

Thm (décomposition de Dunford): Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe un unique $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d + n$, d est diagonalisable, n est nilpotent, et d et n commutent. De plus, $(d, n) \in K[u]^2$.

Prop: u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable.

Lemme: Soit P un polynôme scindé annulateur de u . Soit $P = M_1^{\alpha_1} \dots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en produit de facteurs irréductibles. Pour $i \in [1, s]$, posons $N_i = \text{Ker}(M_i^{\alpha_i}(u))$, et notons p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$. Pour tout $i \in [1, s]$, $p_i \in K[u]$, pour $j \neq i$, $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\sum_{i=1}^s p_i = \text{id}_E$.

Preuve du lemme: D'après le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$, donc les p_i , $1 \leq i \leq s$ sont bien définis.

Pour $i \in [1, s]$, on pose $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$. Les polynômes $Q_1, \dots, Q_s$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, donc d'après le théorème de BÉZOUT, il existe $(U_1, \dots, U_s) \in K[X]^s$ tel que $\sum_{i=1}^s U_i Q_i = 1$, donc $\sum_{i=1}^s U_i(u) Q_i(u) = \text{id}_E$. Pour $i \in [1, s]$, posons $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u)$. Pour tout $j \neq i$, P divise $Q_i Q_j$, donc $p_i \circ p_j = P_i(u) P_j(u) = U_i(u) Q_i(u) U_j(u) Q_j(u) = U_i U_j \times Q_i Q_j(u) = U_i U_j(u) \circ 0 = 0$ (car $K[u]$ est commutative). De là, pour tout $i \in [1, s]$, $p_i = p_i \circ \text{id}_E = p_i \circ \sum_{j=1}^s p_j = p_i^2$, donc p_i est un projecteur.

Montrons que $N_i = \text{Im}(p_i)$:

$\supseteq$: Soit $x \in E$. On a $M_i^{\alpha_i}(u)(p_i(x)) = M_i^{\alpha_i} P_i(u)(x) = M_i^{\alpha_i} Q_i U_i(u)(x) = P U_i(u)(x) = U_i(u)(\overbrace{P(u)}^{=0})(x) = 0$.

Donc $p_i(x) \in N_i$.

$\subseteq$: Soit $x \in N_i$. D'après ce qui précède, $x = \sum_{j=1}^s p_j(x)$. Pour $j \neq i$, $p_j(x) = U_j Q_j(u)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i} \mid Q_j$ et $N_i = \text{Ker}(M_i^{\alpha_i}(u))$. Ainsi, $x = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$.

Montrons que $\text{Ker}(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$:

$\supseteq$: Pour tout $j \neq i$, pour tout $x \in N_j$, $p_i(x) = U_i Q_i(u)(x) = 0$ comme ci-dessus. Donc $N_j \subseteq \text{Ker}(p_i)$.

Finalement, $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subseteq \text{Ker}(p_i)$.

$\subseteq$: Pour tout $x \in \text{Ker}(p_i)$, $x = \text{id}_E(x) = \sum_{j=1}^s p_j(x) = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \sum_{j \neq i} \text{Im}(p_j) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

Preuve du Thm: Écrivons $X_u = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Pour $i \in [1, s]$, on pose $N_i = \text{Ker}((u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i})$ et on note p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$, qui est un polynôme en u d'après le lemme (puisque d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $X_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$). Posons $d = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i \in K[u]$ et $n = u - d \in K[u]$. Par construction, d est diagonalisable, $u = d + n$ et d et n commutent.

