

THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ - CAS LINÉAIRE -

Thm (de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire): Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle d'intérieur non vide, $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Le problème de Cauchy (C): $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution définie sur I entier.

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < t_0 < b$. Comme $t \mapsto \|A(t)\|$ est continue sur le compact $[a, b]$, il existe $M > 0$ telle que $\forall t \in [a, b], \|A(t)\| \leq M$. De là, pour tout $t \in [a, b]$, pour tout $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq M \cdot \|x_1 - x_2\|$$

et donc f est globalement lipschitzienne selon sa variable d'espace (uniformément selon le temps).

► Définissons $F: \varphi \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n) \mapsto [t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme f est continue, F est à valeurs dans $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$. De plus, F est linéaire. Pour $\varphi \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ et $t \in [a, b]$, observons que : $F(\varphi)'(t) = f(t, \varphi(t)) = A(t)\varphi(t) + b(t)$ et $F(\varphi)(t_0) = y_0$. De là, si $\varphi = F(\varphi)$, alors φ est solution de (C) sur $[a, b]$, et réciproquement si $\varphi' = A\varphi + b$ et $\varphi(t_0) = y_0$, alors $F(\varphi)' = \varphi'$ et $\varphi(t_0) = F(\varphi)(t_0)$, donc $\varphi = F(\varphi)$. On va donc montrer que F admet un unique point fixe dans $C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ (pour $\|\cdot\|_\infty$).

► Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, est vraie la proposition :

$$\mathcal{H}_p: " \forall (\varphi, \psi) \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n), \quad \forall t \in [a, b], \quad \|F^p(\varphi)(t) - F^p(\psi)(t)\| \leq \frac{M^p |t - t_0|^p}{p!} \|\varphi - \psi\|_\infty "$$

• $p=1$: Soient $(\varphi, \psi) \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^2$ et $t \in [a, b]$.

$$\|F(\varphi)(t) - F(\psi)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, (\varphi - \psi)(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(\varphi - \psi)(s)\| ds \right| \leq M \cdot |t - t_0| \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty$$

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_p$ est vraie. Soient $(\varphi, \psi) \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^2$ et $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \|F^{p+1}(\varphi)(t) - F^{p+1}(\psi)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, (F^p(\varphi) - F^p(\psi))(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t M \cdot \|F^p(\varphi)(s) - F^p(\psi)(s)\| ds \right| \\ &\leq M \cdot \left| \int_{t_0}^t \frac{M^p |s - t_0|^p}{p!} \|\varphi - \psi\|_\infty ds \right| \leq \frac{M^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|\varphi - \psi\|_\infty \end{aligned}$$

► De là, pour tous $(\varphi, \psi) \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)^2$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $\|F^p(\varphi) - F^p(\psi)\|_\infty \leq \frac{M^p (b-a)^p}{p!} \|\varphi - \psi\|_\infty$. Or $M^p (b-a)^p = o(p!)$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{M^p (b-a)^p}{p!} < 1$, donc F^p est une contraction de l'espace de Banach $(C^0([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$, donc d'après le théorème de BANACH-PICARD, F^p admet un unique point fixe $\varphi \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$. Remarquons qu'alors $F(\varphi) = F(F^p(\varphi)) = F^p(F(\varphi))$ donc $F(\varphi)$ est un point fixe de F^p , donc $F(\varphi) = \varphi$ par unicité. Il existe donc une unique solution de (C) sur $[a, b]$.

► Soit $([a_p, b_p])_{p \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts telle que $I = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} [a_p, b_p]$ et $\forall p \in \mathbb{N}, a_p < t_0 < b_p$. (*)
D'après ce qui précède, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le problème de Cauchy (C) admet une unique solution y_p sur $[a_p, b_p]$.
Posons alors $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Déjà, $t_0 \in [a_0, b_0]$ donc $y(t_0) = y_0(t_0) = y_0$. Ensuite,
 $t \mapsto y_p(t)$ où $p = \min \{n \in \mathbb{N} \mid t \in [a_n, b_n]\}$

soient $t \in I$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $y(t) = y_p(t)$. Remarquons que $\forall q \geq p$, $y(t) = y_p(t) = y_q(t)$. En fait y_q prolonge y_p à $[a_q, b_q]$ en une fonction dérivable. En particulier, y est dérivable en t , et $y'(t) = y'_p(t) = A(t)y_p(t) + b(t) = A(t)y(t) + b(t)$. Ainsi y est solution de (C) sur I .

► Si $\tilde{y}$ est une autre solution de (C) sur I , alors pour tout $t \in I$, si $p \in \mathbb{N}$ est tel que $y(t) = y_p(t)$, alors $\tilde{y}|_{[a_p, b_p]}$ est solution de (C) sur $[a_p, b_p]$. Par unicité, $\tilde{y}|_{[a_p, b_p]} = y_p$, donc $\tilde{y}(t) = y_p(t) = y(t)$. Ainsi, $\tilde{y} = y$. ■

COMMENTAIRES

(*) : Supposons que $I = [a, b[$ (les autres cas s'en déduisent).

► On pose $a_p = a$.

► Si $b < +\infty$, on pose $b_p = b - \frac{b-t_0}{p+2}$. On a bien $t_0 < b_p < b$ et $b_p \rightarrow b$.

► Si $b = +\infty$, on pose $b_p = t_0 + p + 1$.