles d'une même catégorie sont au même prix. Pierre et Clothilde décident d'y acheter des DVD et des bandes dessinées. Ils possèdent chacun 75€. Pierre achète un DVD et 4 bandes dessinées ; il lui reste 14,50€. Clothilde dépense 73,50€ pour l'achat de 2 DVD et 3 bandes dessinées. Calculer le prix de chaque article.

Exercice 10

Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives identiques et de dix wagons-citernes du même modèle et ce train mesure alors 152m de long. Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes vides. Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160m de long. Déterminer la longueur en mètre d'une locomotive et celle d'un wagon-citerne.

Exercice 11

Pour offrir un cadeau à l'un d'eux, les élèves d'une classe ont collecté 75€ en pièces de 1€ et de 2€, soit 45 pièces en tout.

Déterminer le nombre de pièces de chaque sorte.

Exercice 12

Une entreprise artisanale fabrique deux types d'objets en bois : des chaises et des tables.

Une chaise nécessite 3kg de bois et une table nécessite 5kg de bois.

Pendant une journée, l'entreprise a utilisé 163kg de bois pour fabriquer 43 objets.

Déterminer le nombre d'objets réalisés pour chaque type.

Exercice 13

Pour 6 kilogrammes de vernis et 4 litres de cire, on paie 95 euros.

Pour 3 kilogrammes de vernis et 3 litres de cire on paie 55,50 euros.

Quels sont les prix du kilogramme de vernis et du litre de cire ? Justifier.

Exercice 14

Un torréfacteur met en vente deux sortes de mélange de café. Le mélange A est composé de 60% d'Arabica et de 40% de Robusta et coûte 86,40€ le kilogramme. Le mélange B est composé de 40% d'Arabica et de 60% de Robusta et coûte 79,60€ le kilogramme.

Quel est le prix du kilogramme d'Arabica et du kilogramme de Robusta ?

Exercice 15

Pour financer une partie de leur voyage de fin d'année, des élèves vendent des gâteaux qu'ils ont confectionnés eux-même.

Un même jour ils ont vendu 15 tartes, les unes aux myrtilles et les autres aux pommes.

Une tarte aux myrtilles est vendue 4 euros et une tarte aux pommes 2 euros.

La somme encaissée ce jour là est 42 euros.

Déterminer combien ils ont vendu de tartes de chaque sorte.

Défis

Exercice 16

Résoudre le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$$

Exercice 17

Résoudre le système suivant, d'inconnues x , y et z :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

13 Probabilités

Table des matières

1	Modéliser le hasard : vocabulaire et notations	132
2	Quantifier le hasard : (loi de) probabilité	133
A	Probabilité d'un événement	133
B	Calculer une probabilité	134
C	Loi de probabilité d'une expérience aléatoire	137
3	Expériences à plusieurs épreuves : arbres de probabilité	138
	Exercices	140

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- ▶ Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- ▶ Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- ▶ Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
- ▶ Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Capacités attendues

- ▶ Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- ▶ Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- ▶ Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

Détail

Contenus

- ▶ Univers, événements, issues.
- ▶ Inclusions d'ensembles, intersection, union, complémentaire.
- ▶ Appartenance et inclusion.
- ▶ Loi (ou distribution) de probabilité
- ▶ Probabilité d'un événement, somme des probabilités des issues.
- ▶ $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
- ▶ Dénombrement par tableaux ou arbres.
- ▶ Utiliser des modèles de références équiprobables (dé, tirage au sort au hasard)
- ▶ Faire la différence entre le modèle et la réalité.
- ▶ Calculer des probabilités dans des cas simples

Démonstration

- ▶ $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

1 – Modéliser le hasard : vocabulaire et notations

Définition 1

- ▶ Un phénomène dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat est appelé **expérience aléatoire**.
- ▶ Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible est appelé une **issue**.
- ▶ L'ensemble des issues est appelé l'**univers des possibles**. Traditionnellement, on le note Ω .

Exemple 2

Expérience	Issues
Lancer un dé	1, 2, 3, 4, 5, 6
Tirer une carte	As de pique, 2 de cœur, 3 de trèfle, ...
Lancer une pièce	Pile, Face

Exercice conseillé : 1

Définition 3

- ▶ Un **événement** est constitué d'une ou plusieurs issues. Quand il ne contient qu'une seule issue, on parle d'**événement élémentaire**.
- ▶ Un **événement certain** est un événement qui se produit à coup sûr.
- ▶ Un **événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais.
- ▶ Soit A un événement. L'**événement contraire de A** , noté $\bar{A}$, est l'évènement qui se produit quand A ne se réalise pas.

Exemple 4

Voici quelques exemples d'évènements associés à différentes expériences aléatoires :

- ▶ Lancer d'un dé : "obtenir un nombre pair", "obtenir un 2", ou "obtenir un nombre plus grand que 4"
- ▶ Tirage d'une carte : "obtenir un trèfle", "obtenir une tête ou un as", "obtenir une carte de carreau et qui porte un nombre pair"
- ▶ Lancer une pièce : "obtenir pile", "ne pas obtenir face"

Exemple 5

Lors du lancer d'un dé,

- ▶ "obtenir un nombre" est un événement certain
- ▶ "obtenir un 0,5" est un événement impossible
- ▶ L'évènement contraire de "obtenir un nombre pair" est "obtenir un nombre impair"

Lors du tirage d'une carte,

- ▶ "obtenir un nombre ou une figure" est un événement certain
- ▶ "obtenir un trèfle et un cœur" est un événement impossible
- ▶ L'évènement contraire de "obtenir une carte rouge" est "obtenir une carte noire"

Définition 6

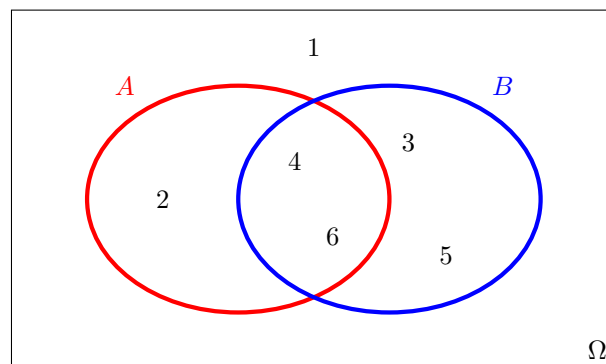
Soient A et B deux événements.

- L'événement « A et B », noté $A \cap B$, est l'événement réalisé quand A et B sont simultanément réalisés.
- L'événement « A ou B », noté $A \cup B$, est l'événement réalisé quand au moins un des deux événements parmi A et B est réalisé.

Exemple 7

On considère un lancer d'un dé à 6 faces. Considérons les événements A : «obtenir un nombre pair» et B : «obtenir un nombre supérieur ou égal à 3».

- L'événement $A \cap B$ est «obtenir un nombre pair supérieur ou égal à 3». Les issues qui le réalisent sont 4 et 6.
- L'événement $A \cup B$ est «obtenir un nombre pair ou supérieur ou égal à 3». Les issues qui le réalisent sont 2, 3, 4, 5 et 6.

**Exercice 8**

On tire au hasard un nombre entre 1 et 20. On considère les événements A : «tirer un multiple de 3» et B : «tirer un multiple de 15».

- 1► Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 2► Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 3► Décrire l'événement $\overline{A}$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 4► Décrire l'événement $\overline{A \cup B}$ par une phrase. Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- 5► Représenter Ω , A et B comme dans l'exemple précédent.

Exercice conseillé : 2.

2 – Quantifier le hasard : (loi de) probabilité

A – Probabilité d'un événement

Définition 9

À un événement, on associe un nombre entre 0 et 1, appelé **probabilité** de l'événement. Plus la probabilité est proche de 1, plus l'événement a de chances de se produire, et plus la probabilité est proche de 0, moins l'événement a de chances de se produire.

La probabilité d'un événement A est notée $\mathbb{P}(A)$.

Exemple 10

- ▶ Quand on lance une pièce, on a 1 chance sur 2 de tomber sur Pile. La probabilité de l'évènement "obtenir Pile" est donc $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 0,5, ou encore 50%. On peut écrire $\mathbb{P}(\text{"obtenir Pile"}) = \frac{1}{2}$.
- ▶ Dans un jeu de cartes, un quart des cartes sont des trèfles, on a donc 1 chance sur 4 de tirer un trèfle. La probabilité de l'évènement "tirer un trèfle" est donc $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire 0,25, ou encore 25%. On peut écrire $\mathbb{P}(\text{"tirer un trèfle"}) = \frac{1}{4}$.
- ▶ En particulier, on a 3 chances sur 4 de ne pas tirer un trèfle. La probabilité de l'évènement "ne pas tirer un trèfle" est donc $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire 0,75, ou encore 75%. On peut écrire $\mathbb{P}(\text{"ne pas tirer un trèfle"}) = \frac{3}{4}$.

Proposition 11

- ▶ La probabilité d'un évènement certain est 1.
- ▶ La probabilité d'un évènement impossible est 0.

Remarque 12

Il est impossible que rien n'arrive : autrement dit, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Définition 13

Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité, on dit qu'elles sont **équiprobables**.

Exemple 14

Les issues d'un lancer de pièce, d'un lancer de dé ou d'un tirage de cartes sont équiprobables.

B – Calculer une probabilité**Proposition 15**

La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient.

Exemple 16

Lors du lancer d'un dé, l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient les issues 1 et 4. Sa probabilité est donc $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

Méthode 17

Dans une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A se calcule avec la formule :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple 18

Lors du lancer d'un dé, qui est une situation d'équiprobabilité (puisque chaque face a la même chance d'apparaître), l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient 2 issues, et il y a 6 issues au total, donc la probabilité de cet évènement est $\frac{2}{6}$.

Corollaire 19

Soit n un nombre entier plus grand que 1. Si une expérience aléatoire possède n issues équiprobables, alors la probabilité de chacune des issues vaut $\frac{1}{n}$.

Exemple 20

Expérience aléatoire	Probabilité des issues
Lancer de dé	$1/6$
Lancer d'une pièce	$1/2$
Tirage d'une carte	$1/52$

Corollaire 21

Soit A un évènement.

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$

Pour trouver la probabilité de l'évènement contraire $\overline{A}$, on peut donc calculer $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Exemple 22

Soit A l'évènement "obtenir un multiple de 3" lors du lancer d'un dé. C'est une situation d'équiprobabilité, les issues réalisant A sont 3 et 6, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. L'évènement $\overline{A}$ est "ne pas obtenir un multiple de 3 : sa probabilité est $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Exercice conseillé : 3.

Définition 23**Événements incompatibles**

On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Lemme 24

Si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

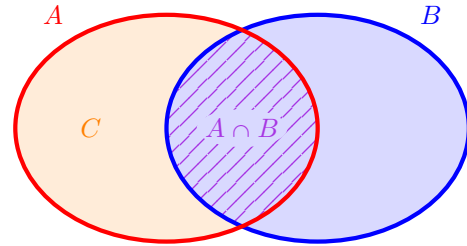
Théorème 25**Formule du crible**

Pour tous évènements A et B ,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration.

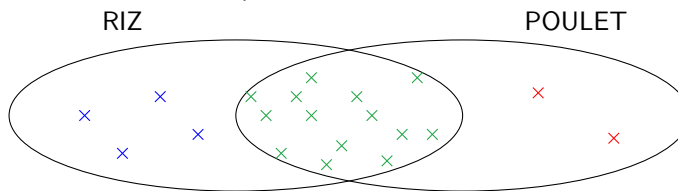
L'idée générale de la preuve est la suivante : si on combine les issues de A et celles de B , on compte deux fois les issues de $A \cap B$, puisqu'elles sont à la fois dans A et dans B . Ainsi, pour obtenir $A \cup B$, on compte A et B , et on retranche une fois $A \cap B$ qui a été compté une fois de trop.



Formellement voici comme procéder : on note C l'ensemble des issues de A qui ne réalisent pas B . De cette manière, $A \cup B = C \cup B$, et C et B sont incompatibles donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(C \cup B) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)$. De plus, $A = C \cup (A \cap B)$ et C et $A \cap B$ sont incompatibles, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \cap B)$, donc $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$. En injectant cette égalité dans la première, on obtient la formule voulue. $\square$

Remarque 26

Cette formule est très fautive si A et B ne sont pas incompatibles ! Prenons un exemple : à midi, à la cantine, les élèves de la classe d'Alice peuvent prendre du riz et du poulet. Parmi eux, 4 ne prennent que du riz, 2 d'entre eux ne prennent que du poulet, et les 14 élèves restants prennent des deux. Au total, il y a donc 18 élèves qui prennent du riz, et 16 qui prennent du poulet. Mais il n'y a pas $18 + 16 = 34$ élèves qui prennent du riz ou du poulet ! (il n'y a que 20 élèves dans la classe !)



Exercices conseillés : 4, 5, 6, 7

Méthode 27 (Tableau à double entrée)

Lorsqu'on manipule plusieurs événements qui peuvent se chevaucher, on peut réaliser un diagramme comme le précédent (appelé **diagramme de Venn**), ou réaliser un **tableau à double entrée**.

Exemple 28

Alice possède deux paquets de bonbons de deux marques différentes : celui de la marque Haribel contient 3 bonbons rouges, 5 verts et 2 bleus, alors que celui de la marque Dragicar contient 6 bonbons rouges, 1 vert et 3 bleus.

On peut représenter ces données dans un tableau :

	Rouge	Vert	Bleu	Total
Haribel	3	5	2	10
Dragicar	6	1	3	10
Total	9	6	5	20

Voici comment interpréter ce tableau :

- ▶ Chaque paquet contient 10 bonbons,
- ▶ Alice possède en tout 9 bonbons rouges, 6 verts et 5 bleus,
- ▶ Au total, Alice possède 20 bonbons.

Alice mélange les deux paquets dans un bol et tire un bonbon au hasard. On considère les événements D : « Le bonbon vient du paquet Dragicar » et R : « Le bonbon est rouge ».

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité, il suffit donc de dénombrer les cas favorables pour calculer les probabilités.

- ▶ $\mathbb{P}(D) = \frac{10}{20}$ car 10 bonbons sur les 20 au total proviennent du paquet Dragicar.
- ▶ $\mathbb{P}(R) = \frac{9}{20}$ car 9 bonbons sur les 20 au total sont rouges (indépendamment de la marque).
- ▶ $\mathbb{P}(R \cap D) = \frac{6}{20}$ car 6 bonbons sur les 20 au total sont rouges et proviennent du paquet Dragicar.
- ▶ $\mathbb{P}(R \cup D) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(R \cap D) = \frac{13}{20}$ d'après la formule du crible.

Exercice 29

On considère la répartition des élèves dans un lycée. On sélectionne un élève au hasard. On considère les événements F : « L'élève est une fille » et G : « L'élève est en filière générale ».

- 1▶ Calculer $\mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(G)$.
- 2▶ Décrire $\mathbb{P}(F \cap G)$ et $\mathbb{P}(F \cup G)$ par une phrase, puis calculer leurs probabilités.

	Générale	Techno	Pro	Total
Filles	1402	477	384	2263
Garçons	1098	523	616	2237
Total	2500	1000	1000	4500

Exercice 30

Dans un jeu de 52 cartes, les cartes numériques se voient attribuées leur propre valeur. Les figures valent 10 points.

On pioche une carte au hasard. On considère les événements T : « La carte est une carte de trèfle », et M : « La carte vaut 5 points ou moins ».

- 1▶ Recopier et compléter le tableau ci-dessous, dénombrant les cartes qui sont de trèfle ou non, et les cartes qui valent plus ou moins de 5.
- 2▶ Calculer $\mathbb{P}(T)$ et $\mathbb{P}(M)$.
- 3▶ Décrire $\mathbb{P}(T \cap M)$ et $\mathbb{P}(T \cup M)$ par une phrase, puis calculer leurs probabilités.

	T	$\bar{T}$	Total
M			
$\bar{M}$			
Total			

Exercice conseillé : 9

C – Loi de probabilité d'une expérience aléatoire

Activité 31

On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On s'intéresse à la somme des deux dés.

- 1▶ Tracer un tableau à 6 lignes, représentant les résultats du premier dé, et 6 colonnes, représentant le résultat du second dé. Dans chaque case du tableau, calculer la somme des deux dés.
- 2▶ Quel est l'univers des possibles de cette expérience aléatoire ? Combien y a-t-il d'issues ?
- 3▶ Coloriez les cases du tableau correspondant à une même issue.
- 4▶ À partir du tableau de valeurs, déterminer la probabilité de chaque issue.
- 5▶ Ce tableau a une particularité. Laquelle ? Expliquer son origine.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Définition 32**Loi de probabilité**

La **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire est la donnée des probabilités de chacune de ses issues.

Exemple 33

Il est courant d'exprimer la loi de probabilité d'une expérience aléatoire sous forme de tableau.

- ▶ On lance dé à 6 faces. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

Valeur	1	2	3	4	5	6
Proba	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- ▶ On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On s'intéresse à la somme des deux dés. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

Valeur	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Propriété 34

Somme des probabilités

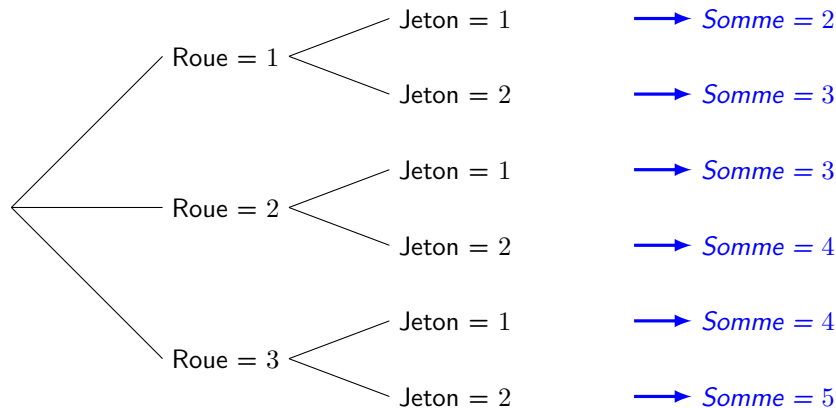
La somme des probabilités de toutes les issues vaut toujours 1.

3 – Expériences à plusieurs épreuves : arbres de probabilité

Exemple 35

On fait tourner une roue numérotée de 1 à 3 pouvant tomber de manière équiprobable sur chacune des valeurs, puis on lance un jeton équilibré dont les faces sont numérotées 1 et 2. On s'intéresse à la somme des deux résultats.

Comme les deux expériences n'ont aucune influence l'une sur l'autre, et que ce sont des situations d'équiprobabilité, on peut dénombrer les issues à l'aide d'un arbre des possibilités :



Il y a donc 6 résultats possibles pour le couple roue-jeton, et 2 d'entre eux font une somme de 4, donc la probabilité d'obtenir une somme de 4 vaut $\frac{2}{6}$.

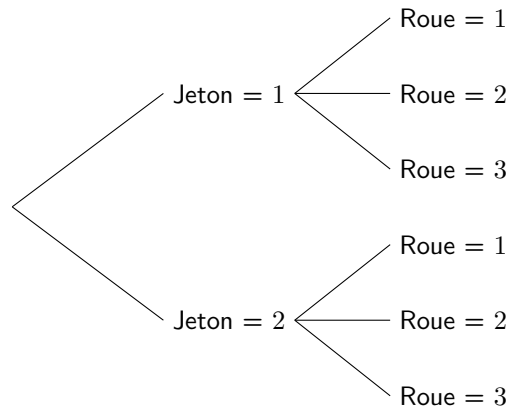
Exercice 36

On lance trois fois successivement une pièce équilibrée.

- 1▶ Dessiner l'arbre associé à cette situation.
- 2▶ Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une fois Pile.
(Indication : combien de chemin dans l'arbre ne rencontrent qu'une fois Pile ?)
- 3▶ Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au moins une fois au cours des 3 lancers.

Exercice 37

Voici un arbre associé à une succession de deux expériences aléatoires :



- 1► Décrire l'expérience aléatoire.
- 2► On s'intéresse au produit des deux résultats.
Quelle est la probabilité que celui-ci soit supérieur ou égal à 3 ?
- 3► On s'intéresse à la différence du jeton moins la roue.
Quelle est la probabilité que celle-ci soit strictement négative ?

Exercice conseillé : 8

Exercices



Exercice 1

Dans chaque situation, déterminer l'univers des possibles.

- 1► On lance un dé à 12 faces. On s'intéresse au résultat du lancer.
- 2► On lance un dé à 12 faces. On s'intéresse à si le numéro est pair ou impair.
- 3► On pioche une carte dans un jeu de 52 cartes classique. On s'intéresse à la couleur (cœur, carreau, trèfle, pique) de la carte.
- 4► On pioche une carte dans un jeu de 52 cartes classique. On s'intéresse à la valeur de la carte.

Exercice 2

Dans un sac opaque, on met deux billets de 5€, un billet de 10€ et deux billets de 20€. Tous les billets sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise deux billets dans le sac. On considère les événements :

- A : « on tire deux billets identiques »
- B : « on tire au moins un billet de 20€ »
- C : « on tire au moins un billet de 10€ »

Décrire par une phrase les événements suivants :

- 1► $\bar{A}$
- 2► $\bar{B}$
- 3► $\bar{C}$
- 4► $A \cap \bar{B}$
- 5► $A \cap C$
- 6► $A \cap \bar{C}$

Exercice 3

On considère un cadenas à combinaison qui comporte trois chiffres de 0 à 9.

- 1► Combien y a-t-il de codes possibles ?
- 2► En déduire la probabilité de tomber au hasard sur le bon code.
- 3► (Bonus) Vous savez que le code est composé d'un 1, d'un 3 et d'un 4, mais vous ne savez pas dans quel ordre. Combien de codes sont possibles avec cette contrainte ?

