

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , notons  $\{\cdot\}$  l'application partie fractionnaire. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1 $\blacktriangleright \forall [a, b[ \subseteq [0, 1[$ ,  $\frac{1}{N} \# \{n \in [1, N] \mid u_n \in [a, b[ \} \rightarrow b - a$

2 $\blacktriangleright \forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue 1-périodique,  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$

3 $\blacktriangleright \forall p \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i p u_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$   
(erreur FGN)

Si l'une de ces trois propriétés est vérifiée, alors on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1.

1 $\blacktriangleright \Rightarrow$  2 $\blacktriangleright$ : Remarquons que  $\# \{n \in [1, N] \mid u_n \in [a, b[ \} = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{a \leq u_n < b}$ , et  $\int_a^b \mathbb{1}_{[a, b[} = b - a$ . En particulier,  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{a \leq u_n < b} = \frac{1}{N} \# \{n \in [1, N] \mid u_n \in [a, b[ \} \rightarrow b - a = \int_a^b \mathbb{1}_{[a, b[}$ , et donc 2 $\blacktriangleright$  est vérifiée pour les indicatrices (que l'on périodise). A fortiori, 2 $\blacktriangleright$  est vérifiée pour les fonctions en escalier 1-périodiques. Soient  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue 1-périodique et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g$  en escalier 1-périodique telle que  $\|f - g\|_{\infty} < \varepsilon$ . De là,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \int_0^1 f \right| \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - g(u_n) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(u_n) - \int_0^1 g \right| + \left| \int_0^1 g - f \right|$$

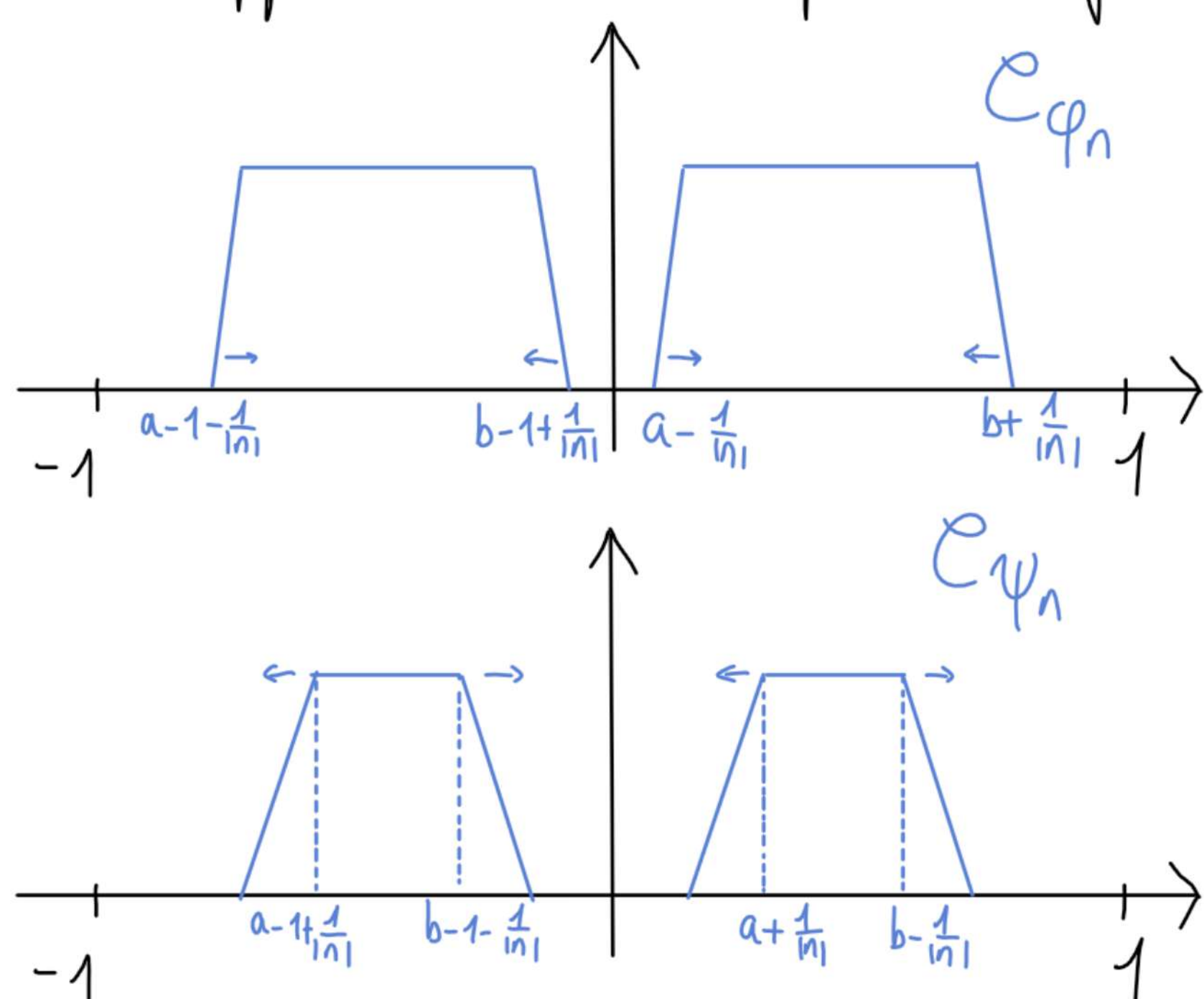
(\*: penser à l'intégrale de RIEMANN)

