

Sujet du devoir maison 1

Devoir à rendre le 28 mars 2025. Il ne sera pas noté, mais il reste obligatoire. La qualité de votre travail et de votre investissement sera inscrite sur votre bulletin du dernier trimestre, et pourra jouer en votre faveur dans vos vœux d'orientation.

L'exercice se décompose en deux parties. La première partie est commune à tous. La seconde partie se présente sous deux versions. Vous choisissez la version de la seconde partie qui correspond à votre objectif d'orientation pour l'année prochaine (spécialité mathématique ou tronc commun).

Chaque copie doit être individuelle. Si vous travaillez à plusieurs, assurez vous de rendre un travail personnel, en modifiant les tournures de phrases, la présentation, l'ordre des points de raisonnement...

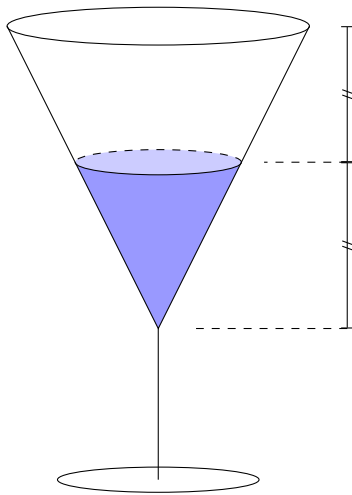
Consigne importante : Toute trace de recherche sera évaluée. Toute discussion sur la modélisation, ou sur la vraisemblance des résultats sera valorisée. La qualité de la présentation sera évaluée.

Exercice

Un bar sert ses cocktails dans des verres coniques. Vous n'avez pas très soif, vous demandez donc un demi-cocktail. On vous sert alors un verre rempli à la moitié de sa hauteur, et on vous fait payer la moitié du prix d'un verre plein.

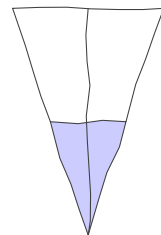
Est-ce le prix juste, une belle offre ou une arnaque ? Cet exercice vous permettra de le déterminer.

Partie A



Dans cette partie, on suppose que $r = 3\text{cm}$ et $h = 8\text{cm}$.

- 1► Quelle forme le liquide prend-il ?
- 2► On donne ci-contre un schéma du verre vu de face. Le reproduire, et indiquer les longueurs connues et coder des angles ou des égalités de longueurs remarquables. Il est conseillé de nommer les points d'intérêt.
- 3► Justifier que votre schéma est une configuration de Thalès. On prendra soin de justifier rigoureusement le parallélisme pour l'hypothèse du théorème de Thalès.
- 4► À l'aide du théorème de Thalès, démontrer que le rayon du liquide est 1,5cm, et sa hauteur 4cm.
- 5► En déduire le volume exact du liquide (sous la forme d'un nombre fois π).
- 6► Déterminer le volume total exact du verre. Quelle relation pouvez vous écrire entre le volume du verre et celui du liquide ?



Partie B – Objectif tronc commun

On reprend les valeurs de la partie précédente. On suppose que le prix du verre est calculé de la manière suivante : le bar facture 1€ pour les frais de service (confection des cocktails, nettoyage du matériel, ...) et 20 centimes par cL de cocktail.

- 1► Convertir les volumes de la partie précédente en cL. On détaillera soigneusement le procédé.
- 2► En déduire le prix d'un verre plein, et le prix juste du verre rempli à mi-hauteur (on donnera les prix arrondis par excès au centime).
- 3► On note x le volume du cocktail en cL. Exprimer le prix du cocktail en fonction de x . De quel type de fonction s'agit-il ?
- 4► Tracer cette fonction (à la main ou à l'aide d'un logiciel), et y inscrire les volumes et prix des questions 1► et 2►.

- 5► À l'aide d'une lecture graphique, déterminer le volume de cocktail correspondant à la moitié du *prix* d'un verre plein.
- 6► Le bar est-il juste, vous fait-il une belle offre, ou est-il en train de vous arnaquer ?

Partie B – Objectif spé maths

Dans cette partie, on revient au cas général en notant r et h le rayon et la hauteur inconnus. En barman honnête, on remplit maintenant le verre à la moitié *de son volume*. L'objectif de l'exercice est de montrer que sous cette condition, indépendamment des valeurs de la hauteur et du rayon, le verre sera rempli à un certain pourcentage fixe de sa hauteur, que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{V}$ le volume du verre, de rayon r et de hauteur h , et on note $\mathcal{V}'$ le volume du liquide, de rayon r' et de hauteur h' .

- 1► Reproduire le schéma de la partie A, en y inscrivant cette fois-ci r , h , r' et h' .
- 2► À l'aide du théorème de Thalès, montrer qu'il existe $p \in [0; 1]$ tel que $r' = pr$ et $h' = ph$.
- 3► Montrer que le rapport $\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}'}$ ne dépend que du réel p de la question précédente, vérifiant une certaine équation à déterminer.
- 4► Prenons un peu de recul pour nous situer au sein de la démonstration.
Les questions suivantes sont ouvertes. Aucun calcul n'est attendu, seulement des phrases pour évaluer votre compréhension de la structure du problème.
 - a► Expliquer en quoi les questions 1► et 2► démontrent que le cône du liquide est une réduction du cône du verre.
 - b► Expliquer en quoi la question 3► démontre que le volume d'une réduction d'un cône ne dépend pas de la forme précise du cône original, seulement de son volume.
 - c► Expliquer en quoi pour répondre à la question de départ, il suffit désormais de trouver le bon rapport de réduction en résolvant une équation.
- 5► Tracer le graphe de la fonction cube entre 0 et 1 (à la main ou à l'aide d'un logiciel).
- 6► *Aparté, bonus : dans la partie A, que valait p ? Retrouver la relation de la dernière question de la partie A à l'aide du graphique.*
- 7► Déterminer graphiquement une valeur approchée de p à 10^{-2} près.
- 8► En déduire le pourcentage de la hauteur d'un verre conique qu'il faut remplir pour occuper la moitié de son volume.