Exercice 4

Soient A et B deux événements. Recopier et compléter le tableau suivant (les lignes sont indépendantes) :

$P(A \cup B)$	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$
	0,4	0,7	0,2
0,9	0,6	0,8	
0,7	0,6		0,5

Exercice 5

On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements :

- R : « la carte tirée est rouge (cœur ou carreau) »
- K : « la carte tirée est un roi »
- T : « la carte tirée est un trèfle »

- 1► Déterminer $P(R)$, $P(K)$ et $P(T)$.
- 2► Décrire par une phrase les événements suivants, et donner leur probabilité :

a► $R \cap K$ b► $R \cap T$ c► $R \cup T$

Exercice 6

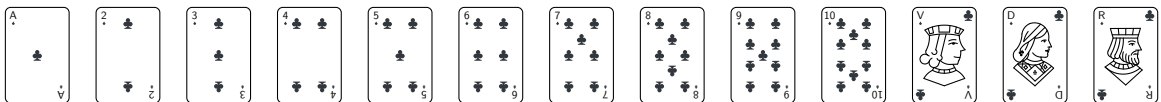
En France, il y a 16% de gauchers, 30% de personnes qui ont les yeux bleus, et 3% de gauchers aux yeux bleus.

Quelle est probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit pas gaucher et n'ait pas les yeux bleus ?

Exercice 7

Dans une usine, sur 100 objets fabriqués, en moyenne 15 sont mal peints, 7 sont mal moulés, et 6 présentent ces deux défauts à la fois.

Calculer la probabilité qu'un objet ne présente aucun défaut.





Exercice 8

On suppose que lorsqu'un couple attend un enfant, il est aussi probable qu'il s'agisse d'une fille ou d'un garçon.

- 1► Représenter, à l'aide d'un arbre, les possibilités pour une famille à 3 enfants.
- 2► Quelle est la probabilité de n'avoir que des garçons ?
- 3► Quelle est la probabilité d'avoir une fille en dernier ?
- 4► Quelle est la probabilité d'avoir deux garçons et une fille (dans n'importe quel ordre) ?

Exercice 9

Dans une école de musique, les élèves peuvent apprendre le piano, la guitare, ou un autre instrument. Ils ont aussi la possibilité de participer à un orchestre. La répartition des différents ateliers est donnée dans le tableau ci-dessous :

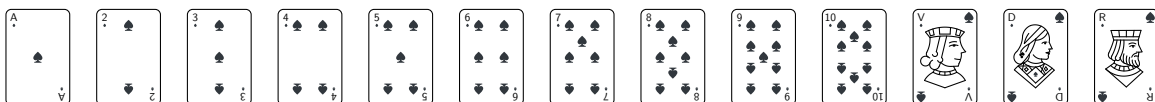
	Piano	Guitare	Autre	Total
Orchestre	20		70	
Pas orchestre		190		350
Total	150			450

- 1► Recopier et compléter le tableau.
- 2► On choisit un élève au hasard dans cette école. Quelle est la probabilité que cet élève...
 - a► apprenne la guitare ?
 - b► ne fasse pas partie de l'orchestre ?
 - c► joue du piano dans l'orchestre ?

Exercice 10 (Pour aller (plus) loin)

L'idée de la preuve de la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ se visualise sur la représentation en patatoïdes : la surface correspondant à $A \cup B$ est égale à la surface correspondant à A , plus celle correspondant à B , mais ce faisant on compte en double la petite surface correspondant à $A \cap B$, que l'on doit retrancher une fois pour équilibrer.

Sur le même principe, expliquer pourquoi $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.



14 (In)équations graphiques, produit, quotient

Table des matières

1	Résolution graphique d'(in)équations	144
2	Tableau de signes d'une fonction	147
3	Équations produit et quotient	148
4	Inéquations produit	149
5	(In)équations simples de degré 2	150
	Exercices	152

Programme

Bulletin officiel

Capacités attendues

- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème. - Modéliser un problème par une inéquation. - Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$. - Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle. - Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes. - Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

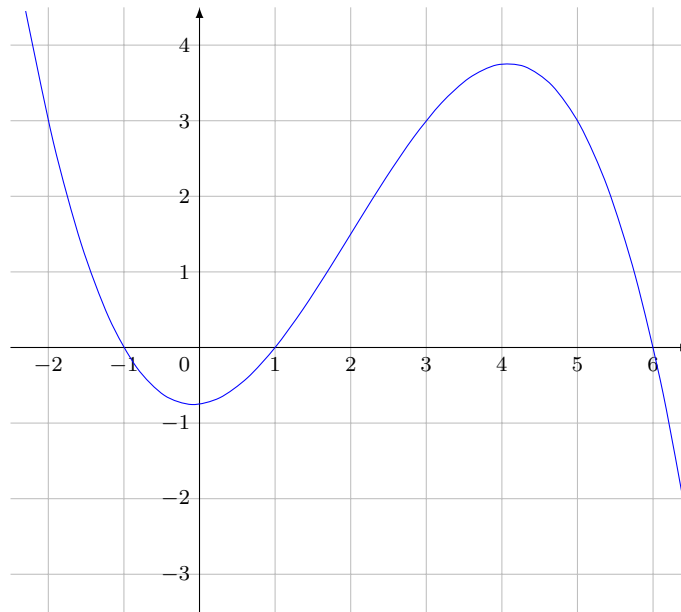
Détail

Contenus

- Résoudre $f(x) = k$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < k$ algébriquement ou graphiquement
- Tableau de signes d'une fonction
- Résoudre une équation produit nul.
- Inéquation produit et quotient

1 – Résolution graphique d'(in)équations

Soit $k \in \mathbb{R}$. Considérons comme exemple la fonction f dont le graphe est le suivant :

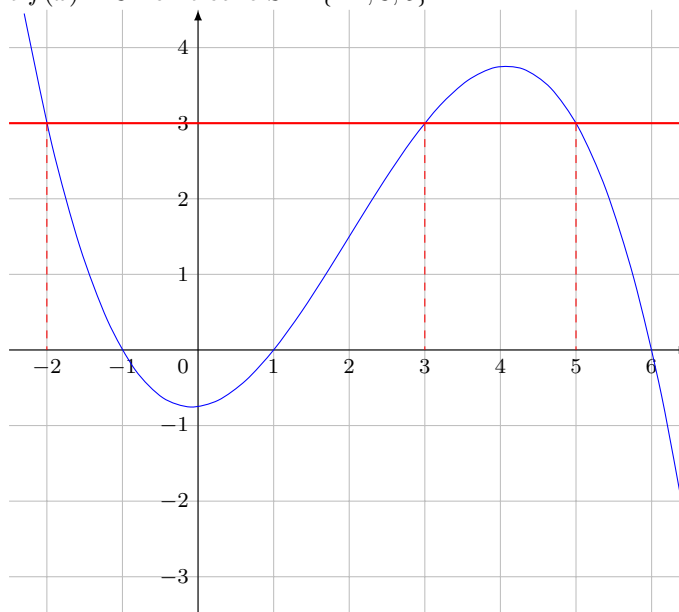


Méthode 1 (Résolution graphique d'équations)

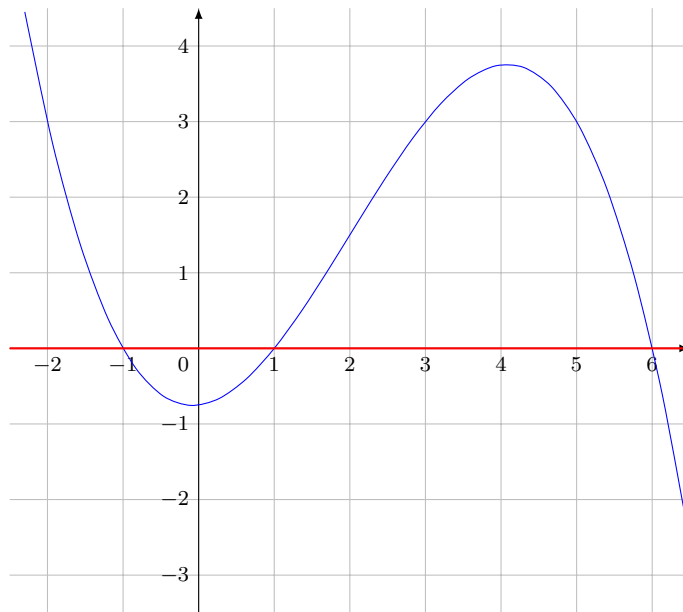
Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$, on trace dans un repère la courbe représentative de f et la droite horizontale d'équation $y = k$. On cherche ensuite les abscisses de leurs points d'intersection.

Exemple 2

On résout graphiquement $f(x) = 3$: on trouve $S = \{-2; 3; 5\}$.



On résout graphiquement $f(x) = 0$ (c'est-à-dire trouver les intersections de la courbe avec l'axe des abscisses) : on trouve $S = \{-1; 1; 6\}$.

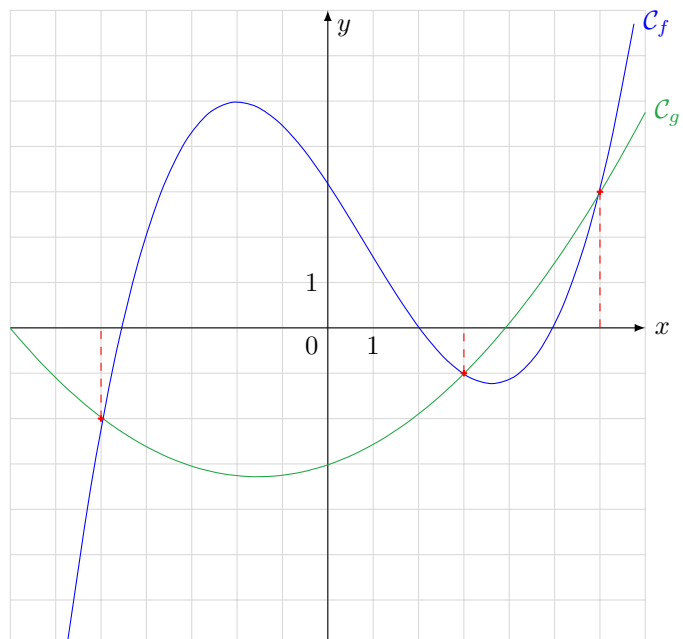


Méthode 3 (Résolution graphique d'équations – version générale)

Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ où f et g sont deux fonctions, il suffit de trouver les points d'intersection de leurs courbes représentatives.

Exemple 4

L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ où f et g sont définies par leurs courbes représentatives ci-dessous est $S = \{-5; 3; 6\}$.



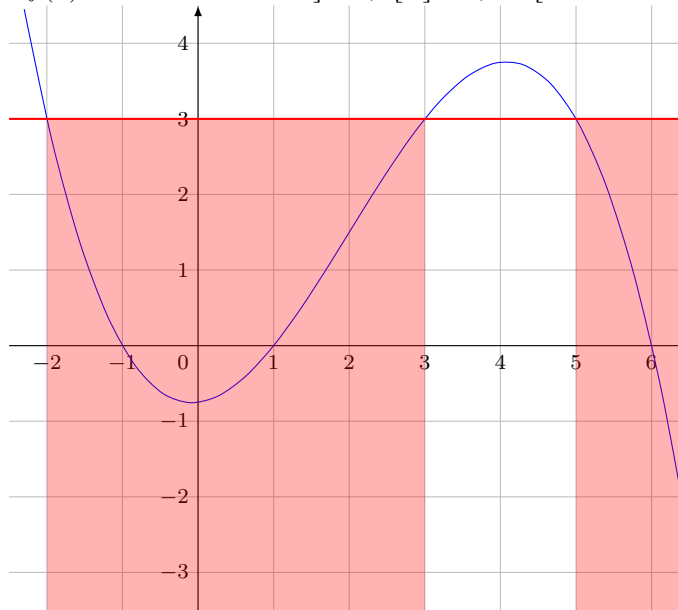
Méthode 5 (Résolution graphique d'inéquations)

Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) < k$, on trace dans un repère la courbe représentative de f et la droite horizontale d'équation $y = k$. On cherche ensuite les intervalles d'abscisses dans lesquels la courbe de f est en-dessous de la ligne $y = k$.

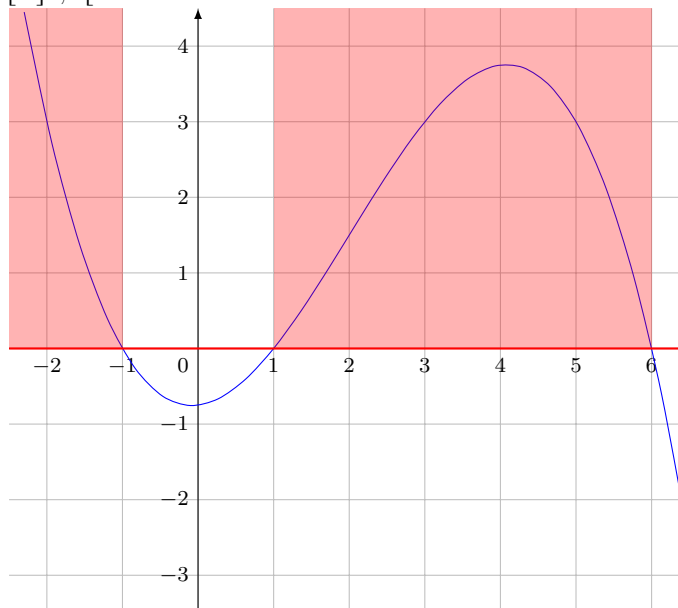
Comme l'inéquation est stricte, l'ensemble des solutions est une union d'intervalles ouverts.

Exemple 6

On résout graphiquement $f(x) < 3$: on trouve $S =]-2; 3[\cup]-5; +\infty[$.



On résout graphiquement $f(x) > 0$ (c'est-à-dire trouver les intervalles où f est au-dessus de l'axe des abscisses) : on trouve $S =]-\infty; -1[\cup]1; 6[$.



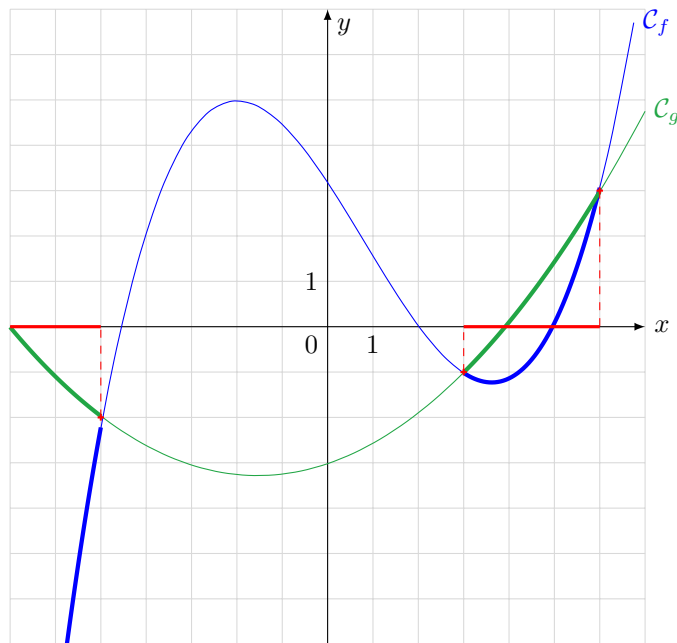
Méthode 7 (Résolution graphique d'inéquations – version générale)

Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) < g(x)$ où f et g sont deux fonctions, il faut déterminer les intervalles sur lesquels la courbe de g est au-dessus de la courbe de f .

Exemple 8

L'ensemble des solutions de $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont définies par leurs courbes représentatives ci-dessous est $S =]-\infty; -5] \cup [3; 6]$.

En effet, on cherche quand f (en bleu) est-elle en-dessous de g (en vert), autrement dit quand la courbe bleue est-elle en-dessous de la verte. Les portions concernées sont tracées en trait gras.



2 – Tableau de signes d'une fonction

Définition 9

Étudier le signe de f , c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est positive, négative ou nulle.

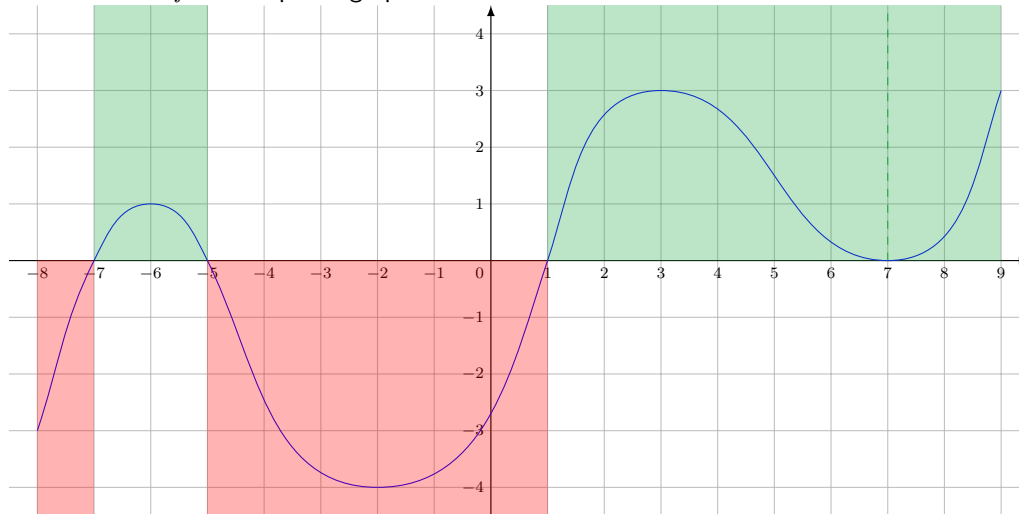
Méthode 10 (Tableau de signes)

On représente les différents signes de f dans un **tableau de signes**. Pour dresser le tableau de signes de f :

- ▶ On trace un tableau à 2 lignes : la première contient des valeurs de x , l'autre contient les signes de $f(x)$ correspondants.
- ▶ Sur la première ligne, on écrit aux deux extrémités les bornes de l'intervalle de définition de f .
- ▶ Entre les deux bornes, on inscrit dans l'ordre les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.
- ▶ Dans la deuxième ligne, en-dessous de chaque valeur de x telle que $f(x) = 0$, on trace une séparation verticale avec un rond (voir l'exemple).
- ▶ Dans chaque case ainsi créée sur la deuxième ligne, on inscrit $+$ ou $-$ pour indiquer le signe de f sur ce petit intervalle.

Exemple 11

Considérons la fonction f définie par le graphe suivant :



Son tableau de signes est :

x	-8	-7	-5	1	7	9	
$f(x)$	-	○	+	○	-	○	+

3 – Équations produit et quotient**Définition 12**

On appelle **équation produit** une équation qui s'écrit sous la forme d'un produit égal à 0.

Exemple 13

En notant x l'inconnue, $(x + 2)(x - 3) = 0$ et $5(2x + 7)(1 - x)(3x - 2) = 0$ sont des équations produits.

Proposition 14

Un produit est nul **si, et seulement si** l'un de ses facteurs est nul.

Démonstration. Soient a et b deux nombres tels que $ab = 0$. Si $b = 0$, alors l'un des facteurs du produit (ici b) est nul. Au contraire, si $b \neq 0$, alors par définition, $a = b \times \frac{a}{b} = \frac{ab}{b} = \frac{0}{b} = 0$, donc l'un des facteurs du produit (ici a) est nul. Dans tous les cas, au moins l'un des facteurs est nul. $\square$

Méthode 15 (Résolution d'une équation de degré 2 avec une équation produit)

Lorsqu'une équation à 1 inconnues implique un terme dans lequel l'inconnue est élevée au carré, on commence par rendre nul l'un des deux membres, puis on tente de reconnaître une distributivité ou une identité remarquable sur l'autre membre.

Après factorisation de ce dernier, on cherche à annuler le produit, donc au moins l'un des facteurs, et on se ramène alors à 2 équations de degré 1, qui fournissent chacune une solution possible.

Exemple 16

On note x l'inconnue des équations.

- ▶ On cherche à résoudre l'équation $(x-2)(x-3) = 0$. C'est une équation produit : $(x-2)(x-3) = 0$ **si, et seulement si** $x-2 = 0$ ou $x-3 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = 3$. Les solutions sont donc 2 et 3.
- ▶ On cherche à résoudre l'équation $5(x-4)(x+1) = 0$. C'est une équation produit : $5(x-4)(x+1) = 0$ **si, et seulement si** $x-4 = 0$ ou $x+1 = 0$, c'est-à-dire $x = 4$ ou $x = -1$. Les solutions sont donc 4 et -1 .

Exercice 17

Déterminer des équations produits équivalentes, puis résoudre celles-ci :

- ▶ $(x+5)(x-8) = 0$
- ▶ $10(2x-1)(3-2x) = 0$
- ▶ $(4+5x)(2x-3)(x^2-16) = 0$

Définition 18

On appelle **équation quotient** une équation qui s'écrit sous la forme d'un quotient égal à 0.

Proposition 19

Produits en croix

Soient a, b, c et d quatre nombres, avec b et d non nuls.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si, et seulement si } ad = bc.$$

Proposition 20

Soient A et B deux fonctions.

Résoudre l'équation quotient $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ revient à chercher les valeurs de x telles que $A(x) = 0$ ET $B(x) \neq 0$.

Exemple 21

Les solutions de l'équation quotient $\frac{x^2-x}{x-1} = 0$ sont les solutions de $x^2-x = 0$ telles que $x-1 \neq 0$, autrement dit $x \neq 1$. Les solutions de $x^2-x = 0$ sont 0 et 1, mais 1 est exclu, donc la seule solution de cette équation quotient est $x = 0$.

