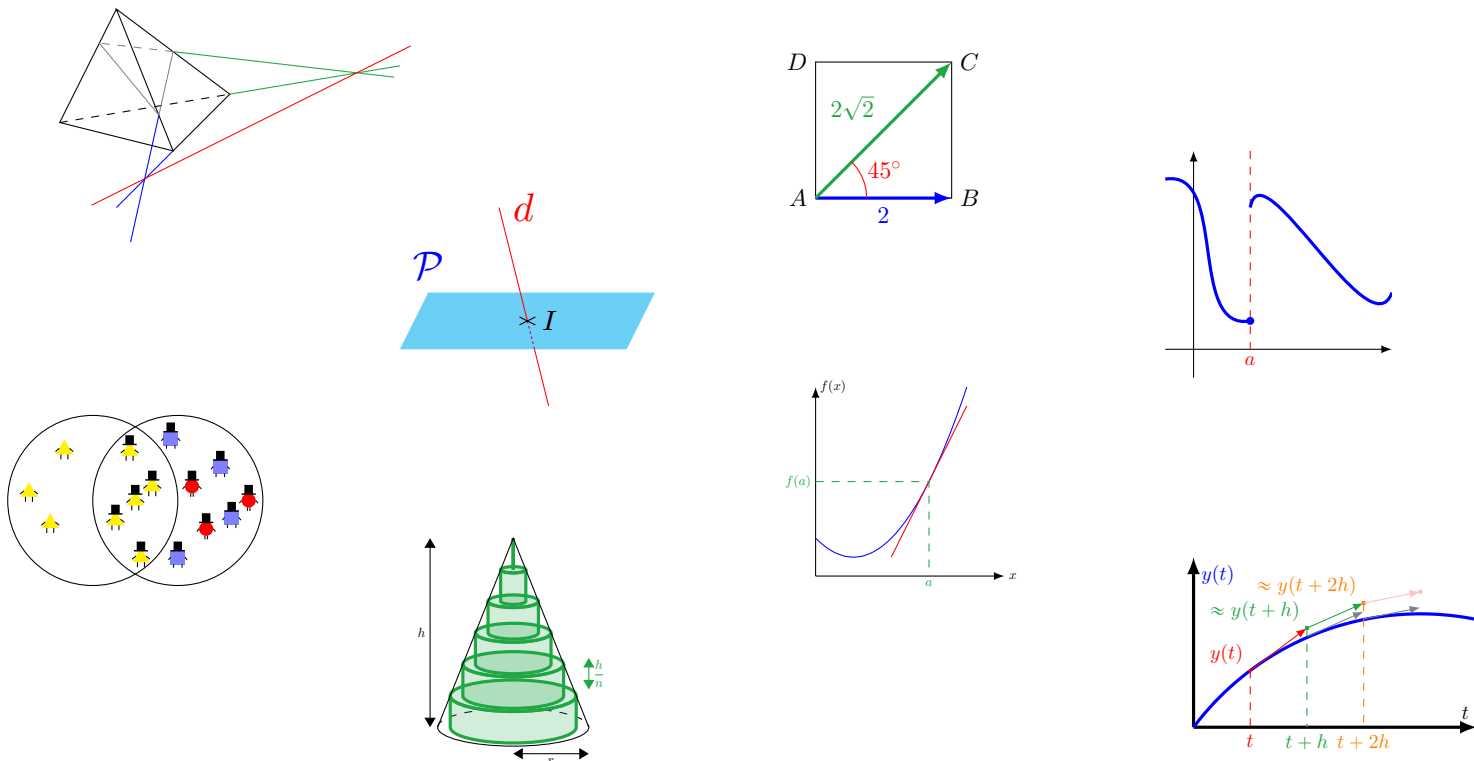
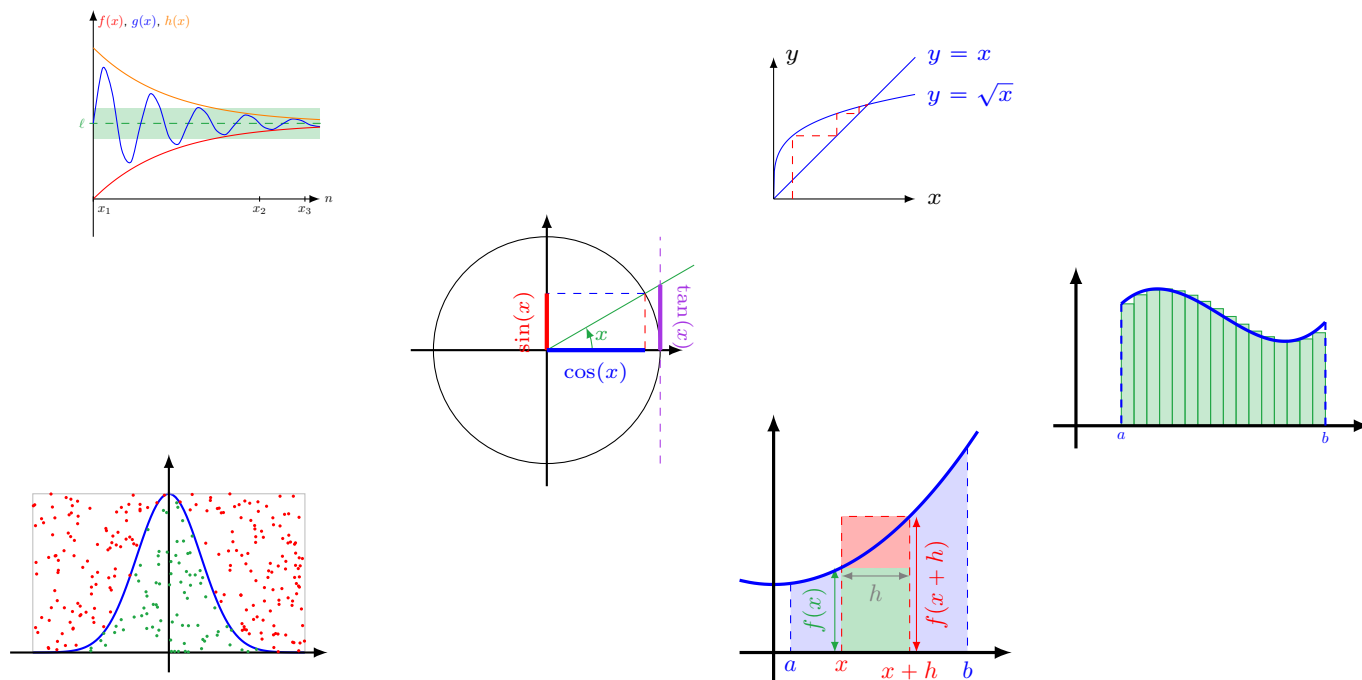




Mathématiques

Terminale spécialité – Corrections



Conseils de travail

Maîtriser un exercice, ce n'est pas lire sa correction. À quoi sert donc de disposer d'un recueil de corrections ? Voici une méthode de travail conseillée, en plusieurs étapes. Attention, aucune méthode n'est universelle : celle proposée ici peut très bien ne pas vous convenir.

1► **Se confronter activement à l'exercice.** On ne réfléchit pas à un exercice, on l'éprouve.

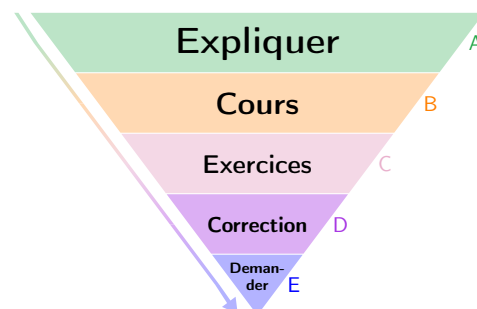
- i► On commence par prendre une feuille et un stylo, ou un tableau et un feutre ou une craie,
- ii► On recense les informations de l'énoncé (quelles sont les données, les relations, les formules admises, mais aussi comment s'appellent les objets en jeu, quelle est leur nature, ...),
- iii► On identifie les objectifs (qu'est-ce qu'on cherche à montrer, réfuter, est-ce qu'on cherche à montrer une égalité, une propriété ; si c'est une propriété énoncée en français, quel est son équivalent en notations mathématiques...),
- iv► Éventuellement, on liste les formules, théorèmes, méthodes, ... qui nous viennent à l'esprit.

⚠ Important : se confronter $\neq$ réussir. Quand on cherche à résoudre un exercice, on ne cherche pas la solution la plus rapide, on cherche UNE solution. On explore plusieurs routes, certaines sont sans issue, et ce n'est pas grave. C'est comme un labyrinthe : on ne trouve pas le chemin de la sortie du premier coup. Parfois il faut rebrousser chemin, choisir quelle piste explorer... Parfois, il y a même plusieurs routes vers la sortie.

2► **Échouer.** Si vous arrivez à faire tous les exercices du premier coup, ce n'est pas normal, vous n'avez rien à faire en terminale !

⚠ Laisser une page vide, ce n'est pas échouer, c'est abandonner. On ne peut décemment pas rester sans écrire face à un exercice ; il y a toujours des choses à écrire : comme dit ci-dessus, on peut lister les informations de l'énoncé, résumer les résultats des questions précédentes, clarifier les objectifs, lister les méthodes, formules et théorèmes que l'on a tenté, que l'on n'a pas encore tenté...

Pour surmonter l'échec, on respecte la pyramide du soutien :



- a► On essaye d'expliquer l'exercice (de quoi il parle, ce que vous devez faire, ce que vous avez tenté, pourquoi vous l'avez tenté...) à quelqu'un d'autre à voix haute. Trouvez un ami, un proche, ... prêt à vous écouter, sans nécessairement vous répondre. Si vous n'avez personne à disposition, la [méthode du canard en plastique](#) (Wikipédia ) est très prisée des chercheurs et chercheuses. Le fait d'expliquer son problème à voix haute aide à prendre du recul. Ne vous est-il jamais arrivé de trouver la réponse à une question au moment même où vous la posez ?
- b► On relit le cours. Y a-t-il une définition, une propriété, une méthode qui se rapproche de l'exercice ?
- c► On relit les exercices déjà traités. Y a-t-il un exercice proche de celui sur lequel on bloque ? Si oui, essayez de mimer la solution !
- d► On *recopie* la correction. Dans ce manuel, les corrections sont rédigées de manière plutôt compacte, pour deux raisons : l'une est écologique, l'autre est pour forcer une lecture active. Il faut faire preuve d'une grande concentration pour suivre la correction telle qu'elle est écrite. En recopiant la correction, on s'assure de ne pas passer trop vite sur un détail que l'on pense comprendre à tort.
- e► Si vous ne comprenez pas la correction même après l'avoir recopiée et étudiée, posez la question à un expert. Votre professeur, un(e) camarade à l'aise, voire une intelligence artificielle pour certains cas.

3► **Contrôler.** On vérifie, à l'aide de la correction si elle est suffisamment détaillée, sinon en demandant une relecture au professeur, que la rédaction est complète : bons quantificateurs, connecteurs logiques, justifications...

4► **Recommencer.** On choisit un autre exercice similaire, et on s'y confronte. On recommence jusqu'à réussir.

⚠ Attention ! « Maîtriser » un exercice, ça ne veut pas dire être capable de le réussir, ça veut dire être incapable d'échouer.

5► **Pérenniser.** Il est important de réactiver la mémoire fréquemment ! La fin du chapitre en cours ne sonne pas la fin du travail des exercices. De temps en temps, revenez sur les exercices d'anciens chapitres pour vous assurer que vous les maîtrisez toujours.

Pour les plus motivé(e)s, voici d'autres moyens d'aller plus loin dans cette méthode de travail :

► **Qualifier l'avancement.** Classez les exercices en 7 catégories : S pour les exercices que vous réussissez sans problème, A, B, C, D et E selon l'étage de la pyramide du soutien qui vous a permis de vous débloquer, et F pour les exercices non traités.

Quand vous voulez travailler un chapitre, sélectionnez au hasard un exercice de chaque catégorie, et faites évoluer leur notation en conséquence !

► **Qualifier les obstacles.** Après avoir galéré sur un exercice, prenez du recul et essayez d'identifier la nature des obstacles que vous avez du surmonter. Était-ce une faiblesse sur les formules de dérivation ? Une erreur sur du calcul fractionnaire ? littéral ? Cela vous permettra d'identifier vos points faibles et d'y remédier.

⚠ Lorsque vous devez réviser un examen incluant plusieurs chapitre : la quantité d'exercices travaillés doit être inversement proportionnelle à votre niveau d'aisance. Par exemple, si vous êtes à l'aise en géométrie mais pas en probabilités, travaillez 3 exercices de probabilités et 1 de géométrie, et non l'inverse ! C'est désagréable car on éprouve plus de difficultés, mais faire l'inverse revient à renforcer ses points forts et aggraver ses points faibles.

❗ La maîtrise passe pas le mimétisme, la reconnaissance de *patterns*. Ces *patterns* ne sont pas quelque chose qui s'explique, mais qui se ressent. Si on veut bien retenir la formule de dérivation d'un quotient, on dérive des quotients encore et encore, jusqu'à ce qu'on n'ait plus besoin d'y réfléchir, pour que la formule nous semble naturelle. Si vous avez besoin d'écrire qui est u , qui est v , écrire la formule, remplacer les différents blocs de la formule... cet effort conscient signifie que la formule n'est pas instinctive pour vous. C'est comme un musicien qui répète ses gammes des centaines de fois pour pouvoir les faire instinctivement, ou un basketteur qui s'entraîne des centaines d'heures pour pouvoir lancer le ballon dans le panier, où qu'il soit placé, et avec un excellent taux de réussite. Grâce à leur entraînement, leurs mains bougent toutes seules, ils n'ont pas besoin de réfléchir à quelle note jouer ou à quel angle tirer le ballon.

Dans le cas du bac, on parle d'exercice « type bac » car ils ont tous un *pattern* en commun. En répétant encore et encore des exercices « type bac », on intègre inconsciemment ce *pattern*, la raison que fait que cet exercice est qualifié de « type bac », qui nous permettra de faire, toujours inconsciemment, des liens entre les exercices, et arriver à trouver une solution plus rapidement.

❗ Apprendre, comprendre et maîtriser sont des concepts distincts. Apprendre son cours, c'est le connaître et être capable de le restituer. Maîtriser son cours, c'est être en plus capable de l'appliquer de manière pertinente pour résoudre un exercice. Comprendre son cours, c'est savoir expliciter les liens entre les différents objets, savoir identifier la nature de tous les éléments d'une formule ou d'un théorème, savoir pourquoi tel théorème possède telle hypothèse et pas d'autres...

J'aime dire, sans aucun fondement scientifique, que : il faut 1 semaine pour apprendre une notion, 2 mois pour la maîtriser et 3 ans pour la comprendre.

En terminale, et de manière croissante les années suivantes, l'autonomie de travail est capitale. Plus le temps passe, moins on vous dira ce que vous devez travailler, jusqu'à ce qu'on vous balance une pile de documents sans plus de précisions. On vient en cours pour comprendre le cours, pas pour l'apprendre. Le rôle du professeur est de vous débloquer là où toutes les solutions en autonomie ont échoué, et à ce niveau d'études, ce rôle s'arrête là.

Corrections des exercices

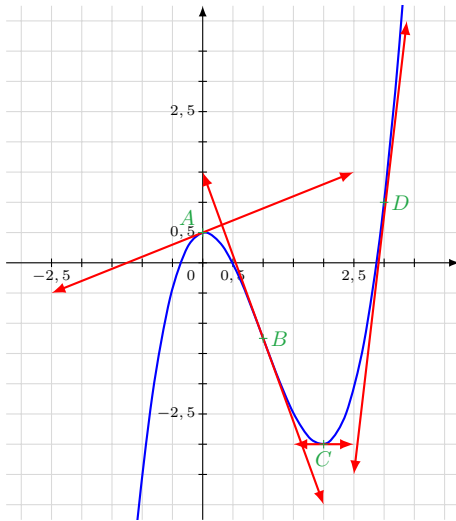
1	Dérivation	5
2	Suites et récurrence	11
3	Combinatoire et dénombrement	25
4	Équations différentielles	41
5	Limites de suites	59
6	Géométrie et repérage dans l'espace	77
7	Limites de fonctions	78
8	Continuité	92
9	Loi binomiale	110
10	Logarithme	119
11	Orthogonalité dans l'espace	120
12	Intégration	127
13	Variables aléatoires	158
14	Convexité	159
15	Trigonométrie	171

1 Dérivation

Exercices

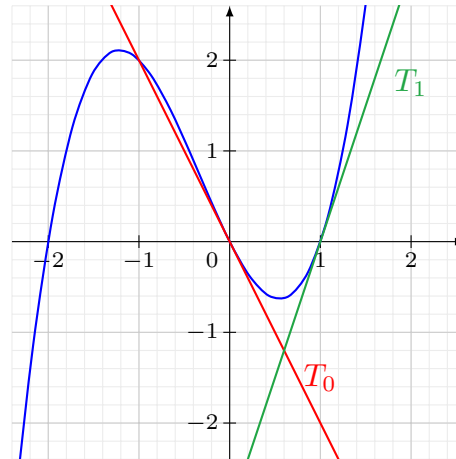
Je maîtrise les bases

Exercice 1



Lire graphiquement les images et nombres dérivés de f définie par la courbe ci-contre en 0, 1, 2 et 3.

Exercice 2



Lire graphiquement les images et nombres dérivés de g définie par la courbe ci-contre en 0 et 1.
Déterminer graphiquement les abscisses pour lesquelles le nombre dérivé est nul.

Exercice 3

- 1► Soit $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 2.
- 2► Soit $g : x \mapsto e^x$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g en 0.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{9}(x^3 + 3x^2 - 24x + 7)$.

- 1► Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2► Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en -1 .
- 3► Déterminer les abscisses des points où la tangente est horizontale.

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

► $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt{x}$

► $g(x) = xe^x$

► $h(x) = 4x - \frac{7}{x}$

► $i(x) = \frac{x^2e^x + 3}{x + 5}$

Je connais mon cours

Exercice 6

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\triangleright f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\triangleright h(x) = e^{1/x}$$

$$\triangleright g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\triangleright i(x) = \sqrt{\frac{e^x + 1}{x}}$$

- 1► La décomposer en un programme de calcul,
- 2► En déduire une écriture comme une composée de fonctions simples,
- 3► Donner son ensemble de définition,

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$\triangleright a(x) = e^{-x+2}$$

$$\triangleright e(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\triangleright h(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{e^{-x^2+1}}$$

$$\triangleright b(x) = \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\triangleright f(x) = (\sqrt{3x-5})^3$$

$$\triangleright i(x) = (2x+5)e^{3x-4}$$

$$\triangleright c(x) = (4e^{-x} + 1)^3$$

$$\triangleright g(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$$

$$\triangleright j(x) = \sqrt{3x-6}(x^2-2x)^4$$

$$\triangleright d(x) = (x^2 - 5x + 3)^2$$

Je comprends le cours

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right)^2$.

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de f et sa fonction dérivée.
- 2► Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3► Déterminer les abscisses des points où la tangente est horizontale.
- 4► Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et ses tangentes horizontales.

Exercice 9

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2► Déterminer la fonction dérivée de f sur $I =]0; +\infty[$.
- 3► Quel est le minimum de f sur I ?
- 4► En déduire que pour tous réels a et b strictement positifs, $\sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$.

Corrections

Souvent, le détail des calculs de dérivées, notamment l'identification de la formule usuelle en jeu et de ses composants, n'est pas détaillé. Sur une copie, il faut tout écrire. Ici, on économise de la place. Pour plus de détails sur les calculs, consultez une source extérieure. ✨

Correction de l'ex 1

Il s'agit de compter les carreaux :

- ▶ La tangente au 0 touche la courbe au point A . Elle monte de 2 carreaux lorsqu'elle en avance de 5, son coefficient directeur est donc $\frac{2}{5}$, et donc $f'(0) = \frac{2}{5}$.
- ▶ La tangente au 1 touche la courbe au point B . Elle descend de 11 carreaux lorsqu'elle en avance de 4, son coefficient directeur est donc $-\frac{11}{4}$, et donc $f'(1) = -\frac{11}{4}$.
- ▶ La tangente au 2 touche la courbe au point C . Elle est horizontale, son coefficient directeur est donc 0, et donc $f'(3) = 0$.
- ▶ La tangente au 3 touche la courbe au point D . Elle monte de 9 carreaux lorsqu'elle en avance de 1, son coefficient directeur est donc $\frac{9}{1} = 9$, et donc $f'(3) = 9$.

Correction de l'ex 2

La tangente T_0 a un coefficient directeur de -2 , donc $f'(0) = -2$. La tangente T_1 a un coefficient directeur de 3, donc $f'(1) = 3$. La dérivée s'annule lorsque la tangente est horizontale, ce qui ici est environ aux abscisses $-1, 3$ et $0, 55$.

Remarque : les dérivées nulles correspondent ici aux extrema de la fonction on verra à la fin de l'année qu'il existe un troisième cas de dérivée nulle : les points d'inflexion.

Correction de l'ex 3

- 1▶ Déjà, $f(2) = 11$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 3$, donc $f'(2) = 7$. Ainsi, la tangente à la courbe de f en 2 a pour équation $T_2 : y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 7(x - 2) + 11 = 7x - 3$.
- 2▶ Déjà, $g(0) = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x$, donc $g'(0) = 1$. Ainsi, la tangente à la courbe de g en 0 a pour équation $T_0 : y = g'(0)(x - 0) + f(0) = 1(x - 0) + 1 = x + 1$.

Correction de l'ex 4

- 1▶ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 + 6x - 24) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 8)$. On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$. Notons $x_1 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$. Ainsi, $f'(x) = \frac{1}{3}(x + 4)(x - 2)$, et un tableau de signes élémentaires montre que $f'(x)$ est négative entre -4 et 2 et positive ailleurs. Ainsi, f est décroissante sur $[-4; 2]$ et croissante ailleurs. Il est bon de compléter le tableau de variations avec des valeurs : $f(-4) = \frac{29}{3}$ et $f(2) = -\frac{7}{3}$.

- 2▶ On a $f(-1) = \frac{11}{3}$ et $f'(-1) = -3$. Ainsi,

$$T_{-1} : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = -3(x + 1) + \frac{11}{3} = -3x + \frac{2}{3}$$

- 3▶ La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule, ce qui arrive aux abscisses -4 et 2 d'après la factorisation précédente.

Correction de l'ex 5

$$\triangleright f'(x) = 2x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$\triangleright g'(x) = (x+1)e^x$$

$$\triangleright h'(x) = 4 + \frac{7}{x^2}$$

$$\triangleright i'(x) = \frac{xe^x(x+2)(x+5) - x^2e^x - 3}{(x+5)^2}$$

Correction de l'ex 6

► La fonction f correspond au programme de calcul suivant : $x \xrightarrow{u} x^2 + 1 \xrightarrow{v} \sqrt{x^2 + 1}$, où $u : t \mapsto t^2 + 1$ et $v : t \mapsto \sqrt{t}$. Ainsi, $f = v \circ u$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 0$ donc la racine de cette quantité est toujours définie, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

► La fonction g correspond au programme de calcul suivant : $x \xrightarrow{u} \frac{1}{x} \xrightarrow{v} \sqrt{\frac{1}{x}}$, où $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \sqrt{t}$. Ainsi, $f = v \circ u$. L'inverse impose que $x \neq 0$, la racine impose que son argument soit positif, soit $x \geq 0$, donc $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.

► La fonction h correspond au programme de calcul suivant : $x \xrightarrow{u} \frac{1}{x} \xrightarrow{v} e^{1/x}$, où $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto e^t$. Ainsi, $f = v \circ u$. L'inverse impose que $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

► La fonction h correspond au programme de calcul suivant :

$$x \longrightarrow e^x \longrightarrow e^x + 1 \longrightarrow \frac{e^x + 1}{x} \longrightarrow \sqrt{\frac{e^x + 1}{x}}$$

Notons $a : t \mapsto e^t + 1$, $b : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $c : t \mapsto \sqrt{t}$. Ainsi, $f = c \circ (a \times b)$. L'inverse impose que $x \neq 0$, et la racine impose que $\frac{e^x + 1}{x}$ soit positif, mais le numérateur étant toujours positif cela revient à $x \geq 0$. Finalement, $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Correction de l'ex 7

► La fonction a est définie sur $\mathbb{R}$ et $a'(x) = -e^{-x+2}$

► La fonction b est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $b'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$

► La fonction c est définie sur $\mathbb{R}$ et $c'(x) = -12e^{-x}(4e^{-x} + 1)^2$

► La fonction d est définie sur $\mathbb{R}$ et $d'(x) = 2(2x - 5)(x^2 - 5x + 3)$

► La fonction e est définie sur $\mathbb{R}$ (pour tout x réel, $x^2 + x + 1 > 0$ car c'est une fonction polynomiale de degré 2 de discriminant $\Delta = -3 < 0$) et $e'(x) = \frac{(6x^2 - 8x + 1)(x^2 + x + 1) - (2x^3 - 4x^2 + x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$

► La fonction f est définie sur $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$ et $f'(x) = \frac{9}{2}\sqrt{3x-5}$

► La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $g'(x) = \frac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$

► La fonction h est définie sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ (le dénominateur ne s'annule jamais, seule la racine restreint le domaine de définition) et $h'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x-1}}e^{-x^2+1} - \sqrt{2x-1}(-2x)e^{-x^2+1}}{(e^{-x^2+1})^2} = \frac{4x^2 - 2x + 1}{\sqrt{2x-1} e^{-x^2+1}}$

► La fonction i est définie sur $\mathbb{R}$ et $i'(x) = (6x + 17)e^{3x-4}$

- La fonction j est définie sur $[2; +\infty[$ et $j'(x) = \frac{3(x^2 - 2x)^4}{2\sqrt{3x - 6}} + 4(2x - 2)(x^2 - 2x)^3\sqrt{3x - 6}$.
- Avec du temps, on peut simplifier : $j'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^3(x - 2)^2\sqrt{x - 2}(17x^2 - 50x + 32)$.

Correction de l'ex 8

- 1► La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme puissance d'une fonction polynomiale) et pour tout réel x ,

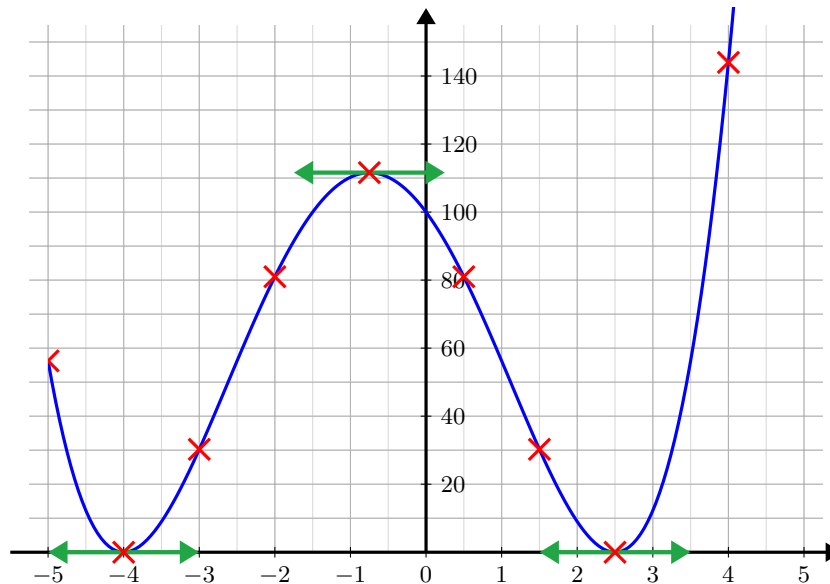
$$f'(x) = 2 \left(2x + \frac{3}{2} \right) \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10 \right) = (4x + 3) \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10 \right)$$

- 2► Commençons par remarquer que le second facteur de f' est une fonction polynomiale de degré 2, de discriminant $\Delta = \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = \left(\frac{13}{2} \right)^2$.

Ses racines sont donc $\frac{-\frac{3}{2} - \frac{13}{2}}{2} = -4$ et $\frac{-\frac{3}{2} + \frac{13}{2}}{2} = \frac{5}{2}$. Son coefficient dominant étant $1 > 0$, elle est négative entre ses racines et positive ailleurs. Enfin, $4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}$.

x	$-\infty$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$4x + 3$		—	—	○	+	
$x^2 + \frac{3}{2}x - 10$		+	○	—	—	
$f'(x)$		—	○	+	○	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{169}{16}$	$\searrow$
					0	$\nearrow$
						$+\infty$

- 3► La tangente est horizontale là où la dérivée s'annule, ce qui d'après ce qui précède correspond aux abscisses -4 , $\frac{5}{2}$ et $-\frac{3}{4}$.
- 4► On commence par placer les **points de passage** remarquables (interceptions des axes ou coordonnées entières) et ceux donnés par les valeurs du tableau de variations. C'est l'occasion de constater si l'échelle par défaut d'un carreau par unité est réellement adaptée à la situation. On matérialise ensuite les **tangentes** remarquables (aux points de passage précédemment tracés ; ici, les tangentes horizontales aux trois extrema). Enfin, on trace **la courbe** en respectant les points et les tangentes.



