

Critère de Weyl

[On trouvera ce développement dans le Oraux X-ENS Analyse 2 (2e édition) p. ?????. Attention, il y a une erreur dans le livre!]

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \{v_n\} = v_n - \lfloor v_n \rfloor$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$1 \blacktriangleright \forall [a, b[\subseteq [0, 1[, \quad X_N(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \# \{n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid a \leq u_n < b\} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} b - a,$$

$$2 \blacktriangleright \forall f \in \mathcal{C}_{1-p}^0 \text{ (continue et 1-périodique)}, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) \rightarrow \int_0^1 f,$$

$$3 \blacktriangleright \forall p \in \mathbb{Z}^* \text{ (l'erreur est ici!)}, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi p u_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Le cas échéant, on dit que $(v_n)_n$ est *équirépartie modulo 1*.

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{1}_{\dots}$ désigne la fonction indicatrice d'un ensemble, que l'on périodise avec une période 1.

1 $\blacktriangleright \Rightarrow$ 2 $\blacktriangleright$: Remarquons que $NX_N(a, b) = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{a \leq u_n < b}$ et $\int_0^1 \mathbf{1}_{[a, b[} = b - a$. En particulier, $X_N(a, b) \rightarrow b - a = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a, b[}$. Ainsi, 2 $\blacktriangleright$ est vérifiée pour les indicatrices périodisées, *a fortiori* pour les fonctions en escalier 1-périodiques par linéarité. Soient $f \in \mathcal{C}_{1-p}^0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe g est escalier 1-périodique telle que $\|f - g\|_{\infty} < \varepsilon$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \int_0^1 f \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - g(u_n) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(u_n) - \int_0^1 g \right| + \left| \int_0^1 g - f \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|f - g\|_{\infty} + \varepsilon + \int_0^1 \|f - g\|_{\infty} \\ &\leq 3\varepsilon \quad \text{pour } N \text{ assez grand} \end{aligned}$$

2 $\blacktriangleright \Rightarrow$ 3 $\blacktriangleright$: Soit $p \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2i\pi p u_n} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\cos(2\pi p \cdot)}_{\in \mathcal{C}_{1-p}^0}(u_n) + i \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\sin(2\pi p \cdot)}_{\in \mathcal{C}_{1-p}^0}(u_n) \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi p \cdot) + \int_0^1 \sin(2\pi p \cdot) = 0 \end{aligned}$$

3 $\blacktriangleright \Rightarrow$ 2 $\blacktriangleright$: Soient $f \in \mathcal{C}_{1-p}^0$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de WEIERSTRASS, il existe T un polynôme trigonométrique tel que $\|f - T\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Or par linéarité, 3 $\blacktriangleright$ est vraie pour les polynômes trigonométriques, donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \int_0^1 f \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - T(u_n) \right| + \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T(u_n) - \int_0^1 T \right|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left| \int_0^1 T - f \right|}_{=0} \\ &\leq \|f - T\|_{\infty} + \varepsilon + \|f - T\|_{\infty} \leq 3\varepsilon \quad \text{pour } N \text{ assez grand} \end{aligned}$$

$\boxed{2 \blacktriangleright \Rightarrow 1 \blacktriangleright}$: Soit $[a, b[\subseteq [0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$, définissons des fonctions continues et 1-périodiques qui vont approcher $\mathbb{1}_{[a, b[}$, grâce à la Figure ci-dessous.

On a $\psi_\varepsilon \leq \mathbb{1}_{[a, b[} \leq \varphi_\varepsilon$, donc $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi_\varepsilon(u_n) \leq X_N(a, b) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_\varepsilon(u_n)$, mais par hypothèse :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_\varepsilon(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi_\varepsilon = b - a + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi_\varepsilon(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} b - a - \varepsilon$$

donc $b - a - \varepsilon \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} X_N(a, b) \leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} X_N(a, b) \leq b - a + \varepsilon$, puis en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{N \rightarrow +\infty} X_N(a, b) = b - a$. $\square$

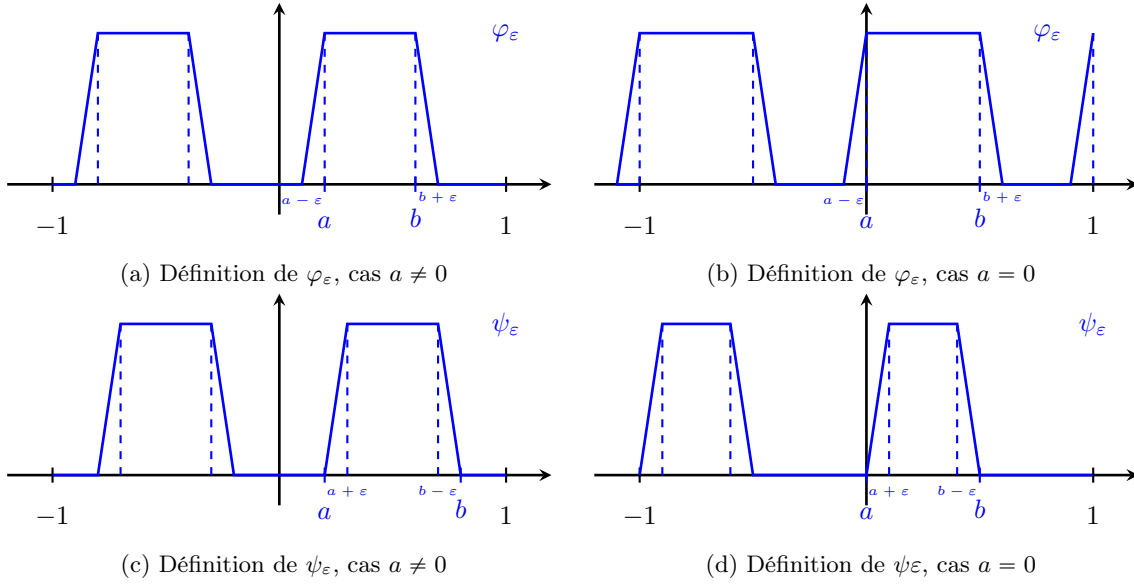


FIGURE 10.1 – Construction d'une approximation continue 1-périodique