4 – Inéquations produit**Définition 22**

Une **inéquation produit** est une inéquation écrite sous la forme d'un produit qui doit être positif ou négatif.

Méthode 23 (Résolution d'inéquations produits)

Considérons l'inéquation produit $(x-6)(2x-3) < 0$. On construit ce qu'on appelle un **tableau de signes** : sur chaque ligne, on note les facteurs de l'inéquation et leurs signes en fonction des valeurs croissantes de x . On marque aussi leurs points d'annulation. On applique la règle des signes pour déterminer le signe du produit dans chaque zone.

x	$-\infty$	$1,5$	6	$+\infty$
Signe de $x - 6$		-	-	+
Signe de $2x - 3$	-	-	+	+
Signe de $(x - 6)(2x - 3)$	+	-	-	+

Ainsi, l'ensemble des solutions est la réunion des plages pour lesquelles le produit est négatif : ici, $S =]1,5; 6[$.

Définition 24

Une **inéquation quotient** est une inéquation écrite sous la forme d'un quotient qui doit être positif ou négatif.

Méthode 25 (Résolution d'inéquations quotients)

Considérons l'inéquation produit $\frac{2x-4}{x-1} \geq 0$. On construit également un tableau de signes. On marque aussi leurs points d'annulation. On applique la règle des signes pour déterminer le signe du produit dans chaque zone. Dans la ligne du signe du quotient, on marque d'une double barre les points d'annulation du dénominateur.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
Signe de $2x - 4$		-	-	+
Signe de $x - 1$	-	-	+	+
Signe de $\frac{2x-4}{x-1}$	+		-	+

Ainsi, l'ensemble des solutions est la réunion des plages pour lesquelles le produit est positif ET le dénominateur est non nul : ici, $S =]1; 2[$.

Parfois, l'ensemble des solutions est en deux morceaux : pour réunir les différents intervalles, on utilise le symbole d'**union** : $\cup$.

Par exemple, dans la méthode précédente, l'ensemble des x tels que $\frac{2x-4}{x-1} \geq 0$ est en deux morceaux :

$$S =]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$$

Remarque 26

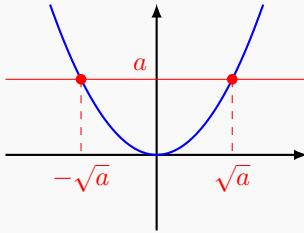
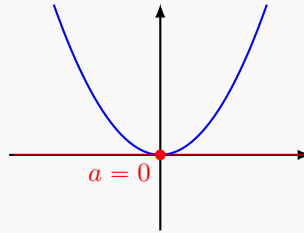
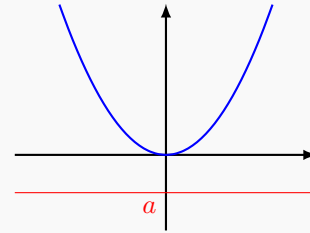
S'il y a plus de deux facteurs, ou plusieurs facteurs aux numérateur et dénominateur, on crée une ligne par facteur/dividende/diviseur dans le tableau des signes.

5 – (In)équations simples de degré 2

Proposition 27

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $x^2 = a$.

- ▶ Si $a > 0$, alors elle possède deux solutions distinctes, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- ▶ Si $a = 0$, alors elle possède 0 comme unique solution.
- ▶ Si $a < 0$, alors elle n'a pas de solution.

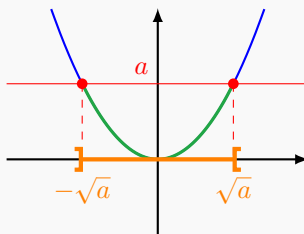
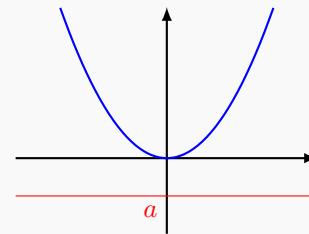
Cas $a > 0$ Cas $a = 0$ Cas $a < 0$ **Exemple 28**

- ▶ L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 2$ est $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
- ▶ L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = -3$ est $S = \emptyset$ (il n'y a pas de solution).

Proposition 29

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'inéquation $x^2 < a$.

- ▶ Si $a > 0$, alors l'ensemble des solutions est l'intervalle $S =]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[$.
- ▶ Sinon, elle n'a pas de solution (autrement dit l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$).

Cas $a > 0$ Cas $a \leq 0$ **Exemple 30**

- ▶ L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < 2$ est $S =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
- ▶ L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geq 5$ est $S =]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$.

Exercices

Exercice 1

En utilisant la représentation graphique ci-dessous, résoudre graphiquement :

a► $f(x) = 4$

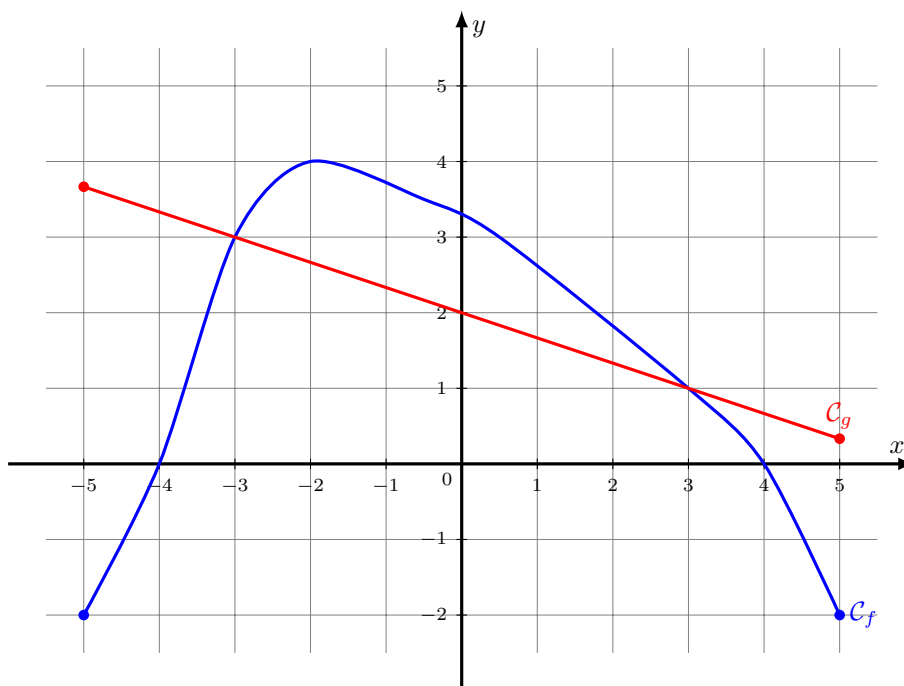
c► $f(x) = (-2)$

e► $f(x) \geq g(x)$

b► $f(x) = g(x)$

d► $f(x) > 3$

f► $f(x) < (-2)$



Exercice 2

- 1► Quelle est la nature de la fonction g dont la courbe représentative est tracée ci dessus ?
- 2► En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de x .
- 3► Résoudre algébriquement $g(x) = 0$
- 4► Résoudre algébriquement $g(x) > 2,5$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{R}$.

a► $(x + 3)(x - 7) = 0$

b► $16x^2 - 32x + 16 = 0$

c► $z(z + 1) = 0$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{R}$.

a► $t^3 - t = 0$

b► $(4x - 1)(x + 5) - (4x - 1)(2x + 3) = 0$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{R}$.

a► $(5y+2)(-2y+3)+4(-2y+3)-7y(-2y+3)=0$ b► $(2x-3)^2-(4x+2)^2=0$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{R}$.

a► $(5y+7)^2-(-2y+5)^2=0$ b► $(7z-5)^2=(-2z+3)^2$ c► $(x+2)-(x+3)=x+4$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{R}$.

a► $(3x+1)(2x+3)>0$ b► $(7x+6)-(2x-3)>5x+19$ c► $(x-3)(4+x)\geq 0$

Exercice 8

On considère les fonctions f , g , et h définies par les expressions :

1► $f(x) = \frac{1-x}{3+2x}$ 2► $g(x) = \frac{5+2x}{4x+1}$ 3► $h(x) = \frac{2x+1}{2-x}$

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2► Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x) \geq 0$
- 3► Déterminer l'ensemble de définition de g .
- 4► Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $g(x) \geq 0$
- 5► Déterminer l'ensemble de définition de h .
- 6► Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $h(x) \geq 0$

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{R}$.

a► $(5-x)(2x+1)<0$ b► $(-x+7)(x+3)\geq 0$ c► $(x-2)(x+2)\geq 0$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbf{R}$.

a► $\frac{7x}{9} = \frac{13}{18}$ b► $(2y-4)(7y+21)=0$ c► $25z^2+10z=-1$

15 Droites du plan

Table des matières

1	Vecteurs directeurs d'une droite	157
2	Équation réduite d'une droite et fonctions affines	158
3	Équations cartésiennes de droites	159
4	Positions relatives	162
	Exercices	163

Programme

Bulletin officiel

Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droite pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droite.

Dans cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Contenus

- ▶ Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- ▶ Vecteur directeur d'une droite.
- ▶ Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues

- ▶ Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
- ▶ Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- ▶ Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- ▶ Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- ▶ Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- ▶ Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Démonstration

- ▶ En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Exemples d'algorithme

- ▶ Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- ▶ Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

Approfondissements possibles

- ▶ Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- ▶ Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

Détail

Contenus

- Équation de droite, passer sous forme réduite ou cartésienne.
- Équation réduite ($y = ax + b$ ou $x = k$) de droite, lien avec les fonctions.
 - Trouver équation à partir de :
 - deux points
 - un point et le coefficient directeur
 - Tracer une droite connaissant son équation.
 - Intersection de deux droites sécantes.
 - Droites vectorielles

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère du plan.

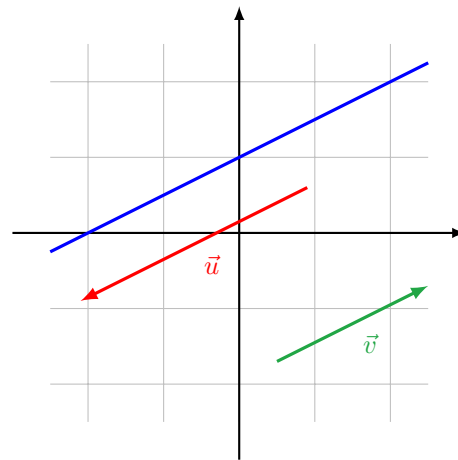
1 – Vecteurs directeurs d'une droite

Soient (Δ) une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Intuitivement, on dit que $\vec{u}$ est **un vecteur directeur** de (Δ) si $\vec{u}$ a même direction que (Δ) , et c'est comme ça qu'il faut les penser en pratique. Notez l'emploi de l'article « un » : en effet, une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.

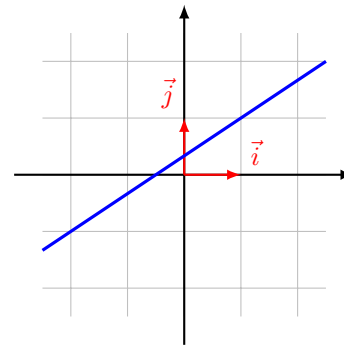
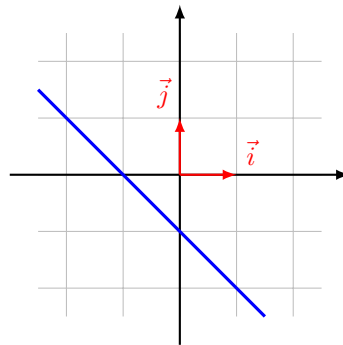
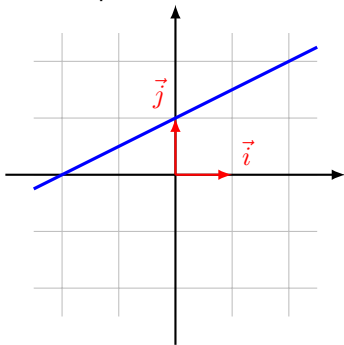
Exemple 1

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre sont deux vecteurs directeurs de la droite (Δ) .



Exercice 2

Pour chaque droite, déterminer les coordonnées deux vecteurs directeurs différents :



Exercice 3

Tracer dans un repère les droites d passant par $A(-1; 1)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et (Δ) passant par $B(2; -2)$ et dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Dans la réalité, les choses se passent dans l'autre sens : vous êtes vous déjà demandés quelle est la définition d'une droite ? En effet la question n'est pas évidente. En fait, la notion de vecteur directeur n'est pas définie à partir de la notion de droite... c'est l'inverse !

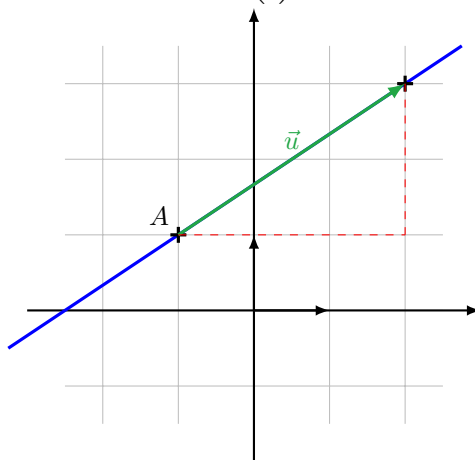
Droite et vecteur directeur**Définition 4**

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

La **droite** (Δ) passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u}$ (on dit aussi que (Δ) est **dirigée par** $\vec{u}$) est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Exemple 5

Traçons la droite passant par $A(-1; 1)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 6**

Tracer les droites définies par les couples point-vecteur suivants :

► $A(-2; 1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

► $B(0, 4)$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

► $C(2, -1)$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2 – Équation réduite d'une droite et fonctions affines**Équation réduite****Définition 7**

Toute droite du plan admet une et une seule équation de la forme :

$$x = k$$

si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, sinon de la forme :

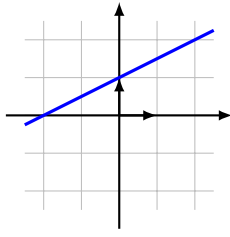
$$y = mx + p$$

Une telle équation est appelée **équation réduite** de la droite.

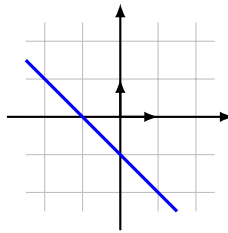
Remarque 8

Dans le second cas, on reprend le vocabulaire associé aux fonctions affines.

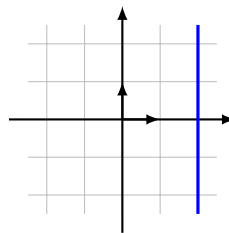
Exemple 9



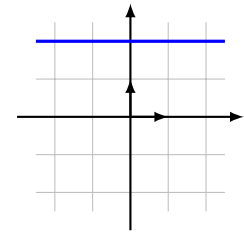
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$



$$y = -x - 1$$



$$x = 2$$



$$y = 2$$

3 – Équations cartésiennes de droites

Équation cartésienne d'une droite

Théorème 10

Soit (Δ) une droite du plan.

Il existe trois réels a , b et c (avec a et b non tous les deux nuls) tels que tout point $M(x, y)$ du plan appartient à (Δ) **si, et seulement si** il vérifie l'équation :

$$ax + by + c = 0$$

Cette équation, qui caractérise (Δ) , est appelée **une équation cartésienne de (Δ)** , et on note :

$$(\Delta) : ax + by + c = 0$$

Démonstration. Soient $A(x_A, y_A)$ un point de d et $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d .

$$\begin{aligned} M(x, y) &\in \Delta \\ \iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} &\text{ sont colinéaires,} \\ \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= 0 \\ \left(\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_{\vec{u}} \\ y - y_A & y_{\vec{u}} \end{vmatrix} = 0 \right) & \\ \iff (x - x_A)y_{\vec{u}} - (y - y_A)x_{\vec{u}} &= 0 \\ \iff y_{\vec{u}}x - x_{\vec{u}}y + (y_Ax_{\vec{u}} - x_Ay_{\vec{u}}) &= 0 \\ \iff ax + by + c &= 0 \end{aligned}$$

en posant $a = y_{\vec{u}}$, puis $b = -x_{\vec{u}}$ et $c = -x_Ay_{\vec{u}} + y_Ax_{\vec{u}}$. □

Corollaire 11

Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (Δ) , alors $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ) .

Exemple 12

Soit $(\Delta) : 2x + 3y + 5 = 0$. Cette droite admet $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Exercice 13

1► Déterminer un vecteur directeur de chaque droite :

- ▶ $(\Delta_1) : 7x + 11y + 13 = 0$ ▶ $(\Delta_3) : 3x - 9y + 27 = 0$ ▶ $(\Delta_5) : x = 0$
 ▶ $(\Delta_2) : -4x + 8y - 16 = 0$ ▶ $(\Delta_4) : -5x - 25y - 125 = 0$ ▶ $(\Delta_6) : y = 0$

2► Pour chaque vecteur, déterminer une équation cartésienne correspondante.

- ▶ $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ▶ $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \end{pmatrix}$ ▶ $\vec{u}_5 \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix}$
 ▶ $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \end{pmatrix}$ ▶ $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} -15 \\ -17 \end{pmatrix}$ ▶ $\vec{u}_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \end{pmatrix}$

On a démontré avec le théorème précédent que toute droite est décrite par une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Mais rien ne garantit que seules les droites peuvent être décrites par de telles équations ! Rien... à part le théorème suivant :

Théorème 14

Soient a , b et c trois réels avec a et b deux réels non tous les deux nuls. L'ensemble :

$$\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}$$

est une droite, d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Démonstration. Comme a et b ne sont pas simultanément nuls, l'un des deux est nécessairement différent de 0. Supposons que $b \neq 0$ (la démonstration est similaire dans l'autre cas).

Notons $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $A \left(0; -\frac{c}{b}\right)$. Comme $a \times 0 + b \times \left(-\frac{c}{b}\right) + c = c - c = 0$, le point A satisfait l'équation.

Soit $M(x, y)$ un point du plan satisfaisant l'équation. Alors $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x \\ y + \frac{c}{b} \end{pmatrix}$, et donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = \begin{vmatrix} x & -b \\ y + \frac{c}{b} & a \end{vmatrix} = xa - (-b)(y + \frac{c}{b}) = ax + by + c$$

Or $ax + by + c = 0$ car M satisfait l'équation par hypothèse, donc le déterminant de $\overrightarrow{AM}$ et u est nul, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc par définition M appartient à la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

On donc montré que les points satisfaisant une même équation cartésienne étaient tous sur une même droite. $\square$

Exemple 15

Déterminons une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $A(-1; 1)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il existe a , b et c trois réels tels que $(\Delta) : ax + by + c$. Comme $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (Δ) , on peut prendre $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $a = 2$ et $b = -1$. Donc $(\Delta) : 2x - y + c = 0$. Or $A \in \Delta$ donc les coordonnées de A satisfont

l'équation cartésienne, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 2 \times 1 - (-1) + c &= 0 \\ \text{donc } 3 + c &= 0 \\ \text{donc } c &= -3 \end{aligned}$$

Ainsi, $(\Delta) : 2x - y - 3 = 0$.

Exercice 16

Pour chaque couple point-vecteur, déterminer une équation cartésienne de la droite correspondante.

▶ $A(3; -5)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

 ▶ $B(6; 7)$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \end{pmatrix}$

 ▶ $C(597; 3)$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17

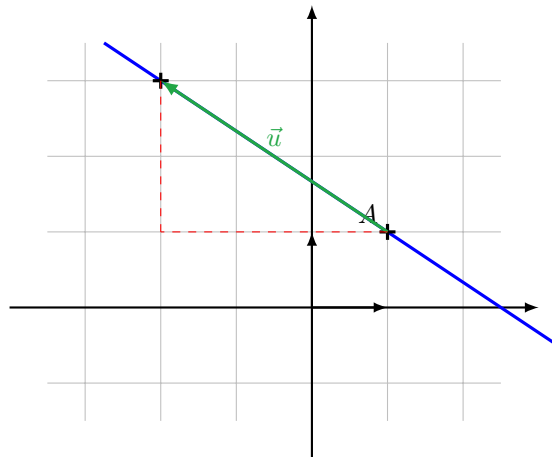
Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(3; -5)$ et $B(6; 7)$.
(Indication : commencer par déterminer un vecteur directeur...)

Méthode 18 (Tracer une droite à partir de son équation cartésienne)

Pour tracer la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$, on place A dans le repère, puis son image par la translation de vecteur $\vec{u}$. Cela donne un second point de passage, permettant de tracer la droite.

Exemple 19

Traçons d'équation $2x + 3y - 5 = 0$. Le point $A(1; 1)$ appartient à cette droite car $2 \times 1 + 3 \times 1 - 5 = 0$. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite. Ainsi :



Exercice 20

Tracer la droite d'équation $-x + 4y + 2 = 0$.

4 – Positions relatives

Définition 21

Deux droites sont **parallèles** lorsqu'elles possèdent deux vecteurs directeurs colinéaires.

Exemple 22

Deux droites dirigées par $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont parallèles, car ces vecteurs directeurs sont colinéaires (leurs coordonnées sont proportionnelles, avec un coefficient de proportionnalité de 2).

Proposition 23

Deux droites du plan sont soit parallèles (éventuellement confondues), soit **sécantes** en un unique point.

Méthode 24 (Point d'intersection de deux droites sécantes)

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites sécantes. Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient à la fois une équation cartésienne de (Δ_1) et une équation cartésienne de (Δ_2) . Pour trouver ces coordonnées, on doit donc résoudre un système de deux équations.