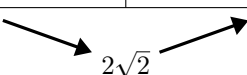
Correction de l'ex 9

1► Pour que $f(x)$ soit définie, il faut que les expressions sous les racines soient positives ou nulles, et que le dénominateur soit non nul. On doit donc avoir $x \geq -1$, $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 0$ soit $x > 0$. Par conséquent, l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

2► La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$ (comme produit, somme et composée). Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \sqrt{x+1} \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$

3► Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif sur $\mathcal{D}_f$. Le signe de $f'(x)$ dépend donc uniquement de son numérateur $x\sqrt{x} - 1$. Or $x\sqrt{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} \geq 1$. Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \geq \sqrt{1} = 1$ par croissance de la fonction racine carrée, et $x\sqrt{x} \geq 1$ par produit. Si $x < 1$, alors $\sqrt{x} < \sqrt{1} = 1$ par stricte croissance de la fonction racine carrée, et donc $x\sqrt{x} < 1$ par produit. Ainsi, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		— 0 +	
f			

Elle admet un minimum atteint en $x = 1$, valant $f(1) = 2\sqrt{2}$.

4► Soient a et b deux réels strictement positifs. D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2\sqrt{2}$. En choisissant $x = \frac{a}{b} > 0$, on obtient :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 2\sqrt{2} \quad \text{donc} \quad \sqrt{\frac{a}{b} + 1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \right) \geq 2\sqrt{2}$$

On met le radical de la première racine sur le même dénominateur, et on simplifie l'expression dans la parenthèse avant d'elle aussi la mettre sur un même dénominateur :

$$\sqrt{\frac{a+b}{b}} \left(1 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \geq 2\sqrt{2} \quad \text{puis} \quad \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \geq 2\sqrt{2}$$

On rentre le $\sqrt{b}$ dans la parenthèse et on simplifie une dernière fois l'écriture fractionnaire pour arriver à l'inégalité recherchée :

$$\sqrt{a+b} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \right) \geq 2\sqrt{2} \quad \text{puis} \quad \sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \geq 2\sqrt{2}$$

2 Suites et récurrence

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_5 .

- 1► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 5$
- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$
- 3► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$
- 4► $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 7$
- 5► $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, exprimer t_{n+1} , t_{n-1} , t_{2n} et t_{3n-2} en fonction de n .

- 1► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2n + 4$
- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = n^2 - n + 1$
- 3► Pour tout entier $n \geq 1$, $t_n = \frac{n-2}{n+1}$

Exercice 3

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$.

- 1► $v_n = 4n - 5$
- 2► $v_n = 1 + \frac{2}{n}$
- 3► $v_n = \frac{2^n}{n}$

Exercice 4

On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n par $p_n = n^2 - 7n + 12$. Étudier les variations de la suite (p_n) .

Exercice 5

Déterminer les variations des suites suivantes :

- 1► $u_n = -3n + 1$
- 2► $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
- 3► $u_n = 2^n$
- 4► $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

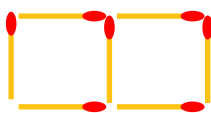
Exercice 6

Modélisez les situations suivantes...

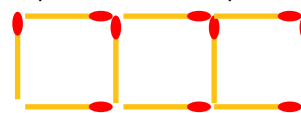
- 1► ...avec une suite définie explicitement :
 - Alice étudie une colonie de bactéries. Elle place 1 bactérie dans une boîte de pétri. Chaque heure, le nombre de bactéries double.
 - Bob compte le nombre de passagers dans des trains successifs numérotés 1, 2, 3, etc. Le nombre de passagers est égal au numéro du train multiplié par 3, auquel on ajoute 50.
- 2► ...avec une suite définie par récurrence :
 - En 2020, Carole possède 1000€ sur son compte d'épargne. Chaque année, son épargne lui rapporte 1,02 fois le montant de l'année précédente.
 - David s'entraîne pour un marathon. Le premier jour, il court 1,5km. Chaque jour, il progresse, et court 2km de plus que la veille.
- 3► ...avec une suite dont vous donnerez une expression explicite et une expression par récurrence :
Dans la suite d'allumettes suivante, quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour réaliser chaque étape ?



ÉTAPE 1



ÉTAPE 2



ÉTAPE 3

Je comprends mon cours

Exercice 7

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$. Calculer u_{20} .

Exercice 8 (Vrai/faux)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites croissantes.

- 1► **Proposition 1** : « La suite (w_n) de terme général $w_n = u_n + v_n$ est croissante. »
- 2► **Proposition 2** : « La suite (w_n) de terme général $w_n = u_n \times v_n$ est croissante. »

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- 1► Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 6$.
 - a► Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques (premier terme et raison).
 - b► Exprimer, pour tout entier n , v_n en fonction de n .
 - c► Exprimer, pour tout entier n , u_n en fonction de n .

Exercice 10

Un apiculteur a constaté qu'entre 2015 et 2019 le nombre d'abeilles adultes de sa ruche a diminué d'environ 10% chaque année. Il avait acheté une colonie de 50 000 abeilles en 2015.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le terme d'une suite modélisant le nombre d'abeilles dans la ruche en l'an 2015 + n .

- 1► Montrer que $u_1 = 45\,000$ et $u_2 = 40\,500$.
- 2► a► Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n .

- b► En déduire la nature de la suite (u_n) .
- c► Exprimer u_n en fonction de n .

- 3► Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- 4► Déterminer le nombre d'abeilles qu'il y aura dans sa ruche en 2025 selon ce modèle si l'évolution se maintient.
- 5► Estimer, avec ce modèle, en quelle année la population initiale de la colonie d'abeilles aura diminué de moitié.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^3 - n + 4$.

- 1► Déterminer les trois premiers termes de la suite.
- 2► Exprimer, pour tout entier naturel n , u_{n+1} en fonction de n . Développer et réduire.
- 3► Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = 3n(n+1)$
- 4► Étudier le sens de variations de la suite (u_n) .

```

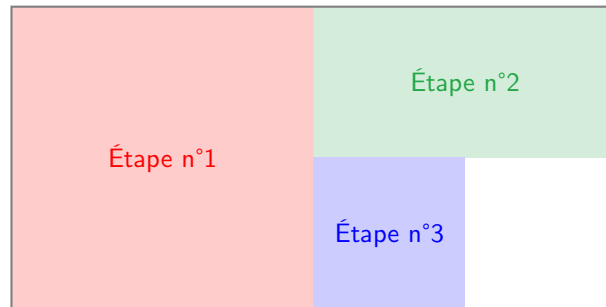
1  def u(n):
2      return n**3 - n + 4
3
4  def seuil(A):
5      n = 0
6      while u(n) < A:
7          n = n + 1
8      return n

```

- 5► L'algorithme ci-contre contient une fonction `seuil` qui doit permettre de déterminer un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à un nombre réel A .
 - a► Quel est le rôle de la fonction `u` placée avant la fonction `seuil` ?
 - b► Programmer cet algorithme et exécuter la fonction `seuil` en prenant $A = 100$; $A = 100\,000$ et $A = 10^{10}$ successivement. Que renvoie-t-elle à chaque fois ?
 - c► La suite (u_n) semble-t-elle disposer d'une valeur maximale ?

Exercice 12 (Chercher)

On colorie la surface d'un rectangle de 1 mètre de largeur et de 2 mètres de longueur de la façon suivante : on commence par colorier la moitié de la surface du rectangle, puis la moitié de la surface restante, puis la moitié de la nouvelle surface restante et ainsi de suite.



- 1► Au long terme, de quelle valeur l'aire de la surface coloriée semble-t-elle se rapprocher ?
- 2► Déterminer à partir de quelle étape l'aire coloriée représente 99,5% de cette valeur limite.

Exercice 13

Alice doit démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 Sur le point de terminer sa démonstration, son chaton a sauté sur son bureau et a renversé du correcteur blanc !
 Aidez Alice à réécrire les parties manquantes de sa rédaction ci-dessous.

Pour n un entier supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition
 «
 ».
 Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par récurrence.

Initialisation : D'une part,
 D'autre part,
 On a ainsi montré que est vraie.

Hérédité : Soit n .
 On suppose vraie ; autrement dit .
 Démontrons que ; autrement dit que
 Par hypothèse de récurrence : $1 + 2 + 3 + \dots + n =$, donc :

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \\
 &= \\
 &= \\
 &=
 \end{aligned}$$

en factorisant par $n + 1$.
 Donc est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, on en déduit que

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 15

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,4$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \geq 0,8.$$

Exercice 16

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$ et $v_0 = 10$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3 \leq v_n \leq 10.$$

Exercice 17

Soient a et r deux réels. On considère la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = a$ et de raison r . (On rappelle que pour tout entier naturel n , on a alors $u_{n+1} = u_n + r$.)
Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = a + rn$$

Exercice 18

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Exercice 19

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $n \leq u_n \leq n + 3$.

Exercice 20

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Objectif Bac

Exercice 22

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

Exercice 23 (BAC 2022)

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1,9a_n(1 - a_n)$.

- 1► On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - a► Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 1]$.
 - b► En déduire que, si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 0,5]$.
- 2► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 0,5$.

Corrections

Correction de l'ex 1

Pour les suites définies explicitement, il suffit de remplacer le n dans l'expression par le rang demandé :

	u_1	u_2	u_3	u_5
$3n + 5$	$3 \times 1 + 5 = 8$	$3 \times 2 + 5 = 11$	$3 \times 3 + 5 = 14$	$3 \times 5 + 5 = 20$
$2^n - 1$	$2^1 - 1 = 1$	$2^2 - 1 = 3$	$2^3 - 1 = 7$	$2^5 - 1 = 31$
$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

Pour les suites définies par récurrence, il faut calculer les termes de proche en proche :

- ▶ $u_1 = 2u_0 + 7 = 2 \times 1 + 7 = 9$
- ▶ $u_2 = 2u_1 + 7 = 2 \times 9 + 7 = 25$
- ▶ $u_3 = 2u_2 + 7 = 2 \times 25 + 7 = 57$
- ▶ $u_4 = 2u_3 + 7 = 2 \times 57 + 7 = 121$
- ▶ $u_5 = 2u_4 + 7 = 2 \times 121 + 7 = 251$

Attention, pour la dernière suite, on fait intervenir à la fois u_n et n tout seul :

- ▶ $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 = 3 \times 2 - 2 \times 0 = 6$
- ▶ $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 = 3 \times 6 - 2 \times 1 = 16$
- ▶ $u_3 = 3u_2 - 2 \times 2 = 3 \times 16 - 2 \times 2 = 44$
- ▶ $u_4 = 3u_3 - 2 \times 3 = 3 \times 44 - 2 \times 3 = 126$
- ▶ $u_5 = 3u_4 - 2 \times 4 = 3 \times 126 - 2 \times 4 = 370$

Correction de l'ex 2

Méthode : partez de $t_n = f(n)$, colorez (sur votre feuille ou dans votre tête) chaque occurrence de n , et remplacez-la par le nouvel indice. Mettez systématiquement des parenthèses ! Il vaut mieux simplifier *a posteriori* des parenthèses inutiles plutôt que d'oublier d'écrire celles qui sont capitales.

t_n	t_{n+1}	t_{n-1}	t_{2n}	t_{3n-2}
$2n + 4$	$2(n+1) + 4$ $= 2n + 6$	$2(n-1) + 4$ $= 2n + 2$	$2(2n) + 4 = 4n + 4$	$2(3n-2) + 4 = 6n$
$n^2 - n + 1$	$(n+1)^2 - (n+1) + 1$ $= n^2 + 3n + 3$	$(n-1)^2 - (n-1) + 1$ $= n^2 - n + 1$	$(2n)^2 - (2n) + 1$ $= 4n^2 - 2n + 1$	$(3n-2)^2 - (3n-2) + 1$ $= 9n^2 - 9n + 3$
$\frac{n-2}{n+1}$	$\frac{(n+1)-2}{(n+1)+1} = \frac{n-1}{n+2}$	$\frac{(n-1)-2}{(n-1)+1} = \frac{n-3}{n}$	$\frac{(2n)-2}{(2n)+1} = \frac{2n-2}{2n+1}$	$\frac{(3n-2)-2}{(3n-2)+1} = \frac{3n-4}{3n-1}$

Correction de l'ex 3

On utilise la méthode de la différence, ou du quotient lorsque la situation le permet. Il est conseillé d'abuser des parenthèses pour éviter les erreurs de signe !

- 1▶ Pour tout n entier naturel, $v_{n+1} - v_n = (4(n+1) - 5) - (4n - 5) = 4 > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} > v_n$, donc (v_n) est croissante.
- 2▶ Pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{-2}{n(n+1)} < 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} < v_n$, donc (v_n) est décroissante.
- 3▶ Pour tout $n \geq 1$, $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n2^{n+1}}{(n+1)2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+n}{n+1}$. Or $n \geq 1$ donc $n+n \geq n+1$ donc $\frac{n+n}{n+1} \geq 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geq v_n$ (car $v_n > 0$), donc (v_n) est croissante.

Correction de l'ex 4

Pour tout n entier naturel,

$$p_{n+1} - p_n = [(n+1)^2 - 7(n+1) + 12] - [n^2 - 7n + 12] = [n^2 - 5n + 6] - [n^2 - 7n + 12] = 2n - 6$$

Or $2n - 6 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 3$, donc (p_n) est décroissante sur ses trois premiers rangs, et croissante par la suite.

Correction de l'ex 5

On utilise la méthode de la différence, ou du quotient lorsque la situation le permet. Il est conseillé d'abuser des parenthèses pour éviter les erreurs de signe !

- 1► Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 1] - [-3n + 1] = -3 < 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, donc (u_n) est décroissante.
- 2► Pour tout n entier naturel, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)(n+2)}{(n+3)(n+1)} = \frac{n^2 + 4n + 4}{n^2 + 4n + 3} \geq 1$ (le numérateur est plus grand d'une unité que le dénominateur). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (car $u_n > 0$), donc (u_n) est croissante.
- 3► Pour tout n entier naturel, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \geq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (car $u_n > 0$), donc (u_n) est croissante.
- 4► On ne peut pas utiliser la méthode du quotient car u_n n'est pas toujours strictement positif. Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{4}{3}$. Or cette quantité n'est jamais de signe constant (la puissance oscille entre positif et négatif à chaque rang), donc (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Correction de l'ex 6

- 1► ► On note a_n le nombre de bactéries dans la boîte de pétri après n heures. Le nombre de bactéries part de 1 et double à chaque heure, donc on multiplie par 2 à chaque heure, autrement dit on calcule $2 \times 2 \times \dots \times 2$ avec autant de 2 que le nombre d'heures ; ainsi, $a_n = 2^n$.
- On note b_n le nombre de passagers dans le train numéro n . Ainsi, $b_n = 3n + 50$.
- 2► ► On note c_n le capital de Carole n années après 2020. Ainsi, $c_0 = 1\,000$. Chaque année, son capital est multiplié par 1,02 par rapport à l'année précédente, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 1,02c_n$.
- On note d_n la distance en km parcourue par David le n -ième jour de son entraînement. Ainsi, $d_1 = 1,5$. Chaque jour, cette distance est supérieure de 2 km par rapport au jour précédent, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n + 2$.
- 3► On note u_n le nombre d'allumettes à l'étape n .

Point de vue par récurrence : on part de $u_1 = 4$ allumettes, et à chaque étape, on en rajoute 3 par rapport à l'étape précédent ; autrement dit, pour n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 3$.



ÉTAPE 1



ÉTAPE 2



ÉTAPE 3

Point de vue explicite : on part de 1 allumettes, et on ajoute autant « C » à l'envers, formés de 3 allumettes, que le numéro de l'étape. Ainsi, $u_n = 1 + 3n$.



ÉTAPE 1



ÉTAPE 2



ÉTAPE 3

Correction de l'ex 7

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$. Calculer u_{20} .

La suite (u_n) est arithmétique, donc elle admet une raison que l'on note r . Deux approches pour répondre à la question :

Méthode n°1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute une fois la raison. Donc pour sauter de 2 termes, on ajoute 2 fois la raison, soit $2r$, et pour avancer de 3 termes, on ajoute $3r$. Les termes u_2 et u_5 étant à 3 rangs d'écart, leur valeur diffère de $3r$, autrement dit $u_5 - u_2 = 3r$. En injectant les données du problème, on obtient $r = -18$. Les termes u_5 et u_{20} diffèrent de 15 rangs, donc leur valeur diffère de 15 fois la raison : ainsi, $u_{20} = u_5 + 15r = -13 + 15 \times (-18) = -283$.

Méthode n°2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. En particulier, $u_2 = u_0 + 2r$ et $u_5 = u_0 + 5r$. En remplaçant par les données du problème, on en vient à résoudre le système
$$\begin{cases} 41 = u_0 + 2r \\ -13 = u_0 + 5r \end{cases}$$
. En soustrayant la première ligne à la seconde, on obtient $-54 = 3r$, donc $r = -18$. En injectant cela dans la première ligne, on trouve $u_0 = 77$. En écrivant $u_{20} = u_0 + 20r = 77 + 20 \times (-18) = -283$.

Correction de l'ex 8

Soient (u_n) et (v_n) deux suites croissantes.

- 1► **Proposition 1** : VRAI. Soit n entier naturel. Comme (u_n) et (v_n) sont croissantes, les quantités $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ sont positives, donc :

$$w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0} + \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\geq 0} \geq 0$$

donc $w_{n+1} \geq w_n$, donc (w_n) est croissante.

- 2► **Proposition 2** : FAUX. Considérons pour tout n entier naturel non nul, $u_n = v_n = \frac{-1}{n}$, qui sont le terme général de suites décroissantes. Or $w_n = u_n \times v_n = \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une suite décroissante.

Correction de l'ex 9

- 1► On utilise la relation de récurrence de la suite :

- $u_1 = 0,5u_0 + 3 = 0,5 \times (-2) + 3 = 2$
- $u_2 = 0,5u_1 + 3 = 0,5 \times 2 + 3 = 4$

- 2► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 6$, et :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = (0,5u_n + 3) - 6 = 0,5u_n - 3 = 0,5(v_n + 6) - 3 = 0,5v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $0,5$, et $v_0 = u_0 - 6 = -8$.

- b► Pour tout entier n , $v_n = 0,5^n \times (-8)$.
- c► Pour tout entier n , $u_n = v_n + 6 = 6 - 8 \times 0,5^n$.

Correction de l'ex 10

- 1► Diminuer une quantité de 10% revient à la multiplier par $0,9$. Ainsi, $u_1 = 0,9 \times u_0 = 0,9 \times 50000 = 45000$. De même, $u_2 = 0,9 \times u_1 = 0,9 \times 45000 = 40500$.
- 2► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9 \times u_n$.
- b► La suite (u_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $u_0 = 50000$.
- c► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,9^n \times 50000$.
- 3► la suite (u_n) est géométrique de raison inférieure à 1, elle est donc décroissante.

- 4► L'année 2025 est 10 ans après l'année 2015 représentée par u_0 , on cherche donc à calculer u_{10} . D'après une question plus haut, $u_{10} = 0,9^{10} \times 50\,000 \approx 17\,434$.
- 5► On peut calculer le tableau de valeurs de (u_n) à la calculatrice et chercher le premier rang pour lequel u_n passe en-dessous de 25 000. Pour répondre algébriquement à cette question, on utilise le logarithme :

$$\begin{aligned}
 u_n &\leq 25\,000 \\
 \Leftrightarrow 0,9^n \times 50\,000 &\leq 25\,000 \\
 \Leftrightarrow 0,9^n &\leq 0,5 && (\text{car } 50\,000 > 0) \\
 \Leftrightarrow \ln(0,9^n) &\leq \ln(0,5) && (\text{car } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{+*}) \\
 \Leftrightarrow n \ln(0,9) &\leq \ln(0,5) \\
 \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} && (\text{car } \ln(0,9) < 0)
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,6$, mais n est entier, donc $n \geq 7$. Ainsi, après 7 ans, soit en 2022, la population d'abeille aura diminué de moitié.

Correction de l'ex 11

- 1► On utilise la relation de récurrence de la suite :

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright u_0 &= 4 \\
 \blacktriangleright u_1 &= 1^3 - 1 + 4 = 4 \\
 \blacktriangleright u_2 &= 2^3 - 2 + 4 = 10
 \end{aligned}$$

- 2► Pour tout n entier naturel,

$$u_{n+1} = (n+1)^3 - (n+1) + 4 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 + 4 = n^3 + 3n^2 + 2n + 4$$

- 3► Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = (n^3 + 3n^2 + 2n + 4) - (n^3 - n + 4) = 3n^2 + 3n = 3n(n+1)$$

- 4► Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = 3n(n+1) \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante.

- 5► a► La fonction u prend n en argument et renvoie la valeur de u_n .
 b► Pour $A = 100$, on obtient 5. Pour $A = 100\,000$, on obtient 47. Pour $A = 10^{10}$, on obtient 2 155.
 c► Non : il semble que quelque soit le seuil, aussi grand soit-il, la suite parvient à dépasser ce seuil.

Correction de l'ex 12

- 1► Au long terme, le rectangle tend à être complètement rempli, autrement dit la surface coloriée se rapproche de 2.

- 2► À chaque étape, la surface restante est divisée par 2 : après l'étape 1, il reste 1 m^2 , après l'étape 2, il reste $\frac{1}{2}\text{ m}^2$, après l'étape 3, il reste $\frac{1}{4}\text{ m}^2$... Après l'étape n , il reste donc $\frac{2}{2^n}\text{ m}^2$. Le fait que 99,5% de la surface soient recouverts équivaut à ce que 0,5% ne le soit pas. Ainsi, on cherche la première étape n telle que la surface passe en-dessous de 0,5% de 2, c'est-à-dire $0,01\text{ m}^2$. Autrement dit, on cherche à résoudre $\frac{2}{2^n} \leq 0,01$. Cela équivaut à $2^n \geq 200$. On peut calculer les premières puissances de 2 pour voir que $2^8 = 256$ est la première à satisfaire l'inégalité. De manière plus systématique, on utilise le logarithme : $2^n \geq 200 \Leftrightarrow n \ln(2) \geq \ln(200) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(200)}{\ln(2)} \approx 7,6$, mais n est entier donc $n \geq 8$.

Correction de l'ex 13

Pour n un entier supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$\ll 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \gg.$$

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par récurrence.

Initialisation : D'une part, $1 + 2 = 3$

D'autre part, $\frac{2(2+1)}{2} = 3$

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 2$.

On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie ; autrement dit $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie ; autrement dit que $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Par hypothèse de récurrence : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

en factorisant par $n+1$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

(Remarque : la conclusion d'Alice est un peu maigre, elle mérite d'être davantage étoffée !)

Correction de l'ex 14

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n$: « $u_n = 2^{n+1} - 1$ ».

INIT D'après l'énoncé, $u_0 = 1$, or $2^{0+1} - 1 = 1 = u_0$ donc $\mathcal{HR}_0$: « $u_0 = 2^{0+1} - 1$ » est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$ » est alors vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 1 \\ &= 2(2^{n+1} - 1) + 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

d'après la relation de récurrence de (u_n)

d'après $\mathcal{HR}_n$

HÉRÉDITÉ donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Correction de l'ex 15

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n : \langle u_n \geq 0,8 \rangle$.

D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \geq 0,8$, donc $\mathcal{HR}_0 : \langle u_0 \geq 0,8 \rangle$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \langle u_{n+1} \geq 0,8 \rangle$ est alors vraie.

$$\begin{array}{ll}
 & u_n \geq 0,8 \\
 \text{donc} & 0,5u_n \geq 0,5 \times 0,8 = 0,4 \\
 \text{donc} & \underbrace{0,5u_n + 0,4}_{=u_{n+1}} \geq 0,4 + 0,4 = 0,8 \\
 & \text{donc } u_{n+1} \geq 0,8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{d'après } \mathcal{HR}_n \\
 \text{car } 0,5 > 0
 \end{array}$$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0,8$.

Correction de l'ex 16

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$ et $v_0 = 10$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n : \langle 3 \leq v_n \leq 10 \rangle$.

D'après l'énoncé, $v_0 = 10$, et $3 \leq 10 \leq 10$, donc $\mathcal{HR}_0 : \langle 3 \leq v_0 \leq 10 \rangle$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \langle 3 \leq v_{n+1} \leq 10 \rangle$ est alors vraie.

$$\begin{array}{ll}
 & u_n \geq 0,8 \\
 \text{donc} & 0,5u_n \geq 0,5 \times 0,8 = 0,4 \\
 \text{donc} & \underbrace{0,5u_n + 0,4}_{=u_{n+1}} \geq 0,4 + 0,4 = 0,8 \\
 & \text{donc } u_{n+1} \geq 0,8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{d'après } \mathcal{HR}_n \\
 \text{car } 0,5 > 0
 \end{array}$$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq v_n \leq 10$.

Correction de l'ex 17

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n : \ll u_n = a + rn \gg$.

INIT On a $a + r = a = u_0$ d'après l'énoncé, donc $\mathcal{HR}_0 : \ll u_0 = a + r \times 0 \gg$ est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \ll u_{n+1} = a + r(n+1) \gg$ est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ &= a + rn \\ &= a + r(n+1) \end{aligned}$$

d'après la relation de récurrence de (u_n)
d'après $\mathcal{HR}_n$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + rn$.

Correction de l'ex 18

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n : \ll u_n = 2 \times 0,9^n - 3 \gg$.

INIT D'après l'énoncé, $u_0 = -1$, or $2 \times 0,9^0 - 3 = -1 = u_0$ donc $\mathcal{HR}_0 : \ll u_0 = 2 \times 0,9^0 - 3 \gg$ est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \ll u_{n+1} = 2 \times 0,9^{n+1} - 3 \gg$ est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,9u_n - 0,3 \\ &= 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 \\ &= 2 \times 0,9^{n+1} - 3 \end{aligned}$$

d'après la relation de récurrence de (u_n)
d'après $\mathcal{HR}_n$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Correction de l'ex 19

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n : \langle n \leq u_n \leq n + 3 \rangle$.

D'après l'énoncé, $u_0 = 3$ et $0 \leq 3 \leq 0 + 3$, donc $\mathcal{HR}_0 : \langle 0 \leq u_0 \leq 0 + 3 \rangle$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \langle n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 4 \rangle$ est alors vraie.

$$\begin{array}{ll}
 n \leq u_n \leq n + 3 & \text{d'après } \mathcal{HR}_n \\
 \text{donc } \frac{1}{2}n \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}(n + 3) & \text{car } \frac{1}{2} > 0 \\
 \text{donc } \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n + 1 \leq \underbrace{\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1}_{=u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(n + 3) + \frac{1}{2}n + 1 \\
 \text{donc } (n \leq)n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2, 5(\leq n + 3) \\
 \text{donc } n \leq u_{n+1} \leq n + 3
 \end{array}$$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n + 3$.

Correction de l'ex 20

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n : \langle u_n \geq n + 1 \rangle$.

D'après l'énoncé, $u_0 = 3 \geq 0 + 1$, donc $\mathcal{HR}_0 : \langle u_0 \geq 0 + 1 \rangle$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \langle u_{n+1} \geq n + 2 \rangle$ est alors vraie.

$$\begin{array}{ll}
 u_n \geq n + 1 & \text{d'après } \mathcal{HR}_n \\
 \text{donc } 5u_n \geq 5(n + 1) & \text{car } 5 > 0 \\
 \text{donc } \underbrace{5u_n - 4n - 3}_{=u_{n+1}} \geq 5(n + 1) - 4n - 3 \\
 \text{donc } u_{n+1} \geq n + 2
 \end{array}$$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$.

Correction de l'ex 21

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n$: « $u_{n+1} \geq u_n$ ».

D'après l'énoncé, $u_0 = 2$, et $u_1 = u_0 + 2 = 4 \geq u_0$, donc $\mathcal{HR}_0$: « $u_1 \geq u_0$ » est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ » est alors vraie.

$$\begin{array}{ll}
 u_{n+1} \geq u_n & \text{d'après } \mathcal{HR}_n \\
 \text{donc } \frac{1}{3}u_{n+1} \geq \frac{1}{3}u_n & \text{car } \frac{1}{3} > 0 \\
 \text{donc } \underbrace{\frac{1}{3}u_{n+1} + 2}_{=u_{n+2}} \geq \underbrace{\frac{1}{3}u_n + 2}_{=u_{n+1}} & \\
 \text{donc } u_{n+2} \geq u_{n+1} &
 \end{array}$$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, ce qui signifie que (u_n) est croissante.