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|f - g\|_{\infty} + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(u_n) - \int_0^1 g \right| + \|f - g\|_{\infty}$$

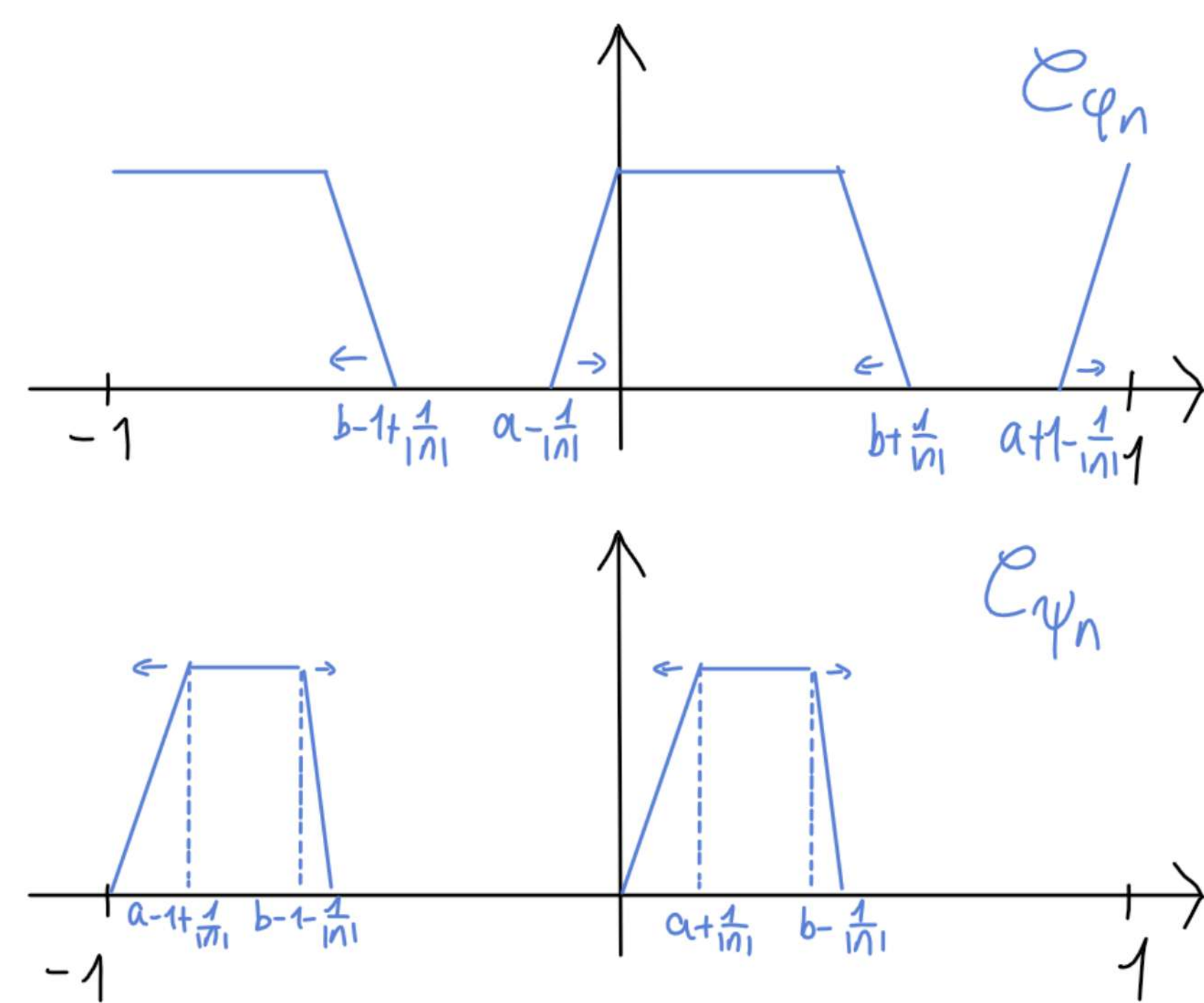
$$\leq 3\varepsilon \text{ pour } N \text{ assez grand.}$$

