

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et B une base orthonormée de E .

Soit $u \in S(E)$ de matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ dans B . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda(u) = \text{Ker}(\lambda \text{id}_E - u)$.

Lemme 1: Pour toute $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour toute $\mu \in \text{Sp}(A) \setminus \{\lambda\}$, $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

Lemme 2: Soient $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $e_1 \in E_\lambda(u)$ de norme 1. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u .
 ($n \geq 2$)

Thm (spectral): 1. u se diagonalise en base orthonormée
 2. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P A P$ est diagonale.

Cor 1: Soit q une forme quadratique sur E . Il existe une base orthonormale de E qui est q -orthogonale.

Cor 2: Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P M P = I_n$ et ${}^t P N P$ est diagonale.

Preuve de Lemme 1: Soit $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A)^2$ tel que $\lambda \neq \mu$.

► Soit $x \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$. Alors $Ax = \lambda x$, donc ${}^t \bar{x} Ax = \lambda {}^t \bar{x} x$. Or A est symétrique et réelle, donc ${}^t \bar{x} Ax = {}^t (\overline{Ax}) x = \bar{\lambda} {}^t \bar{x} x$. Comme ${}^t \bar{x} x \neq 0$, on a bien $\lambda = \bar{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

► Soient $x \in E_\lambda(A)$ et $y \in E_\mu(A)$. On a $\lambda \langle x | y \rangle = \langle \lambda x | y \rangle = \langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle = \mu \langle x | y \rangle$ car A est symétrique, et $\lambda \neq \mu$ donc $\langle x | y \rangle = 0$. Ainsi, $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

Preuve de Lemme 2: $H := (\mathbb{R}e_1)^\perp = \text{Ker}(\langle \cdot | e_1 \rangle)$ et $\langle \cdot | e_1 \rangle \neq 0$ car $e_1 \neq 0$, donc H est un hyperplan. Pour tout $x \in H$, $u(x) \in H$ car par symétrie de u , $\langle u(x) | e_1 \rangle = \langle x | u(e_1) \rangle = \langle x | \lambda e_1 \rangle = 0$. Ainsi H est stable par u , donc on dispose de l'endomorphisme induit $u_H \in S(H)$ (il est bien symétrique, car si on complète (e_1) en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, alors $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de H , et en notant $B = \text{Mat}_{(e_2, \dots, e_n)}(u_H)$, on a $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donc B est symétrique.)

Preuve du Thm: 1. On procède par récurrence sur $n \geq 1$:

► $n=1$: immédiat.

► Soit $n > 1$ tel que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $k < n$. Supposons que E est de dimension n , soit $u \in S(E)$. Soient $\lambda_1 \in \text{Sp}(u)$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}(u)$ de norme 1. Soit u_H l'endomorphisme symétrique sur $H := (\mathbb{R}e_1)^\perp$ induit par u d'après Lemme 2. On a $E = \mathbb{R}e_1 \oplus H$ et $\dim(H) < n$, donc par hypothèse de récurrence, il existe $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de H qui diagonalise u_H . De là, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui diagonalise u .

2. Il suffit de remarquer qu'une matrice orthogonale est une matrice de passage entre bases orthonormées.

Preuve de Cor 1: Posons $M = \text{Mat}_B(q)$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P M P$ est diagonale d'après le Thm. Or P est la matrice de passage de B vers une base orthonormée B' , et $\text{Mat}_{B'}(q) = {}^t P M P$ est diagonale.

Preuve de Cor 2: Posons $q: X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^t X M X$ la forme quadratique dont M est la matrice dans la base canonique. Posons $q': X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^t X N X$ la forme quadratique dont N est la matrice dans la base canonique. Dans l'espace euclidien (E, q) (et non $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$), il existe une base B_q orthonormée de $\mathbb{R}^n$ qui est q' -orthogonale d'après Cor 1. Posons $D = \text{Mat}_{B_q}(q)$ et $P = \text{Pass}(B, B_q)$. Alors ${}^t P M P = I_n$ et ${}^t P N P = D$.