Exemple 25

Les droites $(\Delta_1) : 2x + 3y - 6 = 0$ et $(\Delta_2) : x + y - 2 = 0$ sont sécantes. Déterminons les coordonnées de leur point d'intersection. Notons-le $M(x, y)$. Alors :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} & \text{donc} & \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \\ \text{donc} & \begin{cases} y - 2 = 0 \\ 2x + 2y - 4 = 0 \end{cases} & \text{donc} & \begin{cases} y = 2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \\ \text{donc} & \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $M(0; 2)$.

Exercice 26

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\Delta_1) : 3x + y - 14 = 0$ et $(\Delta_2) : 7x - 4y - 1 = 0$.

Proposition 27

Parallélisme et équation réduite

On considère deux droites du plan (Δ) et (Δ') non parallèles à l'axe des ordonnées.

Les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles **si, et seulement si** elles ont le même coefficient directeur (ou la même pente).

Exemple 28

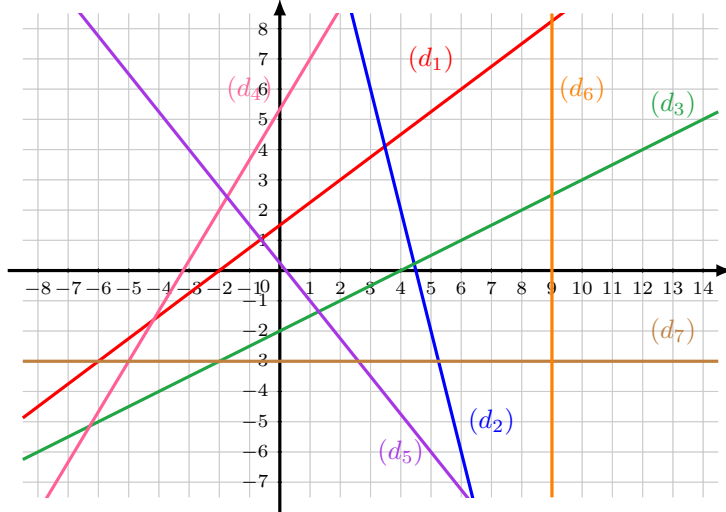
Les droites $\Delta_1 : y = 12x - 8$ et $\Delta_2 : y = 12x + 56$ sont parallèles.

Exercices

Appliquer

Exercice 1

Pour chaque droite représentée dans le repère, déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et si possible la pente.



Exercice 2

- $(d_1) : 2x + 4y = 3$
- $(d_2) : 5x = 6 - 7y$
- $(d_3) : 2y = 6x + 8$
- $(d_4) : 9x + y + 10 = 0$
- $(d_5) : 3x - 12 = 3$
- $(d_6) : 2y + 6 = 9$

- 1► Passer toutes ces équations sous la forme $ax + by + c = 0$.
- 2► Déterminer un vecteur directeur de chaque droite.
- 3► Passer toutes ces équations sous forme réduite.

Exercice 3

Soit $(d) : -5x + 2y - 2 = 0$.

- 1► Le point $A(2; -3)$ appartient-il à (d) ?
- 2► Déterminer l'ordonnée du point $B \in (d)$ qui est d'abscisse 1.
- 3► Déterminer l'abscisse du point $C \in (d)$ qui est d'ordonnée -1 .

Exercice 4

Soit $(d) : x - 3y + 7 = 0$.

- 1► Le point $A(-3; 1)$ appartient-il à (d) ?
- 2► Déterminer l'ordonnée du point $B \in (d)$ qui est d'abscisse $\frac{5}{3}$.
- 3► Déterminer l'abscisse du point $C \in (d)$ qui est d'ordonnée $-\frac{3}{2}$.

Exercice 5

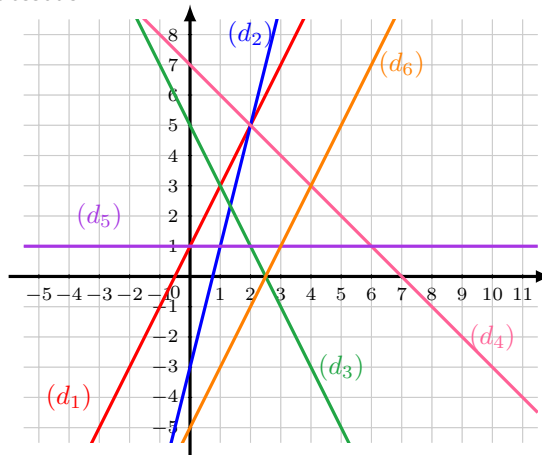
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A(5; 2)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $B(4; 3)$ et dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Déterminer l'équation réduite de chaque droite ci-dessous :



S'exercer

Exercice 8

Soient $A(3; 4)$ et $B(4; 1)$.

- 1► a► Donner un vecteur directeur de (AB) et en calculer les coordonnées.
b► En déduire une équation cartésienne de (AB) .
- 2► La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en K et l'axe des ordonnées en L .
a► Déterminer par le calcul les coordonnées de K .
b► Déterminer par le calcul les coordonnées de L .
- 3► Soit (d) la droite parallèle à (AB) passant par $C(-1; 5)$.
a► Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de (d) .
b► Justifier que (d) coupe l'axe des abscisses en $M(0; 2)$.

Exercice 9

Soit (d) la droite passant par $A(3; 1)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- 1► Déterminer une équation cartésienne de (d) .
- 2► Déterminer les coordonnées de B , image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
- 3► Représenter (d) dans un repère.
- 4► Le point $K(6; 2, 25)$ appartient-il à (d) ?
- 5► Le point $L(5, 5; 2)$ appartient-il à (d) ?
- 6► Soit $M \in (d)$ d'abscisse 11. Quelle est son ordonnée ?
- 7► Soit $N \in (d)$ d'ordonnée -2 . Quelle est son abscisse ?
- 8► Déterminer les coordonnées de R , intersection de (d) avec l'axe des abscisses.
- 9► Déterminer les coordonnées de S , intersection de (d) avec l'axe des ordonnées.
- 10► Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par $C(4; -2)$ et parallèle à (d) , puis la représenter dans un repère.
- 11► Déterminer une équation cartésienne de la droite (d'') passant par l'origine et parallèle à (d) , puis la représenter dans un repère.

Exercice 10

Déterminer l'équation réduite de chaque droite dans l'exercice ??.

S'entraîner

Exercice 11

À tout réel $m \neq 3$, on associe la droite (d_m) d'équation réduite :

$$y = \frac{2m-1}{m-3}x + \frac{-7m+6}{m-3}$$

Déterminer m dans chacun des cas suivants :

- 1► (d_m) passe par $A(1; 1)$.

- 2► (d_m) passe par l'origine.
- 3► (d_m) est parallèle à l'axe des abscisses.
- 4► (d_m) est parallèle à $(d) : y = 3x - 6$.
- 5► (d_m) admet -2 comme coefficient directeur.

Pour aller (plus) loin

Exercice 12

Soient $(d) : y = -1$ et $F(0; 1)$. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

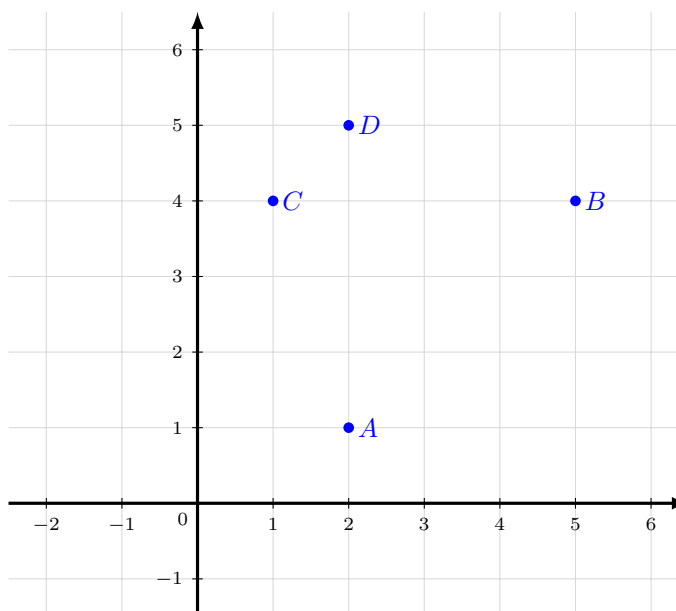
- 1► Exprimer la distance MF en fonction de x et y .
- 2►
 - a► Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur (d) .
(Il est conseillé de faire un schéma pour se donner une idée.)
 - b► En déduire une expression de la distance de M à (d) en fonction de x et y .
- 3►
 - a► Exprimer une équation liant x et y pour que M soit à égale distance de F et de (d) .
 - b► Manipuler cette équation pour l'écrire sous la forme $y = \dots$
 - c► En déduire la forme que prend l'ensemble des points à égale distance de F et (d) .

Exercice 13

Soient $A(1; 1)$, $B(4; 2)$ et $C(2; 3)$.

- 1► Placer A , B et C dans un repère.
- 2► Montrer que $(BC) : y = -\frac{1}{2}x + 4$.
- 3►
 - a► Soit $M(x, y)$ tel que $y \leq -\frac{1}{2}x + 4$. Dans quelle région du plan M doit-il se trouver ?
 - b► Soit $N(x, y)$ tel que $y \geq -\frac{1}{2}x + 4$. Dans quelle région du plan M doit-il se trouver ?
 - c► Énoncer un critère pour savoir si un point est au-dessus ou en-dessous de (BC) en fonction de ses coordonnées.
- 4►
 - a► Déterminer les équations réduites de (AB) et (AC) .
 - b► De même que précédemment, énoncer un critère pour savoir si un point est au-dessus ou en-dessous de (AB) en fonction de ses coordonnées. Faire de même pour (AC) .
- 5►
 - a► En combinant les critères énoncés précédemment, expliquer comment savoir si un point est à l'intérieur du triangle ABC juste en regardant ses coordonnées.
 - b► Appliquer ce principe pour vérifier que $M(2; 2)$ est à l'intérieur de ABC .
- 6► Écrire une fonction Python qui reçoit 8 arguments, les coordonnées de A , B et C , et celles du point M à tester, et renvoie un booléen selon si M est à l'intérieur du triangle ou non.

(Un regard aiguisé aura sûrement remarqué que dans tous l'exercice, notamment dans la fonction Python, on a ignoré le cas où l'un des côtés du triangle est vertical, mettant en défaut la méthode de décision formulée durant l'exercice. Essayez d'étudier ce cas de vous-même !)



Exercice 14

- 1► Donner les coordonnées des points A , B , C et D .
- 2► Tracer la droite (CD) puis déterminer son équation réduite de droite.
- 3► Tracer la droite (AB) puis déterminer son équation réduite de droite.
- 4► Les droites (AB) et (CD) sont elles parallèles? Justifier rigoureusement.
- 5► Tracer la droite (AC) puis déterminer son équation réduite de droite.
- 6► Tracer la droite (BD) puis déterminer son équation réduite de droite.
- 7► Les droites (AC) et (BD) sont elles parallèles? Justifier rigoureusement.
- 8► Tracer la droite (AD) en rouge puis donner son équation réduite de droite.

Exercice 15

Mettre les équations suivantes sous forme d'équations réduites de droites.

a► $2y = 7x + 3$

c► $x + y + 1 = 0$

e► $-x + 2y + 3 = 16$

b► $3y + 21x + 12 = 0$

d► $0,1y + x = 15$

f► $x - 10 = 0$

Exercice 16

Déterminer l'équation réduite de la droite :

- 1► (d) dont deux points sont $A(18; 13)$ et $B(19; 15)$
- 2► (e) dont deux points sont $C(12; 15)$ et $D(16; 23)$
- 3► (f) dont deux points sont $E(16; 8)$ et $F(16; 13)$
- 4► (g) dont deux points sont $G(5; 7)$ et $H(7; 10)$
- 5► (h) dont deux points sont $I(-2; 3)$ et $J(-2; \frac{7}{3})$

Exercice 17

- 1► Vérifier que le point $A(12; 26)$ appartient à la droite (d) d'équation réduite $y = 2x + 2$
- 2► Donner les coordonnées un autre point appartenant à cette droite.
- 3► Vérifier si le point $B(-9; 13)$ appartient à la droite d'équation réduite $y = -3x - 14$
- 4► Donner les coordonnées un autre point appartenant à cette droite.

Exercice 18

- 1► Donner l'équation réduite de la droite (d) passant par le point $A(7; 9)$ de coefficient directeur 4.
- 2► Donner l'équation réduite de la droite (e) passant par le point $B(-2; -3)$ et de coefficient directeur $\frac{3}{2}$
- 3► Donner l'équation réduite de la droite (f) parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $C(8; 9)$

Exercice 19

- 1► Donner le point d'intersection de la droite d'équation réduite $y = 2x + 3$ et de la droite d'équation réduite $y = -x + 6$.
- 2► Donner le point d'intersection de la droite d'équation réduite $y = 5x + 3$ et de la droite d'équation $2y - 4x = 2$
- 3► Donner le point d'intersection de la droite d'équation $3y + 3x = 27$ et de la droite d'équation $x = 4$
- 4► Représenter graphiquement ces six droites et vérifier la cohérence de vos résultats.

Exercice 20

- 1► Écrire le code définissant une fonction python *EqDroite* qui prend en paramètres x_A, x_B, y_A, y_B les abscisses et ordonnées des points A et B et affiche son équation réduite de droite avant de renvoyer le couple (coefficient directeur, ordonnée à l'origine) de cette droite. Si la droite est de forme $x = c$, on renverra le couple (« verticale », ordonnée).
- 2► Écrire le code définissant une fonction python *Aligns* qui prend en paramètre $(x_A, x_B, x_C, y_A, y_B, y_C)$ les abscisses et ordonnées de trois points A , B et C et renvoie *True* si les points sont alignés, *False* sinon.

Exercice 21

Représenter graphiquement chacune des droites décrites par les équations suivantes.

- 1► (d) d'équation cartésienne $2x + 3y - 1 = 0$
- 2► (e) d'équation cartésienne $-3x + y - 2 = 0$
- 3► (f) d'équation $5x + 2 = 0$

Exercice 22

- 1► Sur un plan muni d'un repère orthonormé placer les points $A(3; 5)$ et $B(5; 2)$
- 2► (e) Tracer la droite (AB) puis donner son équation réduite par lecture graphique.
- 3► On considère le point $C(5; 9)$. Déterminer par le calcul l'équation réduite de (AC)
- 4► Déterminer l'équation réduite de (BC)

Exercice 23

- 1► Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point $A(-2; 15, 5)$ de coefficient directeur $\frac{3}{2}$.

- 2► Déterminer l'équation réduite de la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $B(\frac{2}{7}, \frac{3}{29})$

Exercice 24

- 1► Déterminer l'ensemble des points équidistants du point de coordonnées $(3; 6)$ et de l'axe des abscisses.
2► Déterminer l'ensemble des points équidistants du point $(a; b)$ et de l'axe des abscisses.

16 Statistiques

Table des matières

1	Médiane et quartiles d'une série statistique	170
2	Moyenne et écart-type	171
3	Échantillonnage	173
	Exercices	175

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- ▶ Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée.
- ▶ Linéarité de la moyenne.
- ▶ Indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type.

Capacités attendues

- ▶ Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.
- ▶ Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne m , l'écart type s , et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s, m + 2s]$.

Détail

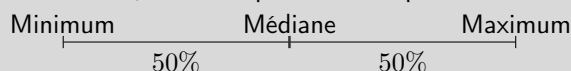
Contenus

- ▶ Étendue. Moyenne pondérée, Médiane, Variance, Écart interquartiles
 - ▶ Représentation en boîte à moustaches.
 - ▶ Utilisation sur un tableur
- ▶ Estimation de probabilité par une fréquence observée sur un échantillon.
 - ▶ « Lorsque n est grand, la fréquence tend vers la probabilité »
 - ▶ Simuler N échantillons de taille n puis si p est la probabilité de succès et f la fréquence de succès, calculer la proportion où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

1 – Médiane et quartiles d'une série statistique

Définition 1

La **médiane** d'une série statistique est une valeur qui sépare la série en deux parties de même effectifs : les valeurs qui sont inférieures à la médiane, et celles qui lui sont supérieures.



Méthode 2 (Déterminer la médiane d'une série statistique)

On range les données dans l'ordre croissant.

- ▶ S'il y a un nombre impair de données, on prend la valeur centrale,
- ▶ Sinon, on prend une valeur entre les deux valeurs centrales (traditionnellement le milieu).

Exemple 3

- ▶ On considère la série (déjà rangée) 2 ; 18 ; 18 ; 20 ; 22 ; 35 ; 35 ; 35 ; 40. Elle a un nombre impair de données, sa valeur centrale, et donc sa médiane, est 22. Elle sépare la série en deux groupes de 4 valeurs.
- ▶ On considère la série (déjà rangée) -2 ; -1 ; 0 ; 0 ; 3 ; 4 ; 4 ; 5 ; 15 ; 25. Elle a un nombre pair de données, ses valeurs centrales sont 3 et 4. On prend alors 3,5 comme médiane, qui scinde la série en deux parties de 5 valeurs.

Exercice 4

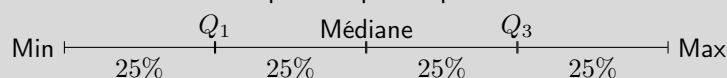
Déterminer la médiane de la série statistique suivante :

2 ; 4 ; 17 ; 8 ; 11 ; 11 ; 16 ; 1 ; 13 ; 11

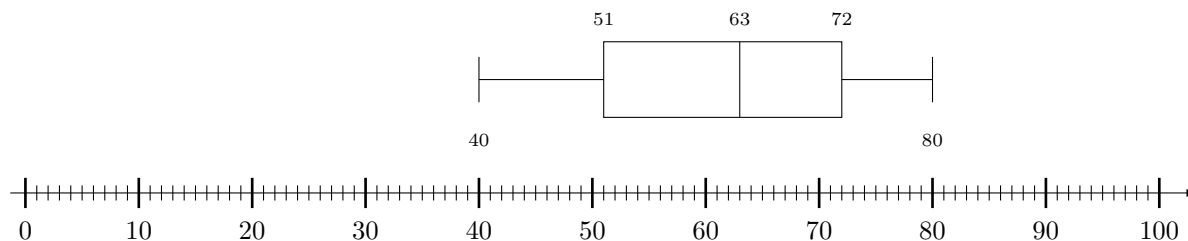
Définition 5

Quartiles

Le **premier quartile**, noté Q_1 , et le **troisième quartile**, noté Q_3 , sont les plus petites valeurs qui permettent, avec la médiane, de scinder une série statistique en quatre quarts de mêmes effectifs.



Il existe une représentation standard de toutes ces informations : la **boîte à moustaches**. Les deux quartiles délimitent la boîte principale, la médiane scinde cette boîte en deux parties, et on fait pousser des moustaches à droite et à gauche de la boîte pour représenter le minimum et le maximum.



Sur l'exemple précédent, on peut lire :

- ▶ Min = 40
- ▶ $Q_1 = 51$
- ▶ Médiane = 63
- ▶ $Q_3 = 72$
- ▶ Max = 80

Indicateurs de dispersion

Définition 6

- L'**étendue** d'une série est l'écart entre son minimum et son maximum.
- L'**écart interquartile** d'une série est l'écart entre ses deux quartiles.

Exemple 7

Dans l'exemple de la boîte à moustaches ci-dessus, l'étendue est de $80 - 40 = 40$, et l'écart interquartile est $72 - 51 = 21$.

Exercice 8

Voici les relevés de notes de deux classes :

- Classe A : 0, 0, 0, 0, 10, 10, 20, 20, 20, 20
- Classe B : 4, 6, 7, 9, 9, 11, 12, 14, 14, 15

- 1► Sans faire de calcul, peut-on dire que ces deux classes ont le même profil ? Expliquer.
- 2► Calculer la médiane de chaque classe. Que remarque-t-on ?
- 3► Calculer l'écart interquartile de chaque classe. Que remarque-t-on ?
- 4► Quelle indication l'écart interquartile d'une série semble-t-il donner ?

2 – Moyenne et écart-type

On considère une série contenant une valeur x_1 avec un effectif n_1 , une valeur x_2 avec un effectif n_2 , ... Par commodité, on la présente dans un tableau :

Valeur	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Effectif	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Dans la suite, on notera $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ l'effectif total.

Moyenne pondérée

Définition 9

La **moyenne pondérée** de la série de données est :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{N}$$

Exemple 10

Voici le relevé de notes d'Alice :

Note	13	9	12	15
Coeff	1	5	3	1

Calculons la moyenne des notes d'Alice, pondérée par les coefficients :

$$\frac{1 \times 13 + 5 \times 9 + 3 \times 12 + 1 \times 15}{1 + 5 + 3 + 1} = \frac{109}{10} = 10,9$$

Linéarité de la moyenne

Propriété 11

Soient a et b deux nombres.

- ▶ Si on multiplie par a toutes les valeurs de la série, alors la moyenne est également multipliée par a . On peut écrire : $\overline{ax} = a\overline{x}$.
- ▶ Si on ajoute b à toutes les valeurs de la série, alors la moyenne est également augmentée de b . On peut écrire : $\overline{x+b} = \overline{x} + b$.

On dit que la moyenne est **linéaire**.

