

INTÉGRALE GAUSSIENNE PAR L'ANALYSE COMPLEXE

236, 245

À l'aide des outils de l'analyse complexe, montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Soit a une racine carrée de $i\pi$; en particulier, $a^2 = i\pi$ et $a\bar{a} = \pi$. Posons $g: z \mapsto 1 + e^{-2az}$ et $f: z \mapsto \frac{e^{-z^2}}{g(z)}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$g(z) = 0 \iff e^{-2az} = -1 = e^{i\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : -2az = i\pi + 2ik\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = -i\pi \frac{2k+1}{2a} = -i \frac{2k+1}{2} \frac{\pi a}{a^2}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = -\frac{2k+1}{2} a \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \frac{2k+1}{2} a. \text{ On pose } P = \left\{ \frac{2k+1}{2} a : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Par ailleurs $g(a+z) = 1 + e^{-2a(a+z)} = 1 + e^{-2az} e^{-2a^2} = 1 + e^{-2az} e^{2i\pi} = 1 + e^{-2az} = g(z)$, donc g est a -périodique.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus P$,

$$f(z) - f(a+z) = \frac{e^{-z^2}}{g(z)} - \frac{e^{-(z+a)^2}}{g(a+z)} = \frac{1}{g(z)} (e^{-z^2} - e^{-z^2 - 2az - a^2}) = \frac{e^{-z^2}}{g(z)} (1 - e^{-2az} e^{-a^2}) = \frac{e^{-z^2}}{g(z)} (1 - e^{i\pi} e^{-2az}) = \frac{e^{-z^2}}{g(z)} g(z) = e^{-z^2}. \quad (*)$$

On peut prendre $a = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}$, donc $\text{Im}\left(\frac{2k+1}{2} a\right) = \frac{2k+1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2k+1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et $0 \leq \frac{2k+1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \iff k=0$, donc le seul pôle de f dans D est $\frac{a}{2}$.

Or $\lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} (z - \frac{a}{2}) f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} e^{-z^2} \frac{z - \frac{a}{2}}{g(z)} = e^{-a^2/4} \frac{1}{2a} = e^{-i\pi/4} \frac{1}{2\sqrt{\pi} e^{i\pi/4}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/2} = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}}$. En effet, $\frac{z - \frac{a}{2}}{1 - e^{-2az}} = \frac{z - \frac{a}{2}}{1 - e^{-2az}}$ et $1 - e^{-2az} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2a)^n e^{-2az}}{n!} (z - \frac{a}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2a)^n}{n!} (z - \frac{a}{2}) \sim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} -2a (z - \frac{a}{2})$. Cela montre

de plus que $\frac{a}{2}$ est un pôle simple de f , donc $\text{Res}_{\frac{a}{2}}(f) = \lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} (z - \frac{a}{2}) f(z) = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}}$, donc d'après le théorème des résidus,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= 2i\pi \text{Res}_{\frac{a}{2}}(f) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-M}^M f(t) dt + \int_0^{\sqrt{\pi}/2} i f(M+ti) dt - \int_M^{-M} f(t+i\sqrt{\pi}/2) dt - \int_0^{\sqrt{\pi}/2} i f(-M+ti) dt \\ &= \underbrace{\int_{-M}^M f(t) dt}_{=: I_1(M)} + \underbrace{\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{i e^{-(M+ti)^2}}{g(M+ti)} dt}_{=: I_2(M)} - \underbrace{\int_{-M}^M f(t+i\sqrt{\pi}/2) dt}_{=: I_3(M)} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{i e^{-(-M+ti)^2}}{g(-M+ti)} dt}_{=: I_4(M)} \end{aligned}$$

Prenons $M > \sqrt{\pi}$. Pour tout $t \in]0, \sqrt{\pi}/2[$,

$$|g(M+ti)| \geq 1 - |e^{-2a(M+ti)}| = 1 - e^{-2a\sqrt{\pi}/2 - 2t\sqrt{\pi}/2} = 1 - e^{-\sqrt{\pi}(M-t)} \geq 1 - e^{-\sqrt{\pi}(\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi}/2)} > 0$$

Et un calcul similaire permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ indépendante de M telle que $\forall t \in]0, \sqrt{\pi}/2[$, $|g(\pm M+ti)| \geq \alpha$.

De là, $|f(\pm M+ti)| \leq \alpha^{-1} |e^{-(\pm M+ti)^2}| \leq \alpha^{-1} e^{-M^2} e^{t^2} \leq \alpha^{-1} e^{t^2}$. Or $\int_0^{\sqrt{\pi}/2} \alpha^{-1} e^{t^2} dt < +\infty$ donc d'après le théorème de convergence dominée, $I_2(M) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$ et $I_4(M) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$.

On montre de même qu'il existe $\beta > 0$ indépendante de M telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\mathbb{1}_{[-M,M]}(x) f(x)| \leq e^{-x^2}/\beta$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} I_1(M) - I_3(M) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) dt - \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M f(t+i\sqrt{\pi}/2) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt - \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M-\sqrt{\pi}/2}^{M+\sqrt{\pi}/2} f(t+a) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt - \int_{\mathbb{R}} f(t+a) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \quad (*) \end{aligned}$$