(ce sont des polynômes en u). Il ne reste qu'à vérifier que n est nilpotent :

$$n^\alpha = (u-d)^\alpha = (u \cdot \text{id}_E - \sum_{j=1}^s \lambda_j p_j)^\alpha = \left(\sum_{j=1}^s (u - \lambda_j \text{id}_E) p_j \right)^\alpha = \sum_{j=1}^s (u - \lambda_j \text{id}_E)^\alpha p_j = O_{\mathcal{L}(E)}$$

D'après le lemme :

$$\text{id}_E = \sum_{j=1}^s p_j \quad / \quad p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i^2 = p_i & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et tout commute} \quad / \quad \text{Im}(p_i) = N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$$

en posant $\alpha = \max_{1 \leq i \leq s} \alpha_i$; on a $n^\alpha = O_{\mathcal{L}(E)}$, donc n est nilpotent. //

► **UNICITÉ** : Soit (d', n') une décomposition de DUNFORD de u . Montrons que $(d', n') = (d, n)$. Comme d, d', n et n' sont des polynômes en u , ils commutent. En particulier, d et d' sont codiagonalisables, ^(*) a fortiori $d - d'$ est diagonalisable. De même, $n' - n$ est nilpotent, ^(†) et comme $d - d' = n' - n$, on obtient ^(‡) $n' - n = d - d' = O_{\mathcal{L}(E)}$, i.e. $d = d'$ et $n = n'$. ■

(* : Rappel de l'idée de la preuve : par récurrence sur la dimension, en commençant par exclure le cas où d et d' sont des homothéties.)

(† : comme n et n' commutent, $(n - n')^{2\alpha} = \sum_{k=0}^{2\alpha} \binom{2\alpha}{k} n^k (-n')^{2\alpha-k} = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{2\alpha}{k} (-1)^k n^k \underbrace{n'^{2\alpha-k}}_{=O_{\mathcal{L}(E)}} + \sum_{k=\alpha+1}^{2\alpha} \binom{2\alpha}{k} (-1)^k \underbrace{n^k}_{=O_{\mathcal{L}(E)}} n'^{2\alpha-k} = 0$)

(‡ : Si v est diagonalisable et nilpotent, alors $\pi_v = X^r$ est scindé à racines simples, i.e. $\pi_v = X$, donc $v = X(v) = \pi_v(v) = O_{\mathcal{L}(E)}$.)

Preuve de la Prop : La preuve repose sur la proposition suivante :

Prop : Si $u = d + n$ désigne la décomposition de DUNFORD de u , alors $e^u = e^d + e^d(e^n - \text{id}_E)$ désigne la décomposition de DUNFORD de u (sous-entendu, e^d est diagonalisable).

Preuve : Comme d et n commutent, en notant p l'indice de nilpotence de n :

$$e^u = e^d e^n = e^d \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^k}{k!} = e^d \left(\text{id}_E + n \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^{k-1}}{k!} \right) = e^d + n v$$

où $v = e^d \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^{k-1}}{k!}$ (NB : e^d et n commutent car d et n commutent). Comme n et v commutent,

$(nv)^p = n^p v^p = O_{\mathcal{L}(E)}$, et nv est nilpotent. Ainsi, e^d est diagonalisable, nv est nilpotent et commute avec e^d : on a trouvé la décomposition de DUNFORD de e^u . Il suffit pour conclure d'écrire :

$$nv = e^d \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^k}{k!} = e^d (e^n - \text{id}_E) //$$

D'après cette proposition, en désignant par $u = d + n$ la décomposition de DUNFORD de u , il s'agit de montrer que $n = 0 \Leftrightarrow e^n = \text{id}_E$. (u diagonalisable $\Leftrightarrow n = 0$ et e^u diagonalisable $\Leftrightarrow e^n = \text{id}_E$ car e^d est inversible.) L'implication directe est immédiate, supposons que $e^n = \text{id}_E$. Notons p l'indice de nilpotence de n . On a donc $\sum_{k=0}^p \frac{n^k}{k!} = \text{id}_E$, donc $\sum_{k=1}^p \frac{n^k}{k!} = O_{\mathcal{L}(E)}$, i.e. $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} X^k$ annule n . Le polynôme minimal de n est $\pi_n = X^p$, et divise $\sum_{k=1}^p \frac{X^k}{k!}$. Par identification des coefficients dominants, $\frac{1}{p!} = 1$, i.e. $p = 0$ ou $p = 1$. Or $n^p = O_{\mathcal{L}(E)}$, donc $p = 1$, donc $n = O_{\mathcal{L}(E)}$. //