Démonstration. Si on multiplie toutes les valeurs par a , le nouveau tableau représentant la série est :

Valeur	ax_1	ax_2	$\cdots$	ax_k
Effectif	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

La moyenne pondérée est alors donnée par l'expression suivante ; on peut factoriser le numérateur par a pour retrouver la moyenne originale :

$$\begin{aligned}
 \overline{ax} &= \frac{n_1 \times ax_1 + n_2 \times ax_2 + \cdots + n_k \times ax_k}{N} \\
 &= \frac{a(n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k)}{N} \\
 &= a \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} \\
 &= a\overline{x}
 \end{aligned}$$

Si on multiplie toutes les valeurs par a , le nouveau tableau représentant la série est :

Valeur	ax_1	ax_2	$\cdots$	ax_k
Effectif	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

La moyenne pondérée est alors donnée par l'expression suivante ; on développe chaque terme et on les réorganise pour retrouver la moyenne originale :

$$\begin{aligned}
 \overline{x+b} &= \frac{n_1 \times (x_1 + b) + n_2 \times (x_2 + b) + \cdots + n_k \times (x_k + b)}{N} \\
 &= \frac{n_1x_1 + n_1b + n_2x_2 + n_2b + \cdots + n_kx_k + n_kb}{N} \\
 &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N} + \frac{n_1b + n_2b + \cdots + n_kb}{N} \\
 &= \overline{x} + \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{N}b \\
 &= \overline{x} + b
 \end{aligned}$$

□

Définition 12

L'**écart-type** de la série de données est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N}}$$

(On retiendra qu'il s'agit de la racine de la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne...)

Exemple 13

Calculons l'écart-type des notes d'Alice de l'exemple précédent. Décomposons la formule : on part des notes d'Alice, on calcule l'écart de chaque note à la moyenne d'Alice qui est de 14,6 (l'écart est positif quand la note est au-dessus de la moyenne, négatif si la note est en-dessous). Ensuite, on calcule le carré de chacun de ces écarts : cela donne une nouvelle série dont on calcule la moyenne pondérée.

Note (x_i)	13	9	12	15
$x_i - \bar{x}$	2,1	-1,9	1,1	4,1
$(x_i - \bar{x})^2$	4,41	3,61	1,21	16,81
Coeff	1	5	3	1

Ainsi,

$$\sigma^2 = \frac{1 \times 4,41 + 5 \times 3,61 + 3 \times 1,21 + 1 \times 16,81}{1 + 5 + 3 + 1} = 4,29$$

Et donc :

$$\sigma = \sqrt{4,29} \approx 2,07$$

Exercice 14

Voici le relevé de notes de Bob :

Note	20	12	16	18
Coeff	0	20	3	0

- 1► Sans faire de calcul, peut-on dire que Alice et Bob ont le même profil d'élève ? Expliquer.
- 2► Calculer la moyenne de Bob. Que remarque-t-on par rapport à Alice ?
- 3► Calculer l'écart-type de Bob. Que remarque-t-on par rapport à Alice ?
- 4► Quelle indication l'écart-type d'une série semble-t-il donner ?

3 – Échantillonnage

Activité 15

On lance deux dés à 6 faces, et on s'intéresse à leur somme.

- 1► Lancez 1000 fois une paire de dés, et notez le nombre d'occurrences de chaque somme.
(Si chaque élève effectue une trentaine de lancers, on arrive facilement aux 1000 sommes demandées...
Le professeur compilera les résultats individuels dans un tableur.)
- 2► Calculez la fréquence d'apparition de chaque somme. Que constatez-vous ?
(Là encore, un tableur est un outil pertinent.)

Théorème 16

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une même expérience, les fréquences d'apparition se rapprochent des probabilités attendues.

Remarque 17

Attention à bien distinguer la **fréquence** et la **probabilité** : la fréquence, c'est la proportion que l'on mesure dans un **échantillon**, c'est-à-dire qu'on a répété une expérience un certain nombre de fois et qu'on a regardé dans ces résultats-là combien de fois telle ou telle issue s'est réalisée.

La probabilité, c'est une nombre qui ne vient pas de l'observation, mais de la théorie : théoriquement, on s'attend à ce que la fréquence se rapproche de cette valeur.

Le théorème précédent, bien que simplifié, s'appelle la **loi des grands nombres**. C'est l'un des théorèmes qui font fonctionner les statistiques.

Remarque 18

La loi des grands nombres nous permet également de dire que dans l'immense majorité des cas, la fréquence f que l'on observe tombe dans l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où p est la probabilité (théorique) et n le nombre de fois que l'on a répété l'expérience.

Plus n est grand, et plus $\frac{1}{\sqrt{n}}$ se resserre, et donc plus l'intervalle se resserre autour de sa valeur centrale, p .

Autrement dit, plus on répète l'expérience, plus la fréquence que l'on observe a des chances de se rapprocher de la probabilité théorique.

Exercices

Exercice 1

Pour chaque série de données, calculer la moyenne et l'écart-type (arrondi au dixième).
On n'utilisera pas de logiciel spécialisé pour faire les calculs automatiquement.

A ▶ $-4; 0; 5; -1; 7; 2; -2; 3; 1; 0; -3; 4$

B ▶

Valeur	1	3	4	5	10	13
Effectif	2	3	1	4	5	5

C ▶

Valeur	-2	4	6	8	14	17
Effectif	21	12	14	27	6	20

Exercice 2

Pour chaque série de données, calculer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile, puis tracer le diagramme en boîte à moustaches associé.

On pourra s'aider du mode statistiques de la calculatrice ou d'un tableur pour faire les calculs automatiquement.

A ▶ $3; 6; 9; 10; 12; 13; 13; 13; 14; 20; 22$

B ▶ $-4; 0; 5; -1; 6; 2; -2; 0; 1; 0; -3; 3$

C ▶

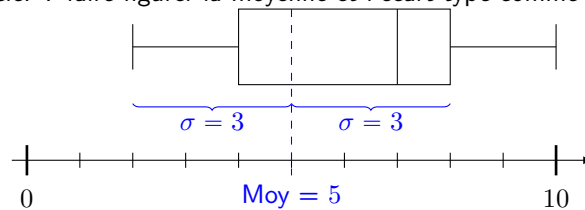
Valeur	1	3	4	5	10	13
Effectif	2	3	1	4	6	5

D ▶

Valeur	-1	1	4	5	10	19
Effectif	21	30	14	47	6	58

Exercice 3

Pour chaque série de données, calculer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile, puis tracer le diagramme en boîte à moustaches associé. Y faire figurer la moyenne et l'écart-type comme sur l'exemple suivant :



On pourra s'aider du mode statistiques de la calculatrice ou d'un tableur pour faire les calculs automatiquement.

A ▶ $-8; 6; 13; -12; 0; 6; 7; 1,5; -2,5; 10$

B ▶

Valeur	1	2	3	4	5
Effectif	4	5	8	2	3

C ▶

Valeur	-3	-0,2	3	3,3	9	16
Effectif	12	5	23	7	31	44

A Proportions

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- Proportion, pourcentage d'une sous-population dans une population.
- Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage.

Capacités attendues

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.

Détail

Contenus

- Problème impliquant des fractions
 - Proportion/Pourcentage d'un sous effectif dans l'effectif total.
 - Pourcentage de pourcentage.

Définition 1

Soit E une population comportant $n_E > 0$ individus, et A une sous-population de E comportant n_A individus. La **proportion de A dans E** est le nombre $p = \frac{n_A}{n_E}$.

Exemple 2

Lors de l'élection présidentielle de 2022, 35 096 478 votants étaient inscrits sur les listes électorales. Parmi eux, 6 106 787 se sont abstenus lors des deux tours.

La proportion de ceux-ci parmi les votants est donc $p = \frac{6\,106\,787}{35\,096\,478} \approx 0,174$.

Corollaire 3

- Connaissant la population totale E et la proportion que représente A , on peut retrouver la population A par $n_A = p \times n_E$.
- Connaissant la population de A et la proportion qu'elle représente, on peut retrouver la population globale : $n_E = \frac{n_A}{p}$.

Exemple 4

- Dans une classe de 20 élèves, 40% portent des lunettes. Combien d'élèves portent des lunettes ?
La population est la classe entière, donc $n_E = 20$. La sous population est celle des élèves portant des lunettes, au nombre n_A que l'on cherche. Leur proportion dans la classe est $p = 40\% = 0,40$. Comme $p = \frac{n_A}{n_E}$, c'est-à-dire $0,40 = \frac{n_A}{20}$, on a $n_A = 0,40 \times 20 = 8$. Il y a donc 8 élèves à lunettes.
- Une entreprise, 60% des salariés ont moins de 40 ans, ce qui représente 48 employés. Combien de salariés cette entreprise compte-t-elle ?
La population est l'entreprise entière, au nombre n_E d'employés que l'on cherche. La sous population est celle des salariés de moins de 40 ans, au nombre $n_A = 48$. Leur proportion dans la classe est $p = 60\% = 0,60$. Comme $p = \frac{n_A}{n_E}$, c'est-à-dire $0,60 = \frac{48}{n_E}$, on a $n_E = \frac{48}{0,6} = \frac{8}{0,1} = \frac{80}{1} = 80$. Il y a donc 80 salariés dans cette entreprise.

Propriété 5

Une proportion est comprise entre 0 et 1.

Pourcentage d'une quantité**Proposition 6**

Calculer $t\%$ d'une quantité Q revient à calculer $Q \times \frac{t}{100}$.

Remarque 7

Un pourcentage est une proportion relative à une population de référence contenant 100 individus : ainsi, un pourcentage de, par exemple, 12%, qui correspond à une proportion de 0,12, signifie que dans une population de référence de 100 individus, 12 sont concernés.

Remarque 8

Un pourcentage est une proportion relative à une population de référence contenant 100 individus : ainsi, un pourcentage de, par exemple, 12%, qui correspond à une proportion de 0,12, signifie que dans une population de référence de 100 individus, 12 sont concernés.

Si vous avez du mal à mémoriser la méthode, vous pouvez faire un tableau de proportionnalité (on a le droit car les pourcentages sont une situation de proportionnalité).

	Pourcentage	Données
Population	100	n_E
Sous-popu.	12	n_A

Exemple 9

Dans une plaquette de 180g de chocolat, le cacao représente 55%. Cela représente donc $180 \times \frac{55}{100} = 99\text{g}$.
Avec un tableau de proportionnalité, cela donne :

	Pourcentage	Masse (g)
Population	100	180
Sous-popu.	55	

Méthode 10 (Quelques pourcentages utiles)

- ▶ 10% de $Q = Q \div 10$ ▶ 25% de $Q = Q \div 4$ ▶ 50% de $Q = Q \div 2$
- ▶ 20% de $Q = Q \div 5$ ▶ 33% de $Q \approx Q \div 3$ ▶ 75% de $Q = Q \div 4 \times 3$

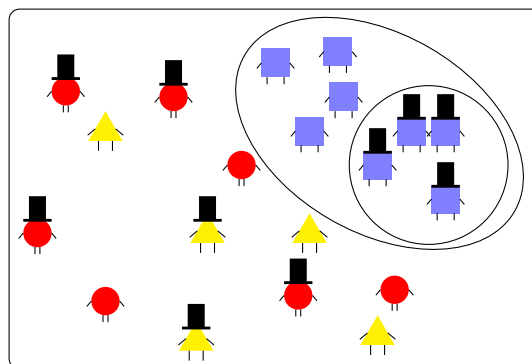
Population, sous-population**Définition 11**

Une **population** est une collection d'objets ou d'individus que l'on étudie.
Une **sous-population** d'une population est une partie de la population initiale.

On considère une population d'êtres géométriques illustré ci-contre. Il y a des carrés, des disques et des triangles. Certains portent un chapeau, d'autres non. On considère la sous-population des carrés. À l'intérieur de cette sous-population, on considère la sous-population des carrés qui portent un chapeau.

Les carrés sont 8 dans une population de 20 individus, ils représentent donc une proportion de $\frac{8}{20}$ (soit 40%) de la population totale.

Parmi les 8 carrés, 4 portent un chapeau, ils représentent donc une proportion de $\frac{4}{8}$ (soit 50%) des carrés (pas de la population totale!).

**Sous-population d'une sous-population****Proposition 12**

Sur un exemple générique : dans l'illustration précédente, la proportion de carrés portant un chapeau se calcule en multipliant les deux proportions successives :

$$\frac{8}{20} \times \frac{4}{8} = \frac{4}{20}$$

Exemple 13

En 2024, 51,5% des électeurs français se sont rendus aux urnes pour les élections européennes. En France, 44,1% des suffrages exprimés étaient dirigés vers des partis classés à droite, 14,6% vers des partis classés au centre, et 31,6% vers des partis classés à gauche.

On voudrait savoir quel pourcentage des électeurs (et non des suffrages exprimés) français ont voté pour chaque bloc : on multiplie donc la proportion de votant par les proportions de chaque bloc.

- ▶ $0,515 \times 0,441 \approx 0,227$: environ 22,7% des électeurs ont voté pour le bloc de droite,
- ▶ $0,515 \times 0,146 \approx 0,08$: environ 8% des électeurs ont voté pour le bloc du centre,
- ▶ $0,515 \times 0,316 \approx 0,163$: environ 16,3% des électeurs ont voté pour le bloc de gauche.

Exercice 14 (Vers la première)

Un virus touche 1% de la population. Il existe un test de dépistage qui tombe juste dans 95% de cas, c'est-à-dire que la test indique "malade" pour 95% des malades (et échoue à détecter la maladie chez 5% des malades), et indique "non malade" pour 95% des non malades (et indique injustement "malade" pour 5% des non malades). On teste l'ensemble de la population.

Notations pour l'exercice : On note P la population totale, M la sous-population de P des malades, S la population des non malades (sains), T^+ le sous-population de P des testés positifs, et T^- la sous-population de P des testés négatifs.

Pour répondre aux questions suivantes, il est vivement conseillé de faire un schéma des différentes populations et sous-populations, et de rédiger rigoureusement les proportions.

- 1▶ Quelle proportion de la population totale P (malade ou non) reçoit un test positif?
- 2▶ On s'intéresse à la sous-population M^+ des individus malades et testés positifs.
 - a▶ À l'aide de la formule du cours, exprimez la proportion de M^+ dans P , en considérant M^+ comme une sous-population de M .
 - b▶ À l'aide de la formule du cours, exprimez la proportion de M^+ dans P , en considérant M^+ comme une sous-population de T^+ .
- 3▶ Dédurre de la question précédente une égalité de deux produits.
- 4▶ À partir de cette égalité, exprimez la proportion de M dans T^+ en fonction de trois autres proportions.
- 5▶ Quelle est la proportion des individus malades parmi les testés positifs? Commentez.

Exercices

Entraînement au calcul

Exercice 1 (Pourcentage et fractions)



1► Calculer :

- a► 30% de 60 c► 60% de 70
b► 40% de 80 d► 90% de 20

2► Exprimer ces fractions en pourcentages :

- a► $\frac{6}{10}$ c► $\frac{7}{8}$ e► $\frac{5}{2}$
b► $\frac{12}{15}$ d► $\frac{1}{2}$ f► $\frac{61}{1000}$

Exercice 2 (Calculs usuels)



Calculer :

- a► $\frac{12}{15} \times 4$ e► $\frac{12}{6} - \frac{1}{12}$
b► $\frac{7}{8} \times 2$ f► $\frac{1}{3} \times \frac{3}{12}$
c► $\frac{1}{27} \times 18$ g► $\frac{12}{15} \times \frac{1}{2}$
d► $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{1}{24}$ h► $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$

Exercice 3 (Tableau de correspondances)



Écriture décimale	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire	Entier + Fraction < 1	Pourcentage
0,59				
	$\frac{6}{5}$			
		$1 + \frac{7}{10}$		
				229%

Calculs simples en situation

Exercice 4 (Fraction d'une quantité)



- 1► Pour le goûter, Aurore a bu les deux tiers d'une canette de 33cL de soda, et Amel les trois cinquièmes d'une bouteille de 25cL d'eau gazeuse. Calculer la quantité bue par chacun en cL.
- 2► Lors de son séjour à Venise, Nino a parcouru 13,5km, dont deux neuvièmes confortablement installé dans une gondole. Quelle distance a-t-il parcouru en gondole ?
- 3► Sur 600 articles dans un magasin, deux tiers sont

en soldes.

Donner le nombre d'articles soldés.

Exercice 5 (Pourcentage d'une quantité)



- 1► La chemise que Lucie achète devrait coûter 60 euros mais a 20% de réduction. Quel est son prix ?
- 2► Une veste coûte 50 euros. Quel sera son prix si le marchand pose une étiquette -70% ?

Exercice 6 (Proportion de proportion)

- 1► Garance boit un tiers de son Soda, puis la moitié de ce qu'il reste.
Combien a-t-elle bu de Soda ?
- 2► Antoine a préparé 10 cookies. Guillaume mange deux cinquièmes des cookies, Margaux prend deux tiers de ce qu'il reste.
Combien de cookies reste-t-il pour Antoine ?
- 3► Walid dépense deux tiers de ses économies pour acheter un jeu vidéo. Il dépense un cinquième du reste pour acheter un sandwich. Il lui reste alors 24€.
Combien d'argent avait-il au départ ?
- 4► Camille a 50€ en poche, elle achète un jeu vidéo avec trois dixièmes de cette somme, puis va au restaurant en dépensant trois cinquièmes de ce qu'elle avait initialement en poche.
Combien d'argent lui reste-t-il ?

Exercice 7 (Proportions et fractions)

- 1► Pour sa grenadine, Mme A a rempli un tiers de son verre de sirop, puis a versé de l'eau jusqu'à raz bord. Son verre fait 21cL.
Quel volume de Sirop a-t-elle versé dans le verre ?
- 2► Mr B a parcouru 36km aujourd'hui. La moitié en bus, un tiers en vélo et le reste à pieds.
Quelle distance a parcouru Mr B en vélo ? En bus ? À pieds ?
Quelle proportion du parcours a été parcouru à pieds ?
- 3► Une question dont la réponse est oui ou non est posée à la classe. 6 élèves sur 18 répondent oui, un tiers de la classe répond non.
Combien d'élèves n'ont pas répondu ?

Exercice 8 (Pourcentages)

- 1► 80% des 55 personnes interrogées disent aimer le chocolat noir.
Combien de personnes interrogées aiment le chocolat noir ?
- 2► 56% des 50 chatons nés cette année ont le pelage gris.
Combien de chatons nés cette année ont le pelage gris ?
- 3► 28% des 850 personnes interrogées connaissent

le théorème de Pythagore.

Combien de personnes interrogées connaissent le théorème de Pythagore ?

- 4► Une veste qui coûte habituellement 35€ est à 60% de réduction.
Donner son prix soldé.
- 5► Sur les 120 élèves de mathématiques spécifiques de l'an dernier, 30 n'ont jamais été absents.
Quelle est la proportion d'élèves qui n'a jamais été absent ? (Donner une fraction puis un pourcentage.)
- 6► Sur les 50 chatons nés cette année, 15 ont les yeux bleus.
Quelle est la proportion de chatons ayant les yeux bleus ? (Donner une fraction puis un pourcentage)

Exercice 9

Dans la bibliothèque de Jojo, on peut trouver 1200 livres. 600 de ces livres sont des ouvrages datant d'avant 1900, qu'il appelle des "classiques". Parmi ces classiques, il a marqué d'une gommette rouge 200 ouvrages qu'il appelle les "classiques essentiels" : des livres qu'il faut absolument avoir lu.

- 1► Dans la bibliothèque de Jojo, quelle est la proportion de "classiques" ?
- 2► Donner la proportions de "classiques essentiels" parmi les "classiques".
- 3► Dans la bibliothèque de Jojo, quelle est la proportion de "classiques essentiels" ?

Cependant depuis 1900 il est sorti de nombreux livres que Jojo trouve extraordinaires, selon lui 150 de ces ouvrages récents dans sa bibliothèques sont des "incontournables".

- 1► Quelle est la proportion de livres "incontournables" dans la collection de Jojo ?
- 2► Donner la proportion de livres "incontournables" parmi les ouvrages sortis après 1900.
- 3► Si Dio, un ami de Jojo, devait lire les "classiques essentiels" et les "incontournables", quelle proportion de la bibliothèque de Jojo aurait-il besoin de lire ?
- 4► Après avoir examiné la bibliothèque de Jojo, Dio pense qu'il possède déjà chez lui deux tiers de ses ouvrages au total et trois quarts de ses "classiques". Parmi les ouvrages qui sont communs à leurs deux bibliothèques, quelle est la proportion de "classiques" ?

Exercice 10

Laura affirme qu'elle passe un tiers de chaque jour à dormir, un quart à être en cours, un huitième à s'alimenter, un douzième à faire ses devoirs et faire des tâches ménagères, un douzième à utiliser son téléphone ou regarder la télé, et le reste à s'adonner ses loisirs.

- 1► Exprimer les durées de chacune des 6 activités qu'à évoqué Laura en heure.
Il est vivement recommandé d'utiliser le modèle en barres.
- 2► Donner la proportion de sa journée consacrée aux loisirs.
- 3► Exprimer chacune des fractions données ci dessus en pourcentages si possible.

Avec la calculatrice

Exercice 11 (Proportion via effectif)

En 1998, le film *Titanic* avait enregistré 20 634 793 entrées. Cette année-là, tous films confondus, les cinémas en France ont enregistré 170,1 millions d'entrées.

En 2008, le film *Bienvenue chez les Ch'tis* avait enregistré 20 489 303 entrées. Cette année-là, tous films confondus, les cinémas en France ont enregistré 212,7 millions d'entrées.

Lequel de ces deux films a attiré la proportion de spectateurs l'année de sa sortie ?

Exercice 12 (Effectif via proportion)

- 1► L'Asie compte environ 4,6 milliards d'habitants, et 31% d'entre eux vivent en Inde. Combien l'Inde compte-t-elle d'habitants ?
- 2► La France compte environ 67 millions d'habitants, ce qui représente environ 15% de la population totale de l'Union Européenne (UE).
Combien l'UE compte-t-elle d'habitants au total ?

