

FONCTION CARACTÉRISTIQUE C^1 SANS MOMENTS

Thm: Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, posons

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n b_k \sin(kt). \text{ Alors } (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge localement uniformément sur } \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \text{ et}$$

$$b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \iff (\varphi_n)_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}$$

Cor: Soient $C = \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln(k)}\right)^{-1}$ et μ la probabilité sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ telle que $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$, $\mu(\{n\}) = \frac{C}{2n^2 \ln(|n|)}$. La fonction caractéristique de μ est C^1 mais $E[|\mu|] = +\infty$.

Preuve (du thm): Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons $S_n(t) = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$. Pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a:

$$S_n(t) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n (e^{it})^k\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}t} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

donc $|S_n(t)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{t}{2})|}$. Par périodicité de φ_n et de S_n , on peut restreindre notre étude de la convergence uniforme locale à $[0, 2\pi]$. Soit donc $\alpha \in]0, \pi[$, posons $K = [\alpha, 2\pi - \alpha]$.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, soit $t \in K$.

$$\begin{aligned} \varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \sin(kt) = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k (S_k(t) - S_{k-1}(t)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k S_k(t) - \sum_{k=n}^{n+p-1} b_{k+1} S_k(t) \\ &= b_{n+p} S_{n+p}(t) - b_{n+1} S_n(t) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(t) (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{b_{n+p}}{|\sin(\frac{t}{2})|} + \frac{b_{n+1}}{|\sin(\frac{t}{2})|} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{b_k - b_{k+1}}{|\sin(\frac{t}{2})|} = \frac{2b_{n+1}}{|\sin(\frac{t}{2})|} \leq \frac{2b_{n+1}}{|\sin(\frac{\alpha}{2})|}$$

$0 \leq \alpha/2 \leq t/2 \leq \pi - \alpha/2 \leq \pi$, donc $|\sin(\frac{t}{2})| = \sin(\frac{t}{2}) \geq \sin(\frac{\alpha}{2}) = |\sin(\frac{\alpha}{2})|$ (faire cercle trigo).

Comme $b_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on en déduit que $(\varphi_n(t))_n$ est de Cauchy, donc converge.

Pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\varphi_n(t) = 0$. Ainsi, $(\varphi_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et localement uniformément sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

► $\Leftarrow$ Supposons que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, $\varphi_{2n} - \varphi_n = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin(k \cdot)$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$. Par décroissance de $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, pour $t = \frac{\pi}{6n}$, on a $\varphi_{2n}(t) - \varphi_n(t) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin(kt) \geq b_{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{k}{n} \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{n b_n}{2}$ ($\forall k \in [n+1, 2n]$, $1 \leq \frac{k}{n} \leq 2$ donc $\frac{\pi}{6} \leq \frac{k}{n} \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$, cf cercle trigo).

De là, $2n b_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus, $0 \leq (2n+1)b_{2n+1} = 2n b_{2n+1} + b_{2n+1} \leq 2n b_{2n} + b_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement, $n b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $b_n = o(\frac{1}{n})$.

$\Rightarrow$ Supposons que $b_n = o(\frac{1}{n})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(k \cdot)$. Il s'agit de montrer que $(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$. Par 2π -périodicité, il suffit de le vérifier sur $[0, 2\pi]$. Comme $|R_n(2\pi - t)| = |R_n(t)|$, on peut même se restreindre à $[0, \pi]$.

Soient $t \in]0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$|R_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \sin(kt) + R_{n+p}(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k kt + \frac{2b_{n+p}}{|\sin(t/2)|}$$

$$\leq tp \sup_{k \geq n} kb_k + \frac{2b_{n+p}}{t/\pi} \quad (\sin(t/2) \leq \frac{\pi}{t} \text{ par concavité})$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $kb_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $0 \leq kb_k \leq \varepsilon$. Si $n \geq N$, alors :

$$|R_n(t)| \leq tp\varepsilon + 2\pi \frac{(n+p)b_{n+p}}{(n+p)t} \leq tp\varepsilon + \frac{2\pi}{tp}\varepsilon$$

Pour $p = 1 + \lfloor \frac{1}{t} \rfloor$, on a $\frac{1}{t} \leq p \leq \frac{1}{t} + 1$, donc $1 \leq pt \leq t+1 \leq \pi+1$, donc :

$$|R_n(t)| \leq (\pi+1)\varepsilon + \frac{2\pi}{1}\varepsilon \leq (3\pi+1)\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in]0, \pi]$, et comme $R_n(0) = 0$, cela montre bien la convergence uniforme de $(\varphi_n)_n$ sur $\mathbb{R}$. ■

Preuve (du Cor): Déjà, μ définit bien une probabilité sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. La fonction caractéristique φ de μ est $\varphi: t \mapsto C \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\cos(kt)}{k^2 \ln(k)}$. Notons $(\varphi_n)_n$ la suite des sommes partielles de cette série.

Comme cette série converge normalement, elle converge uniformément, donc on peut la dériver terme à terme : on obtient, pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -C \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{k \ln(k)}$. D'après le

théorème précédent, comme $\frac{1}{k \ln(k)} = o(\frac{1}{k})$, $(\varphi'_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme φ est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues, φ' est continue, et donc φ est de classe C^1 .

Par comparaison série-intégrale, on a $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln(x)}$, donc $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_2^n \frac{dx}{x \ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_2^n \geq \ln(\ln(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi, $E[|\mu|] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| \mu(\{k\}) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{C}{k \ln(k)} = +\infty$. ■