

I - Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$.

Prop 1: $\|\cdot\|: (E, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue.

[Go]
50 Prop 2: Les compacts de E sont les fermés bornés

Thm 3: Toutes les normes sur E sont équivalentes.

DEV 1

Cor 4: Toute application linéaire sur E est continue.

Cor 5: E est complet (pour n'importe quelle norme)

[Go]
~33 Cor 6: Une application continue sur E et coercive admet un minimum.

[Go]
50 Cor 7: Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel quelconque est fermé

[Go]
~33 Appli 8: Soit M un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|)$. Pour tout $y \in F$, il existe $x \in M$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.

[Go]
56 Thm 9 (de RIESZ): $\dim(E) < +\infty \iff \overline{B_E(0,1)}$ est compacte. DEV 1

Appli 10: En dimension infinie, il n'existe pas de mesure positive, invariante par translation et telle que tout point admet un voisinage de mesure finie, autre que la mesure nulle.

[Go]
~30 Prop 11: Une suite en dimension finie converge si, et seulement si elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.

II - Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ A - Dérivées partielles: le point de vue matriciel

Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $B' = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$, $f_1, \dots, f_p$ les applications coordonnées de f dans B' .

Def 12: On dit que f admet une j^{e} dérivée partielle dans B en a si $\partial_j f(a) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(a + te_j) - f(a)]$ existe. [Go]
325

Prop 13: Si f est différentiable en a , alors f admet des dérivées partielles suivant chaque e_j . [Go]
325

Def 14: Si f admet en a des dérivées partielles suivant chaque e_j , alors on définit la (matrice) jacobienne de f en a : $\text{Jac}_a(f) = (\partial_j f_i(a))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$. [Go]
327

Prop 15: $\text{Jac}_a(f) = \text{Mat}_B(df(a))$: en particulier, $\forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $df(a)(h) = \text{Jac}_a(f) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$. [Go]
327

Prop 16 (règle de la chaîne): Sous les hypothèses d'existence, $\text{Jac}_a(g \circ f) = \text{Jac}_{f(a)}(g) \times \text{Jac}_a(f)$, i.e. $\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial e_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial e_k}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial e_j}(a)$. [Go]
327

Prop 17: Les dérivées partielles dans B de f existent et sont continues sur U si, et seulement si f est de classe C^1 sur U . [Go]
~325

Prop 18: Si f est deux fois différentiable sur U , alors d^2f s'identifie à une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. [Rv]
294

Def 19: Sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 2 de f dans B en a sont les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) := \frac{\partial}{\partial e_i} \left[\frac{\partial f}{\partial e_j} \right](a)$. [Go]
326

Thm 20 (de SCHWARZ): Si f est deux fois différentiable en a , alors pour [Rv]
294

$\forall 1 \leq i, j \leq n, \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(a)$

B - Optimisation

Supposons désormais que $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 .

Def 21: On appelle gradient de f en a l'unique $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $df(a) = \langle \cdot | \nabla f(a) \rangle$.

Prop 22: $df(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) e_k^*$ et si B est orthonormale, $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) e_k$.

Def 23: On appelle (matrice) hessienne de f en a la matrice $\text{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Rq 24: $\text{Hess}_a(f)$ est la matrice dans B de la forme bilinéaire $d^2 f(a)$: en particulier, pour tous $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $d^2 f(a)(h)(k) = {}^t h \cdot \text{Hess}_a(f) \cdot k$.

Def 25: On dit que a est un point critique si $df(a) = 0$.

Thm 26: Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a , alors a est un point critique, et $\text{Hess}_a(f)$ est négative (resp. positive).

La réciproque est vraie si on suppose en plus $\text{Hess}_a(f)$ définie

Ex 27: Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La solution de $Ax = b$ est le minimum global de $J: x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax | x \rangle - \langle b | x \rangle$.

