

$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

$$(\Theta, S) \longmapsto \Theta S$$

- μ est bien définie et continue, par continuité de la multiplication matricielle.
- Montrons que μ est surjective : soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Remarquons que ${}^t M M \in S_n(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^t x {}^t M M x = {}^t (Mx)(Mx) > 0$ (c'est un carré de réel). Ainsi, ${}^t M M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que ${}^t M M = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$. Posons $S = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Elle vérifie $S^2 = {}^t M M$. Posons $\Theta = M S^{-1}$. On a :

$${}^t \Theta \Theta = {}^t (M S^{-1}) (M S^{-1}) = {}^t S^{-1} {}^t M M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

Ainsi, $\Theta \in O_n(\mathbb{R})$, et $M = \mu(\Theta, S)$.

- Montrons que μ est injective : Soient $(\Theta, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $(\Theta', S') \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M := \mu(\Theta, S) = \mu(\Theta', S')$. On a :

$$S^2 = {}^t M M = {}^t (\Theta' S') (\Theta' S') = {}^t S' ({}^t \Theta \Theta) S' = S' I_n S' = S'^2$$

Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $S = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$. Notons $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme interpolateur de LAGRANGE tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. On a :

$$S = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1} = P \text{Diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) P^{-1} = Q(P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}) = Q(S^2) = Q(S'^2)$$

Or S' commute avec $Q(S'^2)$, donc avec S , donc S et S' sont codiagonalisables (puisque déjà diagonalisables d'après le théorème spectral) : il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$

tels que $S = R \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) R^{-1}$ et $S' = R \text{Diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}) R^{-1}$. De là :

$$R \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) R^{-1} = S^2 = S'^2 = R \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) R^{-1}$$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$, puis $\sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\mu_i}$, donc $S = S'$. A fortiori, $\Theta = \Theta'$.

- Montrons que μ^{-1} est continue : soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $(\Theta_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p)$ et $(\Theta, S) = \mu^{-1}(M)$. Montrons que $((\Theta_p, S_p))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers (Θ, S) .

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact^(*), $(\Theta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence $\bar{\Theta}$. Il existe

$(\Theta_{q(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ extraite de $(\Theta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{\Theta}$. On en déduit que $(S_{q(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge

vers $\bar{S} = \bar{\Theta}^{-1} M$. Or $\bar{\Theta}^{-1} M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} \stackrel{(+)}{=} GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^+(\mathbb{R}) \stackrel{(+)}{=} S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc par injectivité de μ , puisque $M = \Theta S = \bar{\Theta} \bar{S}$, on a $\bar{\Theta} = \Theta$ et $\bar{S} = S$. Ainsi, $\Theta_p \rightarrow \Theta$, a fortiori

$S_p \rightarrow S$. (*: Soit $\varphi : M \mapsto {}^t M M$. On a : φ est continue, $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$, et $\forall P \in O_n(\mathbb{R})$, $\|P\|_2 = 1$ car $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Px\|_2 = \|x\|_2$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné.) (+ : sous forme diagonalisée, la suite des valeurs propres converge vers des réels ≥ 0 .) († : $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(M) \subseteq \mathbb{R}^+$. $M \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 0 \notin Sp(M)$.)