

Convention pour la transformation de FOURIER : $\hat{f}(\pi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\pi t} dt$.

Thm (de PLANCHEREL) : Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. En particulier, $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})] \subseteq L^2(\mathbb{R})$, et cette partie est dense.

Cor : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Preuve du Thm : Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Posons $\tilde{f} = \check{f} : x \mapsto \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$ qui est bien définie et dans L^1 car $f \in L^1$ et $\tilde{f} \in L^1$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tilde{f}(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \overline{f(y)} dy = \langle f | f_{-x} \rangle_{L^2}$ où $f_{-x} : y \mapsto f(y - (-x)) = f(x+y)$.

Par continuité de $\langle f | \cdot \rangle_{L^2}$ et de la translation $x \mapsto f_{-x}$ sur L^2 , g est continue sur $\mathbb{R}$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $\|g\|_{\infty} \leq \|f\|_2^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(x) = \widehat{f * \tilde{f}}(x) = \hat{f}(x) \hat{\tilde{f}}(x) = \hat{f}(x) \widehat{\check{f}}(x) = \hat{f}(x) \overline{\hat{f}(x)} = |\hat{f}(x)|^2$ (NB : $\widehat{\check{f}}(x) =$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \overline{f(-t)} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \overline{f(t)} dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) dt} = \overline{\hat{f}(x)}.)$$

Pour $\lambda > 0$, posons $h_{\lambda} : x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$. Pour tout $\lambda > 0$, $h_{\lambda} \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} h_{\lambda} = 1$ et $\forall \delta > 0$, $\int_{|x| > \delta} h_{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$, donc $(h_{\lambda})_{\lambda > 0}$ est une approximation de l'unité. Soit $\lambda > 0$. Posons $H_{\lambda} : x \mapsto e^{-\lambda|x|}$. Pour tous $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $h_{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}} H_{\lambda}(t) e^{2i\pi\pi xt} dt$: en effet, $\hat{H}_{\lambda}(x) = h_{\lambda}(x)$ et $\hat{H}_{\lambda} \in L^1$, le résultat vient donc de la formule d'inversion de FOURIER (pour des fonctions continues). De là, d'après le théorème de FUBINI,

$$g * h_{\lambda}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(-t) h_{\lambda}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \int_{\mathbb{R}} H_{\lambda}(x) e^{2i\pi\pi xt} dx dt = \int_{\mathbb{R}} H_{\lambda}(x) \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2i\pi\pi xt} dt dx = \int_{\mathbb{R}} H_{\lambda}(x) \hat{g}(x) dx$$

Or $g * h_{\lambda}(0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} g(0) = \|f\|_2^2$ et $\int_{\mathbb{R}} H_{\lambda}(x) \hat{g}(x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{g} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \|\hat{f}\|_2^2$: en effet, pour le premier, cela vient du fait que

$(h_{\lambda})_{\lambda > 0}$ est une approximation de l'unité et g est continue et bornée (annexe). Pour le second, $(H_{\lambda})_{\lambda > 0}$ tend ponctuellement en croissant vers 1 quand $\lambda \rightarrow 0$, donc cela découle du théorème de convergence monotone. Finalement, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ et $\hat{f} \in L^2$.

► Posons $Y = \mathcal{F}[L^1 \cap L^2] \subseteq L^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Remarquons que pour tout $\lambda > 0$, $x \mapsto h_{\lambda}(\alpha - x) = e^{2i\pi\pi\alpha x} \hat{H}_{\lambda}(x) \in Y$.

De là, $\forall f \in Y^{\perp}$, $0 = \langle h_{\lambda}(\alpha - \cdot) | f \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} h_{\lambda}(\alpha - t) \overline{f(t)} dt = h_{\lambda} * \tilde{f}(\alpha)$, mais $\|h_{\lambda} * \tilde{f} - \tilde{f}\|_2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ donc $\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|h_{\lambda} * \tilde{f}\|_2 = 0$. Ainsi, $f = 0$ (dans L^2), donc $Y^{\perp} = \{0\}$, donc Y est une partie dense de (l'espace de Hilbert) L^2 .

Preuve du Cor : ► Pour tout $f \in L^2$, $\|f - f \mathbb{1}_{[-n,n]}\|_2^2 = \int_{|x| > n} |f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(f \mathbb{1}_{[-n,n]})_{n \in \mathbb{N}} \in (L^1 \cap L^2)^{\mathbb{N}}$, donc

$L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 . Par ailleurs, $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$ est continu (d'après le théorème de FOURIER-PLANCHEREL ; c'est même une isométrie), et L^2 est complet, donc d'après le théorème de prolongement des opérateurs, $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un opérateur $\mathcal{F}_2$ sur L^2 . Reste à montrer que $\mathcal{F}_2$ est une isométrie bijective.