Correction de l'ex 22

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$ ».

D'après l'énoncé, $u_0 = 400$, et $u_1 = 0,9u_0 + 60 = 420$, or $0 \leq 400 \leq 420 \leq 600$, donc $\mathcal{HR}_0$: « $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 600$ » est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 600$ » est alors vraie.

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600 & \text{d'après } \mathcal{HR}_n \\
 \text{donc } 0,9 \times 0 \leq 0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} \leq 0,9 \times 600 & \text{car } 0,9 > 0 \\
 \text{donc } 2 \leq \underbrace{0,9u_n + 2}_{=u_{n+1}} \leq \underbrace{0,9u_{n+1} + 2}_{=u_{n+2}} \leq 0,9 \times 600 + 2 & \\
 \text{donc } (0 \leq) 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 542 (\leq 600) & \text{donc } 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 600
 \end{array}$$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$, ce qui signifie que (u_n) est croissante.

Correction de l'ex 23

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1,9a_n(1 - a_n)$.

- 1► a► On pourrait dériver f et dresser son tableau de variations, mais on peut aussi être plus astucieux : f est une fonction polynôme de degré 2, de coefficient dominant $-1,9 < 0$ et de racines 0 et 1. En particulier, f est croissante puis décroissante, et son sommet est le milieu de ses racines, soit 0,5. Ainsi, f est croissante sur $[0; 0,5]$ puis décroissante sur $[0,5; 1]$.
 - b► L'argument précédent permet de dire que le sommet de la courbe de f est le maximum de f , et $f(0,5) = 0,475 \leq 0,5$. Donc pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq 0,5$.
- 2► Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n$: « $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 0,5$ ».

INIT D'après l'énoncé, $a_0 = 0,1$, et $u_1 = 1,9a_0(1 - a_0) = 0,171$, or $0 \leq 0,1 \leq 0,171 \leq 0,5$, donc $\mathcal{HR}_0$: « $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq 0,5$ » est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $0 \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 0,5$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

$0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 0,5$	d'après $\mathcal{HR}_n$
donc $f(0) \leq f(a_n) \leq f(a_{n+1}) \leq f(0,5)$	car f est croissante sur $[0; 0,5]$
donc $0 \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 0,475 \leq 0,5$	

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 0,5$.

3 Combinatoire et dénombrement

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Simplifier les écritures suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{A} \blacktriangleright \frac{(n+1) \times n!}{(n+2)!} & \text{C} \blacktriangleright \frac{(n+5)!}{(n+7)!} \\ \text{B} \blacktriangleright \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)} & \end{array}$$

Exercice 2

Écrire les nombres suivants à l'aide de factorielles :

$$\begin{array}{ll} \text{A} \blacktriangleright \frac{1}{3 \times 2 \times 1} & \text{C} \blacktriangleright 5 \times 4 \times 3 \times 2 \\ \text{B} \blacktriangleright 8 \times 7 \times 6 & \text{D} \blacktriangleright \frac{1}{13 \times 14} \end{array}$$

Exercice 3

Calculer à la main :

$$\begin{array}{llll} \blacktriangleright \binom{10}{1} & \blacktriangleright \binom{64}{63} & \blacktriangleright \binom{50}{1} & \blacktriangleright \binom{6}{3} \\ \blacktriangleright \binom{48}{47} & \blacktriangleright \binom{20}{2} & \blacktriangleright \binom{12}{2} & \blacktriangleright \binom{8}{4} \\ \blacktriangleright \binom{55}{0} & \blacktriangleright \binom{30}{29} & \blacktriangleright \binom{14}{14} & \blacktriangleright \binom{11}{5} \end{array}$$

Exercice 4

En utilisant la formule du coefficient binomial, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 5

On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats.

Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

Exercice 6

Quel est le nombre de manières de placer cinq personnes sur un canapé comptant cinq places ?

Exercice 7

On note $A = \{b; i; e; n\}$.

- 1► Donner tous les arrangements à deux éléments de l'ensemble A .
- 2► Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble A ?

Exercice 8

Soient A et B deux ensembles disjoints tels que $\text{card}(A) = 11$ et $\text{card}(B) = 8$.

Calculer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A \times B)$.

Exercice 9

On considère l'ensemble $F = \{a; b; c; d; e\}$.

- 1► Donner toutes les parties de F de cardinal 3.
- 2► En déduire la valeur de $\binom{5}{3}$.

Exercice 10

L'adresse IP est un numéro qui identifie chaque appareil connecté à internet. Une adresse de type IPv4 est composée de quatre nombres compris entre 0 et 255 inclus.

- 1► Est-ce suffisant pour identifier cinq milliards d'appareils de manière unique ?
- 2► De nouvelles adresses, dites IPv6, utilisant six nombres compris entre 0 et 255 inclus voient le jour. Combien d'adresses IPv6 existe-t-il ? Arrondir à 10^{10} .

Exercice 11

Vrai ou faux ? Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$$

Exercice 12

En informatique, un octet est composé de huit valeurs qui sont soit 0 soit 1.

Combien y a-t-il d'octets possibles ? Contenant exactement quatre 1 ?

Je comprends mon cours

Exercice 13

Quinze personnes se rencontrent : chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Combien y a-t-il de poignées de main échangées ?

Exercice 14

On considère l'ensemble $A = \{7 ; 8 ; 9\}$. Énumérer toutes les parties de A .

Exercice 15

Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire.

Combien de comités différents peut-elle élire ?

Exercice 16

Déterminer le nombre de façons de ranger quatre livres sur deux étagères.

Exercice 17

Au championnat du monde d'athlétisme, la finale de saut à la perche se joue entre huit athlètes. Combien y a-t-il de classements possibles sans ex-æquo ? Justifier.

Exercice 18

Dix coureuses participent à la finale du 100 mètres. Toutes arrivent et il n'y a pas d'ex-æquo. Combien y a-t-il de podiums possibles ? Justifier.

Exercice 19

Un lycée compte 150 élèves en terminale. Parmi eux, 90 sont des filles, dont 70 suivent la spécialité maths. Par ailleurs, 20 garçons ne la suivent pas. Déterminer le nombre de garçons qui suivent la spécialité maths en terminale.

Exercice 20

En France, les préfixes des numéros de téléphone sont attribués à des opérateurs téléphoniques. Orange possède tous les numéros commençant par 06 7 et 06 8. Combien cela représente-t-il de numéros ?

Exercice 21

Sur une grille de seize cases, on souhaite placer six pions, indiscernables les uns des autres. Une case ne peut comporter qu'un seul pion au maximum. De combien de manières peut-on procéder ?

Exercice 22

Combien existe-t-il de codes, de quatre chiffres, pour une carte bancaire ?

(Bonus : exclure les codes à quatre chiffres identiques, ou les suites de quatre chiffres consécutifs, croissantes ou décroissantes.)

Exercice 23

Au jeu du 421, on jette trois dés simultanément. Le but est de réaliser des combinaisons qui rapportent un certain nombre de points. Le plus grand score est obtenu avec un 4, un 2 et un 1, et le plus petit avec un 2, un autre 2 et un 1. Un brelan est l'obtention de 3 dés identiques.

- 1► De combien de façons peut-on obtenir le plus grand score ?
- 2► De combien de façons peut-on obtenir le plus petit score ?
- 3► De combien de façons peut-on obtenir un brelan ?

Exercice 24

Combien peut-on former d'anagrammes du mot « LAITUE » ? et du mot « FEMMES » ?

Objectif Bac

Exercice 25 (BAC 2024)

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

- 1► Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
- 2► Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
- 3► On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 . Déterminer la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 .

Exercice 26

Chaque semaine, un jeu de Loto sportif propose une grille avec 15 rencontres de football. Le jeu consiste à pronostiquer les résultats des 7 premiers matchs de la liste (jeu à 7) ou des 15 matchs (jeu à 15). Pour chaque match, trois réponses sont possibles : l'équipe 1 gagne (réponse « 1 »), les équipes 1 et 2 font match nul (réponse « N »), l'équipe 2 gagne (réponse « 2 »). Le parieur coche une seule des trois cases pour chaque match.

- 1► De combien de façons différentes peut-on remplir une grille pour le jeu à 7 ? pour le jeu à 15 ?
- 2► Pour le jeu à 7, on « gagne » à partir de 6 réponses exactes et pour le jeu à 15 à partir de 12. Combien y a-t-il de grilles gagnantes pour le jeu à 7 ? pour le jeu à 15 ?
- 3► En répondant au hasard, quelles sont les probabilités de gagner au jeu à 7 ? Et au jeu à 15 ? Arrondir au premier chiffre significatif.

Exercice 27

On constitue une main de 8 cartes à partir d'un jeu de 32 cartes. Combien peut-on faire de mains contenant au moins une carte de pique ?

Exercice 28

On dispose des chiffres "0", "1", "2" et "3".

- 1► Combien de nombres à quatre chiffres distincts peut-on construire à partir de ces quatre chiffres :

- a► en autorisant le "0" en première position ?
- b► en interdisant le "0" en première position ?

- 2► Combien de nombres à trois chiffres distincts peut-on constituer à partir de ces quatre chiffres :

- a► en interdisant le chiffre "0" en première position ?
- b► en autorisant le chiffre "0" en première position et en obligeant le nombre obtenu à être multiple de 3 ?

Exercice 29

L'entrée d'un immeuble est commandée par un digicode qui possède 10 chiffres et 4 lettres. Un code comporte cinq éléments : trois chiffres suivis de deux lettres.

- 1► Combien y a-t-il de codes possibles ?
- 2► Combien de codes commencent par le chiffre 0 ?
- 3► Combien de codes commencent par trois chiffres identiques ?
- 4► Combien de codes ont deux lettres identiques ?

Exercice 30

Lors de l'oral d'un concours, un candidat choisit deux sujets aléatoirement dans une banque publique de 80 sujets.

- 1► Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- 2► Dans le cas où le candidat a préparé 10 des 80 sujets, quel est le nombre de tirages possibles comportant au moins l'un des sujets qu'il a préparé ?
- 3► Quel est le nombre minimal de sujets qu'il aurait dû préparer pour que plus de neuf tirages sur dix contiennent au moins l'un des sujets révisés ?

Exercice 31

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

- 1► Combien de façons y a-t-il de constituer ce groupe ?
- 2► Combien y en a-t-il ne comportant que des hommes ?
- 3► Combien y en a-t-il ne comportant que des personnes de même sexe ?
- 4► Combien y en a-t-il comportant au moins une femme et au moins un homme ?

Vers le supérieur

Exercice 32

Soit $A = \{M; A; T; H; S\}$ et $B = \{0; 1\}$.

- 1► Énumérer tous les éléments de $A \times B$.
- 2► En déduire $\text{card}(A \times B)$.

Exercice 33

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2n}{k}$ est maximal pour $k = n$. (Indication : étudier le quotient de $\binom{2n}{k}$ par $\binom{2n}{n}$.)

Exercice 35

Un sac contient cinq jetons blancs et trois noirs. On tire trois jetons simultanément dans le sac. Quelle est la probabilité de tirer trois jetons de la même couleur ?

Exercice 36

Soient k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k < n$. Montrer que :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 37

Le sélectionneur de l'équipe de France de football doit choisir les onze joueurs qui débiteront un match. Il a 23 joueurs à sa disposition.

- 1► Sans prendre en compte le poste de chaque joueur, combien d'équipes peut-il former ?
- 2► Parmi les 23 joueurs, on trouve trois gardiens, huit défenseurs, cinq milieux de terrain et sept attaquants. Sachant que l'équipe sera composée d'un gardien, de quatre défenseurs, de trois milieux de terrain et de trois attaquants, combien d'équipes le sélectionneur peut-il former avec ces nouvelles contraintes ?

Exercice 38

Soient A et E deux ensembles finis tels que $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble $E \setminus A$, parfois noté $\overline{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E , et qui regroupe tous les éléments de E qui ne sont pas dans A .

- 1► Justifier que $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- 2► Justifier que $A \cup \overline{A} = E$.
- 3► Démontrer que :

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

Exercice 39

Soient A et B deux ensembles finis. La *différence* de A et B est l'ensemble noté $A \setminus B$ qui contient tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B .

- 1► Faire un dessin représentant deux ensembles A et B qui s'intersectent. Sur ce dessin, représenter $A \cap B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.
- 2► Que vaut $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$?
- 3► En déduire que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Exercice 40

Soient A et B deux ensembles finis. La *différence symétrique* de A et B est l'ensemble noté $A \Delta B$ qui contient tous les éléments qui sont soit dans A , soit dans B , mais pas dans les deux à la fois.

- 1► Faire un dessin représentant deux ensembles A et B qui s'intersectent. Sur ce dessin, représenter $A \Delta B$.
- 2► Justifier que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- 3► En déduire une définition de $A \Delta A$.
- 4► Démontrer que $\text{card}(A \Delta B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\text{card}(A \cap B)$.

Corrections

Parfois, le détail des calculs n'est pas détaillé. Sur une copie, il faut tout écrire et expliquer. Ici, on économise de la place. Pour plus de détails sur les calculs, consultez une source extérieure. ✨

Correction de l'ex 1

$$\begin{aligned}
 \text{A} \triangleright (n+1) \times n! &= (n+1) \times n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = (n+1)! \\
 \text{B} \triangleright \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)} &= \frac{\cancel{(n+2)} \times \cancel{(n+1)} \times n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{\cancel{(n+2)} \times \cancel{(n+1)}} = n! \\
 \text{C} \triangleright \frac{(n+5)!}{(n+7)!} &= \frac{\cancel{(n+5)} \times \cancel{(n+4)} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{(n+7) \times (n+6) \times \cancel{(n+5)} \times \cancel{(n+4)} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = \frac{1}{(n+7)(n+6)}
 \end{aligned}$$

Correction de l'ex 2

$$\begin{aligned}
 \text{A} \triangleright \frac{1}{3 \times 2 \times 1} &= \frac{1}{3!} \\
 \text{B} \triangleright 8 \times 7 \times 6 &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times \color{red}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\color{red}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{8!}{5!} \\
 \text{C} \triangleright 5 \times 4 \times 3 \times 2 &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \color{red}{1} = 5! \\
 \text{D} \triangleright \frac{1}{13 \times 14} &= \frac{\color{red}{12 \times 11 \times \cdots \times 2 \times 1}}{14 \times 13 \times \color{red}{12 \times 11 \times \cdots \times 2 \times 1}} = \frac{12!}{14!}
 \end{aligned}$$

Correction de l'ex 3

Commençons par évacuer les « 0 parmi... » et « 1 parmi... » et leurs symétriques, qui ne nécessitent aucun calcul :

$$\binom{55}{0} = 1 \quad \binom{14}{14} = 1 \quad \binom{10}{1} = 10 \quad \binom{48}{47} = 48 \quad \binom{64}{63} = 64 \quad \binom{30}{29} = 30 \quad \binom{50}{1} = 50$$

Pour les autres, on utilise la formule avec les factorielles :

$$\begin{aligned}
 \triangleright \binom{20}{2} &= \frac{20!}{18!2!} = \frac{20 \times 19 \times \cancel{18} \times \cancel{17} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{1}}{\cancel{18} \times \cancel{17} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{1} \times 2 \times 1} = \frac{20 \times 19}{2} = 10 \times 19 = 190 \\
 \triangleright \binom{12}{2} &= \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{1}}{\cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{1} \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{12 \times 11}{2} = 6 \times 11 = 66 \\
 \triangleright \binom{6}{3} &= \frac{6!}{3!3!} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 5 \times 4 = 20 \\
 \triangleright \binom{8}{4} &= \frac{8!}{4!4!} = \frac{\cancel{8} \times 7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{4} \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3} = 7 \times 2 \times 5 = 7 \times 10 = 70 \\
 \triangleright \binom{11}{5} &= \frac{11!}{5!6!} = \frac{11 \times \cancel{10} \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{6} \times 4 \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 11 \times 3 \times 2 \times 7 = 11 \times 42 = 462
 \end{aligned}$$

Correction de l'ex 4

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-1)} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-1)} \times \cancel{\cdots} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times 2 \times 1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Correction de l'ex 5

- Pour le premier lancer, il y a 2 choix.
- Pour le deuxième lancer, il y a 2 choix.
- ...
- Pour le k -ième lancer, il y a 2 choix.

► ...

- Pour le dixième lancer, il y a 2 choix.

Il y a donc $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{10}$ listes ordonnées possibles.

Correction de l'ex 6

- Pour la première place, il y a 5 possibilités.
- Pour la deuxième, il n'y en a plus que 4 puisqu'une personne est assise.
- Pour la troisième, il n'y en a plus que 3 puisque deux personnes se sont assises.
- Pour la quatrième, il n'y en a plus que 2 puisque trois personnes se sont assises.

- Pour la cinquième, il n'y en a plus que 1 puisque quatre personnes se sont assises.

Il y a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ possibilités.
(Remarque : il s'agit d'une permutation : il s'agit de compter toutes les manières d'ordonner ces cinq personnes.)

Correction de l'ex 7

- 1► Arrangements : pas de répétition, l'ordre compte.

$\{(b, i) ; (b, e) ; (b, n) ; (i, e) ; (i, n) ; (e, n) ; (i, b) ; (e, b) ; (n, b) ; (e, i) ; (n, i) ; (n, e)\}$

- 2► L'ensemble A contient 4 éléments, donc admet $4! = 24$ permutations.

L'exercice ne le demandait pas, mais si on veut les énumérer, il faut s'organiser : on a regroupé ci-dessous toutes les permutations commençant par un même lettre avec des couleurs. Chaque couleur est divisée en trois lignes, selon la deuxième lettre. Après avoir classé par première et deuxième lettres, il ne reste que deux possibilités !

► <i>bien</i>	► <i>bine</i>	► <i>iben</i>	► <i>ibne</i>	► <i>ebin</i>	► <i>ebni</i>	► <i>nbie</i>	► <i>nbei</i>
► <i>beil</i>	► <i>beni</i>	► <i>iebn</i>	► <i>ienb</i>	► <i>eibn</i>	► <i>einb</i>	► <i>neib</i>	► <i>nebi</i>
► <i>bnie</i>	► <i>bnei</i>	► <i>ineb</i>	► <i>inbe</i>	► <i>enib</i>	► <i>enbi</i>	► <i>nibe</i>	► <i>nieb</i>

Correction de l'ex 8

Les ensembles A et B sont disjoints donc $\text{card}(A \cap B) = 0$, donc d'après la formule du crible, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 11 + 8 - 0 = 19$.

Sans nécessiter aucune hypothèse, $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B) = 11 \times 8 = 88$.

Correction de l'ex 9

- 1► Parties d'un ensemble : pas de répétition, pas d'ordre. Pour s'organiser, plutôt que de choisir les trois lettres à garder, on peut choisir les deux lettres à écarter. On scinde la liste en deux camps : les parties qui écartent le a et celles qui ne l'écartent pas. Dans le premier camp, il y a 4 parties, excluant chacune des autres lettres. Dans le second, on peut scinder en deux sous-camp, selon l'exclusion ou non du b . Et on répète jusqu'à avoir terminé.

► $\{\cancel{a}; \cancel{b}; c; d; e\}$	► $\{\cancel{a}; b; c; \cancel{d}; e\}$	► $\{\underline{a}; \cancel{b}; \cancel{c}; d; e\}$	► $\{\underline{a}; \cancel{b}; c; d; \cancel{e}\}$	► $\{\underline{a}; \underline{b}; \cancel{c}; d; \cancel{e}\}$
► $\{\cancel{a}; b; \cancel{c}; \cancel{d}; e\}$	► $\{\cancel{a}; b; c; d; \cancel{e}\}$	► $\{\underline{a}; \underline{b}; c; \cancel{d}; \cancel{e}\}$	► $\{\underline{a}; \underline{b}; c; \cancel{d}; e\}$	► $\{\underline{a}; \underline{b}; \cancel{c}; \cancel{d}; e\}$

- 2► Par définition, $\binom{5}{3}$ est le nombre de parties à 3 éléments d'un ensemble de cardinal 5. C'est précisément la situation de la question précédente, donc $\binom{5}{3} = 10$.

Correction de l'ex 10

- 1► Le premier nombre a 256 (attention ! pas 255) possibilités, le deuxième également, etc. Il y a donc $256 \times 256 \times 256$ possibilités. La calculatrice permet de conclure que la réponse est non.
 Fun fact : une approximation très classique est de dire que $2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$. Comme $256 = 2^8$, le nombre à estimer est $(2^8)^4 = 2^{32} = 2^2 \times (2^{10})^3 \approx 2^2 \times (10^3)^3 = 4 \times 10^9$. Il y a donc environ 4 milliards d'adresses IPv4.
- 2► Similairement à la question précédente, on calcule $256^6 \approx 28\,147 \times 10^{10}$.

Correction de l'ex 11

Faux : pour $n = 1$, $\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$.

Correction de l'ex 12

- Pour la première valeur, il y a 2 choix.
- Pour la deuxième valeur, il y a 2 choix.
- ...
- Pour la k -ième valeur, il y a 2 choix.
- ...
- Pour la dixième valeur, il y a 2 choix.

Il y a donc $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^8 = 256$ octets possibles.

Pour choisir un octet contenant exactement quatre 1, on peut choisir la position des quatre 1 et remplir le reste de 0. Les 1 sont tous interchangeables, et on ne peut pas placer deux 1 à une même position (absence de répétition) : une combinaison permet donc de dénombrer les possibilités. Il y a 4 éléments à choisir et 8 positions, donc $\binom{8}{4} = 70$ octets contenant exactement quatre 1.

Correction de l'ex 13

Allez voir la vidéo de El JJ « [Deux \(deux ?\) minutes pour... les nombres de Catalan \(4:48\)](#) ».

Correction de l'ex 14

Il faut s'organiser : on va classer les parties selon leur cardinal.

- Partie de cardinal 0 : $\emptyset$
- Parties de cardinal 1 : $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$
- Parties de cardinal 2 : $\{7; 8\}$, $\{7; 9\}$, $\{8; 9\}$
- Partie de cardinal 3 : $\{7; 8; 9\}$

Correction de l'ex 15

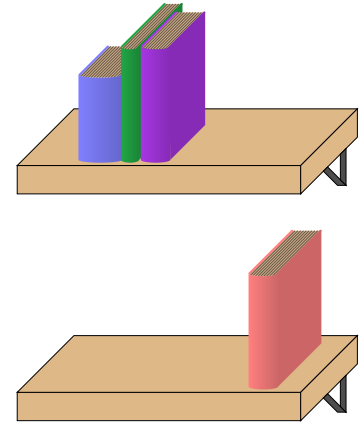
Il s'agit de choisir 4 éléments distincts (sans répétition) dans un ensemble à 20 éléments. Les rôles du comité ne sont pas interchangeables (l'ordre compte). Il s'agit donc d'un arrangement de 4 parmi 20.

$$\mathcal{A}_{20}^4 = \frac{20!}{16!} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116\,280$$

Correction de l'ex 16

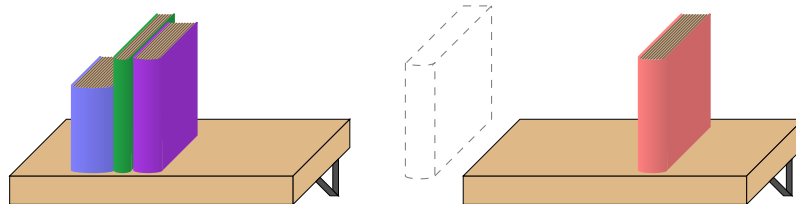
Deux manières de résoudre ce problème :

- Par disjonction de cas : on sépare les cas selon le nombre de livres sur la première étagère.
 - S'il y a 0 livre sur la première étagère : il faut en ranger 0 sur la première étagère (1 possibilité : ne rien faire !) et 4 sur la deuxième étagère ($4! = 24$ possibilités ; il s'agit d'ordonner 4 éléments, c'est une permutation). Au total, $1 \times 24 = 24$ possibilités.
 - S'il y a 1 livre sur la première étagère : il faut choisir le livre qui ira sur la première étagère ($\binom{4}{1} = 4$ choix) puis le ranger (1 possibilité). On range ensuite les 3 autres sur la deuxième étagère ($3! = 6$ possibilités). Au total, $4 \times 1 \times 6 = 24$ possibilités.
 - S'il y a 2 livres sur la première étagère : il faut choisir les 2 livres qui iront sur la première étagère ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités) puis les ranger ($2! = 2$ possibilité). On range les 2 livres restants sur la deuxième étagère ($2! = 2$ possibilités). Au total, $6 \times 2 \times 2 = 24$ possibilités.
 - S'il y a 3 livres sur la première étagère : il faut choisir les 3 livres qui iront sur la première étagère ($\binom{4}{3} = 4$ choix) puis les ranger ($3! = 6$ possibilités). On range le livre restant sur la deuxième étagère (1 possibilité). Au total, $4 \times 6 \times 1 = 24$ possibilités.
 - S'il y a 4 livres sur la première étagère : il faut en ranger 4 sur la première étagère ($4! = 24$ possibilités) et 0 sur la deuxième étagère (1 possibilité : ne rien faire !). Au total, $24 \times 1 = 24$ possibilités.



Au total, il y a donc $24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 120$ possibilités.

- Astucieusement : imaginons un cinquième livre fantôme. Une fois les 5 livres ordonnés, on place les livres à sa gauche (éventuellement, aucun livre) sur la première étagère dans le même ordre, et ceux à sa droite sur la seconde étagère dans le même ordre. Ainsi, ce livre fantôme permet de choisir simultanément quels livres vont sur quelle étagère, et dans quel ordre on range chaque étagère. Comme il y a $5! = 120$ manière d'ordonner les 5 livres, il y a donc 120 façons de ranger 4 livres sur 2 étagères.



Correction de l'ex 17

Comme il n'y a pas d'ex-æquo, deux athlètes ne peuvent pas occuper le même rang, autrement dit il n'y a pas de répétition. Il s'agit donc d'ordonner les 8 athlètes : c'est une permutation. Il y a $8! = 40\,320$ classements possibles.

Correction de l'ex 18

Comme il n'y a pas d'ex-æquo, deux coureuses ne peuvent pas occuper le même rang, autrement dit il n'y a pas de répétition. Les rangs sur le podium ne sont pas interchangeables : c'est un arrangement. Il y a 10 candidates, et seulement 3 places, le nombre de podiums possible est donc $\mathcal{A}_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

Remarque : on peut raisonner sans arrangement. Pour la médaille d'or, il y a 10 candidates. Pour la médaille d'argent, il n'y en a plus que 9 puisqu'une coureuse a déjà été sélectionnée. De même, pour la médaille de bronze, il y a 8 candidates. Il y a donc $10 \times 9 \times 8$ possibilités.

Correction de l'ex 19

Deux manières de présenter l'exercice :

- **La mauvaise manière** : on peut nommer des ensembles et étudier leurs cardinaux. Si on note M l'ensemble des élèves suivant spé maths, $\overline{M}$ l'ensemble de ceux qui ne la suivent pas, F l'ensemble des filles et G l'ensemble des garçons, alors l'énoncé stipule que :

- $\text{card}(F) = 90$
- $\text{card}(F \cap M) = 70$
- $\text{card}(G \cap \overline{M}) = 20$
- $\text{card}(F \cup G) = 150$

(Le dernier cardinal vient du fait que F et G partitionnent l'ensemble des élèves du lycée. On aurait pu écrire $\text{card}(M \cup \overline{M}) = 150$ également.)

On cherche alors $\text{card}(G \cap M)$. On va utiliser la formule du crible à plusieurs reprises : on peut partitionner l'ensemble des garçons selon s'ils suivent la spé maths ou non, autrement dit $G \cap M$ et $G \cap \overline{M}$ sont deux ensembles disjoints dont la réunion donne G . Ainsi, $\text{card}(G) = \text{card}(G \cap M) + \text{card}(G \cap \overline{M}) = \text{card}(G \cap M) + 20$. De même, F et G sont deux ensembles disjoints, donc $150 = \text{card}(F \cup G) = \text{card}(F) + \text{card}(G) = 90 + \text{card}(G)$ donc $\text{card}(G) = 150 - 90 = 60$, donc $\text{card}(G \cap \overline{M}) = 60 - 20 = 40$.

Prenons un peu de recul sur ce qu'on vient d'écrire... Dans un excès de zèle, on a écrit de manière incompréhensible que : s'il y a 150 élèves dont 90 filles, il y a donc $150 - 90 = 60$ garçons. Si parmi les 60 garçons, 20 suivent la spé maths, alors $60 - 20 = 40$ ne la suivent pas... C'est élémentaire ! Les notations mathématiques n'apportent ici pas plus de rigueur et rendent le discours obscur, elles sont donc à éviter ! Mais ce n'est pas une généralité : parfois, elles sont pratiques... quand on n'a pas d'autre alternative !