Exercice 13 (Proportion de proportion)

L'été dernier, 64% des Espagnols sont partis en vacances, et parmi ceux-ci, 61% sont allés à la mer.
Quel pourcentage des Espagnols sont allés à la mer l'été dernier ?

B Évolutions

Table des matières

1	Évolutions simples	186
2	Évolutions successives	189
	Exercices	190

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- Évolution : variation absolue, variation relative.
- Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs (produit, inverse).

Détail

Contenus

- Successive et réciproque

1 – Évolutions simples

Variation absolue, variation relative, coefficient multiplicateur

Définition 1

Soit V une grandeur strictement positive qui prend la valeur $V_{\text{départ}}$ puis la valeur $V_{\text{arrivée}}$.

- ▶ La **variation absolue** de V est $\Delta V = V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}$.
Elle correspond à l'écart en valeur (par exemple, si la valeur est en euros, la variation absolue est en euros.)
- ▶ La **variation relative**, ou **taux d'évolution** de V est $\tau = \frac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}} = \frac{\Delta V}{V_{\text{départ}}}$.
Elle correspond à l'écart en proportion, souvent exprimée comme un pourcentage.
- ▶ Le **coefficient multiplicateur entre $V_{\text{départ}}$ et $V_{\text{arrivée}}$** est le nombre CM par lequel il faut multiplier $V_{\text{départ}}$ pour obtenir $V_{\text{arrivée}}$, c'est-à-dire $V_{\text{arrivée}} = CM \times V_{\text{départ}}$. Autrement dit, $CM = \frac{V_{\text{arrivée}}}{V_{\text{départ}}}$.

Exemple 2

Un pantalon vendu à 25€ est soldé à 20€.

- ▶ La variation absolue est $\Delta V = 20\text{€} - 25\text{€} = -5\text{€}$.
- ▶ La variation relative est $\tau = \frac{20 - 25}{25} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5} = -0,2 = -20\%$
- ▶ Le coefficient multiplicateur est $CM = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0,8$. Autrement dit $20\text{€} = 25\text{€} \times 0,8$.

Propriété 3

Le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution sont liés par la relation :

$$\tau = CM - 1$$

En particulier,

$$V_{\text{arrivée}} = (1 + \tau)V_{\text{départ}}$$

Proposition 4

- ▶ Augmenter une quantité Q de $t\%$, c'est calculer $Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$
- ▶ Diminuer une quantité Q de $t\%$, c'est calculer $Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$

+10%	+25%	+40%	+100%	-10%	-25%	-50%	-40%
$\times 1,10$	$\times 1,25$	$\times 1,40$	$\times 2$	$\times 0,90$	$\times 0,75$	$\times 0,50$	$\times 0,60$

Remarque 5

- ▶ Les taux sont souvent exprimés en pourcentages. Ainsi, un taux de 0,25 correspond à un pourcentage de 25% (et à une multiplication par 1,25).
- ▶ Un taux positif correspond à une *augmentation* : un taux de 0,67 correspond à une augmentation de 67% (et à une multiplication par 1,67).
- ▶ Un taux négatif correspond à une *diminution* : un taux de -0,52 correspond à une évolution de -52%, autrement dit une *diminution* de 52%. Cela correspond également à une multiplication par $1 - 0,52 = 0,48$.

Attention à bien distinguer un *taux* et un *coefficient multiplicateur* :

- Un coefficient multiplicateur est toujours positif : si $CM > 1$, cela correspond à une augmentation, et si $0 \leq CM < 1$, cela correspond à une diminution.
- Un taux peut être soit positif, soit négatif selon les ouvrages, OU un taux est toujours accompagné des termes «augmentation de» ou «diminution de». Si $\tau > 0$, cela correspond à une augmentation, et si $\tau < 0$, cela correspond à une diminution.

Il est courant d'écrire le signe + d'un taux positif pour accentuer le sens de la variation : on peut dire «une augmentation de +12%» au lieu de «une augmentation de 12%». On évitera cependant de parler d'une «diminution de -12%».

Exemple 6

- Le prix du kWh l'électricité en février 2020 était de 0,1546€. En juillet 2024, il était de 0,2516€. Comme $0,2516 \approx 1,63 \times 0,1546$, le coefficient multiplicateur est d'environ 1,63. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 1,63 - 1 = 0,63$, soit +63% d'augmentation.
- En 1980, la demande mondiale de plastique était de 60 tonnes environ. En 2020, elle était de 360 tonnes. Comme $360 = 6 \times 60$, cela correspond à un coefficient multiplicateur de 6. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 6 - 1 = 5$, soit +500% d'augmentation.
- Dans les années 1980, la superficie des glaces arctiques de plus de 4 ans d'âge atteignait environ 3 millions de km^2 . Dans les années 2020, elle dépassait à peine 0,3 millions de km^2 . Comme $0,3 = 0,1 \times 3$, cela correspond à un coefficient multiplicateur de 0,1. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 0,1 - 1 = -0,9$, soit -90%, autrement dit une diminution de 90%.

Méthode 7 (Évolutions simples avec un tableau de proportionnalité)

Le fait que les taux d'évolution s'expriment traditionnellement en pourcentages traduit le fait qu'ils relèvent d'une situation de proportionnalité. On peut donc se servir d'un tableau de proportionnalité, et lire les variations absolue et relative sur chaque ligne.

	Départ	Arrivée
Pourcentage	100	...
Données	$V_{\text{départ}}$	$V_{\text{arrivée}}$

→ Écart = variation relative en %

→ Écart = variation absolue

Exemple 8

Dans le pays d'Algérie, la consommation de jus de fruits était de 120L par habitant. L'année suivante, elle est montée à 150L par habitant. Quelle augmentation cela représente-t-il dans l'absolu ? Et en pourcentage ?

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessous, on trouve que la quatrième proportionnelle est :

$$\frac{100 \times 150}{120} = \frac{100 \times 15}{12} = \frac{100 \times 5}{4} = 100 \times 1,25 = 125$$

	Départ	Arrivée
Pourcentage	100	125
Poids (kg)	120	150

→ Variation relative = +25%

→ Variation absolue = +30kg

La variation absolue est donc $150\text{L} - 120\text{L} = 30\text{L}$ par habitant, la variation relative est +25% car $125 - 100 = 25$.

Exemple 9

Le service *Comme ça me plaît* propose un régime alimentaire pour perdre du poids. Un témoignage affirme qu'après avoir suivi le programme, son poids est de 102kg contre 120kg auparavant. Quelle perte cela représente-t-il dans l'absolu ? Et en pourcentage ?

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessous, on trouve que la quatrième proportionnelle est :

$$\frac{100 \times 102}{120} = \frac{10 \times 102}{12} = \frac{10 \times 51}{6} = \frac{10 \times 17}{2} = 85$$

	Départ	Arrivée
Pourcentage	100	85
Poids (kg)	120	102

→ Variation relative = -15%

→ Variation absolue = -18kg

La variation absolue est donc $12\text{kg} - 102\text{kg} = -18\text{kg}$, la variation relative est -15% car $85 - 100 = -15$.

Par définition, le coefficient multiplicateur est le nombre qui complète le produit à trou $V_{\text{arrivée}} = \dots \times V_{\text{départ}}$. On l'a noté CM , de sorte que $V_{\text{arrivée}} = CM \times V_{\text{départ}}$. Et si les choses s'étaient passées dans l'autre sens ? Autrement dit, que se passe-t-il si les valeurs d'arrivée et de départ changeaient de rôle ? On veut donc compléter le produit à trou $V_{\text{départ}} = \dots \times V_{\text{arrivée}}$. En manipulant la première égalité, on trouve que le nombre manquant est $\frac{1}{CM}$. Cela est cohérent : pour défaire une multiplication par CM , il faut une division par CM . Et rappelons que diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse !

Taux réciproque

Définition 10

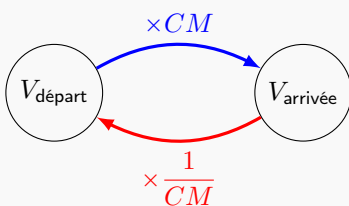
Soit V une grandeur strictement positive qui prend la valeur $V_{\text{départ}}$ puis la valeur $V_{\text{arrivée}}$.

Le **taux d'évolution réciproque** est le taux qui correspond à l'évolution dans l'autre sens (réciproque) de $V_{\text{arrivée}}$ à $V_{\text{départ}}$.

Proposition 11

Notons CM le coefficient multiplicateur de l'évolution de $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.

Le coefficient multiplicateur réciproque est $CM' = \frac{1}{CM}$.



Exemple 12

Un vendeur baisse d'un article de 20% en été. Autrement dit, le prix a été multiplié par 0,8.

Pour ramener le prix à sa valeur initiale à la fin de l'été, ce vendeur se demande quel pourcentage d'augmentation il doit appliquer. Le coefficient multiplicateur étant 0,8, le coefficient réciproque est :

$$\frac{1}{0,8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Il doit donc multiplier le prix par 1,25, ce qui correspond à une augmentation de 25%.

2 – Évolutions successives

Activité 13

Support vidéo : <https://youtu.be/9o4cl3WYZ5s?si=CDz1XhTkwLyx1RN6>

Dans ce journal télévisé, le présentateur et économiste affirme que cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre représentent une augmentation globale de 30%.

- 1► À quel *taux d'évolution*, et à quel *coefficient multiplicateur* correspond une augmentation de 6% ?
- 2► Exprimez puis calculez le taux d'évolution global et le coefficient multiplicateur global correspondant à cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre. Commentez les propos du présentateur.

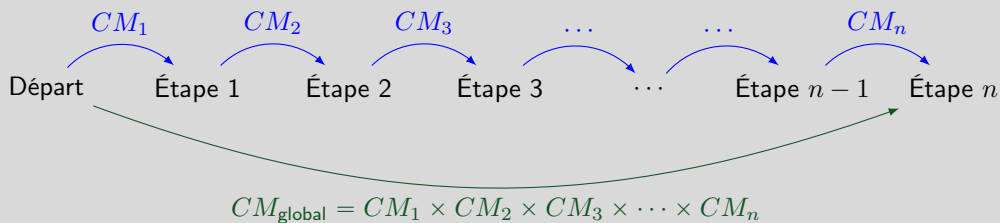
Définition 14

Taux d'évolution global

Lorsqu'une grandeur évolue plusieurs fois successivement, le **taux d'évolution global** correspond au taux d'évolution entre la valeur initiale et la valeur finale.

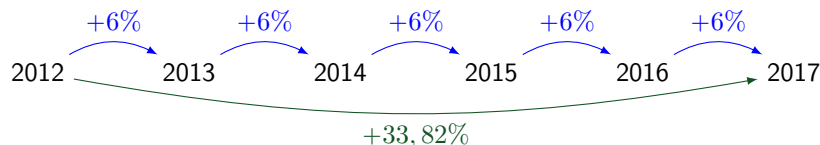
Il correspond au coefficient multiplicateur qui est égal au produit de tous les coefficients intermédiaires :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \dots \times CM_n$$



Exemple 15

Reprenons l'Activité 13. D'une année à l'autre, le taux d'évolution est de 6%. Cela correspond à un coefficient multiplicateur de $CM = \frac{6}{100} = 0,06$. Ainsi, l'évolution globale est $CM_{\text{global}} = 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 = 1,06^5 = 1,3382255776$. Le taux d'évolution global est donc environ de 33,82%.



Activité 16 (Fluctuations boursières)

En 2023, le cours d'une cryptomonnaie était de 60% supérieur au cours de 2022. En 2024, il est redescendu de 60% par rapport au cours de 2023.

- 1► Est-il revenu au cours initial ?
- 2► Le résultat serait-il le même si le cours avait d'abord baissé puis augmenté de 60% ?
- 3► Quel est le cours de la cryptomonnaie en 2024 s'il augmente de 60% puis baisse de 62,5% ? Discutez ce dernier pourcentage.

Exercices

Évolutions simples

Exercice 1 (Taux d'évolution)

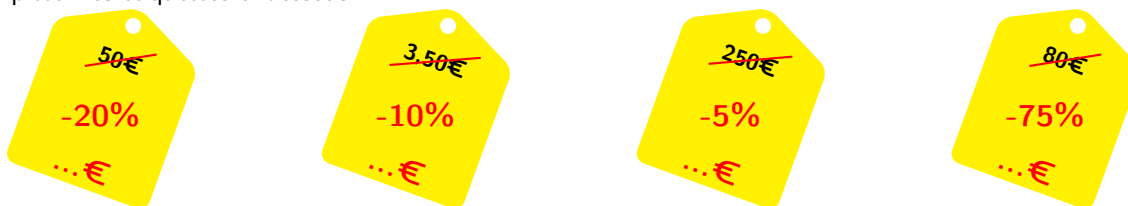
Recopier et compléter sans justifier le tableau ci-dessous :

Variation en pourcentage	Baisse de 28%	Hausse de 73%		
Coefficient multiplicateur			0,9	1,23

Exercice 2 (Soldes : prix final)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

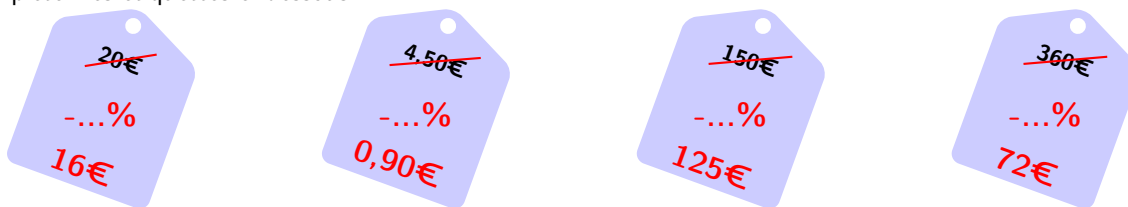
Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 3 (Soldes : réduction)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

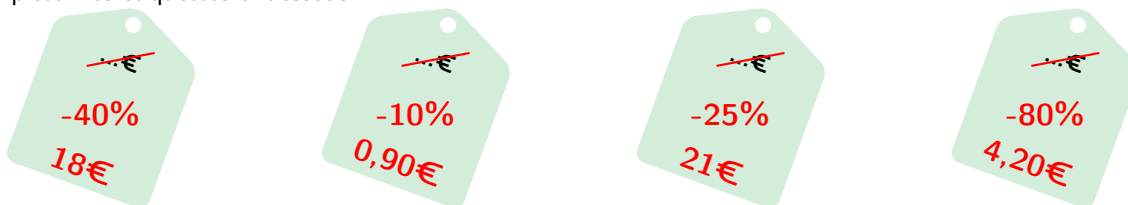
Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 4 (Soldes : prix initial)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 5 (Défi)

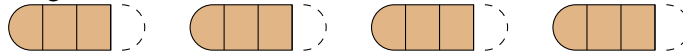
Depuis 2018, les commerçants n'ont plus le droit d'offrir sur les produits alimentaires des promotions au-delà d'un tiers de leur valeur (c'est-à-dire concernant les produits que l'on peut acheter à l'unité : un concombre, une bouteille, ...) ou d'un quart de leur volume (c'est-à-dire concernant les produits dont le prix est affiché au kg ou au L : des pommes, des boissons, de la lessive, ...).

Autrement dit, on doit calculer la réduction entre l'unité du produit (la valeur d'un article seul, ou d'un kg, ou d'un L) sans promotion et avec. Par exemple, si on vend 4 baguettes pour le prix de 3, alors 1 baguette coûte alors le prix de $3 \div 4 = 0,75$ baguette, soit une réduction de 25%.

Il est commode de représenter la situation avec un dessin, sur lequel on peut lire la réduction globale :



On voit 3 baguettes payées au plein tarif, 1 baguette gratuite, ce qui, si on réarrange le remplissage, revient à offrir un quart de chaque baguette :



Complétez les étiquettes de réduction suivantes pour qu'elles offrent la plus grande promotion possible dans la limite de la loi.

40 rouleaux
+ ... offerts !

... achetés
1 offert !

2 achetés
le 2^e à ...%

40cL
dont ... cL gratuits

Évolutions successives

Exercice 6 (Hausse des prix)

Un jouet sophistiqué de la marque GW coûtait 26€ en 2012, ce même article en coûte 52€ en 2024.

- 1► Calculer la hausse du prix (variation relative) et exprimer la en pourcentage.

L'entreprise justifie son augmentation de prix par l'inflation, c'est-à-dire le fait que tous les produits du marché soient plus chers et donc qu'il est plus cher de produire.

L'inflation était de 2% en moyenne chaque année de 2012 à 2021. Elle a bondi à 5% en 2022 et 5% en 2023, puis est finalement retombée à 2% en 2024.

- 2► La hausse du prix du fabricant de jouet est-elle justifiée ?
3► Quel serait le prix du jouet si l'augmentation du prix avait suivi l'inflation ? (On arrondira par excès à l'unité.)

Exercice 8 (Chiffre d'affaire)

Bob a créé son entreprise de comptabilité en 2020. Son chiffre d'affaire est de 24 000€ cette année. Les trois années suivantes, Bob voit son chiffre d'affaire augmenter de 20%, puis de 10% et enfin de 5%.

- 1► Donner le chiffre d'affaire de Bob en 2021.
2► Quel est le taux d'évolution global correspondant à ces trois évolutions successives ?
3► Donner le chiffre d'affaire de Bob en 2023.

Exercice 9 (Effectifs de deux lycées)

Le lycée A a vu sa population augmenter de 5% en 2023 puis de 5% en 2024.

Le lycée B a vu sa population augmenter de 3% en 2023 puis de 7% en 2024.

Dans quel lycée l'augmentation est-elle (en proportion) la plus grande sur ces deux années ?

Exercice 7 (Réductions cumulées)

Un pantalon à 50€ est soldé à 10% mais Charles qui travaille dans le magasin a droit à une remise de 20% sur ses achats. Quelle somme dépensera Charles s'il applique les deux réductions ?

Exercice 10 (Évolutions successives)

Quelle évolution en pourcentage correspond à :

- 1► Deux augmentations successives de 20% ?
- 2► Une augmentation de 60% suivie d'une autre de 40% ?
- 3► Une augmentation de 20% puis une autre de 80% ?
- 4► Une augmentation de 10% suivi d'une diminution de 10% ?
- 5► Une augmentation de 100% suivi d'une baisse de 50% ?

Exercice 11 (Stocks en baisse)

Julia a vendu 75% de son stock. Son partenaire a vendu le lendemain 75% du reste. Il reste alors 12 palettes à Julia et son partenaire.

- 1► Quelle proportion du stock a vendu le partenaire de Julia ?
- 2► De combien de palettes disposaient Julia et son partenaire avant la vente ?

Exercice 12 (Les économies de Mme B)

Mme B a fait un dépôt sur son compte en 2019. On lit dans le tableau suivant que de 2019 à 2020, Mme B a vu ses économies augmenter de 5%.

Compléter ce tableau.

Année	Valeur des économies de Mme B	Taux d'évolution par rapport à l'année précédente
2019		×
2020	10 000	+5%
2021		+20%
2022		+5%
2023	13 860	
2024	16 632	

Exercice 13 (Exercice complet)

Un magasin de meubles propose des soldes.

- 1► Une table coûtait 345€ et est soldée à -45%. Quel est son nouveau prix ?
- 2► Un lot de chaises coûte, solde compris, 202,80€. Sachant qu'il est soldé à -35%, quel est le prix initial du lot de chaises ?
- 3► Une armoire coûtait 340€, et est proposée à 119€ pendant les soldes.
 - a► Quelle est la variation absolue du prix de cette armoire ?
 - b► Quel est le pourcentage de réduction ?

Exercice 14 (La boucle est-elle bouclée ?)

Le prix des barres de céréales a augmenté de 40% puis diminué de 40%. Comment a-t-il évolué globalement ? A-t-il augmenté, diminué ? De quel pourcentage ?

C Logique

Table des matières

Programme

Bulletin officiel

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple.

Les élèves apprennent en situation à :

- ▶ reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- ▶ lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- ▶ formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- ▶ mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- ▶ formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- ▶ formuler la réciproque d'une implication ;
- ▶ lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

Détail

Contenus

- ▶ Négation
- ▶ Implication
- ▶ Contraposée
- ▶ Réciproque
- ▶ Équivalence

Théorème, implication**Définition 1**

Un théorème est une propriété qui peut être démontrée grâce à des définitions ou d'autres propriétés mathématiques qui sont vraies. Souvent, un théorème est formulé à l'aide d'une **implication**, ce qui se traduit en français par les mots :

SI (une cause) **ALORS** (une conséquence)

Exemple 2

Voici un exemple d'implication non mathématique :

Théorème : Si j'habite à Nanterre, alors j'habite en France.

Ce théorème est-il vrai ? Oui, car Nanterre est une ville en France.

Réciproque**Définition 3**

La **réciproque** d'une implication est obtenue en inversant le rôle de la cause et de la conséquence.

Exemple 4

La réciproque de l'implication donnée dans l'exemple précédent est :

SI j'habite en France **ALORS** j'habite à Nanterre.

Cette réciproque est-elle vraie ? Non, car on peut habiter à Aubusson, qui est en France, mais qui n'est pas Bègles.

Contraposée**Définition 5**

La **contraposée** d'une implication est obtenue en inversant le rôle de la cause et de la conséquence, et en prenant la négation de ces dernières.

Exemple 6

La contraposée de l'implication du premier exemple est :

SI je n'habite pas en France, **ALORS** je n'habite pas à Nanterre.

Cette contraposée est-elle vraie ? Oui, car Nanterre est une ville en France.

Propriété 7

Une contraposée est toujours vraie.

Exercice 8

Pour chacun des théorèmes ci-dessous, donner la contraposée et la réciproque, dire si la réciproque est vraie ou fausse, et expliquer pourquoi.

