

Thm 1 (inégalité de HADAMARD): Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur K^n , $\|\cdot\|$ la norme associée et B une base orthonormale de V . Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (K^n)^n$, $|\det_B(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|$ avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

Thm 2 (d'AUERBACH): Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel de dimension $n \geq 1$. Il existe une base unitaire (i.e. constituée de vecteurs de norme 1) de V dont la base duale est unitaire (pour la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à $\|\cdot\|$).

Preuve de Thm 2: Observons que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base unitaire de V , alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i^*(e_i) = 1$, donc $\|e_i^*\| \geq 1$.

(Rq: si $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire, alors $\|e_i^*\| \leq 1$ d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, et donc n'importe quelle base unitaire convient.)

Soit $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base unitaire de V . Notons S^1 la sphère unité de V . Posons $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto |\det_{B_0}(x_1, \dots, x_n)|$. Elle est continue sur $(S^1)^n$, lequel est compact car V est de dimension finie, donc f atteint son maximum en une famille unitaire $B = (e_1, \dots, e_n) \in (S^1)^n$. Comme $f(B) \geq f(B_0) = 1 > 0$, B est une base unitaire de V . Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x \in S^1$ et $F = (e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)$. Par maximalité de B :

$$\begin{aligned} f(B) &\geq f(F) = |\det_{B_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)| = |\det_{B_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, \sum_{j=1}^n e_j^*(x) e_j, e_{i+1}, \dots, e_n)| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n e_j^*(x) \det_{B_0}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n) \right| = \left| \sum_{j \neq i} 0 + e_i^*(x) \det_{B_0}(B) \right| = |e_i^*(x)| f(B) \end{aligned}$$

et donc $|e_i^*(x)| \leq 1$. De là, $\|e_i^*\| \leq 1$, et donc $\|e_i^*\| = 1$: finalement, B et B^* sont unitaires. ■

Preuve de Thm 1: Soit $F = (x_1, \dots, x_n) \in (K^n)^n$. Si F est liée, alors il n'y a rien à faire. Supposons F libre. Notons $F' = (y_1, \dots, y_n)$ la famille orthogonale obtenue à partir de F par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT. Plus précisément, il existe $A \in M_n(K)$ triangulaire supérieure avec une diagonale de 1 telle que $F' = A F$. En particulier, $\det_B(F') = \det(A) \det_B(F) = \det_B(F)$. Notons M la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans B de $y_1, \dots, y_n$, de sorte que $\det_B(F') = \det(M)$. Comme ${}^t M M = (\langle y_i, y_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Diag}(\|y_1\|^2, \dots, \|y_n\|^2)$, donc $|\det_B(F')| = |\det(M)|^2 = \det({}^t M M) = \prod_{k=1}^n \|y_k\|^2$.

Écrivons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a $y_1 = x_1$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $x_k = y_k - a_{k,1} y_1 - \dots - a_{k,k-1} y_{k-1}$, donc d'après le théorème de PYTHAGORE, $\|x_k\|^2 = \|y_k\|^2 + |a_{k,1}|^2 \|y_1\|^2 + \dots + |a_{k,k-1}|^2 \|y_{k-1}\|^2$, avec égalité si et seulement si $a_{k,1} = \dots = a_{k,k-1} = 0$, i.e. $A = I_n$, i.e. F est orthogonale. ■