- **La bonne manière** : il y a deux caractères (fille/garçon, spé maths ou non), on peut donc résumer les informations dans un tableau croisé d'effectifs.

	Spé	Pas spé	TOTAL
Fille	70		90
Garçons	?	20	
TOTAL			150

On voit alors très vite qu'il suffit de trouver le total de garçons en calculant $150 - 90 = 60$ et le point d'interrogation rouge que l'on cherche en faisant $60 - 20 = 40$! On pourrait même trouver toutes les autres cases du tableau...

Morale de l'histoire : pour résoudre un problème combinatoire, le plus souvent, le principal défi est de trouver la représentation adaptée. Après, ça coule tout seul !

Correction de l'ex 20

Deux manières de présenter :

- Considérons les numéros en 06 7. Il reste 7 chiffres à attribuer. L'ordre compte, et on a le droit de répéter un même chiffre : il s'agit d'une 7-liste. Chaque chiffre a 10 valeurs possibles, il y a donc 10^7 possibilités. Le raisonnement est le même pour les numéros en 06 8, il y a donc au total 2×10^7 numéros commençant par 06 7 ou 06 8.
- Pour le premier chiffre, on a 1 choix (on impose le 0). De même pour le deuxième, on a 1 choix. Pour le troisième, on a 2 choix (7 ou 8). Pour chacun des sept suivants, on a 10 choix. Il y a donc au total $1 \times 1 \times 2 \times \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{7 \text{ exemplaires}} = 2 \times 10^7$ possibilités.

Correction de l'ex 21

Les pions sont indiscernables, donc interchangeables. Deux pions ne peuvent pas occuper la même case, il n'y a donc pas de répétition : il s'agit d'une combinaison de 6 éléments parmi 16. Il y a donc $\binom{16}{6} = \frac{16!}{10!6!} = 8\,008$ possibilités.

Correction de l'ex 22

L'ordre des chiffres compte, et leur répétition est autorisée : il s'agit d'une 4-liste. Chaque chiffre a 10 possibilités, donc il y a 10^4 codes différents.

Pour choisir un code à 4 chiffres identiques, il faut et il suffit de choisir le chiffre que l'on va répéter : il y a 10 choix.

Pour choisir un code à 4 chiffres consécutifs, il faut et il suffit de choisir le premier chiffre. Attention, il n'y a que 7 possibilités : 6789 est le plus grand code permettant une suite consécutive, au-delà le dernier chiffre devait être plus grand que 9, ce qui est impossible.

Par symétrie, il y a également 7 codes aux chiffres décroissants consécutifs.

Il y a donc $8\,008 - 10 - 7 - 7 = 7\,984$ codes valides.

Correction de l'ex 23

- 1► Pour obtenir le plus grand score, il faut obtenir un 4, un 2 et un 1, indépendamment de l'ordre. Autrement dit, toutes les combinaisons gagnantes sont les permutations de 4, 2 et 1 : il y a $3! = 6$ possibilités.
- 2► Pour obtenir le plus petit score, il faut obtenir un 2, un autre 2 et un 1, indépendamment de l'ordre. Autrement dit, les combinaisons avec le plus petit score sont les manières d'ordonner 2, 2 et 1. Cela revient à choisir la position du 1 et mettre des 2 autres autres endroits : il y a 3 possibilités (122, 212, 221).
- 3► Choisir un brelan revient à choisir le numéro qui est répété : il y a 6 possibilités (111, 222, 333, 444, 555, 666).

Correction de l'ex 24

Former un anagramme d'un mot revient à permuter ses lettres.

LAITUE contient 6 lettres différentes, donc admet $6! = 720$ anagrammes.

FEMMES contient 6 lettres, mais le E et le M sont chacun présents 2 fois. Sans tenir compte de ces répétitions, il y aurait $6! = 720$ anagrammes. Mais les 2 E étant interchangeables, on a compté 2 fois trop d'anagrammes. De même pour les M. Ainsi, il y a $720 \div 2 \div 2 = 180$ anagrammes.

Correction de l'ex 25

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

- 1► On choisit 2 boules simultanément (pas de répétition – on ne choisit pas 2 fois la même boule – et l'ordre ne compte donc pas), il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ possibilités.

Il sera utile (et bon pour s'entraîner) de scinder les cas selon les couleurs du tirage. Dans les cas pertinents, on utilise une combinaison car les boules sont indiscernables, donc interchangeables.

- Tirer deux boules blanches : on en choisit 2 parmi les 6 disponibles, soit $\binom{6}{2} = 15$ possibilités.
- Tirer deux boules noires : on en choisit 2 parmi les 4 disponibles, soit $\binom{4}{2} = 6$ possibilités.
- Tirer une boules blanche et une noire : on en choisit 1 parmi les 6 blanches et 1 parmi les 4 noires, soit $\binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 24$ possibilités.

Au total, il y a donc $15 + 6 + 24 = 45$ tirages.

2► Voir ci-dessus.

3► Trois cas de figure, d'après ce qui précède :

► On tire 2 boules blanches (probabilité $\frac{15}{45}$) : l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

La probabilité de tirer une boule noire est alors $\frac{1}{6}$.

► On tire 2 boules noires (probabilité $\frac{6}{45}$) : l'urne U_2 contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches. La probabilité de tirer une boule noire est alors $\frac{3}{6}$.

► On tire 1 de chaque couleur (probabilité $\frac{24}{45}$) : l'urne U_2 contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

La probabilité de tirer une boule noire est alors $\frac{2}{6}$.

La probabilité de tirer une boule noire est donc $\frac{15}{45} \times \frac{1}{6} + \frac{6}{45} \times \frac{3}{6} + \frac{24}{45} \times \frac{2}{6} = 0,3$.

(Remarque : essayez de représenter la situation par un arbre pondéré.)

Correction de l'ex 26

1► Dans chaque jeu, on répète une sélection parmi 3 options (1, 2, N) 7 ou 15 fois, et la répétition est autorisée : c'est une liste. Il y a donc respectivement 3^7 et 3^{15} grilles différentes.

2► Pour le jeu à 7 : pour gagner, on peut soit avoir tout juste (1 grille possible), soit commettre 1 erreur. Pour choisir une grille avec exactement 1 erreur, on peut choisir l'emplacement de l'erreur (7 choix) et l'option fautive que l'on choisit pour elle (2 choix, la mauvaise équipe ou nul). Il y a donc 14 grilles avec exactement une erreur. Il y a donc 15 grilles gagnantes.

Pour le jeu à 15 : on peut répéter le raisonnement précédent pour chaque nombre d'erreurs possibles.

$$\binom{15}{0} \times 2^0 + \binom{15}{1} \times 2^1 + \binom{15}{2} \times 2^2 + \binom{15}{3} \times 2^3 = 4091$$

L'exposant de la puissance de 2 correspond au nombre d'erreurs, le coefficient binomial représente le nombre de manière de positionner les erreurs, et la puissance de 2 correspond au nombre de manières de se tromper à ces endroits-là.

3► D'après les deux questions précédentes, les probabilités de victoire au jeu à 7 et à 15 sont, respectivement :

$$\frac{15}{3^7} \approx 7 \times 10^{-3} \qquad \frac{4091}{3^{15}} \approx 3 \times 10^{-4}$$

Correction de l'ex 27

Un main est composée de 8 cartes distinctes (pas de répétition) et sans ordre particulier. Il s'agit d'une combinaison, de 8 éléments choisis parmi 32 : il y a $\binom{32}{8} = 10\,518\,300$ mains différentes.

Si l'on veut constituer une main sans carte de pique, on choisit les 8 cartes de la main parmi les 24 cartes d'une autre couleur, soit $\binom{24}{8} = 735\,471$ possibilités.

Par complémentaire, il y a $10\,518\,300 - 735\,471 = 9\,782\,829$ mains avec au moins une carte de pique.

(Remarque sur la rédaction : en « méta-analysant » ce exercice, on comprend bien que le cœur du raisonnement est de passer par le complémentaire, et non les valeurs en elles-mêmes ; aussi, il est inutile d'écrire les valeurs des deux coefficients binomiaux, et il est préférable de faire apparaître $\binom{32}{8} - \binom{24}{8}$, qui à lui seul montre que vous avez compris toutes les subtilités de l'exercice !)

Correction de l'ex 28

- 1► a► Il y a 4 chiffres disponibles, qui doivent tous être utilisés puisqu'on exige que les chiffres du code soient distincts. Ainsi, chercher un code revient à ordonner les 4 chiffres : c'est une permutation. Il y a $4! = 24$ codes.
- b► Le premier chiffre a 3 possibilités (1, 2 ou 3). Le deuxième en a 3 également puisqu'on autorise de nouveau le 0, mais on interdit de réutiliser le précédent chiffre. Pour le troisième, il ne reste que 2 candidats, et le dernier chiffre est forcé. Il y a donc $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ codes.
- 2► a► Pour le premier chiffre, il y a 3 possibilités (1, 2 ou 3). Le deuxième en a 3 également puisqu'on autorise de nouveau le 0, mais on interdit de réutiliser le précédent chiffre. Pour le troisième, il ne reste que 2 choix puisqu'on ne peut pas réutiliser les deux premiers. Il y a donc $3 \times 3 \times 2 = 18$ codes.
- b► Un nombre est multiple de 3 si, et seulement si la somme de ses chiffres l'est également.
- Si l'un des chiffres est 0, alors la somme des deux autres doit être multiple de 3. Comme les chiffres sont distincts, les seules possibilités sont 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3. Seule la première donne un multiple de 3. Ainsi, une première catégorie de codes multiples de 3 est le code 012 et ses permutations ($3! = 6$ codes).
- Si aucun chiffre n'est égal à 0, alors les trois chiffres du code sont 1, 2 et 3. La deuxième catégorie de codes multiples de 3 sont donc 123 et ses permutations ($3! = 6$ codes).
- Il y a donc $6 + 6 = 12$ codes satisfaisants.

Correction de l'ex 29

- 1► Le premier chiffres a 10 possibilités. Le deuxième et le troisième aussi. La première lettre a 4 possibilités, la seconde également. Il y a donc $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 4 \times 4 = 160\,000$ codes différents.
- 2► Le premier chiffres a 1 possibilité (le 0). Le deuxième et le troisième en ont 10. La première lettre a 4 possibilités, la seconde également. Il y a donc $1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 4 \times 4 = 16\,000$ codes différents.
- 3► Choisir un tel code revient à choisir le chiffre qui sera répété (10 choix) puis les deux lettres (4×4 choix), il y a donc $10 \times 4 \times 4 = 160$ codes satisfaisants.
- 4► Choisir un tel code revient à choisir les 3 chiffres ($10 \times 10 \times 10$ choix) et la lettre qui sera répétée (4 choix). Il y a donc $10 \times 10 \times 10 \times 4 = 400$ possibilités.

Correction de l'ex 30

- 1► Le candidat choisit 2 sujets distincts (pas de répétition) et sans ordre : c'est une combinaison. Il y a $\binom{80}{2} = 3\,160$ tirages.
- 2► Pour tirer un couple de sujets favorable, le candidat peut tirer 1 sujet parmi ceux qu'il a préparés ($\binom{10}{1}$ choix) et 1 sujet parmi le reste ($\binom{70}{1}$ choix), ou deux sujets parmi ceux qu'il a préparés ($\binom{10}{2}$ choix). Le candidat a donc $\binom{10}{1} \times \binom{70}{1} + \binom{10}{2} = 745$ tirages favorables.
- Autre méthode** : pour tirer un couple de sujets défavorable, le candidat doit piocher 2 sujets parmi les 70 non préparés ($\binom{70}{2}$ choix). Il a donc, par complémentaire, $\binom{80}{2} - \binom{70}{2}$ tirages favorables.
- 3► Soit n le nombre de sujets révisés. D'après le raisonnement précédent, le candidat a $\binom{80}{2} - \binom{80-n}{2}$ tirages favorables. Il vaut que cela excède $\frac{9}{10}$ des tirages, c'est-à-dire $\binom{80}{2} - \binom{80-n}{2} \geq \frac{9}{10} \binom{80}{2}$.
- Après avoir calculé ce qui peut l'être, on montre que cela équivaut à l'inégalité $\binom{80-n}{2} \leq 316$. D'après

l'exercice 4, on peut le réécrire $\frac{(80-n)(80-n-1)}{2} \leq 316$. Après avoir développé tout ce qui peut l'être, et en rassemblant tout dans le membre de gauche, on arrive à l'inéquation $\frac{1}{2}n^2 - 79,5n + 2844 \leq 0$. On reconnaît une fonction polynôme de degré 2 en la variable n : on peut se servir du discriminant pour trouver ses racines. On a $\Delta = 79,5^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2844$, et après quelques calculs longs et ennuyeux que la calculatrice fait très bien, on trouve environ 54,3 et 104,6 comme racines. Le coefficient dominant étant positif, cette fonction polynôme est négative entre ses racines, donc n est compris entre 54,3 et 104,6, soit entre 55 et 104 puisque n est entier. On cherche le nombre minimal de sujets à travailler, donc on choisit $n = 55$.

Correction de l'ex 31

Dans chaque question, les personnes au sein du groupe ont un rôle interchangeable, et on ne peut pas choisir deux fois la même personne : il s'agit de combinaisons. La différence dans chaque question est la population globale dans laquelle on fait la sélection.

$$1 \blacktriangleright \binom{25+32}{6} \qquad 2 \blacktriangleright \binom{32}{6} \qquad 3 \blacktriangleright \binom{32}{6} + \binom{25}{6}$$

$$1 \blacktriangleright \text{Il s'agit du complémentaire de la précédente question : } \binom{25+32}{6} - \binom{32}{6} - \binom{25}{6}$$

Correction de l'ex 32

1 ▶ Il faut s'organiser : on peut par exemple faire un tableau.

A \ B	M	A	T	H	S
0	(M; 0)	(A; 0)	(T; 0)	(H; 0)	(S; 0)
1	(M; 1)	(A; 1)	(T; 1)	(H; 1)	(S; 1)

$$2 \blacktriangleright \text{card}(A \times B) = 8 (= \text{card}(A) \times \text{card}(B)).$$

Correction de l'ex 33

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$ et $u_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$, donc :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{(2n)!}{n!n!} \\
 &= \frac{(2n+2) \times (2n+1) \times \cancel{(2n)} \times \cancel{(2n-1)} \times \cdots \times 1}{(n+1)\cancel{n!} \times (n+1)\cancel{n!}} - \frac{(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times 1}{n!n!} \\
 &= \left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} - 1 \right] \times \frac{\cancel{(2n)} \times \cancel{(2n-1)} \times \cdots \times 1}{n!n!} \\
 &= \left[\frac{(2n+2)(2n+1) - (n+1)^2}{\cancel{(n+1)^2}} \right] \times \frac{(2n)!}{n!n!} \\
 &= [(2n+2)(2n+1) - (n+1)^2] \times \frac{(2n)!}{n!n!\cancel{(n+1)^2}} \\
 &= [3n^2 + 4n] \times \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)^2} = n[3n+4] \times \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

Toutes les quantités en jeu dans les produits et quotients sont positives, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq u_n$, donc (u_n) est croissante.

Correction de l'ex 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2n}{k}$ est maximal pour $k = n$. (Indication : étudier le quotient de $\binom{2n}{k}$ par $\binom{2n}{n}$.)

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{2n}{k} > 0$ car il existe au moins une manière de choisir k objets parmi $2n$. Comme k est plus petit que n , on peut effectuer les simplifications suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}} &= \frac{\cancel{(2n)!} n! (2n-n)!}{k! (2n-k)! \cancel{(2n)!}} \\ &= \frac{n! n!}{k! (2n-k)!} \\ &= \frac{n! n!}{k! (2n-k)(2n-k-1) \cdots (2n-n+1)(2n-n)!} \\ &= \frac{\cancel{n!} n!}{k! (2n-k)(2n-k-1) \cdots (2n-n+1) \cancel{n!}} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (k+1) \cancel{k!}}{\cancel{k!} (2n-k)(2n-k-1) \cdots (n+1)} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (k+1)}{(2n-k)(2n-k-1) \cdots (n+1)} \end{aligned}$$

Combien y a-t-il de facteurs dans le numérateur et le dénominateur ? On se laisse convaincre qu'entre deux entiers a et b (avec $a \leq b$, tous deux inclus), il y a $b-a+1$ nombres. Ainsi, le numérateur contient $n-(k+1) = n-k-1$ facteurs. Le dénominateur en contient $(2n-k) - (n+1) = n-k-1$. ils en ont autant ! On peut donc les associer en paires :

$$\frac{k+1}{n+1} \times \frac{k+2}{n+2} \times \cdots \times \frac{n}{2n-k} \quad \text{qu'on peut réécrire} \quad \frac{k+1}{n+1} \times \frac{k+2}{n+2} \times \cdots \times \frac{k+(n-k)}{n+(n-k)}$$

Or $k \leq n$ donc pour tout i entre 1 et $n-k$, $k+i \leq n+i$. Ainsi, chaque quotient est plus grand que 1, donc leur produit l'est également.

On a montré que pour tout k entre 0 et n , $\binom{2n}{k}$ est plus petit que $\binom{2n}{n}$. Il en va de même pour k entre n et $2n$ par symétrie du coefficient binomial. CQFD !

Correction de l'ex 35

On pioche les jetons simultanément, donc sans ordre et sans répétition : il s'agit de combinaisons. Deux scénarios : soit on pioche les 3 jetons parmi les blancs, soit $\binom{5}{3} = 10$ possibilités, soit on pioche les 3 noirs, soit 1 possibilité.

Il y a donc 11 scénarios monochromes, sur les $\binom{8}{3} = 56$ tirages possibles et équiprobables, la probabilité d'un tirage monochrome est donc $\frac{11}{56}$.

Correction de l'ex 36

Soient k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k < n$. D'une part,

$$k \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

D'autre part,

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)(n-k)!}$$

Correction de l'ex 37

- 1► Par hypothèses, les rôles des joueurs sont interchangeables, et on ne peut pas sélectionner deux fois le même joueur : il s'agit de combinaisons. Il y a $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$ sélections possibles.
- 2► On choisit 1 gardien ($\binom{3}{1}$ choix), 4 défenseurs ($\binom{8}{4}$ choix), 3 milieux de terrain ($\binom{5}{3}$ choix) et 3 attaquants ($\binom{7}{3}$ choix). Il y a donc $\binom{3}{1} \times \binom{8}{4} \times \binom{5}{3} \times \binom{7}{3} = 117\,600$ sélections possibles.

Correction de l'ex 38

- 1► Supposons que $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Il existe donc un élément simultanément dans A et dans $\bar{A}$. Or par définition de $\bar{A}$, cet élément ne doit pas être dans A : c'est contradictoire. Donc $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- 2► Comme A et $\bar{A}$ sont des sous ensembles de E , leur union est contenue dans E . Réciproquement, si l'on considère un élément de A , alors soit il est dans A , soit il ne l'est pas, autrement dit il est soit dans A soit dans $\bar{A}$: l'emploi de la conjonction « ou » indique que cet élément appartient à $A \cup \bar{A}$. On a montré l'égalité demandée par double inclusion.
- 3► D'après la formule du crible : $\text{card}(A \cup \bar{A}) = \text{card}(A) + \text{card}(\bar{A}) - \text{card}(A \cap \bar{A})$. D'après ce qui précède, $\text{card}(A \cup \bar{A}) = \text{card}(E)$ et $\text{card}(A \cap \bar{A}) = 0$. Donc $\text{card}(E) = \text{card}(A) + \text{card}(\bar{A})$ et soustraire $\text{card}(A)$ aux deux membres donne l'égalité demandée.

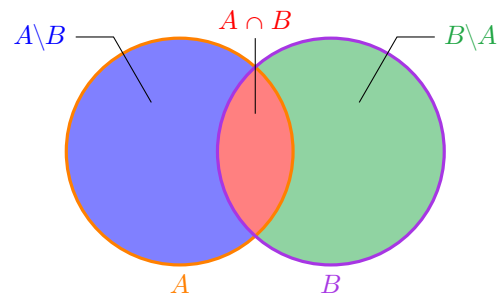
Correction de l'ex 39

- 2► $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$: il s'agit de la réunion de la partie bleue et de la rouge.
- 3► L'union de la question précédente est disjointe. On ne peut pas utiliser la formule du crible puisque c'est celle qu'on cherche à démontrer. On sait cependant que le cardinal d'une union disjointe est égal à la somme des cardinaux. Ainsi, $\text{card}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$. D'après la question 2►, on peut le réécrire $\text{card}(A) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$.

En échangeant les rôles de A et B , on montre que $\text{card}(B) = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(B \cap A)$. En ajoutant ces deux égalités, on obtient :

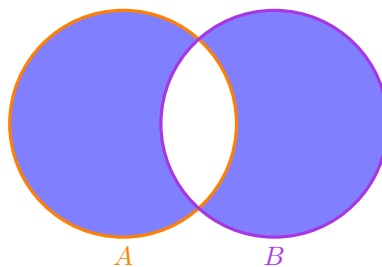
$$\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$$

Or $A \setminus B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont trois parties disjointes donc l'union donne $A \cup B$ (sur le diagramme de Venn, ce sont les régions bleue, rouge et verte). Ainsi, $\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$, puis $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.



Correction de l'ex 40

- 2► Cette égalité découle de la définition de la différence symétrique : la différence symétrique de A et B (notée $A\Delta B$) est l'ensemble des éléments qui sont soit dans A , soit dans B (c'est-à-dire dans $A \cup B$) mais qui ne sont pas dans les deux à la fois (privé de $A \cap B$).
- 3► En vertu de la formule précédente, $A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.
- 4► En vertu des exercices précédents, comme $A \cap B \subseteq A \cup B$ (si je suis dans A et B , alors je suis dans A ou B) :



$$\begin{aligned}
 \text{card}(A\Delta B) &= \text{card}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \\
 &= \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) \\
 &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap B) \\
 &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\text{card}(A \cap B)
 \end{aligned}$$

4 Équations différentielles

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Dans chaque cas déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par l'expression donnée (on se souciera de l'intervalle).

1► $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

2► $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

3► $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$

4► $f(x) = 2025$

5► $f(x) = x - 1$

6► $f(x) = x^2 + 2$

7► $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$

8► $f(x) = \frac{2}{x^2}$

9► $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x^2}$

10► $f(x) = \frac{3x-2}{x^3}$

11► $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$

12► $f(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$

13► $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^3}$

14► $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$

15► $f(x) = 2e^{2x}$

16► $f(x) = e^{1-3x}$

17► $f(x) = -xe^{x^2-1}$

18► $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

19► $f(x) = \frac{e^x}{e+2}$

20► $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

21► $f(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 2

Déterminer la primitive F des fonction suivantes (on se souciera de l'intervalle) vérifiant la condition donnée.

1► $f(x) = x^3 - 2x$; $F(0) = 2$

2► $f(x) = -\frac{2}{x^2} + x - 1$; $F(1) = \frac{1}{2}$

3► $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x/2}$; $F(0) = \frac{1}{2}$

4► $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - x + \frac{1}{2}$; $F(-1) = -\frac{1}{2}$

5► $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$; $F(0) = -\frac{1}{16}$

6► $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $F(2) = 2$

Exercice 3

Pour chaque équation différentielle, montrer que g en est une solution particulière.

1► $y' - 3y = 2e^{1-x}$ et $g(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x}$

2► $y' = y + x$ et $g(x) = -x - 1$

3► $y' - 3y = 3x^2 + x + 2$ et $g(x) = -x^2 - x - 1$

4► $y' = y + \cos(x)$ et $g(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1► $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3► $y' = \frac{1}{x^3}$

5► $y' = 3x^2 + 2x + 1$

7► $y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-5}}$

2► $y' = e^x$

4► $y' = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

6► $y' = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$

8► $y' = \frac{2x^3-3x^2+2}{x^5}$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1► $y' = 3y$

3► $y' = \frac{3}{2}y$

5► $4y' - 3y = 0$

8► $2y' - 3y = 8y + 4y'$

2► $y' = -2y$

4► $3y' + 2y = 0$

6► $y' + 2y = 0$

7► $3y' - y = 0$

9► $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 6

Déterminer l'unique solution de chaque équation différentielle satisfaisant la condition initiale donnée :

1► $y' = x - 1$ avec $y(1) = -1$

5► $2y' + 3y = 0$ avec $y(2) = 1$

2► $y' + \sqrt{2}y = 0$ avec $y(\sqrt{2}) = 1$

6► $5y' - 2y = 0$ avec $y(5) = e$

3► $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $y(0) = 5$

7► $y = -5y'$ avec $y(-2) = 1$

4► $y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 2$

8► $y + 2y' = 0$ avec $y(-2) = \frac{1}{2}$

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1► $y' = 2y + 3$

4► $\sqrt{2}y' = \sqrt{6}y - 1$

7► $y + 3y' = 2$

10► $y' + y = 3$

2► $2y' - y = 2$

5► $y' + 3y = 2$

8► $y' = 2$

3► $2y' + 3y = 2$

6► $y' = 2y + 1$

9► $y' = 5y + 2$

11► $4y' + y - 5 = 0$

Exercice 8

Montrer que $\phi : x \mapsto 3x - 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 9x$, puis déterminer toutes les solutions de (E) .

Je comprends mon cours

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $I =]0; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}.$$

1► Déterminer les réels a et b tels que, pour tout

$$x \in I, f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $I =]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 2}{(x+2)^2}.$$

1► Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$.

2► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $I =]-1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

- 1► Factoriser $x^2 - 1$.
- 2► Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$.
- 3► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $I =]-1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

- 1► Démontrer que pour tout $x \in I$,

$$x^2 + 1 = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + (x-1)^2].$$
- 2► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 13

Pour chaque fonction f , déterminer une équation différentielle dont f est solution.

- 1► $f : x \mapsto 0$
- 2► $f : x \mapsto e^x$
- 3► $f : x \mapsto 3e^{-3x}$
- 4► $f : x \mapsto 3e^{-2x} - 4$

Exercice 14

- 1► Résoudre l'équation $5y' - y = 4$.
- 2► Déterminer la solution qui prend la valeur 5 en -5 .
- 3► On considère la fonction $f : x \mapsto -4 - e^{\frac{1}{5}x-1}$
 - a► Vérifier que f satisfait l'équation différentielle et $f(5) = -5$.
 - b► Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
 - c► Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 15

Dans un environnement où la température est maintenue à 0°C , la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la température de cet objet. Un objet chauffé à 100°C voit sa température chuter à 45°C en 10 minutes. On note $T(t)$ la température (en $^\circ\text{C}$) de l'objet après t minutes.

- 1► Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction T (on rappelle que la (vitesse de) varia-

tion de T est représentée par T').

- 2► Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle et satisfaisant les données de l'énoncé.
- 3► En combien de temps la température de cet objet atteindra-t-elle 25°C ? Arrondir à la minute.

Exercice 16

Le nombre de bactéries B d'une culture passe de 600 à $t = 0$ à 1800 en 2 heures. On suppose que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes.

- 1► Trouver :
 - a► Une équation avec des conditions qui traduisent le problème.
 - b► Une formule qui permet de calculer le nombre de bactéries $B(t)$ à l'instant t .
 - c► Le nombre de bactéries après 4 heures.
 - d► Le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.
- 2► Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il donne le résultat attendu à la question 1d►.

```
t = 0
B = 600
while ... 12000:
    t = ...
```

Exercice 17

On considère les deux équations suivantes :

$$(E) : y' - \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) y = \sin(x)$$

$$(E') : y' - y = 1$$

- 1► Donner l'ensemble des solutions de (E') .
- 2► Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et telles que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$f(x) = g(x) \sin(x).$$

Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si g est solution de (E') .

- 3► Déterminer l'unique solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 18

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 3y = e^{3x}$$

- 1► Résoudre l'équation homogène associée.
- 2► Vérifier que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = xe^{3x}$ est une solution particulière de (E) .
- 3► En déduire la forme générale des solutions de (E) .
- 4► Déterminer la solution y de (E) telle que :

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = e.$$

Exercice 19

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 3y = e^{2x}$$

- 1► Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ est une solution particulière de (E) .
- 2► Résoudre l'équation (E) .
- 3► Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Objectif Bac**Exercice 20 (BAC 2010)****Partie I**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

- 1► Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = xe^{-x}.$$

Vérifier que u est solution de (E) .

- 2► On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
Résoudre (E') sur $\mathbb{R}$.
- 3► En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
- 4► Déterminer l'unique solution g de (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.

On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}$$

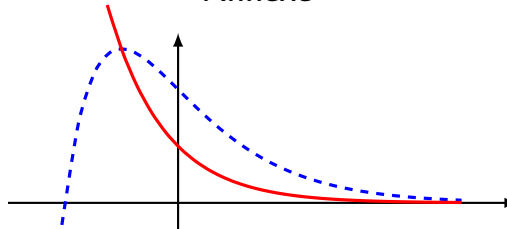
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal, et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h .