Théorème : **SI** B est un avion, **ALORS** B a des ailes.

Contraposée : Si B n'a pas d'ailes, alors B n'est pas un avion.

Réciproque : Si B a des ailes, alors B est un avion.

C'est faux, car un oiseau n'est pas un avion, pourtant il a des ailes.

Théorème : **SI** un quadrilatère est un carré, **ALORS** il a quatre angles droits.

Contraposée : Si un quadrilatère n'a pas quatre angles droits, alors ce n'est pas un carré.

Réciproque : Si un quadrilatère a quatre angles droits, alors c'est un carré.

C'est faux, car un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle, et un rectangle n'est pas forcément un carré.

Théorème : **SI** un quadrilatère est un rectangle, **ALORS** il a quatre angles droits.

Contraposée : Si un quadrilatère n'a pas quatre angles droits, alors ce n'est pas un rectangle.

Réciproque : Si un quadrilatère a quatre angles droits, alors c'est un rectangle.

C'est vrai.

Définition 9

Équivalence

Une **équivalence** est une implication dont la réciproque est vraie.
En français, on formule une équivalence avec l'expression « *si, et seulement si* »

Exemple 10

Le théorème de Pythagore est une équivalence. En effet, sa formulation usuelle est :

Théorème : **SI** ABC est un triangle rectangle en A , **ALORS** $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Sa contraposée est : **SI** $BC^2 \neq BA^2 + AC^2$ **ALORS** le triangle ABC n'est pas rectangle en A .

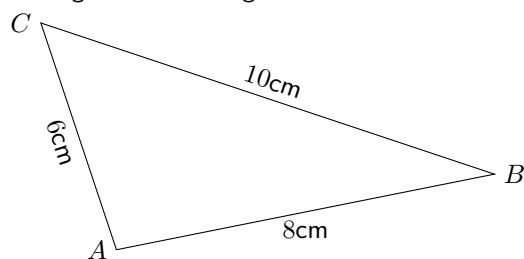
Sa réciproque est : **SI** $BC^2 = BA^2 + AC^2$ **ALORS** le triangle ABC est rectangle en A .

et on apprend au collège que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie. On peut donc écrire :

Le triangle ABC est rectangle en A , *si, et seulement si* $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

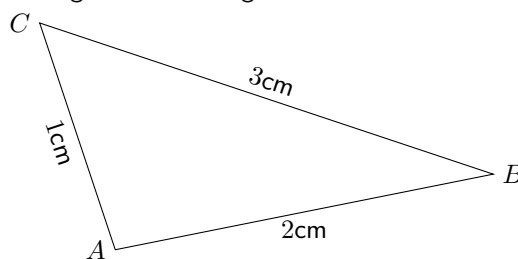
Exercice 11

Ce triangle est-il rectangle ?



Exercice 12

Ce triangle est-il rectangle en A ?



D Géométrie non repérée

Table des matières

1	Projection orthogonale	198
2	Autour des triangles	198
A	Trigonométrie	198
B	Propriétés et droites remarquables d'un triangle	200
3	Quadrilatères particuliers	202
	Exercices	206

Programme

Bulletin officiel

Contenus

- Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Capacités attendues

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.
- Traiter de problèmes d'optimisation.

Démonstrations

- Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M .
- Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.

Approfondissements possibles

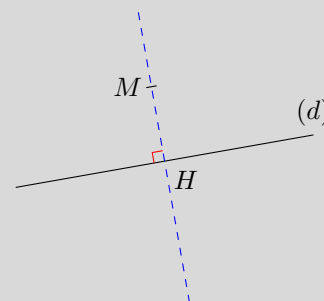
- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab \sin(C)$.
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

1 – Projection orthogonale

Définition 1

Soient (d) une droite et M un point du plan. Le **projeté orthogonal** de M sur (d) est le point $H \in (d)$ tel que (MH) est perpendiculaire à (d) .

Projection orthogonale



Théorème 2

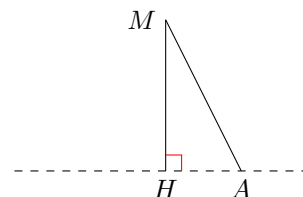
Distance et projection orthogonale

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite (d) est le point de la droite qui est le plus proche de M .

Démonstration.

Soit A un point de (d) différent de H . Par définition de H le triangle MHA est rectangle en H , donc son plus long côté est son hypoténuse. En particulier, $AM > MH$. Ainsi, le point A est plus loin de M que H ne l'est : comme le point A est quelconque, cela montre que n'importe quel point de (d) distinct de H est strictement plus loin de M que H ne l'est, *a fortiori* que H est le seul point où la distance à M est minimale.

Redémontrons le fait que l'hypoténuse est le plus long côté d'un triangle rectangle : on a $AH^2 \geq 0$, donc $MH^2 + AH^2 \geq MH^2 + 0 = MH^2$. Or d'après le théorème de Pythagore, $MH^2 + AH^2 = MA^2$, ce qui montre que $MA^2 \geq MH^2$. Comme MA et MH sont des distances, elles sont positives, et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\sqrt{MA^2} \geq \sqrt{MH^2}$, donc $MA \geq MH$. Le raisonnement est le même pour montrer que $MA \geq HA$.



□

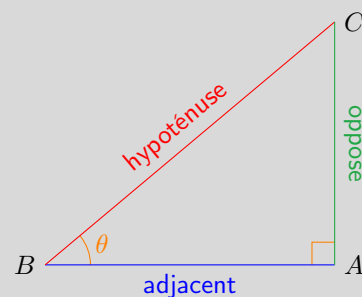
2 – Autour des triangles

A – Trigonométrie

Définition 3

Fonctions trigonométriques

Dans un triangle ABC rectangle en A , on note $\theta = \widehat{ABC}$. On affuble alors les trois côtés de noms particuliers : l'**hypoténuse** comme d'habitude, le côté **opposé** (car il est en face, à l'*opposé*, de l'angle), et le côté **adjacent** (car il est *adjacent* à l'angle).



On définit trois valeurs trigonométriques, le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente** de l'angle θ , que l'on peut retrouver à l'aide d'un moyen mnémotechnique :

$$\cos(\theta) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

CAH

SOH

TOA

Remarque 4

Grâce à cela, on peut calculer une longueur inconnue en connaissant une longueur et un angle. Pour cela, on a besoin d'une valeur explicite de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$. Une calculatrice lycée le fait très bien, mais en règle générale le tableau suivant suffit largement :

Angle (degrés)	0	30	45	60	90	180
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

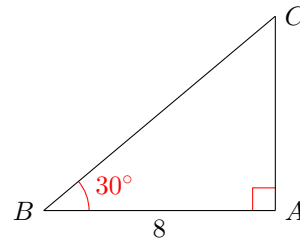
Exemple 5

Dans le triangle rectangle ci-contre :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30^\circ) = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{BC}$$

donc :

$$BC = \frac{8 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$



Remarque 6

Connaissant deux longueurs, on peut également déterminer une mesure de l'angle associé : pour cela, on calcule le rapport des longueurs, et on utilise la calculatrice :

- ▶ Si $\cos(\theta) = \frac{a}{h}$, alors $\theta = \arccos\left(\frac{a}{h}\right)$ (selon les calculatrices, la fonction peut être notée acos ou $\cos^{-1}$).
- ▶ Si $\sin(\theta) = \frac{o}{h}$, alors $\theta = \arcsin\left(\frac{o}{h}\right)$ (selon les calculatrices, la fonction peut être notée asin ou $\sin^{-1}$).
- ▶ Si $\tan(\theta) = \frac{o}{a}$, alors $\theta = \arctan\left(\frac{o}{a}\right)$ (selon les calculatrices, la fonction peut être notée atan ou $\tan^{-1}$).

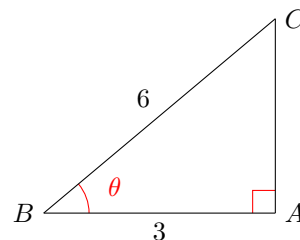
Exemple 7

Dans le triangle rectangle ci-contre :

$$\cos(\theta) = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

donc :

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$



Identité trigonométrique**Théorème 8**

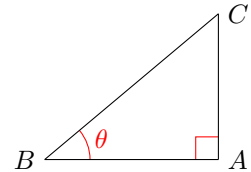
Pour tout $\theta \in [0^\circ; 90^\circ]$,

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Démonstration.

Considérons un triangle ABC rectangle en A tel que $\theta = \widehat{ACB}$. par définition, et d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 &= \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} \\ &= \frac{BC^2}{BC^2} = 1 \end{aligned}$$



□

B – Propriétés et droites remarquables d'un triangle

Dans tout ce paragraphe, ABC désigne un triangle.

Triangles particuliers**Définition 9**

- ▶ Si les trois côtés de ABC sont de même longueur, alors on dit que ABC est **équilatéral**.
- ▶ Si $AB = AC$, alors on dit que ABC est **isocèle en A**. Le point A est appelé **sommet** du triangle, et $[BC]$ est appelée **base** du triangle.
- ▶ Si $\widehat{BAC} = 90^\circ$, alors on dit que ABC est **rectangle en A**.

Propriété 10

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure.

Corollaire 11

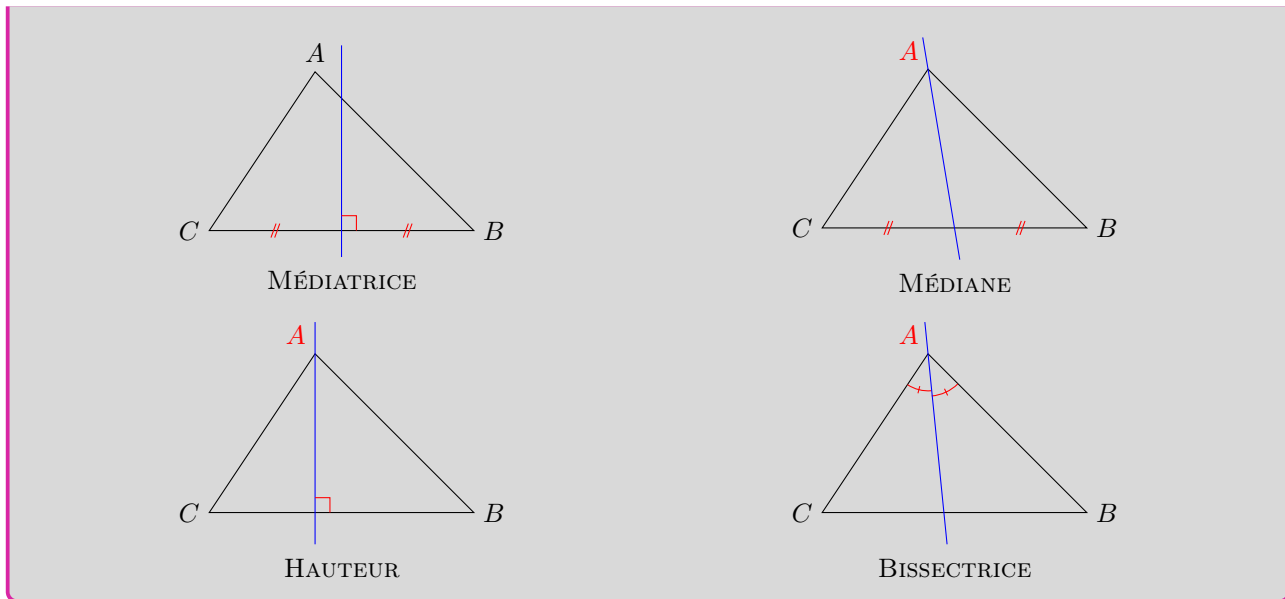
Les angles à la base d'un triangle isocèle et rectangle ont pour mesure 45° .

Propriété 12

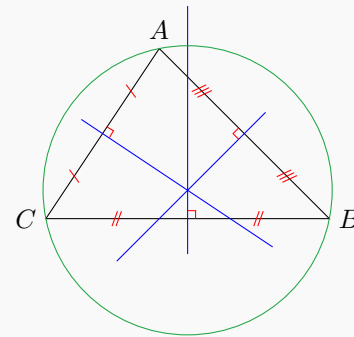
Les angles d'un triangle équilatéral ont tous pour mesure 60° .

Droites remarquables d'un triangle**Définition 13**

- ▶ La **médiatrice** du segment $[BC]$ est la droite perpendiculaire à $[BC]$ passant par le milieu de $[BC]$.
- ▶ La **médiane issue de A** est la droite passant par A et le milieu du côté opposé, qui est $[BC]$.
- ▶ La **hauteur issue de A** est la droite passant par A perpendiculaire au côté opposé, qui est $[BC]$.
- ▶ La **bissectrice issue de A** est la droite passant par A qui divise l'angle en A en 2 angles de mesures égales.

**Propriété 14****Intersection des médiatrices**

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, et leur intersection est le centre du cercle circonscrit au triangle :

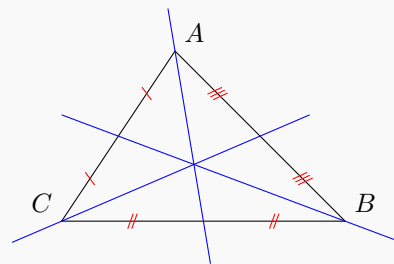


Les propriétés suivantes ne sont pas au programme, elles sont là pour enrichir votre culture.

Propriété 15**Intersection des médianes**

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes, et leur intersection est appelé le **centre de gravité**⁽¹⁾ du triangle. Si on le note G , alors c'est le seul point à vérifier la relation :

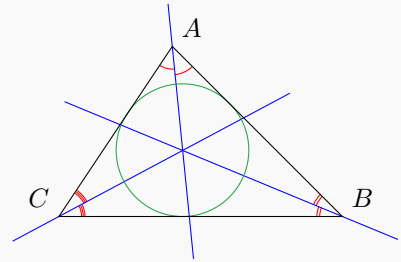
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



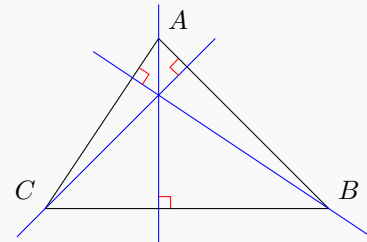
(1). Expérience à faire : découpez un triangle dans du papier, déterminez son centre de gravité, et posez le triangle en équilibre sur ce point au sommet de la pointe d'un compas. Il tient en équilibre !

Propriété 16**Intersection des bissectrices**

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes, et leur intersection est le centre du cercle inscrit dans le triangle :

**Propriété 17****Intersection des hauteurs**

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est appelé **orthocentre** du triangle.

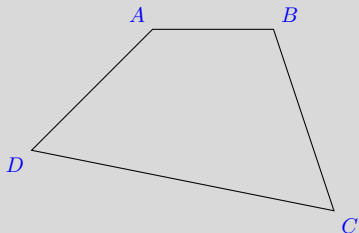


3 – Quadrilatères particuliers

Définition 18**Vocabulaire**

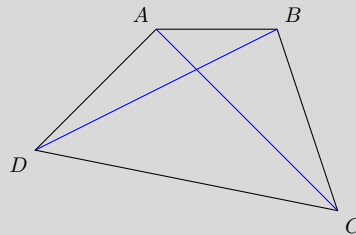
Un **quadrilatère** est un polygone qui a 4 côtés.

On considère un quadrilatère $ABCD$ comme représenté ci-dessous.

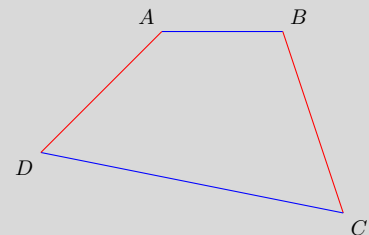


A , B , C et D sont les **sommets** de $ABCD$

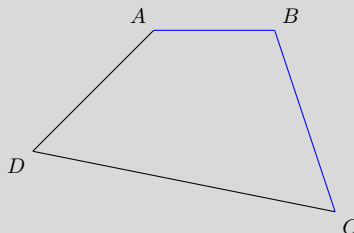
A et B sont dits **consécutifs**, A et C sont dits **opposés**



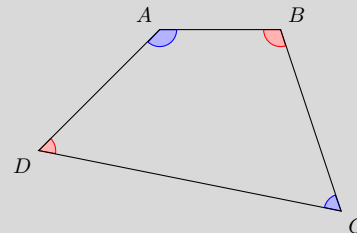
$[AC]$ et $[BD]$ sont les **diagonales** de $ABCD$



$[AB]$ et $[CD]$ sont des **côtés opposés** (de même pour $[AD]$ et $[BC]$)



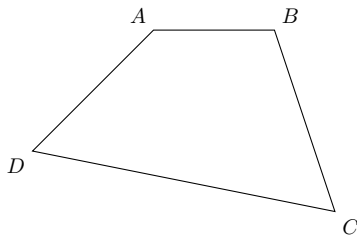
$[AB]$ et $[BC]$ sont des **côtés consécutifs** (c'est-à-dire qui se suivent) (de même que $[BC]$ et $[CD]$, ou $[CD]$ et $[DA]$, ou $[DA]$ et $[AB]$)



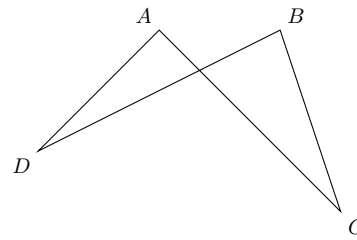
$\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont des **angles opposés** dans $ABCD$ (de même pour $\hat{B}$ et $\hat{D}$)

Remarque 19

Pour nommer un quadrilatère, on nomme ses points dans l'ordre. Par exemple, le quadrilatère ci-dessus peut être appelé $ABCD$, ou encore $BCDA$, ou encore $DCBA$, ou encore $BADC$, ... Mais attention, l'ordre est important !

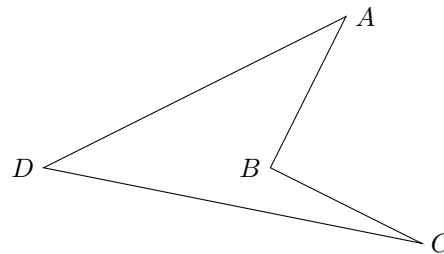

 Quadrilatère $ABCD$

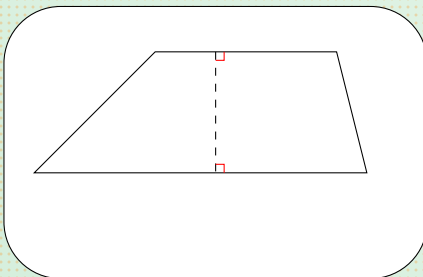
(Point culture : Un quadrilatère comme $ACBD$ est dit **croisé**.)


 Quadrilatère $ACBD$
Remarque 20

Tout ce qui précède est aussi valable pour les quadrilatères qui ont un "creux".

À retenir : Deux côtés/sommets sont soit consécutifs, soit opposés.

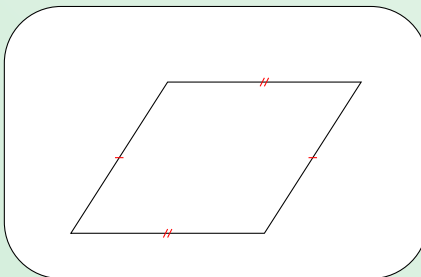

TRAPÈZE



Un quadrilatère avec deux côtés opposés parallèles

PARALLÉLOGRAMME

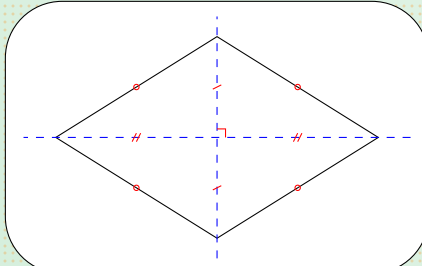
**



Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles

- Les côtés opposés sont parallèles et de même longueur
- Les diagonales se coupent en leurs milieux
- Il possède un centre de symétrie

LOSANGE

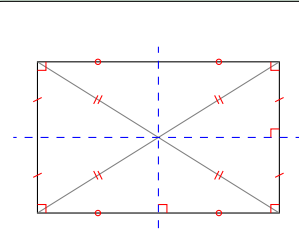


Un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur

- Les diagonales sont perpendiculaires
- Les diagonales se coupent en leurs milieux
- Les diagonales sont les axes de symétrie
- Les côtés opposés sont parallèles

RECTANGLE

*

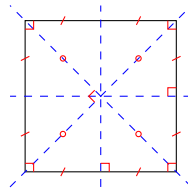


Un quadrilatère qui a 4 angles droits

- Les diagonales se coupent en leurs milieux
- Les diagonales ont la même longueur
- Il possède 2 axes de symétrie
- Les côtés opposés sont parallèles et de même longueur

CARRÉ

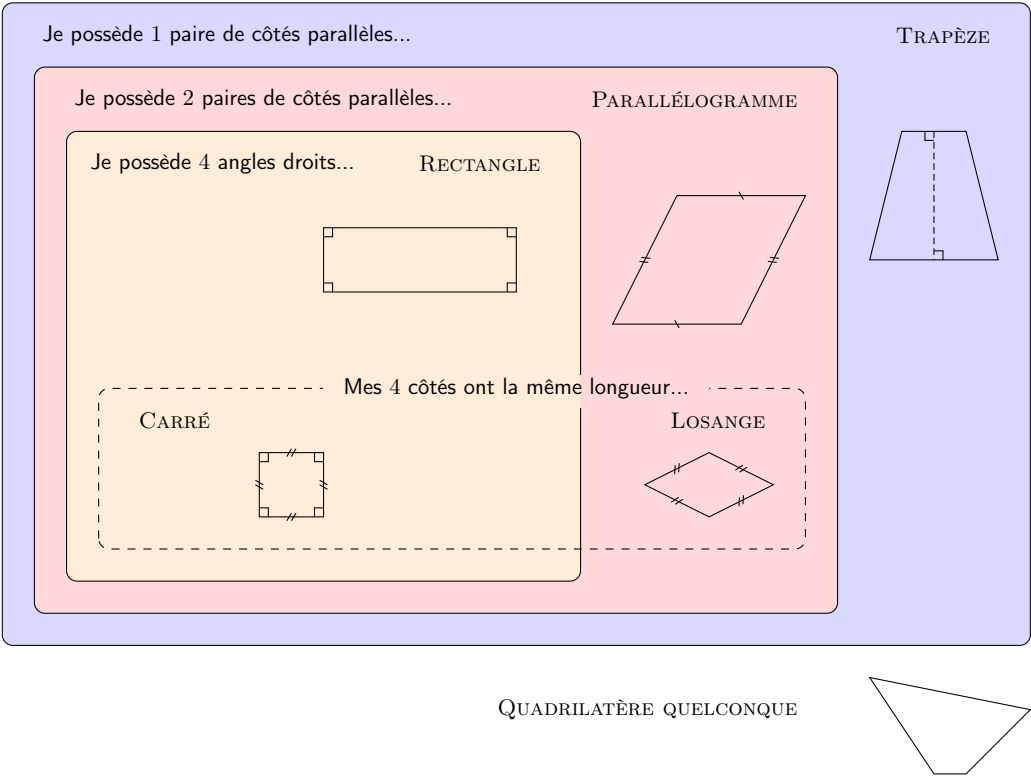
**



Un quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de même longueur

- Les diagonales se coupent en leurs milieux
- Les diagonales ont la même longueur
- Les diagonales sont perpendiculaires
- Il possède 4 axes de symétrie
- Les côtés opposés sont parallèles

Un carré est un type de rectangle particulier (dont tous les côtés sont de même longueur), et aussi un type de losange particulier (dont les angles sont droits). Un parallélogramme est un type de trapèze particulier. Et ainsi de suite : on peut résumer toutes ces relations dans le diagramme suivant :



Exercices

Appliquer

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 5\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 55^\circ$.