► Soit $f \in L^2$. Par densité, il existe $(f_n)_n \in (L^1 \cap L^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_2} f$. En particulier, $(f_n)_n$ est de Cauchy, mais $\|f_n\|_2 = \|\hat{f}_n\|_2$ donc $(\hat{f}_n)_n$ est de Cauchy, donc d'après le théorème de prolongement des opérateurs, $\mathcal{F}_2[f] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n$, et donc $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}_2[f]\|_2$. Comme $\mathcal{F}_2$ est une isométrie linéaire, on en déduit que $\mathcal{F}_2$ est injectif.

► Montrons que $\mathcal{F}_2[L^2] =: H = L^2$. Déjà, H est fermé comme image d'un fermé par une isométrie (en effet, soit $(f_n)_n \in (L^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $(\mathcal{F}_2[f_n])_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge vers $g \in L^2$. En particulier, $(\mathcal{F}_2[f_n])_n$ est de Cauchy, et $\mathcal{F}_2$ est une isométrie donc $(f_n)_n$ est de Cauchy dans L^2 . Ce dernier étant complet, $(f_n)_n$ converge, disons vers $f \in L^2$. Par

continuité de $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}[f_n] \longrightarrow \mathcal{F}[f] = g \in L^2$.) Par ailleurs, H est dense dans L^2 : en effet, soit $g \in H^\perp$. D'après le théorème de PLANCHEREL, $\mathcal{F}[L^1 \cap L^2]$ est dense dans L^2 , donc il existe $(f_n)_n \in (L^1 \cap L^2)^N$ telle que $\mathcal{F}_2[f_n] = \hat{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_2} g$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\hat{f}_n \in H$, donc $\langle \hat{f}_n | g \rangle_{L^2} = 0$ donc par continuité de $\langle \cdot | g \rangle_{L^2}$, on a $\langle g | g \rangle_{L^2} = 0$, donc $g = 0$. Ainsi, $H^\perp = \{0\}$, donc H est dense. ■

ANNEXE: Convergence uniforme de $h_\lambda * g$: pour se ramener à une suite, posons $(h_n)_{n \geq 1} := (h_{1/n})_{n \geq 1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g \in C_b^\circ \cap L^1$, g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc il existe $\delta > 0$ (indépendant de x) tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| = |(x-t) - x| < \delta \Rightarrow |g(x-t) - g(x)| < \varepsilon$. Comme $\int_{|t| > \delta} h_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de δ , donc pas de x) tel que $\forall n \geq N$, $\int_{|t| > \delta} h_n(t) dt \leq \varepsilon$. Soit $n \geq N$.

$$\begin{aligned} |h_n * g(x) - g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} h_n(t) g(x-t) dt - g(x) \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} h_n(t) (g(x-t) - g(x)) dt \right| \\ &\leq \int_{|t| < \delta} h_n(t) \underbrace{|g(x-t) - g(x)|}_{\leq \varepsilon} dt + \int_{|t| \geq \delta} h_n(t) \underbrace{|g(x-t) - g(x)|}_{\leq 2\|g\|_\infty} dt < \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt}_{=1} + 2\|g\|_\infty \underbrace{\int_{|t| \geq \delta} h_n(t) dt}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq \varepsilon(2\|g\|_\infty + 1) \end{aligned}$$

Et donc $h_n * g \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g$ uniformément sur $\mathbb{R}$. ■

(REMARQUE 1: l'hypothèse $g \in L^\infty$ suffit pour la convergence ponctuelle (démonstration par convergence dominée, RUDIN 9.9))

(REMARQUE 2: pour montrer que $\|h_\lambda * f - f\|_2 \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} 0$ plus loin dans la démonstration, l'idée de la preuve est relativement similaire, mais il faut admettre la continuité de la translation $x \mapsto g(x-t)$, qui se montre par densité des fonctions $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans L^2 .)

COMMENTAIRES:

► Avec la convention $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t) dt$, on perd le caractère isométrique de $\mathcal{F}_2$, car

dans ce cas, $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$ (ou, de manière équivalente, $\forall (f, g) \in (L^1 \cap L^2)^2$, $\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{L^2} = 2\pi \langle f | g \rangle_{L^2}$).

► Si le temps vous manque, vous pouvez sauter les parties en **bleu**.

► Le nom "théorème de prolongement des opérateurs" n'est peut-être pas conventionnel. Voici son énoncé:

Thm (de prolongement des opérateurs)

Soient F un espace de Banach, E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E , et $T: D \rightarrow F$ un opérateur (i.e. une application linéaire continue).

Il existe un unique opérateur $\tilde{T}: E \rightarrow F$ qui prolonge T . De plus, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

C'est un corollaire du théorème de prolongement des applications uniformément continues. L'idée de la démonstration est la suivante: pour tout $x \in E$, il existe $(x_n)_n \in D^N$ telle que $x_n \rightarrow x$ dans E . Comme T est borné, $(T(x_n))_n$ est de Cauchy dans F , donc converge: on pose $\tilde{T}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n)$ (dans F). On montre ensuite que la valeur de $\tilde{T}(x)$ ne dépend pas de x .

C'est pour cette raison qu'on se soucie des suites de Cauchy dans la démonstration du Cor.