

Soit $w \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation (E): $x y'' + 2y' - w^2 x y = 0$

L'intervalle I désignera $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{*-}$.
 Supposons que (E) admet sur $\mathbb{R}$ une solution développable en série entière au voisinage de 0.
 Notons-la $y: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. L'équation (E) se ramène alors à :

$$\begin{aligned} 0 &= x y''(x) + 2y'(x) - w^2 x y(x) = x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - w^2 x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - w^2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n+1) a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - w^2 a_{n-1}] x^n \end{aligned}$$

i.e. $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, (n+2)(n+1) a_{n+1} - w^2 a_{n-1} = 0$
 De là, $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$ (i.e. y est paire) et $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \frac{w^{2p}}{(2p+1)!} a_0$.
 Donc $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n}$, donc $w x y(x) = a_0 \operatorname{sh}(wx)$ (et $\mathbb{R}(a_n) = +\infty$).

Finalement, $\boxed{y(0) = a_0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, y(x) = a_0 \frac{\operatorname{sh}(wx)}{wx}} \text{ (qui est bien continue en 0).}$

Soit $y \in C^2(I, \mathbb{R})$. Sur I , posons $y_0: x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(wx)}{x}$ et $z: x \mapsto \frac{y(x)}{y_0(x)}$. Ces fonctions sont deux fois dérivables sur I , et :

$$\begin{aligned} 0 &= x y''(x) + 2y'(x) - w^2 x y(x) \\ &= x [z''(x) y_0(x) + 2y_0'(x) z'(x) + z(x) y_0''(x)] + 2 [z'(x) y_0(x) + z(x) y_0'(x)] - w^2 x z(x) y_0(x) \\ &= x z''(x) y_0(x) + z'(x) [2y_0'(x) + 2x y_0'(x)] + z(x) \underbrace{[x y_0''(x) + 2y_0'(x) - w^2 x y_0(x)]}_{=0} \end{aligned}$$

De là, $y \in S_{\pm}(E) \Leftrightarrow z' \in S_{\pm}(z'' = -2(\frac{y_0'}{y_0} + \frac{1}{x}) z') = \{x \mapsto \frac{K}{(x y_0(x))^2} : K \in \mathbb{R}\}$
 $\Leftrightarrow z' \in \{x \mapsto \frac{K}{\operatorname{sh}(wx)^2} : K \in \mathbb{R}\}$.

Pour $z(x) = \frac{\operatorname{ch}(wx)}{\operatorname{sh}(wx)}$, on a $z'(x) = \frac{-w}{\operatorname{sh}(wx)^2}$, donc d'après ce qui précède, $y(x) = \frac{\operatorname{ch}(wx)}{x}$ convient.

Comme $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(wx)}{x}$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(wx)}{x}$ sont linéairement indépendantes, et comme $\dim(S_{\pm}(E)) = 2$, on en déduit que $\boxed{S_{\pm}(E) = \{x \mapsto \frac{\lambda \operatorname{sh}(wx) + \mu \operatorname{ch}(wx)}{x} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}$