On a représenté en annexe les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_k$ sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

- 1► Sur le graphique en annexe, identifier la courbe $\mathcal{C}$.
- 2► En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe l'unité de chaque axe.

Annexe

Exercice 21 (BAC 2024)

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 1► Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
- 2► On considère l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

- 3► En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 4► Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Vers le supérieur

Exercice 22

Résoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une solution particulière ϕ de la forme indiquée.

- 1► $2y' + y = x + 1$ et $\phi(x) = mx + p$
- 2► $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ et $\phi(x) = ax^2 + bx + c$
- 3► $y' + y = (3 - 2x)e^x$ et $\phi(x) = (mx + p)e^x$

Exercice 23 (Vrai/faux)

La solution de l'équation différentielle $y' - 4y = 0$ qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = y_0 + e^{4(x-x_0)}$.

Exercice 24 (Vrai/faux)

- 1► La fonction constante égale à 0 est solution de toutes les équations de la forme $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$.
- 2► Les solutions non nulles de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel strictement positif, ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 25

Lors de la chute d'un objet de masse m sur Terre, une force de frottement due à la résistance de l'air s'applique à cet objet. L'intensité de cette force peut être considérée proportionnelle à la vitesse instantanée v de l'objet.

L'objet est lâché au temps $t = 0$. La chute étant verticale, le principe fondamental de la dynamique de Newton permet d'écrire la relation :

$$m \times a(t) = m \times g - k \times v(t)$$

où la fonction a représente l'accélération de l'objet en fonction du temps t , g est la constante qui désigne l'accélération de la pesanteur et k est une constante positive. On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $a(t) = v'(t)$.

- 1► Déterminer une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y + \beta$ vérifiée par v où α et β sont des constantes réelles.
- 2► Résoudre cette équation sur $[0; +\infty[$, puis exprimer v en fonction de t en considérant que la vitesse initiale de l'objet est nulle.

Exercice 26

Une colonie de 2 000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t \geq 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle :

$$(E) : N'(t) = 3N(t) - 0,005(N(t))^2$$

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de se ramener à la résolution d'une équation différentielle plus simple à résoudre.

On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$.

- 1► On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction g par $g(t) = \frac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.
- 2► Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de :

$$(F) : y' = -3y + 0,005.$$

- 3► Résoudre (F) .
- 4► Résoudre (E) .
- 5► a► Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale de l'énoncé.
b► Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures (arrondir à l'unité).

Exercice 27

On note $N(t)$ le nombre d'éléments radioactifs dans un échantillon à un instant t , et N_0 la quantité initiale. La loi de désintégration radioactive stipule l'existence d'une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $t > 0$,

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

Le temps de demi-vie d'une espèce radioactive est la durée $t_{\frac{1}{2}}$ nécessaire pour que le nombre d'éléments radioactifs soit réduite de moitié par rapport à l'instant initial.

Montrer que $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

Corrections

Souvent, le détail des calculs de dérivées, notamment l'identification de la formule usuelle en jeu et de ses composants, n'est pas détaillé. Sur une copie, il faut tout écrire. Ici, on économise de la place. Pour plus de détails sur les calculs, consultez une source extérieure. ✨

Correction de l'ex 1

- Commentaire pour les solutions avec deux intervalles : attention, écrire « sur $]0; +\infty[$ ou sur $] - \infty; 0[$ » n'est pas la même chose qu'écrire « sur $] - \infty; 0[\cup]0; +\infty[$ » : dans le premier cas, on se restreint à l'un des deux intervalles, mais il faut choisir soit l'un soit l'autre ; dans le second, on se place sur une union d'intervalles, qui n'est pas un intervalle.

- Commentaire pour les fonctions de la forme $\frac{1}{x^n}$: une méthode systématique est d'écrire :

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \xrightarrow{\text{primitive}} \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}$$

- Commentaire pour les fonctions de la forme $\frac{u'}{u^n}$: lire le commentaire précédent.
- Commentaire pour les fonctions de type $\sqrt{u}$, e^u ou u^n : identifiez u , appliquez la formule de dérivation de $\sqrt{u}$, e^u ou u^n . Comparez le résultat à la fonction que vous avez, et jouez au jeu des différences : il vous suffit de trouver par quel nombre multiplier votre solution pour retomber sur la bonne fonction. Par exemple, si vous trouvez $3xe^{x^2}$ et que vous deviez avoir $6xe^{x^2}$, multipliez votre primitive par 2.
- Commentaire pour les fonctions de la forme $u(x+a)$ avec u une fonction du tableau de primitives : remplacez x par $x+a$ partout dans le tableau de formules, ça marche pareil.
- Commentaire pour la question 19►► : attention, le e au dénominateur ne dépend pas de x , c'est une constante ! Vous cherchez la primitive d'une forme ke^x .

- | | |
|--|---|
| 1► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 12► Sur $] - 3; +\infty[$ ou sur $] - \infty; -3[$,
$\left\{x \mapsto -\frac{2}{x+3} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 2► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 2x + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 13► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto -\frac{1}{4(x^2+2)^2} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 3► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{4}x + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 14► Sur $]1; +\infty[$ ou sur $] - \infty; 1[$,
$\left\{x \mapsto -\frac{1}{3(x^3-1)^3} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 4► Sur $\mathbb{R}$, $\{x \mapsto 2025x + C : C \in \mathbb{R}\}$ | 15► Sur $\mathbb{R}$, $\{x \mapsto e^{2x} + C : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 5► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 16► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto -\frac{1}{3}e^{1-3x} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 6► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 17► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto -\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 7► Sur $]0; +\infty[$, $\{x \mapsto -6\sqrt{x} + C : C \in \mathbb{R}\}$ | 18► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto -\frac{1}{e^x+1} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 8► Sur $]0; +\infty[$ ou sur $] - \infty; 0[$, $\left\{x \mapsto -\frac{2}{x} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 19► Sur $\mathbb{R}$, $\left\{x \mapsto \frac{e^x}{e+2} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 9► Sur $]0; +\infty[$ ou sur $] - \infty; 0[$,
$\left\{x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 20► Sur $\mathbb{R}$, $\{x \mapsto \sqrt{x^2+1} + C : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 10► Sur $]0; +\infty[$ ou sur $] - \infty; 0[$,
$\left\{x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 21► Sur $] - 1; +\infty[$, $\{x \mapsto -2\sqrt{x^3+1} + C : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 11► Sur $] - 2; +\infty[$ ou sur $] - \infty; -2[$,
$\left\{x \mapsto \frac{1}{x+2} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | |

Correction de l'ex 2

- 1► Soit F la primitive recherchée. La fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^2$ est une primitive de f sur $I = \mathbb{R}$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$. Or $F(0) = 2$, et $F(0) = \frac{0^4}{4} - 0^2 + C = C$, donc $C = 2$, et finalement, pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2$.
- 2► Soit F la primitive recherchée. La fonction $x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - x$ est une primitive de f sur $I =]0; +\infty[$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - x + C$. Or $F(1) = \frac{1}{2}$, et $F(1) = \frac{2}{1} + \frac{1^2}{2} - 1 + C = \frac{3}{2} + C$, donc $C = -1$, et finalement, pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - x - 1$.
- 3► Soit F la primitive recherchée. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^{-x/2}$ est une primitive de f sur $I = \mathbb{R}$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^{-x/2} + C$. Or $F(0) = \frac{1}{2}$, et $F(0) = \frac{1}{2}e^0 - 4e^0 + C = -\frac{7}{2} + C$, donc $C = 4$, et finalement, pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^{-x/2} + 4$.
- 4► Soit F la primitive recherchée. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ est une primitive de f sur $I =]-\infty; 0[$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + C$. Or $F(-1) = -\frac{1}{2}$, et $F(-1) = \frac{1}{2(-1)^2} - \frac{1}{-1} - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1}{2}(-1) + C = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} + C$, donc $C = -1$, et finalement, pour tout $x \in I$, $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$.
- 5► Soit F la primitive recherchée. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{4(e^{2x} + 1)^2}$ est une primitive de f sur $I = \mathbb{R}$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = -\frac{1}{4(e^{2x} + 1)^2} + C$. Or $F(0) = -\frac{1}{16}$, et $F(0) = -\frac{1}{4(e^0 + 1)^2} + C = -\frac{1}{16} + C$, donc $C = 0$, et finalement, pour tout $x \in I$, $F(x) = -\frac{1}{4(e^{2x} + 1)^2}$.
- 6► Soit F la primitive recherchée. La fonction $x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1}$ est une primitive de f sur $I = \mathbb{R}$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = \sqrt{2x^2 + 1} + C$. Or $F(2) = 2$, et $F(2) = \sqrt{2(2)^2 + 1} + C = 3 + C$, donc $C = -1$, et finalement, pour tout $x \in I$, $F(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - 1$.

Correction de l'ex 3

- 1► Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est dérivable en x (comme produit et composée) et $g'(x) = \frac{1}{2}e^{1-x}$, donc :

$$g'(x) - 3g(x) = \frac{1}{2}e^{1-x} - 3\left(-\frac{1}{2}e^{1-x}\right) = \frac{1}{2}e^{1-x} + \frac{3}{2}e^{1-x} = 2e^{1-x}$$

Ainsi g est solution.

- 2► Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est dérivable en x (car affine) et $g'(x) = -1$, donc $g(x) + x = -x - 1 + x = -1 = g'(x)$ donc $g'(x) = g(x) + x$ et g est solution.
- 3► Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est dérivable en x (car polynomiale) et $g'(x) = -2x - 1$, donc :

$$g'(x) - 3g(x) = -2x - 1 - 3(-x^2 - x - 1) = -2x - 1 + 3x^2 + 3x + 3 = 3x^2 + x + 2$$

Ainsi g est solution.

- 4► Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est dérivable en x (comme somme et produit) et $g'(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x)$, donc :

$$g(x) + \cos(x) = -\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x)$$

On a bien $g'(x) = g(x) + \cos(x)$.

Correction de l'ex 4

Les solutions sont les primitives de la fonction au second membre :

- | | |
|--|--|
| 1► $\mathcal{S}(E) = \{x \mapsto \sqrt{x} + C : C \in \mathbb{R}\}$ | 5► $\mathcal{S}(E) = \{x \mapsto x^3 + x^2 + x + C : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 2► $\mathcal{S}(E) = \{x \mapsto e^x + C : C \in \mathbb{R}\}$ | 6► $\mathcal{S}(E) = \left\{x \mapsto -\frac{1}{x^2 + 3} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |
| 3► $\mathcal{S}(E) = \left\{x \mapsto -\frac{1}{2x^2} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 7► $\mathcal{S}(E) = \{x \mapsto 2\sqrt{x^2 + x - 5} + C : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 4► $\mathcal{S}(E) = \left\{x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ | 8► $\mathcal{S}(E) = \left\{x \mapsto -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$ |

Commentaire : pour l'antépénultième et la précédente, on reconnaît les formes u'/u^2 et $u'/\sqrt{u}$.

Correction de l'ex 5

On reconnaît la situation $y' = ay$:

- | | |
|---|---|
| 1► $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{3x} : C \in \mathbb{R}\}$ | 6► $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{-2x} : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 2► $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{-2x} : C \in \mathbb{R}\}$ | 7► $y' = \frac{1}{3}y$ donc $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{x/3} : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 3► $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{3x/2} : C \in \mathbb{R}\}$ | 8► $y' = -\frac{11}{2}y$ donc $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{-11x/2} : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 4► $y' = -\frac{2}{3}y$ donc $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{-2x/3} : C \in \mathbb{R}\}$ | 9► $y' = -\frac{2\sqrt{2}}{3}y$ donc $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{-2\sqrt{2}x/3} : C \in \mathbb{R}\}$ |
| 5► $y' = \frac{3}{4}y$ donc $\mathcal{S}(E) = \{Ce^{3x/4} : C \in \mathbb{R}\}$ | |

Correction de l'ex 6

- 1► Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$. Or $y(1) = -1$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} - 1 + C = -1$, donc $C = -\frac{1}{2}$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$.
- 2► Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{-\sqrt{2}x}$. Or $y(\sqrt{2}) = 1$ c'est-à-dire $Ce^{-2} = 1$, donc $C = e^2$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = e^2 e^{-\sqrt{2}x} = e^{2-\sqrt{2}x}$.
- 3► L'équation équivaut à $y' = -5y$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{-5x}$. Or $y(0) = 5$ c'est-à-dire $C = 5$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = 5e^{-5x}$.
- 4► Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{3x}$. Or $y(0) = 2$ c'est-à-dire $C = 2$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = 2e^{3x}$.
- 5► L'équation équivaut à $y' = -\frac{3}{2}y$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x}$. Or $y(2) = 1$ c'est-à-dire $Ce^{-3} = 1$, donc $C = e^3$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = e^3 e^{-3x/2} = e^{3-3x/2}$.
- 6► L'équation équivaut à $y' = \frac{2}{5}y$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{2x/5}$. Or $y(5) = e$ c'est-à-dire $Ce^2 = e$, donc $C = e^{-1}$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = e^{-1} e^{2x/5} = e^{2x/5-1}$.

- 7► L'équation équivaut à $y' = -\frac{1}{5}y$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{-x/5}$. Or $y(-2) = 1$ c'est-à-dire $Ce^{2/5} = 1$, donc $C = e^{-2/5}$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = e^{-2/5}e^{-x/5} = e^{-x/5-2/5}$.
- 8► L'équation équivaut à $y' = -\frac{1}{2}y$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{-x/2}$. Or $y(-2) = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $Ce^1 = \frac{1}{2}$, donc $C = \frac{1}{2e}$. Finalement, pour tout x réel, $y(x) = \frac{1}{2e}e^{-x/2} = \frac{1}{2}e^{-x/2-1}$.

Correction de l'ex 7

On reconnaît une situation du type $y' = ay + b$.

- 1► L'équation homogène associée est $y' = 2y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{2x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = 2y_p + 3$, soit $0 = 2k + 3$, donc $k = -\frac{3}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{3}{2} + Ce^{2x} : C \in \mathbb{R}\right\}$.
- 2► L'équation se réécrit $y' = \frac{1}{2}y + 1$. L'équation homogène associée est $y' = \frac{1}{2}y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{x/2} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = \frac{1}{2}y_p + 1$, soit $0 = \frac{1}{2}k + 1$, donc $k = -2$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-2 + Ce^{x/2} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 3► L'équation se réécrit $y' = -\frac{3}{2}y + 1$. L'équation homogène associée est $y' = -\frac{3}{2}y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-3x/2} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = -\frac{3}{2}y_p + 1$, soit $0 = -\frac{3}{2}k + 1$, donc $k = \frac{2}{3}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{2}{3} + Ce^{-3x/2} : C \in \mathbb{R}\right\}$.
- 4► L'équation se réécrit $y' = \sqrt{3}y - \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'équation homogène associée est $y' = \sqrt{3}y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{\sqrt{3}x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = \sqrt{3}y_p - \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $0 = \sqrt{3}k - \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $k = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{\sqrt{6}}{6} + Ce^{\sqrt{3}x} : C \in \mathbb{R}\right\}$.
- 5► L'équation se réécrit $y' = -3y + 2$. L'équation homogène associée est $y' = -3y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-3x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = -3y_p + 2$, soit $0 = -3k + 2$, donc $k = \frac{2}{3}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{2}{3} + Ce^{-3x} : C \in \mathbb{R}\right\}$.
- 6► L'équation homogène associée est $y' = 2y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{2x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = 2y_p + 1$, soit $0 = 2k + 1$, donc $k = -\frac{1}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{1}{2} + Ce^{2x} : C \in \mathbb{R}\right\}$.
- 7► L'équation se réécrit $y' = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$. L'équation homogène associée est $y' = -\frac{1}{3}y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-x/3} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = -\frac{1}{3}y_p + \frac{2}{3}$, soit $0 = -\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}$, donc $k = 2$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{2 + Ce^{-x/3} : C \in \mathbb{R}\}$.

- 8► Il s'agit d'une recherche directe de primitive. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{2x + C : C \in \mathbb{R}\}$.
- 9► L'équation homogène associée est $y' = 5y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{5x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = 5y_p + 2$, soit $0 = 5k + 2$, donc $k = -\frac{2}{5}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{2}{5} + Ce^{5x} : C \in \mathbb{R}\right\}$.
- 10► L'équation se réécrit $y' = -y + 3$. L'équation homogène associée est $y' = -y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = -y_p + 3$, soit $0 = -k + 3$, donc $k = 3$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3 + Ce^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 11► L'équation se réécrit $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{5}{4}$. L'équation homogène associée est $y' = -\frac{1}{4}y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-x/4} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = -\frac{1}{4}y_p + \frac{5}{4}$, soit $0 = -\frac{1}{4}k + \frac{5}{4}$, donc $k = 5$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{5 + Ce^{-x/4} : C \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'ex 9

- 1► Soit $x \in I$.

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + bx^2}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a+b)x^2 - 2ax + a}{x^2(x-1)^2}$$

Or cette expression doit être égale à $\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$. Par identification, il suffit que $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a=2 \\ a=-1 \end{cases}$. En prenant

donc $a = -1$ et $b = 1$, on obtient la relation : $f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

- 2► Grâce à la forme nouvellement trouvée de f , on trouve comme ensemble des primitives :

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$$

Correction de l'ex 10

- 1► Soit $x \in I$,

$$ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax(x+2)^2 + b(x+2)^2 + c}{(x+2)^2} = \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (4a+2b)x + (4b+c)}{(x+2)^2}$$

Or cette expression doit être égale à $\frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 2}{(x+2)^2}$. Par identification, il suffit que $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=9 \\ 4a+2b=12 \\ 4b+c=2 \end{cases}$.

En prenant donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$, on obtient la relation : $f(x) = 2x + 1 + \frac{-2}{(x+2)^2}$.

- 2► Grâce à la forme nouvellement trouvée de f , on trouve comme ensemble des primitives :

$$\left\{x \mapsto x^2 + x + \frac{2}{x+2} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$$

Correction de l'ex 11

1► Pour tout x réel, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

2► Soit $x \in I$,

$$\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{a(x-1)^3 + b(x+1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3} = \frac{(a+b)x^3 + (-3a+3b)x^2 + (3a+3b)x + (-a+b)}{(x^2-1)^3}$$

Or cette expression doit être égale à $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$. Par identification, il suffit que $a+b=1$,

$-3a+3b=0$, $3a+3b=3$ et $-a+b=0$. En prenant donc $a=b=\frac{1}{2}$, on obtient la relation :

$$f(x) = \frac{1/2}{(x-1)^3} + \frac{1/2}{(x+1)^3}.$$

3► Grâce à la forme nouvellement trouvée de f , on trouve comme ensemble des primitives :

$$\left\{ x \mapsto -\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(x+1)^2} + C : C \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction de l'ex 12

1► Pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{2}[(x+1)^2 + (x-1)^2] = \frac{1}{2}[x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1] = x^2 + 1$$

2► Pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}[(x+1)^2 + (x-1)^2]}{[(x+1)(x-1)]^2} = \frac{1}{2} \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ainsi, l'ensemble des primitives de f sur I est $\left\{ x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + C : C \in \mathbb{R} \right\}$.

Correction de l'ex 8

1► $\phi(x) = 3x - 1$ donc $\phi'(x) = 3$.

$\phi'(x) + 3\phi(x) = 3 + 3(3x - 1) = 3 + 9x - 3 = 9x$. ϕ est bien solution.

2► L'équation homogène associée est $y' = -3y$, l'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-3x} : C \in \mathbb{R}\}$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\mathcal{S}(E) = \{x \mapsto Ce^{-3x} + 3x - 1 : C \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'ex 13

Plusieurs réponses sont possibles.

1► $y' = 0$

2► $y' = y$

3► $f'(x) = -9e^{-3x} = -3f(x)$, donc $y' = -3y$ convient.

4► $f'(x) = -6e^{-2x} = -2 \times 3e^{-2x} = -2(f(x) + 4)$, donc $f'(x) = -2f(x) - 8$, donc $y' = -2y - 8$ convient.

Correction de l'ex 14

1► L'équation se réécrit $y' = \frac{1}{5}y + \frac{4}{5}$. L'équation homogène associée est $y' = \frac{1}{5}y$. L'ensemble de ses solutions

est $\{x \mapsto Ce^{x/5} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = \frac{1}{5}y_p + \frac{4}{5}$, soit $0 = \frac{1}{5}k + \frac{4}{5}$, donc $k = -4$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-4 + Ce^{x/5} : C \in \mathbb{R}\}$.

2► Soit y une solution de l'équation. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = -4 + Ce^{x/5}$. On cherche la solution telle que $y(-5) = 5$, c'est-à-dire $-4 + Ce^{-1} = 5$, soit $Ce^{-1} = 9$, donc $C = 9e^1 = 9e$. Finalement, la solution recherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -4 + 9e^{x/5+1}$.

3► On considère la fonction $f : x \mapsto -4 - e^{x/5-1}$

a► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{5}e^{x/5-1}$, donc :

$$5f'(x) - f(x) = 5\left(-\frac{1}{5}e^{x/5-1}\right) - (-4 - e^{x/5-1}) = -e^{x/5-1} + 4 + e^{x/5-1} = 4$$

La fonction f satisfait bien l'équation différentielle. De plus, $f(5) = -4 - e^{1/5 \times 5 - 1} = -4 - e^0 = -4 - 1 = -5$.

b► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{5}e^{x/5-1}$. Comme pour tout réel t , $e^t > 0$, par produit $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c► • En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5}x - 1\right) = -\infty$. Par composition avec la fonction exponentielle, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x/5-1} = 0$.
Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$.

• En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}x - 1\right) = +\infty$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x/5-1} = +\infty$. Donc, par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Correction de l'ex 15

1► Par proportionnalité, il existe $k > 0$ telle que T vérifie l'équation différentielle $T'(t) = -kT(t)$.

2► Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $T(t) = Ce^{-kt}$. D'après l'énoncé, $T(0) = 100$ donc $C = 100$, donc $T(t) = 100e^{-kt}$. Toujours d'après l'énoncé, $T(10) = 45$ donc $100e^{-10k} = 45$ donc $e^{-10k} = 0,45$ donc $-10k = \ln(0,45)$ donc $k = -\frac{\ln(0,45)}{10} \approx 0,0798$.

Finalement, pour tout $t \geq 0$, $T(t) = 100e^{\ln(0,45)/10 \times t}$.

3► On cherche à résoudre $100e^{-kt} = 25$. Cette équation est équivalente à $e^{-kt} = 0,25$, soit encore $-kt = \ln(0,25)$, puis $t = \frac{\ln(0,25)}{-k} = \frac{\ln(0,25) \times 10}{\ln(0,45)} \approx 17,36$ minutes. Il faudra donc environ 17 minutes.

Correction de l'ex 16

1► a► Par proportionnalité, il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $B'(t) = kB(t)$ et $B(0) = 600$ et $B(2) = 1800$.

b► Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $B(t) = Ce^{kt}$. Or $B(0) = 600 = C$ donc $B(t) = 600e^{kt}$. Par ailleurs $B(2) = 600e^{2k} = 1800$ donc $e^{2k} = 3$ donc $2k = \ln(3)$ donc $k = \frac{\ln(3)}{2}$. Finalement, $B(t) = 600e^{\ln(3)t/2}$.

c► Il y a aura $B(4) = 600e^{2\ln(3)} = 5400$ bactéries.

d► On doit résoudre $B(t) \geq 12000$. D'après ce qui précède, cela revient à résoudre $600e^{\ln(3)t/2} \geq 12000$.

Cela se ramène à $e^{\ln(3)t/2} \geq 20$, puis $\frac{\ln(3)}{2}t \geq \ln(20)$, soit finalement $t \geq \frac{2\ln(20)}{\ln(3)} \approx 5,45$ h. Notons que l'inégalité ne change jamais de sens car tous les diviseurs sont positifs.

2► Remarquons que $e^{\ln(3)t/2} = 3^{t/2}$.

```

T = 0
B = 600
while B < 12000:
    T = T + 0.25 # précision au quart d'heure
    B = 600 * (3**(T/2))

```

Correction de l'ex 17

- 1► L'équation (E') se réécrit $y' = y + 1$. L'équation homogène associée est $y' = y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = y_p + 1$, soit $0 = k + 1$, donc $k = -1$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') est $\{-1 + Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$.
- 2► La fonction f est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ (comme produit) et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = g'(x) \sin(x) + g(x) \cos(x)$. Ainsi :

f est solution de (E)

$$\iff \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) - \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) f(x) = \sin(x)$$

$$\iff \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g'(x) \sin(x) + g(x) \cos(x) - \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) g(x) \sin(x) = \sin(x)$$

$$\iff \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g'(x) \sin(x) + g(x) \cos(x) - g(x) \sin(x) - g(x) \cos(x) = \sin(x)$$

$$\iff \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g'(x) \sin(x) - g(x) \sin(x) = \sin(x)$$

Comme $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \neq 0$ on peut diviser par $\sin(x)$ pour obtenir :

$$f \text{ est solution de } (E) \iff \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g'(x) - g(x) = 1$$

ce qui signifie précisément que g est solution de (E') .

- 3► D'après la question précédente, les solutions de (E) sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ sont les fonctions de la forme $f(x) = g(x) \sin(x)$ où g est solution de (E') . Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (-1 + Ce^x) \sin(x)$. On cherche la solution s'annulant en $\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. On remplace dans l'expression précédente : $(-1 + Ce^{\pi/4}) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Comme $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$, cela équivaut à $-1 + Ce^{\pi/4} = 0$, soit $C = e^{-\pi/4}$.
- Finalement, la solution recherchée est $f : x \mapsto (e^{x-\pi/4} - 1) \sin(x)$.

Correction de l'ex 18

- 1► L'équation homogène associée est $y' = 3y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{3x} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 2► La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = 1 \times e^{3x} + x \times 3e^{3x} = (3x+1)e^{3x}$. On remplace y par ϕ dans le premier membre de (E) : $\phi'(x) - 3\phi(x) = (3x+1)e^{3x} - 3xe^{3x} = e^{3x}$, donc la fonction ϕ est bien une solution particulière de (E) .
- 3► L'ensemble des solutions de (E) est donc :
- $$\{x \mapsto xe^{3x} + Ce^{3x} : C \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto (x+C)e^{3x} : C \in \mathbb{R}\}$$
- 4► Soit f la solution de (E) telle que $f\left(\frac{1}{3}\right) = e$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+C)e^{3x}$.

Or $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} + C\right) = e^1$, donc $C = \frac{2}{3}$. Finalement, pour tout x réel, $f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)e^{3x}$.

Correction de l'ex 19

- 1► La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = 2ae^{2x}$. La fonction p est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$p'(x) + 3p(x) = e^{2x} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2ae^{2x} + 3ae^{2x} = e^{2x} \quad \text{soit encore} \quad 5ae^{2x} = e^{2x}$$

En divisant par $e^{2x} \neq 0$, il vient $5a = 1$, puis $a = \frac{1}{5}$.

- 2► L'équation homogène associée est $y' = -3y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-3x} : C \in \mathbb{R}\}$. En y ajoutant la solution particulière p , l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x} : C \in \mathbb{R}\right\}$.
- 3► Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}$.
Or $f(0) = \frac{1}{5}e^0 + Ce^0 = 1$, soit $\frac{1}{5} + C = 1$, donc $C = \frac{4}{5}$. Finalement, pour tout x réel, $f(x) = \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{4}{5}e^{-3x}$.

Correction de l'ex 20

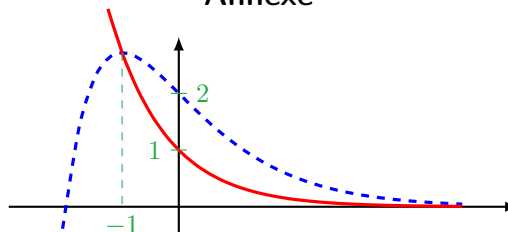
Partie I

- 1► La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1)e^{-x} = (1-x)e^{-x}$. On remplace y par u dans le premier membre de (E) : $u'(x) + u(x) = (1-x)e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$. La fonction u est donc bien solution de (E) .
- 2► L'équation (E') se réécrit $y' = -y$. L'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$ est $\{x \mapsto Ce^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 3► L'équation homogène associée à (E) est (E') , et u est une solution particulière de (E) , donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\{x \mapsto xe^{-x} + Ce^{-x} : C \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto (x+C)e^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 4► Soit g la solution de (E) telle que $g(0) = 2$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x+C)e^{-x}$.
Or $g(0) = (0+C)e^0 = 2$, soit $C \times 1 = 2$, donc $C = 2$. Finalement, pour tout x réel, $g(x) = (x+2)e^{-x}$.

