

PRODUIT EULÉRIEN DE LA FONCTION ζ PAR UNE APPROCHE PROBABILISTE - SÉRIE DES INVERSES DES PREMIERS

121, 265, 266

On note $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty$.

On munit $(\Omega, \mathcal{A})$ de la probabilité $\mu_s: \{i\} \mapsto \frac{1}{i^s \zeta(s)}$ (loi zêta de paramètre s).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mu_s(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n^s}$.

2. Notons $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $A_k = p_k \mathbb{N}^*$

a. $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{A_k} = \{1\}$

b. $\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_s\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right)$

3. Les événements A_k , $k \in \mathbb{N}^*$ sont (mutuellement) indépendants pour μ_s .

4. $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$ (donc $-\ln(\zeta(s)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$)

5. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$

NB: μ_s définit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. Remarquons que $n\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \{nk\}$, donc:

$$\mu_s(n\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_s(\{nk\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(nk)^s} = \frac{1}{\zeta(s)n^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}$$

2. a. $n \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, n \notin A_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k \nmid n \Leftrightarrow n=1$

Car tout entier ≥ 2 admet un facteur premier.

Donc $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k} = \{1\}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $B_n = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc

$\mu_s\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_s(B_n)$. Or $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}$, donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_s\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) = \mu_s\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = \mu_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

3. Soit $I \subseteq \mathbb{N}^*$ fini. On a $\prod_{i \in I} \mu_s(A_i) = \prod_{i \in I} \mu_s(p_i \mathbb{N}^*) = \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i^s}$. Or les $p_i, i \in I$ étant deux à deux premiers entre eux, $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^* = \left(\prod_{i \in I} p_i\right) \mathbb{N}^* = \left(\prod_{i \in I} p_i\right) \mathbb{N}^*$. De là:

$$\mu_s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \mu_s\left(\left(\prod_{i \in I} p_i\right) \mathbb{N}^*\right) = \left(\prod_{i \in I} p_i\right)^{-s} = \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i \in I} \mu_s(A_i).$$

4 ▶ D'après ce qui précède, $\frac{1}{S(s)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_s \left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \mu_s(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s} \right)$.

Par continuité de $\ln$, on a donc $-\ln(S(s)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$

5 ▶ Pour tout $s > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S(s) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$ donc

$$\liminf_{s \rightarrow 1^+} S(s) \geq \liminf_{s \rightarrow 1^+} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Soit $A > 0$. Comme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq A$. Comme A est arbitraire, cela montre que $\liminf_{s \rightarrow 1^+} S(s) = +\infty$, donc $\lim_{s \rightarrow 1^+} S(s) = +\infty$. Il existe donc $s > 1$ tel que $S(s) > e^A$, et donc :

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \geq -\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \ln(S(s)) > A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi, $\sum_{k \geq 1} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ diverge, mais $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \geq 0$, $\frac{1}{p_k^s} \geq 0$, et $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$ (car $p_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$),

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$ ■