Thm 28 (des extrema liés): Soit $(f, g_1, \dots, g_r) \in C^1(U, \mathbb{R})^{r+1}$, posons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$, et si $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $df(a) = \sum_{k=1}^r \lambda_k dg_k(a)$.

Ex 29: Existence d'une trajectoire fermée à 3 rebonds sur un billard elliptique.

Rq 30: Chercher un extremum revient à résoudre le système carré $n+r$:
 $\forall i \in [1, n], \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial e_i}(a) \quad ; \quad g_1(a) = \dots = g_r(a) = 0$

III - Équations différentielles linéaires

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue, $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, $(E): y' = Ay + b$ et $(H): y' = Ay$.

Rq 31: Résoudre $y^{(p)} + P(\frac{d}{dt})(y) = b$ où $P = \sum_{k=0}^{p-1} A_k X^k \in M_n(\mathbb{K})[X]$ revient à résoudre $Y' = C_p Y + B$ où:

$$Y = \begin{pmatrix} y^{(p-1)} \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}, \quad C_p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ I_n & & & \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n - A_{p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prop 32: $S_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, et $S_I(E)$ un sous-espace affine.

DEV 2

Thm 33 (de CAUCHY - LIPSCHITZ linéaire): Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Il existe une unique solution y de (E) définie sur I telle que $y(t_0) = y_0$.

Cor 34: Soit $t_0 \in I$. L'application $\varphi_{t_0}: S_I(H) \rightarrow \mathbb{R}^n, y \mapsto y(t_0)$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). En particulier, $\dim(S_I(H)) = n$.

Soit B une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $(h_1, \dots, h_n) \in S_I(H)$.

Def 35: Le wronskien de $(h_1, \dots, h_n)$ dans B est:

$$W: t \in I \mapsto \det_B(h_1(t), \dots, h_n(t))$$

Thm 36: $(h_1, \dots, h_n)$ est une base de $S_I(H) \Leftrightarrow \forall t \in I, W(t) \neq 0$
 $\Leftrightarrow \exists t \in I: W(t) \neq 0$

Ex 37: Soient $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $w > 0$ tels que $f'' + w^2 f \geq 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \frac{\pi}{w}) \geq 0$.

IV - Approximation de fonctions

A - Séries de FOURIER

On note $C_{2\pi}^0$ (resp. $L_{2\pi}^p$) l'espace des fonctions 2π -périodiques de C^0 (resp. L^p).

[EA]
19.6 Thm 38 (de DIRICHLET) : Soient $f \in C^1$ par morceaux 2π -périodique et $x \in \mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N(f) : t \mapsto \sum_{n=-N}^N e^{int} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} du$. Alors :

$$S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

[EA]
19.0 Thm 39 (de FESÉJÉ) : Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L_{2\pi}^1$, on pose $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$.

1. Si $f \in C_{2\pi}^0$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$.

2. Si $f \in L_{2\pi}^2$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_2 \rightarrow 0$.

Cor 40 : $\text{Vect}(\{t \mapsto e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}})$ est dense dans $C_{2\pi}^0$ et $L_{2\pi}^2$.

Thm 41 : $\{t \mapsto e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$.

[EA]
19.3 Cor 42 : $\forall f \in L_{2\pi}^2, \|S_N(f) - f\|_2 \rightarrow 0$

B - Approximation polynomiale

[G]
23.5 Thm 43 (de WEIERSTRASS) : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Appli 44 : Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t) dt = 0$, alors $f = 0$.

[Dem]
23 Prop 45 : Soit $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$, soient $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ distincts. Notons P le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de $(x_1, \dots, x_n)$ en $(f(x_1), \dots, f(x_n))$.
Pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \prod_{j=1}^n |x - x_j|$.

RÉFÉRENCES

[Go] Gourdon, Analyse [3^e édition]

[Rv] Rouvière [4^e édition]

[BMP] Objectif agrégation

[EA] El Amrani, Analyse de FOURIER dans les espaces fonctionnels

[Dem] Demaillly