Partie II

- 1► La fonction h est strictement positive, et la courbe bleue en pointillés ne correspond à cette description. Donc la courbe rouge en trait plein est celle de h et l'autre celle de f_k .
- 2► Déjà, $h(0) = 1$ donc l'intersection de la courbe de h avec l'axe des ordonnées donne l'unité de ce dernier. On lit à l'aide d'un compas que la courbe bleue intersecte l'axe des ordonnées en 2, donc $f_k(0) = 2$. Or $f_k(0) = k$ donc $k = 2$. La courbe de h intersecte celle de f_k en une abscisse x . L'intersection signifie que $h(x) = f_k(x)$, c'est-à-dire $e^{-x} = (x+k)e^{-x}$, donc en divisant par $e^{-x} \neq 0$, on a $x+k=1$, donc $x=1-k=-1$. Cela donne l'unité de l'axe des abscisses.

Annexe



Correction de l'ex 21

- 1► La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g'(x) = ae^{-x/4} + ax \times \left(-\frac{1}{4}\right)e^{-x/4} = ae^{-x/4} - \frac{1}{4}axe^{-x/4}$. La fonction g est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = 20e^{-x/4} \quad \text{c'est-à-dire} \quad ae^{-x/4} - \frac{1}{4}axe^{-x/4} + \frac{1}{4}axe^{-x/4} = 20e^{-x/4}$$

ce qui se ramène à $ae^{-x/4} = 20e^{-x/4}$. En divisant par $e^{-x/4} \neq 0$, on obtient $a = 20$.

- 2► L'équation (E') se réécrit $y' = -\frac{1}{4}y$. C'est l'équation homogène associée à (E). L'ensemble de ses solutions sur $[0; +\infty[$ est $\{x \mapsto Ce^{-x/4} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 3► D'après ce qui précède, l'ensemble des solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ est :

$$\{x \mapsto 20xe^{-x/4} + Ce^{-x/4} : C \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto (20x + C)e^{-x/4} : C \in \mathbb{R}\}$$

- 4► Soit f la solution de (E) telle que $f(0) = 8$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = (20x + C)e^{-x/4}$. Or $f(0) = (0 + C)e^0 = 8$, soit $C \times 1 = 8$, donc $C = 8$. Finalement, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = (20x + 8)e^{-x/4}$.

Correction de l'ex 22

Résoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une solution particulière ϕ de la forme indiquée.

- 1► L'équation se réécrit $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. L'équation homogène associée est $y' = -\frac{1}{2}y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-x/2} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière ϕ sous la forme $\phi(x) = mx + p$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x) = m$. Il faut $2\phi'(x) + \phi(x) = x + 1$, soit :

$$2m + (mx + p) = x + 1 \quad \text{autrement dit} \quad mx + (2m + p) = x + 1$$

Par identification, il suffit que $\begin{cases} m = 1 \\ 2m + p = 1 \end{cases}$. En prenant $m = 1$ et $p = -1$, on trouve $\phi(x) = x - 1$.

L'ensemble des solutions de l'équation est alors $\{x \mapsto x - 1 + Ce^{-x/2} : C \in \mathbb{R}\}$.

- 2► L'équation homogène associée est $y' = 3y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{3x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière ϕ sous la forme $\phi(x) = ax^2 + bx + c$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x) = 2ax + b$. Il faut $\phi'(x) - 3\phi(x) = -3x^2 - x - 2$, soit :

$$(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = -3x^2 - x - 2 \iff -3ax^2 + (2a - 3b)x + (b - 3c) = -3x^2 - x - 2$$

Par identification, il suffit que :

$$\begin{cases} -3a = -3 \\ 2a - 3b = -1 \\ b - 3c = -2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 1 \\ 2 - 3b = -1 \\ b - 3c = -2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ 1 - 3c = -2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\phi(x) = x^2 + x + 1$. L'ensemble des solutions de l'équation est $\{x \mapsto x^2 + x + 1 + Ce^{3x} : C \in \mathbb{R}\}$.

- 3► L'équation homogène associée est $y' = -y$. L'ensemble de ses solutions est $\{x \mapsto Ce^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière ϕ sous la forme $\phi(x) = (mx + p)e^x$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et $\phi'(x) = me^x + (mx + p)e^x = (mx + m + p)e^x$. Il faut $\phi'(x) + \phi(x) = (3 - 2x)e^x$, soit :

$$(mx + m + p)e^x + (mx + p)e^x = (3 - 2x)e^x \quad \text{c'est-à-dire} \quad (2mx + m + 2p) = (-2x + 3)$$

(car pour tout x réel, $e^x \neq 0$). Par identification, il faut que :

$$\begin{cases} 2m = -2 \\ m + 2p = 3 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} m = -1 \\ -1 + 2p = 3 \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} m = -1 \\ p = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $\phi(x) = (-x+2)e^x$. L'ensemble des solutions de l'équation est $\{x \mapsto (-x+2)e^x + Ce^{-x} : C \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'ex 23

L'équation différentielle se réécrit $y' = 4y$. L'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$ est $\{x \mapsto Ce^{4x} : C \in \mathbb{R}\}$. Soit f la solution telle que $f(x_0) = y_0$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ce^{4x}$. Or $f(x_0) = Ce^{4x_0} = y_0$, d'où $C = y_0 e^{-4x_0}$. Finalement, pour tout x réel, $f(x) = y_0 e^{-4x_0} e^{4x} = y_0 e^{4(x-x_0)}$.

L'affirmation est fausse.

Correction de l'ex 24

- 1► VRAI : soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction constante $f : x \mapsto 0$. D'une part, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 0$. D'autre part, pour tout x réel, $a \times f(x) = a \times 0 = 0$. On a bien $f'(x) = af(x)$.
- 2► FAUX. L'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$ est $\{x \mapsto Ce^{ax} : C \in \mathbb{R}\}$. Soit y une solution non nulle, cela signifie que $C \neq 0$ puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle. Comme $a > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} = +\infty$ par composition. Par produit, si $C < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$.

Correction de l'ex 25

- 1► En remplaçant $a(t)$ par $v'(t)$, la relation issue du principe fondamental de la dynamique s'écrit $mv'(t) = mg - kv(t)$. Comme la masse m est strictement positive, on peut diviser par m pour isoler $v'(t)$. La fonction v vérifie donc l'équation différentielle :

$$v' = -\frac{k}{m}v + g$$

Il s'agit bien d'une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y + \beta$ avec $\alpha = -\frac{k}{m}$ et $\beta = g$.

- 2► L'équation homogène associée est $v' = -\frac{k}{m}v$. L'ensemble de ses solutions sur $[0; +\infty[$ est $\{t \mapsto Ce^{-kt/m} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $v_p = w$: il faut $v'_p = -\frac{k}{m}v_p + g$, soit $0 = -\frac{k}{m}w + g$, donc $w = \frac{mg}{k}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{t \mapsto \frac{mg}{k} + Ce^{-kt/m} : C \in \mathbb{R}\right\}$. Soit v la solution de cette équation modélisant la vitesse de l'objet, telle que $v(0) = 0$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-kt/m}$. Or $v(0) = \frac{mg}{k} + Ce^0 = 0$, soit $\frac{mg}{k} + C = 0$, donc $C = -\frac{mg}{k}$.

Finalement, pour tout $t \geq 0$, l'expression de v en fonction de t est $v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m})$.

Correction de l'ex 26

- 1► Pour tout $t \geq 0$, $g'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)^2}$.
- 2► La fonction N est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t \geq 0$, $N'(t) = 3N(t) - 0,005N(t)^2$.

Comme pour tout $t \geq 0$, $N(t)^2 \neq 0$ par hypothèse, on peut diviser l'égalité par $N(t)^2$:

$$\frac{N'(t)}{N(t)^2} = 3 \frac{N(t)}{N(t)^2} - 0,005 \quad \text{c'est-à-dire} \quad -g'(t) = 3g(t) - 0,005$$

ce qui se réécrit $g'(t) = -3g(t) + 0,005$: cela signifie exactement que la fonction g est solution de (F) .

- 3► L'équation homogène associée à (F) est $y' = -3y$. L'ensemble de ses solutions sur $[0; +\infty[$ est $\{t \mapsto Ce^{-3t} : C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière constante $y_p = k$: il faut $y'_p = -3y_p + 0,005$, soit $0 = -3k + 0,005$, donc $k = \frac{0,005}{3} = \frac{1}{600}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est :

$$\mathcal{S}(F) = \left\{ t \mapsto \frac{1}{600} + Ce^{-3t} : C \in \mathbb{R} \right\}$$

- 4► D'après les questions précédentes, $N(t) = \frac{1}{g(t)}$ où g est solution de (F) . L'ensemble des solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ est donc :

$$\mathcal{S}(E) = \left\{ t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{600} + Ce^{-3t}} : C \in \mathbb{R} \right\}$$

- 5► a► À $t = 0$, la colonie compte 2 000 bactéries, donc $N(0) = 2\,000$. Soit N la solution de (E) telle que $N(0) = 2\,000$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $N(t) = \frac{1}{\frac{1}{600} + Ce^{-3t}}$. Or $N(0) = \frac{1}{\frac{1}{600} + Ce^0} = 2\,000$, soit $\frac{1}{600} + C = \frac{1}{2\,000}$. De là, $C = -\frac{7}{6\,000}$, donc pour tout $t \geq 0$:

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{600} - \frac{7}{6\,000}e^{-3t}} = \frac{6\,000}{10 - 7e^{-3t}}$$

- b► Au bout de deux heures, le nombre de bactéries est $N(2) = \frac{6\,000}{10 - 7e^{-3 \times 2}} = \frac{6\,000}{10 - 7e^{-6}}$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $N(2) \approx 601,04$: au bout de deux heures, il y a environ 601 bactéries présentes dans la colonie.

Correction de l'ex 27

L'équation différentielle s'écrit $N' = -\lambda N$. L'ensemble de ses solutions sur $[0; +\infty[$ est $\{t \mapsto Ce^{-\lambda t} : C \in \mathbb{R}\}$. Soit N la solution décrivant le nombre d'éléments radioactifs dans l'échantillon au cours du temps, sachant qu'à $t = 0$ la quantité initiale est N_0 (autrement dit $N(0) = N_0$). Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $N(t) = Ce^{-\lambda t}$. Or $N(0) = Ce^0 = N_0$, donc $C = N_0$. Ainsi, pour tout t réel positif, $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Par définition, le temps de demi-vie $t_{1/2}$ vérifie la relation $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$, ce qu'on réécrit :

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} &= \frac{N_0}{2} \\ \text{donc } e^{-\lambda t_{1/2}} &= \frac{1}{2} && (\text{car } N_0 \neq 0) \\ \text{donc } -\lambda t_{1/2} &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \text{donc } -\lambda t_{1/2} &= -\ln(2) \\ \text{donc } t_{1/2} &= \frac{\ln(2)}{\lambda} && (\text{car } \lambda > 0) \end{aligned}$$

5 Limites de suites

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Par opérations sur les limites, déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) .

1► $u_n = -4n + 6$ 5► $u_n = n^2 - \frac{1}{n+1}$

2► $u_n = n\sqrt{n}$ 6► $u_n = \frac{3n-1}{n^2}$

3► $u_n = 5 - \frac{2}{n+1}$ 7► $u_n = 6^n - 7^n$

4► $u_n = \frac{3n-5}{2n+1}$ 8► $u_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 2^n}$

9► $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

10► $u_n = \frac{3n^2 + n + 1}{n^2 + 2n - 1}$

11► $u_n = \frac{(n+1)(3-n)}{2n^2 + 1}$

12► $u_n = \left(n - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{2n^2}\right)$

Exercice 2

Par comparaison, déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) .

1► $u_n = (\cos(n) - 2) \times n$

2► $u_n = 2n - \cos(n)$

3► $u_n = \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$

4► $u_n = n + 1 - \cos(n)$

5► $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 1} - 2$

6► $u_n = n^2 - \sin(3n)$

Exercice 3

On modélise le nombre de foyers français possédant un écran plat (en millions) en fonction de l'année $2015 + n$ par la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n)$$

1► Soit f la fonction définie sur $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$.

a► Étudier les variations de f sur $[0; 20]$.

b► En déduire que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.

2► Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3► Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4► Le nombre de foyers français possédant un écran plat pourra-t-il dépasser 10 millions de personnes selon la modélisation ?

Exercice 4

Soit la suite (t_n) définie par $t_1 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $t_{n+1} = 0,5t_n + 0,4$.

1► a► Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $t_n > 0,8$.

b► En déduire que la suite (t_n) est décroissante.

c► La suite (t_n) est-elle convergente ? Justifier.

2► On pose pour tout entier naturel n non nul, $v_n = t_n - 0,8$.

a► Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme v_1 .

b► En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $t_n = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$.

c► Déterminer la limite de la suite (t_n) .

Objectif Bac

Exercice 5

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

Partie A

- 1► Calculer les valeurs exactes sous forme de fraction irréductible de u_1 et u_2 .
- 2► À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
- 3► Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) à l'aide de la calculatrice.

Partie B

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.

- 1► Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$$

- 2► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq v_n \leq 0$.
- 3► a► Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$$

- b► En déduire le sens de variations de (v_n) .

- 4► Justifier que (v_n) converge.
- 5► On note ℓ la limite de la suite (v_n) . On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
Déterminer la valeur de ℓ .
- 6► Les conjectures émises dans la partie A sont-elles validées ?

Exercice 6 (BAC 2021)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n par

$$\begin{cases} v_0 &= u_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

- 1► a► Calculer u_1 et v_1 .

- b► Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives par récurrence.
- c► Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.
- d► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.
- e► En déduire la limite de la suite (v_n) .

- 2► On pose, pour tout entier naturel n , $r_n = \frac{v_n}{u_n}$ et

$$\text{on admet que } r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- a► Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$\frac{-1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$$

- b► En déduire la limite de la suite de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
- c► En déduire la limite de la suite (r_n^2) .
- d► En déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
- e► Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$$

Exercice 7 (BAC 2021)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

- 1► Calculer, en détaillant les étapes, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
- 2► L'extrait, reproduit ci-dessous d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

- a► Quelle formule étirée ensuite vers le bas peut-on écrire dans la cellule B3 pour ob-

tenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b► Conjecturer le sens de variation de (u_n) .

3► a► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $n \leq u_n \leq n + 1$.

b► En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

c► Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4► On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n$.

a► Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b► En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$$

Exercice 8 (BAC 2014)

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

1► a► À l'aide de la calculatrice, présenter dans un tableau les 8 premiers termes de (u_n) , approchés à 10^{-2} près.

b► D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .

2► a► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

b► En déduire que, pour tout entier naturel n non nul $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c► En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3► On admet que la limite de (u_n) est 0. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $u_n \leq 0,01$. Compléter la fin que le programme renvoie la valeur attendue.

```
1 def seuil():
2     n = 0
3     u = ...
4     while u .....:
5         u = ...
6         n = n + 1
7     return ...
```

Exercice 9

À Gotham City, le taux de criminalité est très élevé depuis l'arrivée du Joker qui envoie ses sbires racketter les commerçants de la ville. Pour s'assurer de ses revenus, le Joker envoie son bras droit surveiller les malfrats chargés du racket. On estime que :

► lorsqu'un mafieux a racketté un commerce une semaine, la probabilité qu'il recommence la semaine suivante est 0,9 ;

► lorsqu'un mafieux a préféré se la couler douce une semaine, la probabilité qu'il se remette au travail la semaine suivante est 0,4.

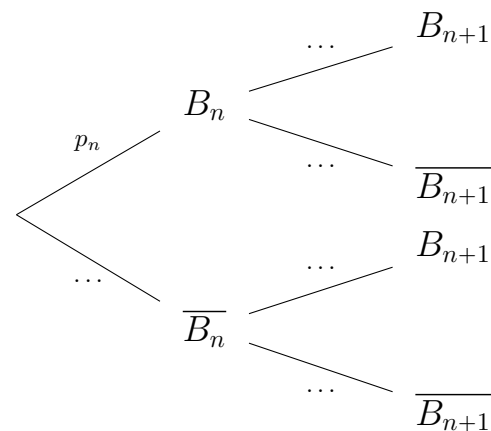
On s'intéresse à l'activité d'un mafieux lorsque le bras droit du Joker arrive pour le surveiller.

Soit n un entier naturel non nul. On note B_n l'événement « le mafieux a bien racketté la n -ième semaine » et p_n la probabilité de B_n .

La première semaine, le mafieux est super méchant et super motivé. On a donc $p_1 = 1$.

1► Donner p_2 et montrer que $p_3 = 0,85$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2► Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



3► En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

4► a► Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0,8$.

b► Comment le Joker peut-il interpréter ce résultat ?

5► On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = p_n - 0,8$.

a► Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b► En déduire l'expression de u_n , puis de p_n , en fonction de n .

c► En déduire la limite de la suite (p_n) .

Exercice 10

Comme la fouine ou le blaireau, la loutre fait partie de la grande famille des mustélidés. C'est une espèce semi-aquatique vivant le long des cours d'eau assez sauvages, peu ou pas pollués et surtout riches en poissons. Au XX^e siècle, la loutre a disparu de nombreuses régions européennes. Redoutée par les pêcheurs qui la trouvaient trop gourmande en poissons, elle a été intensément chassée et piégée. La destruction et la pollution de son habitat ont aussi joué un rôle important dans son déclin.

Au début de l'année 2020, on comptait 300 loutres d'Europe. Une étude a permis de modéliser ce nombre de loutres par la suite (u_n) définie par $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 3$$

où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de loutres au début de l'année 2020 + n .

- 1► Calculer, dans ce modèle, le nombre de loutres au début de l'année 2021, puis au début de l'année 2022.
- 2► Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $15 < u_{n+1} \leq u_n$.
- 3► La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
- 4► On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ en justifiant.
- 5► On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) d'une autre manière. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 15$.
 - a► Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.
 - b► En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 285 \times 0,8^n + 15$.
 - c► En déduire la limite de la suite (u_n) .
 - d► En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
- 6► On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en-dessous d'un certain seuil S .
 - a► Dans cette question, on suppose que $S = 30$. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq 30$ et interpréter.
 - b► Dans le programme Python ci-dessous, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020 et la variable u désigne l'effectif de la population.
Compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S .

```

1  def population():
2      n = 0
3      u = 300
4      while u .....:
5          u = ...
6          n =
7      return ...

```

Vers le supérieur

Exercice 11

Proposer deux suites (u_n) et (v_n) tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = \dots$

- 1► $+\infty$ 2► $-\infty$ 3► 0 4► 4

Exercice 12

- 1► Démontrer que si une suite (u_n) est croissante n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- 2► Application : soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
 - a► Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b► On suppose que la suite (u_n) est majorée. Montrer que, dans ce cas, elle converge vers un réel que l'on précisera.
 - c► En déduire que u n'est pas majorée.
 - d► Préciser alors le comportement de u en $+\infty$.

Exercice 13 (Vrai/faux)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et telle qu'aucun de ses termes n'est nul. On définit alors la suite v par $v_n = -\frac{4}{u_n}$ pour tout entier naturel n . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Si la suite (u_n) converge, alors la suite v converge.
- 2► Si la suite (u_n) est minorée par 2, alors la suite v est minorée par -2 .
- 3► Si la suite (u_n) est décroissante, alors la suite v est croissante.
- 4► Si la suite (u_n) diverge, alors la suite v admet 0 pour limite.

Exercice 14 (Vrai/faux)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Toute suite croissante et majorée converge.
- 2► Toute suite croissante et convergente est majorée.
- 3► Toute suite majorée et convergente est croissante.
- 4► Toute suite décroissante est majorée.

Exercice 15

On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n par $p_n = n^2 - 42n + 4$. La suite (p_n) est-elle strictement décroissante ? Justifier.

Exercice 16 (Vrai/faux)

On considère deux suites u et v définies pour tout entier naturel n . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 0$.
- 2► Si la suite (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $u \times v$ ne converge pas.
- 3► Si les suites u et v convergent et v ne s'annule pas, alors la suite $\frac{u}{v}$ converge.

Exercice 17 (Vrai/faux)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
- 2► Une suite croissante tend vers $+\infty$.
- 3► Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.
- 4► Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.

Exercice 18 (Vrai/faux)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► La suite (u_n) est minorée.
- 2► La suite (u_n) est décroissante.
- 3► L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.
- 4► La suite (u_n) est convergente.

Exercice 19 (Vrai/faux)

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u_N est un entier.
- 2► La suite (u_n) converge.
- 3► La suite (u_n) est croissante.
- 4► La suite (u_n) n'a pas de limite.

Corrections

Dans tous les exercices, la justification des limites est faite en ligne, par souci de gain de place. Cette présentation est complète et correcte, mais il peut être préférable d'adopter la présentation en « accolades étagées » ou la présentation « flèches » pour faciliter la lecture.

Correction de l'ex 1

1► On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4n = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4n + 6 = -\infty$ par somme.

2► On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par produit.

3► On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ par quotient. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$ par somme.

4► C'est une forme indéterminée : on factorise par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\mathcal{K}(3 - \frac{5}{n})}{\mathcal{K}(2 + \frac{1}{n})} = \frac{3 - \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par somme, produit et quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}.$$

5► On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6► C'est une forme indéterminée : on factorise par le terme prépondérant. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\mathcal{K}(3 - \frac{1}{n})}{n \times \mathcal{K}} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{n}) = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ par quotient.

7► C'est une forme indéterminée, on factorise par le terme prépondérant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7^n \left(\left(\frac{6}{7} \right)^n - 1 \right)$. Or $7 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$, et $-1 < \frac{6}{7} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7} \right)^n = 0$. Par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

8► C'est une forme indéterminée : on factorise par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{4^n \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right)}{3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)} = \left(\frac{4}{3} \right)^n \times \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n}$. Or $\frac{4}{3} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = +\infty$. De plus, $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$. Par somme, quotient et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

9► C'est une forme indéterminée. Naïvement, on pourrait tenter de factoriser par le terme prépondérant, mais qui de $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}$ domine l'autre ? Essayons de factoriser par $\sqrt{n}$ pour voir ce qui se passe :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - 1 \right) = \sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$. Or $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc

par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$. On se retrouve alors avec une nouvelle forme indéterminée, type « $+\infty \times 0$ ».

Avec des différences de racines carrées, la méthode privilégiée est la multiplication par la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$, donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- 10► C'est une forme indéterminée : on factorise par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\cancel{n^2} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par somme et quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

- 11► C'est une forme indéterminée. On peut développer le numérateur : $(n+1)(3-n) = 3n - n^2 + 3 - n =$

$-n^2 + 2n + 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\cancel{n^2} \left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{\cancel{n^2} \left(2 + \frac{1}{2n^2} \right)} = \frac{-1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{1}{2n^2}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ and $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Par somme et quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.

On peut également factoriser chaque parenthèse par son terme prépondérant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \times \cancel{n} \left(\frac{3}{n} - 1 \right)}{\cancel{n^2} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{3}{n} - 1 \right)}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc, par somme, produit et quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 \times (-1)}{2} = -\frac{1}{2}$.

- 12► C'est une forme indéterminée. Factorisons chaque parenthèse par son terme prépondérant : pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cancel{n} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \times \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2\cancel{n^2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Correction de l'ex 2

Commentaire : si vous ne savez pas à l'avance s'il faut utiliser une minoration ou une majoration, dans le doute encadrez. À la fin, l'un des deux côtés de l'encadrement vous sera inutile, mais ce n'est pas grave !

- 1► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. En soustrayant 2, on obtient $-3 \leq \cos(n) - 2 \leq -1$. On peut multiplier par $n \geq 0$ sans en changer le sens des inégalités : $-3n \leq u_n \leq -n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$.
Donc, par majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n) \leq 1$ donc $-\cos(n) \geq -1$, et donc $u_n \geq 2n - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$.
Donc, par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 3► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos(2n) \leq 1$. En divisant par $\sqrt{n} > 0$: $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- 4► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n) \leq 1$ donc $-\cos(n) \geq -1$, et donc $u_n \geq n + 1 - 1 = n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.
Donc, par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 5► Pour tout $n \geq 2$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$. On divise par $n^2 - 1 > 0$, pour obtenir l'encadrement $\frac{n-1}{n^2-1} \leq \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leq \frac{n+1}{n^2-1}$. Or :

$$\frac{n-1}{n^2-1} = \frac{\cancel{n-1}}{(\cancel{n-1})(n+1)} = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{n+1}{n^2-1} = \frac{\cancel{n+1}}{(\cancel{n+1})(n-1)} = \frac{1}{n-1}$$

Donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leq \frac{1}{n-1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, donc par le théorème des

gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 1} = 0$. Finalement, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.

6► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(3n) \leq 1$ donc $-\sin(3n) \geq -1$ puis $u_n \geq n^2 - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc, par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'ex 3

1► a► On pourrait dériver et tracer le tableau de variations. On peut aussi dire que $f : x \mapsto -\frac{1}{10}x^2 + 2x$ est une fonction polynomiale de degré 2, de racines 0 et 20. Son sommet est donc à l'abscisse $\frac{0+20}{2} = 10$, et comme son coefficient dominant est $-\frac{1}{10} < 0$, son sommet est un maximum. Finalement, f est croissante sur $[0; 10]$ puis décroissante sur $[10; 20]$.

b► Comme f est croissante sur $[0; 10]$, pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [f(0); f(10)] = [0; 10]$.

2► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{HR}_n : \langle 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10 \rangle$

INIT D'après l'énoncé, $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En particulier, $u_1 = f(u_0) = 1,9$. Or $0 \leq 1 \leq 1,9 \leq 10$, donc $\mathcal{H}_0 : \langle 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10 \rangle$ est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \langle 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10 \rangle$ est alors vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{HR}_n$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, or f est croissante sur $[0; 10]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$, donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vrai, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3► D'après la question précédente :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, c'est-à-dire que (u_n) est croissante,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 10$, c'est-à-dire que (u_n) est majorée par 10.

D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

4► Non, car (u_n) est majorée par 10, et u_n représente le nombre de foyers français disposant d'un écran plat, en millions.

Correction de l'ex 4

1► a► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{HR}_n : \langle t_n > 0,8 \rangle$

INIT D'après l'énoncé, $t_1 = 1$. Or $1 > 0,8$, donc $\mathcal{HR}_1 : \langle t_1 > 0,8 \rangle$ est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \langle t_{n+1} > 0,8 \rangle$ est alors vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{HR}_n$, $t_n > 0,8$. Or $0,5 > 0$ donc $0,5t_n > 0,4$, puis $0,5t_n + 0,4 > 0,4 + 0,4$, c'est-à-dire $t_{n+1} > 0,8$. Donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CD On a montré que $\mathcal{HR}_1$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{HR}_n$ est vrai, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n > 0,8$.

b► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} - t_n = 0,5t_n + 0,4 - t_n = -0,5t_n + 0,4$. Or, d'après la question précédente, $t_n > 0,8$. Comme $-0,5 < 0$, on a $-0,5t_n < -0,4$, puis $-0,5t_n + 0,4 < 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} - t_n < 0$, donc $t_{n+1} < t_n$, donc (t_n) est (strictement) décroissante.

c► D'après les questions précédentes :

- (t_n) est décroissante,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n > 0,8$, c'est-à-dire que (t_n) est minorée par $0,8$.

D'après le théorème de la limite monotone, (t_n) converge.

2► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = t_n - 0,8$, donc $t_n = v_n + 0,8$, et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= t_{n+1} - 0,8 = (0,5t_n + 0,4) - 0,8 = 0,5t_n - 0,4 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q=0,5$ et de premier terme $v_1 = t_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

b► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times 0,5^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$, donc $t_n = v_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$.

c► Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$. Par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0,8$.

Correction de l'ex 5

Partie A

1► D'après l'énoncé, $u_0 = 2$.

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times 2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$$

2► À l'aide de la calculatrice, on trouve $u_3 \approx 2,99219$ et $u_4 \approx 2,99997$.

Commentaire : Attention à ne pas utiliser la valeur approchée de u_3 pour calculer u_4 ! Dans un calcul, on utilise toujours une valeur exacte.

3► En regardant le tableau de valeur ou le nuage de points tracé à la calculatrice, on peut conjecturer que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B

1► Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 3$, donc $u_n = v_n + 3$, et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 = \left(-\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}\right) - 3 = -\frac{1}{2}(v_n + 3)^2 + 3(v_n + 3) - \frac{9}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(v_n^2 + 6v_n + 9) + 3v_n + 9 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}v_n^2 - 3v_n - \frac{9}{2} + 3v_n + 9 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}v_n^2 \end{aligned}$$

2► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{HR}_n$: « $-1 \leq v_n \leq 0$ »

INIT D'après l'énoncé, $u_0 = 2$, d'où $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$. Or $-1 \leq -1 \leq 0$, donc $\mathcal{HR}_0$: « $-1 \leq v_0 \leq 0$ » est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

D'après $\mathcal{HR}_n$, $-1 \leq v_n \leq 0$. La fonction carrée étant décroissante sur $[-1; 0]$, $(-1)^2 \geq v_n^2 \geq 0^2$, soit $1 \geq v_n^2 \geq 0$. Or $-\frac{1}{2} < 0$ donc $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$, c'est-à-dire $-\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq 0$. Comme $-1 \leq -\frac{1}{2}$, on a bien $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$. Donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vrai, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq v_n \leq 0$.