2 $\blacktriangleright \Rightarrow$  1 $\blacktriangleright$ : Soit  $[a, b[ \subseteq [0, 1[$ . On note  $\mathbb{1}_{[a, b[}$  l'indicatrice de  $[a, b[$  étendue par 1-périodicité. Avec la première remarque, il suffit d'approcher  $\mathbb{1}_{[a, b[}$  par une fonction continue 1-périodique:

Si  $a > 0$ :



Si  $a = 0$ :



Pour  $|p|$  assez grand,  $\psi_p \leq \mathbb{1}_{[a, b[} \leq \phi_p$ , donc  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi_p(u_n) \leq \frac{1}{N} \# \{n \in [1, N] \mid u_n \in [a, b[ \} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_p(u_n)$ , mais par hypothèse,  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi_p(u_n) \rightarrow \int_0^1 \psi_p = b - a - \frac{1}{|p|}$  et  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_p(u_n) \rightarrow \int_0^1 \phi_p = b - a + \frac{1}{|p|}$ . De là,  $\frac{1}{N} \# \{n \in [1, N] \mid u_n \in [a, b[ \}$  peut être rendu arbitrairement proche de  $b - a$  en prenant  $p$  assez grand.

2 $\blacktriangleright \Rightarrow$  3 $\blacktriangleright$ :  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i p u_n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\cos(2\pi p \cdot)}_{C_{1-\text{pér.}}}(u_n) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\sin(2\pi p \cdot)}_{C_{1-\text{pér.}}}(u_n) = \int_0^1 \cos(2\pi p \cdot) + \int_0^1 \sin(2\pi p \cdot) = 0$

3 $\blacktriangleright \Rightarrow$  2 $\blacktriangleright$ : Par linéarité, 3 $\blacktriangleright$  est vrai pour tout polynôme trigonométrique. Soient  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue 1-périodique et  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de WEIERSTRASS, il existe un polynôme trigonométrique  $T$  tel que  $\|f - T\|_{\infty} \leq \varepsilon$ . De là,  $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \int_0^1 f \right| \leq \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - T(u_n) \right|}_{\leq \|f - T\|_{\infty} \leq \varepsilon} + \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T(u_n) - \int_0^1 T \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| \int_0^1 T - f \right|}_{\leq \|f - T\|_{\infty} \leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon$  pour  $N$  assez grand. ■