

# ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE & THÉORÈME DE RIESZ

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel.

Thm 1 : Si  $E$  est de dimension finie  $n$ , alors toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

Thm 2 (de RIESZ) :  $E$  est de dimension finie si, et seulement si  $\overline{B_E(0,1)}$  est compact.

Preuve de Thm 1 : Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ .

- Pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |e_i^*(x)| \|e_i\| \leq \alpha \|x\|_\infty$  où  $\alpha = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$  et  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |e_i^*(x)|$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, elle n'est pas nulle, et donc  $\alpha > 0$ .
- Posons  $\varphi: (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$  : c'est une isométrie pour  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $E$ , elle est donc 1-lipschitzienne, a fortiori continue, et  $S := \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\} = \varphi(\{x \in K^n \mid \|x\|_\infty = 1\})$  est compact comme image d'un compact par une application continue. Comme  $\|\cdot\|$  est continue pour  $\|\cdot\|_\infty$  (puisque  $\alpha$ -lipschitzienne d'après le premier point :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|_\infty$ ), d'après le théorème des bornes atteintes, il existe  $x_0 \in S$  tel que  $\beta := \min_{x \in S} \|x\| = \|x_0\| > 0$ . De là, pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| = \|x\|_\infty \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|}_{\in S} \geq \beta \|x\|_\infty$ . Ainsi,  $\|\cdot\|$  est équivalente à  $\|\cdot\|_\infty$ .
- Toute norme sur  $E$  est donc équivalente à  $\|\cdot\|_\infty$ . Or la relation d'équivalence est transitive, donc toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes. ■

Preuve de Thm 2 : ► Si  $E$  est de dimension finie, alors les compacts de  $E$  sont les fermés bornés, donc  $\overline{B_E(0,1)}$  est compact. En effet, si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^N$  est bornée par  $M > 0$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ , alors les  $(e_i^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  pour une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  sont bornées dans  $(K, |\cdot|)$ . D'après le théorème de BOLZANO - WEIERSTRASS, il existe une suite extraite  $(e_i^*(x_{q_1(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$  qui converge. De même, on peut extraire  $(e_2^*(x_{q_1 \circ q_2(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$  qui converge. Par extraction diagonale, il existe  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que les  $(e_i^*(x_{\varphi(m)}))_{m \in \mathbb{N}}$  convergent. De là  $(x_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  converge. Finalement, tout fermé borné vérifie la propriété de BOLZANO - WEIERSTRASS, a fortiori est compact.

- Supposons  $E$  de dimension infinie. Par l'absurde, supposons  $\overline{B_E(0,1)}$  compact. Il existe alors  $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$  tel que  $\overline{B_E(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^r B_E(x_i, 1)$ . Posons  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$ . Comme  $E$  est de dimension strictement plus grande que celle de  $F$ ,  $E \neq F$  et on peut considérer  $x \in E \setminus F$ . Comme  $F$  est de dimension finie, il existe  $y \in F$  tel que  $\|x - y\| = d(x, F) > 0$ . (En effet,  $y \mapsto \|y\|$  est continue et coercive sur  $F$  qui est de dimension finie - donc les fermés bornés de  $F$  sont compacts.) Posons  $x_0 = \frac{x - y}{\|x - y\|}$ . On a  $d(x_0, F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - 0\| = 1$  car  $0 \in F$ . Pour tout  $z \in F$ ,

$$\|x_0 - z\| = \frac{1}{\|x - y\|} \left\| x - \underbrace{(y + \|x - y\| z)}_{\in F} \right\| \geq \frac{d(x, F)}{\|x - y\|} = 1$$

donc  $d(x_0, F) = 1$ . Or  $x_0 \in \overline{B_E(0,1)}$  donc il existe  $i \in [1, r]$  tel que  $x_0 \in B_E(x_i, 1)$ , i.e. :

$$1 > \|x_0 - x_i\| \geq d(x_0, F) = 1 : \text{ABSURDE} \quad \blacksquare$$