3► a► Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.

b► D'après la question 2►, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq v_n \leq 0$, en particulier :

- ≤ 0 donc $-v_n \geq 0$,
- $-1 \leq v_n$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n$ (car $\frac{1}{2} > 0$), donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1$, en particulier $\frac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$, donc $v_{n+1} \geq v_n$, donc (v_n) est croissante.

4► D'après les questions précédentes :

- (v_n) est croissante,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq 0$, c'est-à-dire que (v_n) est majorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, (v_n) converge.

5► D'après l'énoncé, $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$ donc $\frac{1}{2}\ell^2 + \ell = 0$ donc $\ell \left(\frac{1}{2}\ell + 1 \right) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\frac{1}{2}\ell + 1 = 0$ (équation produit nul), donc $\ell = 0$ ou $\ell = -2$. Or $\ell \in [-1; 0]$ d'après l'énoncé, donc la seule valeur possible est $\ell = 0$.

6► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 3$. Comme (v_n) est croissante, (u_n) l'est également. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + 3 = 0 + 3 = 3$. Les conjectures de la partie A sont donc validées.

Correction de l'ex 6

1► a► D'après les relations de récurrence de l'énoncé :

$$u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{et} \quad v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

b► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{HR}_n$: « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ »

INIT

D'après l'énoncé, $u_0 = 1 > 0$ et $v_0 = 1 > 0$, donc $\mathcal{HR}_0$ est vraie.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

D'après $\mathcal{HR}_n$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. la somme de deux termes strictement positifs est aussi strictement positive, donc $u_n + v_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$. De même, comme $2 > 0$, $2u_n + v_n > 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} > 0$. Donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

c► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n$. Or, d'après la question précédente, $u_n > 0$, donc $2u_n > 0$, donc $v_{n+1} - v_n > 0$, donc $v_{n+1} > v_n$, donc (v_n) est (strictement) croissante. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0$, c'est-à-dire $v_n \geq 1$.

d► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{HR}_n : \ll u_n \geq n + 1 \gg$

INIT

D'après l'énoncé, $u_0 = 1$ et $0 + 1 = 1$. Or $1 \geq 1$, donc $\mathcal{HR}_0 : \ll u_0 \geq 0 + 1 \gg$ est vraie.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \ll u_{n+1} \geq n + 2 \gg$ est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

D'après $\mathcal{HR}_n$, $u_n \geq n + 1$, donc $u_n + v_n \geq v_n + n + 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq v_n + n + 1$. Or, d'après la question précédente, $v_n \geq 1$, donc $v_n + n + 1 \geq 1 + n + 1 = n + 2$. Finalement $u_{n+1} \geq v_n + n + 1 \geq n + 2$, donc $u_{n+1} \geq n + 2$, donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$.

e► D'après la question précédente, par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. Or $v_n \geq 1$ donc $v_{n+1} \geq 2u_n + 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n + 1 = +\infty$ (par somme et produit), donc, par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = +\infty$.

2► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$. D'après la question 1►, $u_n \neq 0$, donc $u_n^2 > 0$, on peut donc diviser ces inégalités par u_n^2 sans en changer le sens : $\frac{-1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$.

b► On a vu précédemment que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$ par produit. Par quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{u_n^2} = 0, \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0.$$

c► D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$. D'après la question précédente, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = 2 + 0 = 2$.

d► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $r_n = \frac{v_n}{u_n} > 0$. La fonction racine carrée étant continue en 2,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{r_n^2} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2} = \sqrt{2}$$

e► Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2 + r_n}{1 + r_n} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{\frac{2u_n + v_n}{u_n}}{\frac{u_n + v_n}{u_n}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = r_{n+1}$$

Correction de l'ex 7

1► D'après la relation de récurrence de l'énoncé, comme $u_0 = 1$:

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16}$$

2► a► $= 3/4 \cdot B2 + 1/4 \cdot A2 + 1$

b► La suite semble croissante.

3► a► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{HR}_n : \ll n \leq u_n \leq n + 1 \gg$

INIT

D'après l'énoncé, $u_0 = 1$. Or $0 \leq 1 \leq 0 + 1$, donc $\mathcal{HR}_0$: « $0 \leq u_0 \leq 0 + 1$ » est vraie.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

D'après $\mathcal{HR}_n$, $n \leq u_n \leq n + 1$. Or $\frac{3}{4} > 0$ donc $\frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n + 1)$. En ajoutant $\frac{1}{4}n + 1$ à chaque membre, il vient :

$$\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}n + 1 \quad \text{puis} \quad n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4}$$

Or $\frac{7}{4} \leq 2$ donc $n + \frac{7}{4} \leq n + 2$ donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$, donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vrai, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n + 1$.

b► D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $n \leq u_n \leq n + 1$ et $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$. En racolant ces inégalités, on a $u_n \leq n + 1 \leq u_{n+1}$, en particulier $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.
- $n \leq u_n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

c► On divise l'encadrement de la question 2►a► par $n > 0$ $\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ donc $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$, donc $u_n = v_n + n$, et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n + 1) = \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \right) - n - 1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n \\ &= \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

b► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, puis $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Correction de l'ex 8

1► a► À l'aide de la calculatrice, on dresse le tableau des 8 premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08

Commentaire : Attention à ne pas utiliser une valeur approchée de u_n pour calculer u_{n+1} ! Dans un calcul, on utilise toujours des valeurs exactes.

b► La suite (u_n) semble décroissante à partir du rang $n = 1$.

2► a► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{HR}_n$: « $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$ »

INIT

D'après l'énoncé, $u_0 = 2$, d'où $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + 3 \times 0,5^0 = \frac{2}{5} + 3 = \frac{17}{5} = 3,4$. Or pour $n = 1$, $\frac{15}{4} \times 0,5^1 = \frac{15}{8} = 1,875$. Comme $3,4 \geq 1,875$, $\mathcal{HR}_1 : \ll u_1 \geq \frac{15}{4} \times 0,5^1 \gg$ est vraie.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \ll u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1} \gg$ est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

D'après $\mathcal{HR}_n$, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$. Or $\frac{1}{5} > 0$ donc $\frac{1}{5}u_n \geq \frac{3}{4} \times 0,5^n$. En ajoutant $3 \times 0,5^n$, il vient :

$$u_{n+1} \geq \frac{3}{4} \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n \quad \text{et donc} \quad u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$$

Or $\frac{15}{4} \times 0,5^n = \frac{15}{4} \times \frac{0,5^{n+1}}{0,5} = \frac{15}{2} \times 0,5^{n+1}$. Or $\frac{15}{2} \geq \frac{15}{4}$, et $0,5^{n+1} \geq 0$ donc $\frac{15}{2} \times 0,5^{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$, et donc $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$. Donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{HR}_1$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

b► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n = -\frac{4}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$. Or, d'après la question précédente, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$ donc $-\frac{4}{5}u_n \leq -\frac{4}{5} \times \frac{15}{4} \times 0,5^n$ (car $-\frac{4}{5} < 0$), donc $-\frac{4}{5}u_n \leq -3 \times 0,5^n$, puis $-\frac{4}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \leq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c► D'après les questions précédentes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc $u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante à partir du rang 1 ;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n > 0$, donc (u_n) est minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

3►

```

1 def seuil():
2     n = 0
3     u = 2
4     while u > 0.01:
5         u = 1/5 * u + 3 * 0.5**n
6         n = n + 1
7     return n

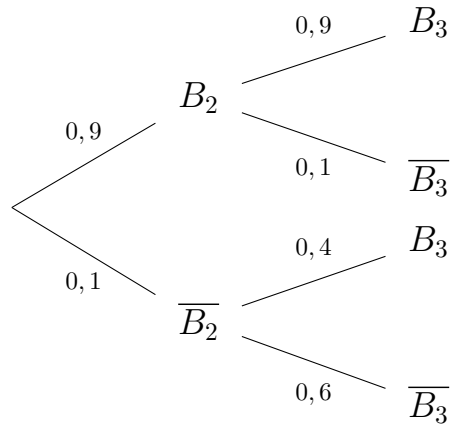
```

Correction de l'ex 9

1► D'après l'énoncé, la première semaine, le mafieux est motivé donc $p_1 = 1$.

- Sachant qu'il a travaillé la première semaine (B_1 est réalisé), la probabilité qu'il retravaille la deuxième semaine (B_2) est de 0,9. On a donc $p_2 = 0,9$.
- Pour calculer p_3 , on peut construire un arbre pondéré pour les étapes $n = 1$ et $n = 2$. D'après ce qui

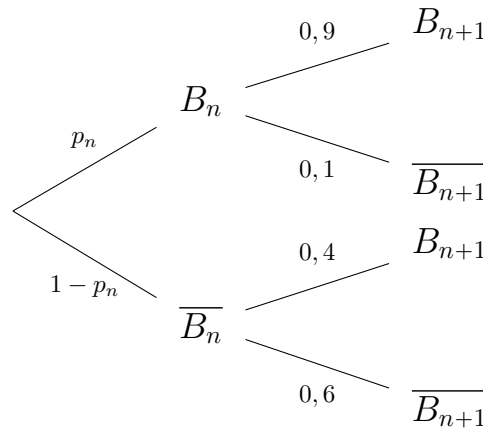
précède,



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_3 = \mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(\overline{B_2} \cap B_3) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$$

2► Comme $p_n = \mathbb{P}(B_n)$:



3► D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap B_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4 = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n = 0,5p_n + 0,4 \end{aligned}$$

4► a► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{HR}_n$: « $p_n > 0,8$ »

INIT D'après l'énoncé, $p_1 = 1$. Or $1 > 0,8$, donc $\mathcal{HR}_1$: « $p_1 > 0,8$ » est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $p_{n+1} > 0,8$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{HR}_n$, $p_n > 0,8$. Or $0,5 > 0$ donc $0,5p_n > 0,4$, puis $0,5p_n + 0,4 > 0,4 + 0,4$, c'est-à-dire $p_{n+1} > 0,8$. Donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_1$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0,8$.

- b► Le Joker peut interpréter ce résultat en se disant que, peu importe la semaine, la probabilité qu'un mafieux rackette un commerce est supérieure à 80%.

5► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - 0,8$, donc $p_n = u_n + 0,8$, et :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,8 = (0,5p_n + 0,4) - 0,8 = 0,5p_n - 0,4 = 0,5(u_n + 0,8) - 0,4 \\ &= 0,5u_n + 0,4 - 0,4 = 0,5u_n \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

- b► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$. Comme $p_n = u_n + 0,8$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$.
- c► Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$. Par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,8$.

Correction de l'ex 10

1► D'après l'énoncé, $u_0 = 300$.

- En 2021 ($n = 1$), $u_1 = 0,8u_0 + 3 = 0,8 \times 300 + 3 = 243$. On compte 243 loutres.
- En 2022 ($n = 2$), $u_2 = 0,8u_1 + 3 = 0,8 \times 243 + 3 = 197,4$. On compte environ 197 loutres.

2► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{HR}_n$: « $15 < u_{n+1} \leq u_n$ »

INIT D'après la question précédente, $u_0 = 300$ et $u_1 = 243$. Or $15 < 243 \leq 300$, donc $\mathcal{HR}_0$: « $15 < u_1 \leq u_0$ » est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$: « $15 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{HR}_n$, $15 < u_{n+1} \leq u_n$. Or $0,8 > 0$ donc $0,8 \times 15 < 0,8u_{n+1} \leq 0,8u_n$, soit $12 < 0,8u_{n+1} \leq 0,8u_n$. De là, $12 + 3 < 0,8u_{n+1} + 3 \leq 0,8u_n + 3$, c'est-à-dire $15 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $15 < u_{n+1} \leq u_n$.

3► D'après la question précédente :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit (u_n) est décroissante,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $15 < u_{n+1}$, autrement dit (u_n) est minorée par 15.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) est convergente.

4► La suite (u_n) converge vers ℓ , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,8u_n + 3$, on obtient $\ell = 0,8\ell + 3$ donc $\ell = 15$. Donc la limite de (u_n) est $\ell = 15$.

5► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 15$, donc $u_n = v_n + 15$, et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 15 = (0,8u_n + 3) - 15 = 0,8u_n - 12 = 0,8(v_n + 15) - 12 \\ &= 0,8v_n + 12 - 12 = 0,8v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 15 = 300 - 15 = 285$.

- b► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,8^n = 285 \times 0,8^n$, donc $t_n = v_n + 15 = 285 \times 0,8^n + 15$.
- c► Comme $-1 < 0,8 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. Par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 15$.
- d► Selon ce modèle, à long terme, la population de l'échantillon de l'étude va se stabiliser autour de 15 loutres d'Europe.

- 6► a► À l'aide du tableau de valeurs fourni par la calculatrice, on trouve $u_{12} \approx 34,6$ et $u_{13} \approx 30,7$, puis $u_{14} \approx 27,5$. Le plus petit entier attendu est donc $n = 14$. Cela signifie qu'à partir de l'année $2020 + 14 = 2034$, l'effectif descendra sous le seuil de 30 loutres.

Pour répondre algébriquement à cette question, on peut utiliser le logarithme :

$$\begin{aligned} u_n \leq 30 &\iff 285 \times 0,8^n + 15 \leq 30 \iff 0,8^n \leq \frac{15}{285} \iff \ln(0,8^n) \leq \ln\left(\frac{15}{285}\right) \\ &\iff n \ln(0,8) \leq \ln\left(\frac{15}{285}\right) \iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{15}{285}\right)}{\ln(0,8)} \approx 13,2 \iff n \geq 14 \end{aligned}$$

(les justifications sont, dans l'ordre : car $285 > 0$, par croissance de $\ln$ et car $\ln(0,8) < 1$.)

- b► Voici le code complété :

```
1  def population(S):
2      n = 0
3      u = 300
4      while u > S:
5          u = 0.8 * u + 3
6          n = n + 1
7      return n
```

Correction de l'ex 11

- 1► $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$: alors $u_n \times v_n = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- 2► $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{-1}{n}$: alors $u_n \times v_n = -n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
- 3► $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$: alors $u_n \times v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- 4► $u_n = 4n$ et $v_n = \frac{1}{n}$: alors $u_n \times v_n = 4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$

Correction de l'ex 12

- 1► Soit (u_n) une suite croissante non majorée. « Non majorée » signifie que (u_n) n'admet pas de majorant, elle n'est pas plafonnée : autrement dit, quel que soit le seuil qu'on lui fixe, (u_n) parvient à le dépasser. Autrement dit, quel que soit $S \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > S$. Or par croissance de (u_n) , pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq S$: on a montré que, quel que soit le seuil que l'on fixe, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite dépassent ce seuil : c'est la définition de diverger vers $+\infty$.
- 2► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante.
 b► La suite (u_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge. Notons ℓ sa limite. En passant la relation de récurrence de (u_n) à la limite, par somme et produit, on obtient la relation $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$, donc $\ell = 0$.
 c► Par croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 = 1 > 0$, donc (u_n) ne peut pas se rapprocher de 0, c'est-à-dire que 0 ne peut pas être la limite de (u_n) . Or, en supposant que (u_n) est majorée, on a trouvé qu'elle converge vers 0 : c'est contradictoire, on a donc montré par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.
 d► D'après le théorème montré précédemment, comme (u_n) est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Correction de l'ex 13

- 1► FAUX. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. La suite (u_n) converge vers 0. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -4n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, et donc (v_n) ne converge pas.
- 2► VRAI. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$. Comme $2 > 0$, tous les termes u_n sont strictement positifs. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on a $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$. En multipliant par $-4 < 0$, on obtient $-\frac{4}{u_n} \geq -4 \times \frac{1}{2}$, soit $v_n \geq -2$. La suite (v_n) est donc minorée par -2 .
- 3► FAUX. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = -n$. La suite (u_n) est décroissante. Or $v_n = -\frac{4}{-n} = \frac{4}{n}$ qui est le terme général d'une suite décroissante.
- 4► FAUX. Une suite qui diverge ne tend pas nécessairement vers $\pm\infty$. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Elle prend alternativement les valeurs -1 et 1 , donc elle diverge. La suite (v_n) est alors définie par $v_n = -\frac{4}{(-1)^n}$. Elle prend alternativement les valeurs -4 et 4 , elle ne converge donc pas vers 0.

Correction de l'ex 14

- 1► VRAI. C'est l'application directe du théorème de la limite monotone.
- 2► VRAI. Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers un réel ℓ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$. La suite (u_n) est donc majorée par sa limite ℓ .
- 3► FAUX. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Elle est majorée (par 1) et converge (vers 0), mais elle n'est pas croissante (elle est même décroissante).
- 4► VRAI. Soit (u_n) une suite décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$. La suite est donc majorée par son premier terme u_0 .

Correction de l'ex 15

Remarque : pour prouver qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un contre exemple, ici, deux termes qui ne sont pas dans le « bon ordre ». À la calculatrice, on lit que $p_{23} > p_{22}$, réfutant directement la décroissance. Toutefois, on montre ci-dessous l'étude complète des variations de (p_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= [(n+1)^2 - 42(n+1) + 4] - [n^2 - 42n + 4] \\ &= n^2 + 2n + 1 - 42n - 42 + 4 - n^2 + 42n - 4 = 2n - 41 \end{aligned}$$

La suite est strictement décroissante si, et seulement si, $p_{n+1} - p_n < 0$, autrement dit si, et seulement si $2n - 41 < 0$ ce qui revient à $n < 20,5$. Ainsi, la suite est strictement décroissante sur ses 21 premiers rangs, mais elle devient strictement croissante à partir du rang 21.

Correction de l'ex 16

- 1► FAUX. C'est une forme indéterminée. Contre exemple : si l'on choisit $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$. Cependant, $u_n + v_n = n^2 - n = n(n-1)$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty \neq 0$ par produit.
- 2► VRAI. Soit $\ell \neq 0$ la limite de (u_n) . Par règle des signes sur les produits de limites :
- Si $\ell > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = +\infty$.
 - Si $\ell < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = -\infty$.

Dans les deux cas, la suite $u \times v$ diverge vers l'infini, elle ne converge donc pas.

- 3► FAUX. Contre exemple : considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Les suites (u_n) et (v_n) convergent (respectivement vers 1 et 0) et (v_n) ne s'annule pas. Pourtant, $\frac{u_n}{v_n} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la suite quotient ne converge pas.

Correction de l'ex 17

- 1► FAUX. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n \times (-1)^n$. Ses termes de rang pair grandissent vers $+\infty$ et ses termes de rang impair vers $-\infty$. La suite n'est pas majorée, mais elle ne tend pas vers $+\infty$ (elle n'admet pas de limite).
- 2► FAUX. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = -\frac{1}{n}$. Elle est strictement croissante, mais elle converge vers 0. En particulier, elle ne tend pas vers $+\infty$.
- 3► VRAI. Par définition, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors pour tout réel S , il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n dépassent S . Aucun réel S ne peut donc majorer la suite.
- 4► FAUX. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + 2(-1)^n$. On a $u_0 = 2$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1 \dots$ La suite n'est pas croissante (car $u_1 < u_0$). Pourtant, comme $n - 2 \leq u_n \leq n + 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 2) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par minoration.

Remarque : il est souvent plus simple et tout à fait suffisant d'esquisser un contre exemple plutôt que de chercher une expression exacte ! Par exemple, pour la dernière affirmation, un dessin d'une « vague qui monte » aurait constitué un contre exemple parfaitement recevable.

Correction de l'ex 18

- 1► VRAI. La fonction $x \mapsto x^2 - 17x + 20$ est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est $1 > 0$. Son somme est donc un minimum. La suite (u_n) , définie comme $u_n = f(n)$, est donc minorée par la valeur de ce minimum.
- 2► FAUX. On a $u_9 = -52$ et $u_{10} = -50 > u_9$.
- 3► FAUX. Résolvons l'équation $u_n = 2021$: cela donne $n^2 - 17n + 20 = 2021$ donc $n^2 - 17n - 2001 = 0$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 1 \times (-2001) = 289 + 8004 = 8293$. Comme $\Delta > 0$, les racines sont $n_1 = \frac{17 - \sqrt{8293}}{2}$ et $n_2 = \frac{17 + \sqrt{8293}}{2}$. Or n est entier, ce qui n'est pas le cas de ces deux racines, donc aucun terme de la suite n'est égal à 2021.
- 4► FAUX. Comme $u_n = n^2 \left(1 - \frac{17}{n} + \frac{20}{n^2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{17}{n} + \frac{20}{n^2} = 1$. Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'ex 19

- 1► FAUX. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < u_n < n + 1$. Comme n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs, il n'existe aucun entier strictement compris entre eux. Ainsi, aucun terme u_n ne peut être un entier.
- 2► FAUX. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n$, on en déduit par minoration que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 3► VRAI. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < u_n < n + 1$, en particulier $n + 1 < u_{n+1} < n + 2$. En racolant ces inégalités, on obtient $u_n < n + 1 < u_{n+1}$, en particulier $u_n \leq u_{n+1}$.
- 4► FAUX. Comme démontré à la question 2►, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6 Géométrie et repérage dans l'espace

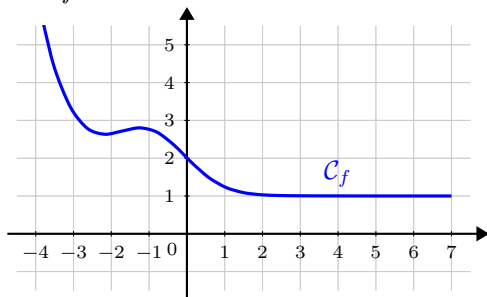
7 Limites de fonctions

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



- 1► Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, en y précisant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2► Déterminer une équation de l'asymptote horizontale de la courbe de f .

Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
f	2	$+\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			1		

- 1► Donner les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et -1 .
- 2► Préciser le type de chaque asymptote qu'admet la courbe de f ainsi qu'une équation correspondante.
- 3► Tracer une allure possible de la courbe représentative de f .

Exercice 3 (QCM)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$. La limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à :

- 1► $-\infty$ 2► $+\infty$ 3► 0 4► n'existe pas

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes.

- 1► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 5x + 2$
- 2► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 6x + 5\sqrt{x} - 5$
- 3► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x+1}$
- 4► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2 - \cos(x)}$
- 5► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos^2(x) - x$
- 6► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos^2(x) - x$
- 7► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1}$
- 8► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$

Exercice 5

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes lorsque cela est possible.

- 1► $f(x) = 5x^3 - 3x + 1$
- 2► $f(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}$
- 3► $f(x) = -2x^4 + x^2 + 3$
- 4► $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$
- 5► $f(x) = 5e^x + x$
- 6► $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x} - 2e^x$

Exercice 6

Étudier les limites des fonctions suivantes et préciser les éventuelles asymptotes associées.

- 1▶ $f(x) = 3$ en 0 et en 2
- 2▶ $f(x) = |x|$ en 0, 3 et en $-\infty$
- 3▶ $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ en 5
- 4▶ $f(x) = x + \sqrt{x}$ en 0, 1 en $+\infty$
- 5▶ $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ en 0, 3 et en $-\infty$
- 6▶ $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ en $\sqrt{5}$ et en $-\infty$
- 7▶ $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$
- 8▶ $f(x) = e^{-x^2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
- 9▶ $f(x) = e^x + e^{-x}$ en $-\infty$
- 10▶ $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ en 0 et en $-\infty$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 2}$$

- 1▶ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2▶ Étudier la limite de la fonction f en 0, en 1 et en $+\infty$.
- 3▶ Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe de f .

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble. On précisera également les éventuelles asymptotes.

- 1▶ $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$
- 2▶ $f(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}$
- 3▶ $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
- 4▶ $f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 5}}$

Exercice 10

Calculer :

- A▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x - 2}$
- B▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3}{2 - x}$
- C▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{x - 1}$
- D▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{6x + 4}{3x - 6}$
- E▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1 - x}{2 - x}$
- F▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x^2 - 1}$

Je comprends mon cours

Exercice 11

Étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, variations, limites au bord de son ensemble de définition, asymptotes à sa courbe) puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé ainsi que ses asymptotes.

- ▶ $f(x) = \frac{x + 2}{3x - 6}$ ▶ $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{x - 1}$$

- 1▶ Déterminer les limites en $+\infty$, $-\infty$ et 1 de f .
- 2▶ Déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe de f .

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1► a► Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b► En déduire l'existence de deux asymptotes à $\mathcal{C}$.

- 2► a► Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f(-x) = -f(x).$$

- b► Qu'en déduit-on graphiquement ?

- 3► a► Calculer la dérivée f' de f .
b► Étudier le signe de f' .
c► En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2 - 2x}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1► Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2► Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe.
- 3► En déduire le tableau de variations de f .
- 4► Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
- 5► Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Exercice 15

On note $E(x)$ la partie entière du nombre réel x , c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{E(x) + 2}{x}$$

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de g .
- 2► Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

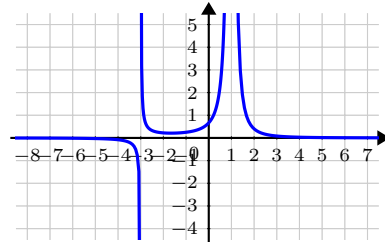
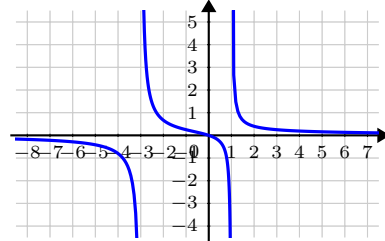
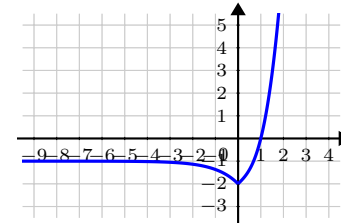
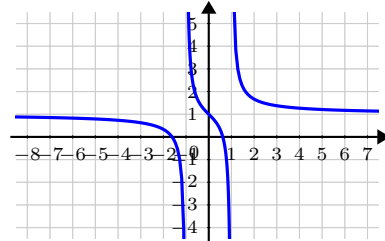
$$x - 1 \leq E(x) \leq x$$

- 3► En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Exercice 16

Pour chaque fonction représentée :

- 1► Conjecturer l'ensemble de définition.
- 2► Quelles limites peut-on conjecturer aux bornes de l'ensemble de définition ?
- 3► Quelles asymptotes éventuelles peut-on conjecturer ?



Exercice 17

Indiquer si chaque proposition est vraie ou fausse. Justifier.

- 1► Si f est une fonction strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- 2► Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Exercice 18

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$. Que peut-on en déduire pour les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$?

Exercice 19

Déterminer l'expression d'une fonction f définie sur un ensemble à préciser vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$.

Exercice 20

Déterminer l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique admet une asymptote d'équation $y = 2$ en $-\infty$ mais pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Vers le supérieur

Exercice 21

Une seule réponse est bonne. Laquelle ? Justifier. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{a}{b + e^{-t}}$$

où a et b sont deux nombres réels. On sait que $g(0) = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 3$. Alors :

- | | |
|---------------------------------|-----------------------|
| 1► $a = 2$ et $b = 3$ | 3► $a = 4$ et $b = 1$ |
| 2► $a = 4$ et $b = \frac{4}{3}$ | 4► $a = 6$ et $b = 2$ |

Exercice 22

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$.

- 1► Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 2► En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$.
- 3► Retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.

Exercice 23

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1► Au maximum, combien d'asymptotes horizontales $\mathcal{C}_f$ peut-elle admettre ? Et d'asymptotes verticales ?
- 2► Trouver deux exemples de représentations graphiques permettant d'illustrer les réponses à la question précédentes.

Exercice 24

Soit f la fonction racine carrée et A un nombre réel positif.

- 1► Rappeler l'expression $f(x)$ ainsi que l'ensemble de définition de f .
- 2► Conjecturer la limite de f en $+\infty$.
- 3► Justifier que, si $x > A^2$, alors $f(x) > A$.
- 4► Que peut-on en conclure sur la limite de f en $+\infty$?