- 1► Calculer AB et BC . On arrondira au millimètre.
- 2► En déduire une valeur approchée de l'aire de ABC .

Exercice 2

Soient ABC et ADC deux triangles rectangles en A tels que $AD = 4\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$ et $CB = 8\text{cm}$.

- 1► Calculer une mesure de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ en degrés, arrondis à l'unité.
- 2► Déterminer une valeur approchée de l'aire de ABC .

Exercice 3

Soit α tel que $\sin(\alpha) = 0,8$. Déterminer $\cos(\alpha)$ à l'aide de l'identité $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$.

Exercice 4

On considère un carré $ABCD$ de centre O . Déterminer le projeté orthogonal...

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1► de A sur (BC) | 3► de C sur (BD) |
| 2► de D sur (AB) | 4► de B sur (AC) |

Exercice 5

Soit RST un triangle rectangle en R , soit H le projeté orthogonal de R sur (ST) . On donne $\widehat{RST} = 40^\circ$ et $ST = 7\text{cm}$.

Calculer RT , RS et RH en centimètre, arrondis au centième.

Exercice 6

Soit MNP un triangle rectangle en N tel que $MP = 13\text{m}$ et $NP = 5\text{m}$.

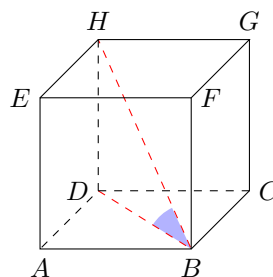
Déterminer la distance entre M et (PN) .

S'exercer

Exercice 7

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 5.

- 1► Calculer la longueur DB .
- 2► En déduire une mesure de $\widehat{DBH}$.



Exercice 8

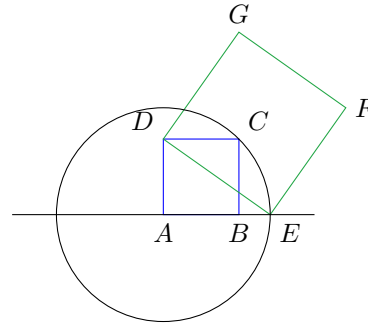
Le parallélogramme $RSTU$ est tel que $RS = 6\text{cm}$ et la distance de U à (RS) est égale à 2cm .

- 1► Calculer l'aire du triangle RSU en cm^2 .
- 2► En déduire l'aire de $RSTU$ en cm^2 .

Problème 9

Soit $ABCD$ un carré, on trace le cercle de centre A passant par C . On note E le point d'intersection de ce cercle avec $[AB]$, et on trace un carré $DEFG$.

Montrer que l'aire de $DEFG$ est le triple de l'aire de $ABCD$.



S'entraîner

Exercice 10

Soit (d) une droite du plan. Déterminer l'ensemble des points M situés à 3cm de (d) .

Exercice 11

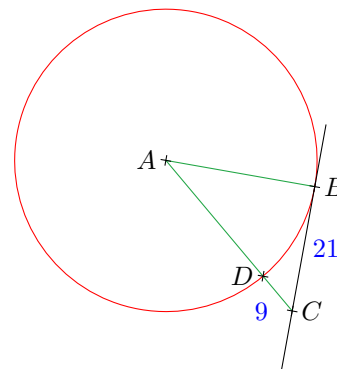
Soient $A(2;1)$ et $B(4;4)$, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{13}$.

- Calculer la longueur AB .
- Le point B appartient-il au cercle $\mathcal{C}$?
- Soit D le point de coordonnées $(9;1)$. La droite (BD) est-elle une tangente au cercle $\mathcal{C}$?
(On dit d'une droite qu'elle est tangente à un cercle si elle n'intersecte le cercle qu'en un unique point.)

Problème 12

On considère un cercle de centre A . La droite (BC) est tangente à ce cercle en B . On note D le point d'intersection de $[AC]$ et de ce cercle. On donne $CD = 9$ et $BC = 21$.

Déterminer le rayon du cercle.



Problème 13

Soient $a > 0$ et $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 2a$ et $AD = a$. On note H le projeté orthogonal de A sur (BD) .

- 1► Calculer, en fonction de a , la longueur BD .
- 2► En exprimant de deux manières différentes l'aire de ABD , déterminer AH en fonction de a .
- 3► Soit x une mesure de $\widehat{ABD}$.
Montrer que x est une mesure de $\widehat{DAH}$.

- 4► Calculer $\tan(x)$, en déduire DH en fonction de a .
- 5► Soit S le point du segment $[AB]$ tel que $BS = 0,8BA$.
Les droites (SH) et (AD) sont-elles parallèles ?

Problème 14

Une échelle est accrochée à un mur. Cette échelle mesure 5m, et elle atteint une hauteur de 4,8m sur le mur. Une pie est perchée à 3m du bas de l'échelle.

- 1► À quelle distance du sol la pie se trouve-t-elle ?
- 2► À quelle distance du mur la pie se trouve-t-elle ?

Problèmes de recherche

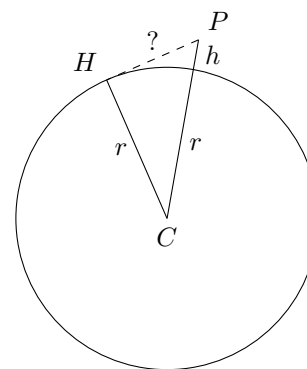
Problème 15 (Distance de l'horizon)

L'objectif de ce problème est de déterminer la distance de l'horizon sur Terre à hauteur humaine. On fera l'approximation d'une Terre parfaitement sphérique. On note C le centre de la Terre, P le point de vue, et H le point à l'horizon. La situation peut donc être représentée par le schéma ci-contre.

L'objectif est donc de trouver la longueur PH , marquée par un point d'interrogation.

Données :

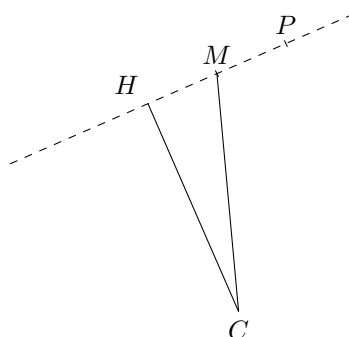
- Hauteur moyenne d'un humain : $h = 1,65\text{m}$
- Rayon de la Terre : $r = 6\,371\,000\text{m}$
- Hauteur de la tour Eiffel : 323m
- Rayon de la Lune : 1\,737\,400m



Partie 1 : Créer une situation favorable

L'objectif de cette partie est de montrer que l'angle $\widehat{CHP}$ est droit.

- 1► Justifier que le point H est le point sur la droite (PH) qui est le plus proche de C .
- 2► Pour clarifier la situation, on reproduit une partie du schéma ci-dessus. On place également un point M sur (PH) quelconque pour répondre aux questions suivantes.



- a► Démontrez la proposition suivante :

« Soit $M \in (HP)$.

Si le segment $[CM]$ ne forme pas un angle droit avec la droite (HP) , alors M n'est pas le point de (PH) qui est le plus proche de C . »

- b► Énoncez la contraposée de cette proposition.
- c► Grâce à la contraposée appliquée à H au lieu de M , que peut-on conclure sur l'angle en H ?

Partie 2 : Calculer la distance de horizon

- 1► À l'aide de la partie 1, calculer la distance de l'horizon du Terre à hauteur d'yeux.
- 2► Sans réécrire la justification, donner la distance de l'horizon sur Terre en haut de la tour Eiffel.
- 3► Sans réécrire la justification, donner la distance de l'horizon sur la Lune à hauteur d'yeux.

Problème 16 (Observation astronomique)

Document 1 : Distances astronomiques

Une *année lumière*, notée 1AL, est la distance parcourue par la lumière dans le vide en 1 an. La lumière dans le vide se déplace à 299 792 458 m/s.

Une *unité astronomique*, notée 1ua, est le rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire 150 millions de kilomètres.

Document 2 : Secondes d'arc

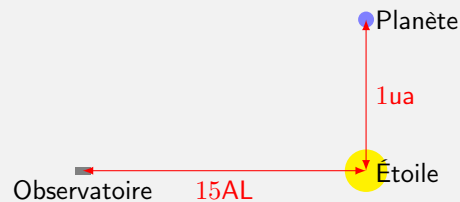
Pour exprimer des très petites mesures d'angles (inférieures à 1°), on utilise la *seconde d'arc* : 1 degré vaut 3 600 secondes d'arc. Une seconde d'arc est notée $1''$.

Document 3 : Résolution angulaire d'un télescope

Une manière de quantifier la puissance d'un télescope est de parler de sa *résolution angulaire* : un télescope dont la résolution angulaire est de 1° est capable de discerner des objets qui apparaissent dans son champ de vision avec 1 degré d'écart, mais ne parviendra plus à les discerner s'ils sont plus proches.

La résolution angulaire du télescope Hubble est d'environ $0,05''$.

Document 4 : Situation de l'observation



Le télescope Hubble est-il capable de distinguer la planète de l'étoile ?

Problème 17 (Pizza party)

Alice souhaite couper sa pizza quatre fromages en six parts égales. Comment peut-elle faire, sans approximation ?

Dictionnaire des maths

– C –

Calculer. (Consigne) Effectuer une ou plusieurs opérations entre des nombres et écrire un résultat exact avec le moins de symboles possible. *Ex. : Calculer $5 + 4 \rightarrow 5 + 4 = 9$.*

Comparer. (Consigne) Dire quelle quantité est plus grande ou plus petite que l'autre. *Ex. : Comparer 3 et 5 $\rightarrow 3 < 5$.*

Conclure. (Consigne) Sens proche de En déduire, dans le cas de la finalité d'un raisonnement. Souvent, un énoncé propose une question, et guide le raisonnement avec des sous-questions : Conclure signifie alors exploiter les sous-questions pour répondre à la question initiale.

Conjecturer. (Consigne) Énoncer quelque chose qui semble vrai mais dont on n'est pas encore certain. *Ex. : On considère le programme de calcul qui choisit un nombre, le double, ajoute 10, divise par 5 et soustrait le nombre de départ. Faire tourner le programme pour plusieurs valeurs. Que peut-on conjecturer ? $\rightarrow$ On peut conjecturer que le résultat est toujours 5.*

Consécutif. (Adjectif) Qui se suivent. *Ex. : 3 et 4 sont deux entiers consécutifs.*

– D –

De. (Opération) Dans le contexte des proportions, renvoie à l'opération de multiplication. *Ex. : Trois quarts de 15 correspond au produit $\frac{3}{4} \times 15$.*

(En) déduire. (Consigne) Répondre à une question en utilisant les résultats de la ou des questions précédentes. *Ex. : Dans la question précédente on a vu que le verger produit 2 tonnes de pommes par an. On en*

déduit qu'il produit $2 \times 3 = 6$ tonnes de pommes en 3 ans.

Déterminer. (Consigne) Synonyme de Donner. Souvent, il n'y a qu'une réponse possible, et on attend un raisonnement détaillé. *Ex. : Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $2x - 1 = 3$. $\rightarrow 2x - 1 = 3$ revient à $2x = 4$, puis à $x = 2$, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\{2\}$.*

Différence. (Opération) Résultat d'une soustraction. *Ex. : La différence de 3 et 4 est $3 - 4 = -1$.*

Donner. (Consigne) Fournir un résultat ou une réponse, sans trop d'élucubrations. Souvent, il y a plusieurs choix de réponse. *Ex. : Donner l'inverse de $\frac{3}{5} \rightarrow$ L'inverse de $\frac{3}{5}$ est $\frac{5}{3}$.*

– E-F-G –

Expression. (Objet mathématique) Assemblage de nombres, de lettres et de symboles opératoires. *Ex. : $2x - 3$ et $3 - 4\sqrt{7}$ sont des expressions.*

Exprimer. (Consigne) Synonyme de Écrire, souvent avec une forme imposée. *Ex. : Exprimer $3^2 \times 3^5$ sous la forme d'une seule puissance. $\rightarrow 3^2 \times 3^5 = 3^7$.*

Facteur. (Nom) Nombre que l'on multiplie. *Ex. : Dans la multiplication 3×4 , les facteurs sont 3 et 4.*

(En) Fonction de. (Relation) Exprimer une grandeur en fonction d'une autre, c'est écrire une relation égale à la deuxième grandeur, faisant intervenir la première. *Ex. : Soit x un nombre, soit y le double de x . Exprimer y en fonction de $x \rightarrow y = 2x$.*

Graphiquement. (Consigne) Exploiter un document non textuel (courbe de fonction, diagramme, ...) pour répondre à une question.

Ex. : Lire graphiquement l'image d'un nombre par une fonction.

– I-J-L –

Interpréter. (Consigne) Expliquer le résultat d'un calcul dans le contexte d'une situation donnée. *Ex. : Un verger produit 2 tonnes de pommes par an. Combien de tonnes produit-il en 3 ans ? $\rightarrow 2 \times 3 = 6$. Interprétation : le verger produit 6 tonnes en 3 ans.*

Justifier. (Consigne) Expliquer un raisonnement ou un calcul à l'aide du cours ou de questions précédentes.

Littéral(e). (Adjectif) Qui inclut des variables représentées par des lettres. *Ex. : $2x - 3$ est une expression littérale, l'art de manipuler les expressions littérales s'appelle le Calcul littéral.*

– M-N-P –

Au moins. (Comparaison) Désigne un minimum autorisé, incluant ce minimum dans les valeurs autorisées. *Ex. : Si on doit tirer au moins 2 cartes, on peut en tirer 2, 3, 4, etc., mais pas 0, ni 1.*

Moins de. (Comparaison) Désigne un maximum autorisé, excluant ce maximum dans les valeurs autorisées. *Ex. : Si on doit tirer moins de 3 cartes, on peut en tirer 0, 1 ou 2, mais pas 3, ni 4, ni 5, etc.*

Numérique. (Adjectif) A. Qui concerne les nombres. *Ex. : $3 - 4\sqrt{7}$ est une expression numérique, l'art d'effectuer des calculs avec des nombres uniquement s'appelle le Calcul numérique.* B. Qui concerne l'informatique. *Ex. : Un programme informatique qui effectue des lancers aléatoires de dés est appelé une simulation numérique.*

Par. (Opération) Dans un contexte de proportionnalité, renvoie à l'opé-

ration de division. *Ex. : Des « kilomètres par heure » signifie que l'on divise une distance en kilomètre par une durée en heures.*

Au plus. (Comparaison) Désigne un maximum autorisé, incluant ce maximum dans les valeurs autorisées. *Ex. : Si on peut acheter au plus 3 livres, on peut en acheter 0, 1, 2 ou 3, mais pas 4, ni 5, ni 6, etc.*

Plus de. (Comparaison) Désigne un minimum autorisé, excluant ce minimum dans les valeurs autorisées. *Ex. : Si doit acheter plus 2 livres, on peut en acheter 3, 4, 5, etc., mais pas 0, ni 1, ni 2.*

Produit. (Opération) Résultat d'une multiplication. *Ex. : Le produit de 3 et 4 est $3 \times 4 = 12$.*

– Q-R-S –

Quotient. (Opération) Résultat d'une division. *Ex. : Le quotient de 3 par 4 est $3 \div 4 = -1$.*

Réduire. (Consigne) A. Réécrire une expression en regroupant les termes qui peuvent l'être, avec moins de

symboles. Synonyme de Simplifier. *Ex. : Simplifier $3(2x + 1) - 8x \rightarrow 3(2x + 1) - 8x = -2x + 3$.* B. Dans le cadre des racines carrées, réécrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, et b le plus petit possible. *Ex. : Simplifier $\sqrt{8} \rightarrow \sqrt{8} + 2\sqrt{2}$.* C. Dans le cadre des fractions, supprimer un facteur commun au numérateur et au dénominateur. *Ex. : Réduire $\frac{15}{25}$*

$\rightarrow \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$. D. (au même dénominateur) Dans le cadre des fractions, désigne l'action d'exprimer deux fractions sous deux formes égales ayant le même dénominateur. *Ex. : Réduire $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ au même dénominateur. $\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.*

Retrancher. (Opération) Synonyme de soustraire. *Ex. : Retrancher 8 à 12 $\rightarrow$ on calcule $12 - 8$.*

Simplifier. (Consigne) A. Réécrire une expression en allégeant ses notations, avec moins de symboles. Sens proche de Réduire. *Ex. : Simplifier $3(2x + 1) - 8x \rightarrow 3(2x + 1) - 8x = -2x + 3$.* B. Dans le cadre des ra-

cines carrées, réécrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, et b le plus petit possible. *Ex. : Simplifier $\sqrt{8} \rightarrow \sqrt{8} + 2\sqrt{2}$.* C. Dans le cadre des fractions, supprimer un facteur commun au numérateur et au dénominateur. *Ex. : Simplifier $\frac{15}{25} \rightarrow \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.*

Somme. (Opération) Résultat d'une addition. *Ex. : La somme de 3 et 4 est $3 + 4 = 7$.*

Sur. (Opération) Traduit l'opération de division, représentée par une fraction ou une écriture fractionnaire. *Ex. : $2x$ sur 3 correspond à $\frac{2x}{3}$.*

– T-V –

Terme. (Nom) Nombre que l'on ajoute ou soustrait. *Ex. : Dans l'addition $3 + 4$, les termes sont 3 et 4.*

Vérifier. (Consigne) Démontrer qu'une réponse donnée par l'énoncé est vraie. *Ex. : Vérifier que 2 est solution de l'équation $2x - 1 = 3 \rightarrow$ On vérifie que $2 \times 2 - 1$ est bien égal à 3.*

Mathématiques

Seconde GT

Cet ouvrage regroupe tous les cours et exercices dispensés en mathématiques lors de l'année de seconde générale et technologique. Les chapitres sont ordonnés selon une progression donnée, qui n'est pas la seule envisageable.

Il existe deux versions de ce manuel : une version dite « étendue » (la présente) et une version « raccourcie à compléter ».

- ▶ La version « étendue » est enrichie de remarques et de détails supplémentaires, d'approfondissements, de points culture, et surtout d'une très grande partie des démonstrations, qu'elles soient exigibles par le programme ou un peu au-delà de sa portée, tout en restant abordables pour quiconque peut faire preuve de suffisamment de motivation et de patience. Cette version a été écrite avec plusieurs objectifs en tête. Permettre aux absents et absentes de rattraper le cours sans trop de pertes. Donner suffisamment de matériel à celles et ceux qui souhaitent s'avancer. Satisfaire l'appétit des esprits les plus gourmands, en culture comme en technique. Donner un aperçu de ce que sont les mathématiques après la seconde.
- ▶ La version « raccourcie à compléter » est, comme son nom l'indique, une extraction de la version « étendue », qui ne contient que les essentiels du cours, avec des exemples partiels et des propositions à compléter, et les exercices. Il n'y a pas les démonstrations, les points culture, les approfondissements. Cet élagage a deux objectifs : le premier étant de créer un support de cours à la fois synthétique et fourni, afin d'optimiser la prise de notes en classe pour laisser plus de temps aux exercices ; le second est d'économiser du papier, car celui-ci ne pousse pas sur les arbres ! Enfin... façon de parler.

Nous remercions chaleureusement toutes celles et ceux qui nous font part de fautes de frappes, d'erreurs, ou même de leurs avis sur certains passages, et qui nous permettent de proposer un cours de la meilleure qualité possible.

Cours composé par E. Suong & S. Damase, illustrations par E. Suong

Les exercices sont issus de sources multiples. Pour tout ajout de référence, adaptation ou retrait, merci de nous contacter.