Corrections

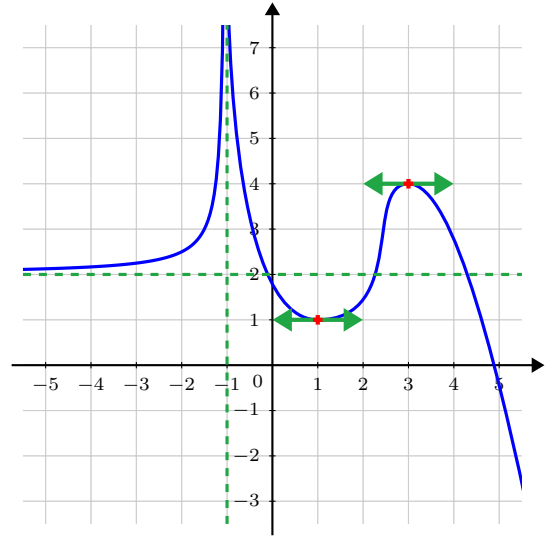
La rédaction des solutions n'est pas toujours pleinement détaillée ou expliquée. Pour plus de détails, consultez une source extérieure. ✨

Correction de l'ex 1

1▶

x	$-\infty$	$-2,5$	1	$+\infty$
f	$+\infty$	$2,5$	$2,9$	1

2▶ En $+\infty$, la courbe de f semble admettre une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.



Correction de l'ex 2

1▶ On lit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2▶ La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

3▶ On commence par matérialiser les **points de passage** renseignés par les images au bout des flèches et leurs antécédents, puis on trace les **asymptotes**. On matérialise également les tangentes horizontales aux extrema locaux. Enfin, on esquisse l'allure de la **courbe** en couchant celle-ci contre les asymptotes et en respectant les variations.

Voir figure ci-contre.

Correction de l'ex 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x}(x+1)$.
D'une part, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty$.
D'autre part, en effectuant le changement de variable $y = -x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, on a
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$. Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Correction de l'ex 4

1▶ C'est une forme indéterminée : on factorise par le terme prépondérant. Pour tout $x > 0$, $x^3 - 5x + 2 = x^3 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = 0$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 5x + 2 = +\infty$.

2▶ C'est une forme indéterminée : on factorise par le terme prépondérant. Pour tout $x > 0$, $x^2 - 6x + 5\sqrt{x} - 5 = x^2 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$, donc par somme la parenthèse tend vers 1. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit par produit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 6x + 5\sqrt{x} - 5 = +\infty$.

3▶ Pour tout $x \geq 0$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x+1} \leq \frac{\cos(x)}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ car $x+1 > 0$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{1}{x+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x+1} = 0$.

4▶ Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $1 \geq -\cos(x) \geq -1$ donc $1 \leq 2 - \cos(x) \leq 3$. La fonction inverse

étant décroissante sur $]0; +\infty[$, on a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos(x)} \leq 1$, puis $\frac{x+1}{3} \leq \frac{x+1}{2 - \cos(x)}$ car $x+1 > 0$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3} = +\infty$. Donc, par minoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2 - \cos(x)} = +\infty$.

5► Pour tout x réel, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $\cos(x)^2 \leq 1$, donc $\cos(x)^2 - x \leq 1 - x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ donc, par majoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)^2 - x = -\infty$.

6► Pour tout x réel, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $\cos(x)^2 \leq 1$, donc $\cos(x)^2 - x \geq -x$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ donc, par minoration, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)^2 - x = +\infty$.

7► C'est une forme indéterminée : on factorise le dénominateur par son terme prépondérant (le numérateur est déjà un produit, inutile de factoriser) : $\frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ ($y = -x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$) donc, par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2}{1} = 2$.

8► Pour tout $x < 0$, $x^3 + x^2 + x = x^3 \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc la parenthèse tend vers -1 . Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x^2 + x = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ en effectuant le changement de variable $y = -x^3 + x^2 + x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

Correction de l'ex 5

1► Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(5 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$. La parenthèse tend vers 5 en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on obtient par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, on obtient par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2► • En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 5 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+2} = 0$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3► Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^4 \left(-2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)$. La parenthèse tend vers -2 aux infinis. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$, par produit on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

4► La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$, on cherche donc uniquement la limite en $+\infty$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\sqrt{x} = -\infty$. Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

5► • En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

6► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x} - 2e^x = 1 + e^{-x} - 2e^x$.

- En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ ($y = -x$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2e^x = -\infty$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ ($y = -x$). Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2e^x = 0$, par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Correction de l'ex 6

1► La fonction f est constante, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ de même.

2► Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = |0| = 0$, de même $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = |3| = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = |-5| = 5$.

3► Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2(5)^3 + 5(5)^2 - 5 + 1 = 250 + 125 - 5 + 1 = 371$.

4► • En 0 et en 1, par continuité et somme : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 1 = 2$.

- En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5► • En 0 et en 3, par continuité : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{5}$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{3^2 + 5} = \sqrt{14}$.

- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 5 = +\infty$, donc en effectuant le changement de variable $y = x^2 + 5 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

6► • En $\sqrt{5}$: par continuité de la fonction carré, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} x^2 - 5 = 0$, donc par continuité de la fonction racine carrée, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \sqrt{x^2 - 5} = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{y} = 0$ en effectuant le changement de variable $y = x^2 - 5$.

- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ en effectuant le changement de variable $y = x^2 - 5$.

7► Pour plus d'informations sur ce genre de situation, allez voir la correction de l'exercice 1 sur les limites de suites. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par somme le dénominateur tend vers $+\infty$ puis, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

8► On effectue le changement de variable $y = -x^2$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$.

La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $\pm\infty$.

9► On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ d'après le changement de variable $y = -x$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

10► Rappel : « f est dérivable en a » signifie que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite en a , auquel cas cette limite est $f'(a)$.

- La fonction exponentielle est dérivable en 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0)$, autrement dit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
1. Ce quotient est l'inverse de $f(x)$: par quotient, on trouve donc que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.
- On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Correction de l'ex 7

- a► On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$ donc par quotient,
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-2}{1} = -2.$$

Interprétation graphique : La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$.

- b► Pour tout x réel, $f(x) = \frac{e^x (1 - \frac{2}{e^x})}{e^x (1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 + 2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, donc par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

Interprétation graphique : La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

Correction de l'ex 8

- 1► Les valeurs interdites de f sont celles qui annulent son dénominateur. Résolvons l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$: c'est une équation polynomiale du second degré. Son discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

- 2► a► En 0 : par continuité, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2(0) - 5}{0^2 - 3(0) + 2} = -\frac{5}{2}$.

- b► En 1 : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2x - 5}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x - 5}{x-2} \times \frac{1}{x-1}$$

Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 5}{x - 2} = 3$. On sait que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} = -\infty$. Par produit,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty.$$

- c► En $+\infty$: pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x(2 - \frac{5}{x})}{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})} = \frac{1}{x} \times \frac{2 - \frac{5}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$, donc la seconde écriture fractionnaire tend vers $\frac{2}{1} = 2$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- 3► • La droite verticale d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f .
• La droite horizontale d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
• On montre de même que précédemment que les limites de f en 2 à droite et à gauche sont infinies, donc la droite verticale d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe de f .

Correction de l'ex 9

- 1 ▶ Ensemble de définition : la valeur interdite est celle qui annule le dénominateur, c'est-à-dire 1. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
- ▶ Limites aux infinis : $f(x) = \frac{x^2(1 + \frac{3}{x^2})}{x(\frac{1}{x} - 1)} = x \times \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc l'écriture fractionnaire tend vers $\frac{1}{-1} = -1$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- ▶ Limites en 1 : $f(x) = -(x^2 + 3) \times \frac{1}{x - 1}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 1} -(x^2 + 3) = -4$. On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x - 1} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x - 1} = +\infty$. Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$.
- ▶ Asymptote : la droite verticale d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f .
- 2 ▶ Ensemble de définition : la valeur interdite est celle qui annule le dénominateur, c'est-à-dire -3 . Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- ▶ Limites aux infinis : $f(x) = \frac{x(1 + \frac{2}{x})}{x^2(1 + \frac{3}{x})^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{2}{x}}{(1 + \frac{3}{x})^2}$. Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = 0$, donc l'écriture fractionnaire tend vers 1 par somme et quotient. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, par produit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.
- ▶ Limite en -3 : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = (x + 2) \times \frac{1}{(x + 3)^2} = (x + 2) \times \left(\frac{1}{x + 3}\right)^2$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow -3} x + 2 = -1$. On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} \frac{1}{x + 3} = -\infty$, donc en effectuant le changement de variable $y = \frac{1}{x + 3}$, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} \left(\frac{1}{x + 3}\right)^2 = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^2 = +\infty$. On montre de même que $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \left(\frac{1}{x + 3}\right)^2 = +\infty$. Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$.
- ▶ Asymptotes :
- La droite horizontale d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - La droite verticale d'équation $x = -3$ est asymptote à la courbe de f .
- 3 ▶ a ▶ Ensemble de définition : pour tout x réel, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc le dénominateur ne s'annule jamais. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- b ▶ Limites aux infinis : $f(x) = \frac{x^3}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = x \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc l'écriture fractionnaire tend vers 1. Par produit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- c ▶ Asymptotes : La courbe de f ne possède aucune asymptote horizontale ni verticale.
- 4 ▶ a ▶ Ensemble de définition : la fonction est définie pour les valeurs de x telles que $x - 5 \neq 0$ et $\frac{x + 3}{x - 5} \geq 0$. Un rapide tableau de signe justifie que le quotient est positif à l'extérieur de $] -3; 5[$. La valeur 5 étant interdite, on a $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3] \cup]5; +\infty[$.
- b ▶ Limites aux infinis : $\frac{x + 3}{x - 5} = \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{x(1 - \frac{5}{x})} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x}}$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x - 5} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{x - 5} = 1$. Effectuons le changement de variable $y = \frac{x + 3}{x - 5}$: par continuité de la fonction racine carrée $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = 1$ avec le changement de variable $y = \frac{x + 3}{x - 5}$.
- c ▶ Limite en -3 : par continuité, $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x - 5} = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\frac{x + 3}{x - 5} > 0$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{y} = 0$.

d► Limite en 5 : $\frac{x+3}{x-5} = (x+3) \times \frac{1}{x-5}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 5} x+3 = 8$, et on sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{1}{x-5} = +\infty$.

Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{x+3}{x-5} = +\infty$. Avec le changement de variable $y = \frac{x-3}{x+5}$, on obtient $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

e► Asymptotes :

- La droite horizontale d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- La droite verticale d'équation $x = 5$ est asymptote à la courbe de f .

Correction de l'ex 10

A► D'après le cours, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

B► Pour tout $x \neq 2$, $\frac{3}{2-x} = -3 \times \frac{1}{x-2}$. D'après le cours, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3}{2-x} = -\infty$ par produit.

C► Pour tout $x \neq 1$, $\frac{x}{x-1} = x \times \frac{1}{x-1}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$. De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$. Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{x-1} = -\infty$.

D► Pour tout $x \neq 2$, $\frac{6x+4}{3x-6} = \frac{6x+4}{3(x-2)} = \frac{6x+4}{3} \times \frac{1}{x-2}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x+4}{3} = \frac{16}{3}$. D'après le cours, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$. Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{6x+4}{3x-6} = -\infty$.

E► Pour tout $x \neq 2$, $\frac{1-x}{2-x} = \frac{1-x}{-(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} = (x-1) \times \frac{1}{x-2}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 2} x-1 = 1$. D'après le cours, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$. Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1-x}{2-x} = -\infty$.

F► Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \times \frac{1}{x-1}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$. D'après le cours, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$. Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$.

Correction de l'ex 11

1► Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{3x-6}$.

a► Ensemble de définition : la valeur interdite de f est celle qui annule son dénominateur, c'est-à-dire telle que $3x-6=0$, autrement dit $x=2$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b► Limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$:

• En $+\infty$ et $-\infty$: $f(x) = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{3x(1-\frac{2}{x})} = \frac{1}{3} \times \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc l'écriture fractionnaire tend vers $\frac{1}{1} = 1$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}$.

• En 2 : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{x+2}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3} \times \frac{1}{x-2}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{3} = \frac{4}{3}$. D'après le cours, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$. Par produit $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$.

c► Variations : la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ (comme quotient). Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{1 \times (3x - 6) - (x + 2) \times 3}{(3x - 6)^2} = \frac{3x - 6 - 3x - 6}{(3x - 6)^2} = \frac{-12}{(3x - 6)^2}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $(3x - 6)^2 > 0$ et $-12 < 0$, donc $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

d► Asymptotes :

- La droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{3}$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- La droite verticale d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe de f .

2► Étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

a► Ensemble de définition : la valeur interdite de g est celle qui annule son dénominateur, c'est-à-dire telle que $x + 2 = 0$, autrement dit $x = -2$. L'ensemble de définition de g est donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b► Limites aux bornes de $\mathcal{D}_g$:

- En $+\infty$ et $-\infty$: $g(x) = \frac{x^2(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2})}{x(1 + \frac{2}{x})} = x \times \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc l'écriture fractionnaire tend vers 1. Par produit, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$.

- En -2 : Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) = (x^2 + 3x + 3) \times \frac{1}{x + 2}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 3x + 3 = 1$.

D'après le cours, $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x + 2} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x + 2} = -\infty$. Par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} g(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x) = -\infty$.

c► Variations : la fonction g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ (comme quotient). Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 2) - (x^2 + 3x + 3) \times 1}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 2)^2}$. Le dénominateur $(x + 2)^2$ étant strictement positif sur $\mathcal{D}_g$, $g'(x)$ est du signe du produit $(x + 1)(x + 3)$, qui est un polynôme du second degré s'annulant en -3 et -1 , et d coefficient dominant $1 > 0$, donc positif à l'extérieur de ses racines. On en déduit que :

- g est strictement croissante sur $] -\infty; -3]$ et sur $[-1; +\infty[$.
- g est strictement décroissante sur $[-3; -2[$ et sur $] -2; -1]$.

d► Asymptotes :

- La droite verticale d'équation $x = -2$ est asymptote à la courbe de g .
- Pour aller (plus) loin : comme pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) - (x + 1) = \frac{1}{x + 2}$ et que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + 2} = 0$, la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour la représentation graphique, tracez les fonctions sur votre calculatrice, Geogebra, Desmos, Wolfram Alpha...

Correction de l'ex 13

1► a► Limites de f :

- En $-\infty$: on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$.
- En $+\infty$: pour tout x réel, $f(x) = \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ (changement de variable $y = -x$). Par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$.

b► Asymptotes : d'après les limites précédentes, la droite horizontale d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$, et la droite horizontale d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

- 2► a► Pour tout x réel, $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{-(e^x-1)}{e^x+1} = -f(x)$.
- b► Interprétation graphique : la fonction f est impaire, donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- 3► a► La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas). Pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.
- b► Pour tout x réel, $e^x > 0$ donc $2e^x > 0$. De plus, $(e^x+1)^2 > 0$ comme carré d'un nombre réel non nul. Par quotient, pour tout x réel, $f'(x) > 0$.
- c► La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il faut bien penser à indiquer les limites dans le tableau de variations.

Correction de l'ex 14

- 1► Limites de f : pour tout $x \neq 0$, $x^2 - 2x = x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc la parenthèse tend vers 1. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$, par produit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 2x = +\infty$. On effectue alors le changement de variable $y = x^2 + 2x$, on montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.
- 2► La fonction f est de la forme e^u avec $u(x) = x^2 - 2x$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée) et pour tout x réel, $f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x} = 2(x-1)e^{x^2-2x}$. Comme pour tout x réel, $e^{x^2-2x} > 0$ et $2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$. Ainsi, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$, la dérivée s'annulant en $x = 1$.
- 3► La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Pensez bien à indiquer les limites et la valeur du minimum ($1/e$) dans le tableau de variations.
- 4► Pour tout x réel, $f(x) = 1 \iff e^{x^2-2x} = e^0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0$. L'équation (produit nul) admet donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 2$. L'ensemble des solutions est $\{0; 2\}$.
- 5► L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x-2) + f(2)$. Or $f(2) = e^{2^2-2(2)} = e^0 = 1$ et $f'(2) = 2(2-1)e^{2^2-2(2)} = 2 \times 1 \times 1 = 2$. Par conséquent, $y = 2(x-2) + 1$, autrement dit $y = 2x - 3$.

Correction de l'ex 15

- 1► La fonction g est définie pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas son dénominateur. La seule valeur interdite est donc $x = 0$. Par conséquent, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- 2► Par définition, la partie entière $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . On a donc, de manière immédiate, $E(x) \leq x$. De plus, par définition du plus grand entier inférieur, l'entier suivant $E(x) + 1$ est strictement supérieur à x , ce qui s'écrit $E(x) + 1 > x$, autrement dit $E(x) > x - 1$. En regroupant ces deux inégalités, on obtient bien pour tout x réel : $x - 1 \leq E(x) \leq x$.
- 3► Pour tout $x > 0$, d'après l'encadrement précédent, $x + 1 \leq E(x) + 2 \leq x + 2$, puis en divisant par $x > 0$, on a $\frac{x+1}{x} \leq g(x) \leq \frac{x+2}{x}$, autrement dit $1 + \frac{1}{x} \leq g(x) \leq 1 + \frac{2}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{2}{x} = 1$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Correction de l'ex 12

- 1► • En $+\infty$: pour tout x réel, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $2x - 1 \leq 2x + \sin(x) \leq 2x + 1$. Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$, dans ce cas $\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$. Or pour tout $x \neq 0$, $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, cette expression tend vers 2. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

- En $-\infty$: en reprenant l'encadrement précédent pour $x < 1$, on a $x - 1 < 0$, ce qui inverse le sens des inégalités : $\frac{2x+1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x-1}{x-1}$. Par un calcul identique, les deux bornes tendent vers 2. Le théorème des gendarmes assure alors que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

- En 1 : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = (2x + \sin(x)) \times \frac{1}{x-1}$. Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + \sin(x) = 2 + \sin(1)$. Comme $-1 \leq \sin(1) \leq 1$, on a $2 + \sin(1) > 0$. D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

- 2► • La droite horizontale d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 • La droite verticale d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f .

Correction de l'ex 16

Dans l'ordre :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, asymptotes d'équations $y = 1$ en $\pm\infty$, $x = -1$, $x = 1$.
- On peut voir la fonction de deux manières : soit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2[$. Dans les deux cas, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Dans le premier cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, dans le second $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. Dans les deux cas, la droite horizontale d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$. Dans le second cas, la droite verticale d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, asymptotes d'équations $y = 0$ en $\pm\infty$, $x = -3$, $x = 1$.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, asymptotes d'équations $y = 0$ en $\pm\infty$, $x = -3$, $x = 1$.

Correction de l'ex 18

Par minoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Par majoration, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Correction de l'ex 17

- 1► FAUX. Contre-exemple : $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
 2► FAUX. Contre-exemple : $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x$, on a $f(x) - g(x) = x^2 - x = x(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Correction de l'ex 19

Exemple : $f : x \mapsto 3 - \frac{1}{(x-5)^2}$. À justifier proprement !

Correction de l'ex 20

Exemple : $f : x \mapsto 2 + e^x$. À justifier proprement !

Correction de l'ex 21

D'après l'expression, $g(0) = \frac{a}{b+1} = 2$, donc $a = 2(b+1)$. Par ailleurs, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ (changement de variable $u = -t$), donc par somme et quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{a}{b} = 3$, donc $a = 3b$. Ainsi, a est à la fois un multiple de 2 et de 3, donc un multiple de 6 : seule la réponse $a = 6$ satisfait ce critère.

Correction de l'ex 22

- 1► Pour tout x différent de 0 et -5 , on a $f(x) = \frac{x-3}{x+5} = \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\cancel{x} \left(1 + \frac{5}{x}\right)}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$ donc, par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.
- 2► On effectue le changement de variable $y = f(x)$: par continuité de f en 1, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = f(1) = \frac{-2}{6}$.
- 3► On calcule directement : $f(f(x)) = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5} = \frac{(x-3) - 3(x+5)}{(x-3) + 5(x+5)} = \frac{-2x-18}{6x+22} = \frac{\cancel{-2} \left(-2 - \frac{18}{x}\right)}{\cancel{6} \left(6 + \frac{22}{x}\right)}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{22}{x} = 0$, donc par somme et quotient, on retrouve bien le même résultat.

Correction de l'ex 23

- 1► Elle ne peut admettre qu'au plus 2 asymptotes horizontales (aux deux infinis) et une infinité d'asymptotes verticales.
- 2► La fonction inverse a deux asymptotes horizontales, bien qu'on pourrait arguer qu'elle n'en a qu'une puisque les asymptotes aux deux infinis sont confondues. Il suffit de dessiner une fonction du type inverse en décalant verticalement l'une des branches de l'hyperbole, pour changer la limite. Inutile de chercher une expression, un joli dessin est une justification convaincante.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ a une asymptote verticale tous les π .

Correction de l'ex 24

- 1► Pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$.
- 2► il semble que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 3► Si $x > A^2$, alors $\sqrt{x} > \sqrt{A^2}$ par stricte croissance de la fonction racine carrée, or A est positif, donc $\sqrt{A^2} = A$, donc $f(x) > A$.
- 4► La fonction f dépasse définitivement n'importe quel seuil A (concrètement : si on fixe un seuil A , alors pour tout $x > A^2$, $f(x)$ dépasse ce seuil), donc elle tend vers $+\infty$.

8 Continuité

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-4)/x & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1► Tracer la courbe représentative de f sur $[-5; 5]$.
- 2► Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$?
- 3► Démontrer cette conjecture.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1► Tracer la courbe représentative de f sur $[-5; 5]$.
- 2► Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$?
- 3► Démontrer cette conjecture.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x^2 - 4|.$$

Graphiquement, la fonction f semble-t-elle continue sur $\mathbb{R}$? Dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x - 2$$

Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	0	e^2	$-\infty$

- 1► Justifier que pour $m \in]0; e^2[$ l'équation $f(x) = m$ admet exactement deux solutions.
- 2► Justifier que pour $m \in]e^2; +\infty[$ l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 2► a► Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2; +\infty[$.
b► Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2; +\infty[$. En donner un encadrement au dixième près.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

- 1► Déterminer l'expression d'une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ ainsi que l'ensemble de définition de cette fonction f .
- 2► Vérifier que si $x \in [2; 5]$, alors $f(x) \in [2; 5]$.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 3$$

- 1► Démontrer par récurrence que pour tout entier

naturel n : $15 < u_{n+1} \leq u_n$.

- 2► La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
3► On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ en justifiant soigneusement.

Je comprends mon cours

Exercice 9

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2.$$

- 1► Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2► Démontrer que la limite de la fonction g en $-\infty$ vaut -2 .
3► On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x , puis dresser le tableau de variations de la fonction g .
4► Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5► En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6► À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

Exercice 10

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}.$$

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$.
2► Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3► En déduire le signe de $P(x)$ pour tout réel x .
4► Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} - 3.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement à 10^{-3} près.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-2x+1)e^{-x} - 3.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement à 10^{-3} près.

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2(x-1)e^{x-1} - x^2.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement à 10^{-3} près.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}e^x.$$

- 1► Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une

unique solution α .

- 2► Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0, 1.
- 3► Soit $k \in \mathbb{Z}$. Donner, selon les valeurs de k , le nombre exact de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$$

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 2► a► Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telle que $\alpha < \beta$ et $\alpha \in [0; 1]$.
b► Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 18

On souhaite définir une suite (u_n) par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6}{u_n + 1}$.

- 1► Déterminer l'expression d'une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ ainsi que l'ensemble de définition de cette fonction f .
- 2► Vérifier que si $x \in [0; 6]$, alors $f(x) \in [0; 6]$. On peut alors conclure par récurrence que tous les termes de la suite sont bien définis puisque le dénominateur dans la formule de récurrence permettant de déduire u_{n+1} à partir de u_n ne s'annule jamais. On peut donc définir une telle suite (u_n) .
- 3► On admet que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à l'intervalle $[0; 6]$. Déterminer la valeur de ℓ .

Exercice 19

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3 - \frac{u_n + 1}{e^{u_n}}.$$

- 1► Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 3 - \frac{x+1}{e^x}$ définie pour $x \in [0; +\infty[$.
- 2► Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique

solution α sur $\mathbb{R}$.

- 3► Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
- 4► Montrer, par récurrence, que (u_n) est croissante et majorée par α .
- 5► Justifier que la suite (u_n) converge.
- 6► Déterminer la limite de (u_n) .

Objectif Bac

Exercice 20 (BAC 2021)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1► Calculer u_1 .
- 2► On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.
a► Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
b► En déduire que la suite (u_n) est convergente.
c► On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Exercice 21 (Étude complète d'une fonction)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x} - (2x + 1)e^x$. On définit la fonction $g : x \mapsto 3e^{2x} - 2x - 3$.

Partie A

- 1► Déterminer la limite de g en $\pm\infty$.
- 2► a► On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on note g' sa fonction dérivée.
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 6e^{2x} - 2$.
b► Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.
c► En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 3► a► Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
b► Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution $\alpha \neq 0$ dont on déterminera un encadrement à 10^{-1} .
- 4► En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f' sa fonction dérivée.

- 1► Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie A.
- 2► En déduire le signe de f' , puis les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Vers le supérieur**Exercice 22**

Montrer que l'équation $(E) : \sqrt{x+1} = -2x+3$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de a .

Exercice 23

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = 4, f(2) = 6$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = 8$.

- 1► f est-elle continue en 2?
- 2► Tracer une courbe compatible avec une telle fonction f .

Exercice 24 (QCM)

Une seule des quatre réponses proposées est exacte. Justifier.

On considère une fonction g continue sur l'intervalle $[-2; 4]$ telle que :

$$g(-1) = 0 \quad g(1) = 4 \quad g(3) = -1$$

On peut affirmer que :

- 1► la fonction g est croissante sur $[-1; 1]$.
- 2► la fonction g est positive sur $[-1; 1]$.
- 3► l'équation $g(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2; 4]$.
- 4► il existe au moins un réel a dans l'intervalle $[1; 3]$ tel que $g(a) = 1$.

Exercice 25

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction continue g . Déterminer selon la valeur du nombre réel k , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

x	-2	3	6
g	3		8
		1	

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1.$$

Déterminer, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 27

Montrer que si une fonction est continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I , alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

Exercice 28

Montrer qu'un polynôme de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29

Soient $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x^2$ et $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $\sqrt{x}$.
Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$? Justifier.

Corrections

Correction de l'ex 1

- 1► Utilisez l'outil Grapheur de la calculatrice ; dans Modèles, sélectionnez l'option permettant de faire une disjonction de cas.
- 2► La fonction f semble continue sur $\mathbb{R}$.
- 3► Pour tout $x < 1$, $f(x) = x^2 - 2x - 2$, ce qui est l'expression d'une fonction continue (car polynomiale).
Pour tout $x > 1$, $f(x) = \frac{x-4}{x}$, ce qui est l'expression d'une fonction continue (comme quotient sans valeur interdite). Il reste donc à vérifier la continuité en $x = 1$.
 - D'une part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x^2 - 2x - 2 = 1^2 - 2 \times 1 - 2 = -3$.
 - D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-4}{x} = \frac{1-4}{1} = -3$.
 Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -3$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$. Or $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 2 = -3$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, donc f est continue en 1.

Correction de l'ex 2

- 1► Utilisez l'outil Grapheur de la calculatrice ; dans Modèles, sélectionnez l'option permettant de faire une disjonction de cas.
- 2► La fonction f ne semble pas continue sur $\mathbb{R}$ (elle présente un saut en $x = 1$).
- 3► Pour tout $x < 1$, $f(x) = e^x$, ce qui est l'expression d'une fonction continue. Pour tout $x > 1$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, ce qui est l'expression d'une fonction continue (car polynomiale). Il reste donc à étudier la continuité en $x = 1$.
 - D'une part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} e^x = e^1 \approx 2,78$.
 - D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x^2 + 2x + 1 = 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 4$.
 Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$, donc f n'admet pas de limite en 1. On en déduit que f n'est pas continue en 1.

Correction de l'ex 3

Graphiquement, la courbe ne présente aucun saut, donc la fonction f semble continue sur $\mathbb{R}$. En revanche, la courbe présente deux points anguleux en $x = -2$ et en $x = 2$, donc f ne semble pas dérivable en ces valeurs. L'exercice ne demande pas d'aller plus loin, mais si vous deviez le démontrer, voici comment faire.

- 1► Pour étudier formellement la fonction, étudions le signe de $x^2 - 4$. Ce polynôme s'annule en -2 et 2 , et il est négatif entre ses racines. On peut donc écrire $f(x)$ sous la forme d'une disjonction de cas :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ -x^2 + 4 & \text{si } x \in]-2; 2[\end{cases}$$

Par symétrie de l'expression, étudions la continuité et la dérivabilité en $x = 2$ (le raisonnement est identique en $x = -2$). On rappelle que $f(2) = |2^2 - 4| = 0$.

- 2► **Continuité en $x = 2$** : pour tout $x > 2$, $f(x) = x^2 - 4$ et pour tout $x < 2$ (proche de 2), $f(x) = -x^2 + 4$.
 - D'une part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} -x^2 + 4 = -2^2 + 4 = 0$.

- D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$.

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$. Comme $f(2) = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, donc f est continue en 2.

3► **Dérivabilité en $x = 2$** : formons le taux d'accroissement de f en 2 : $\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{f(2+h)}{h}$.

- Si $h < 0$, alors $2 + h < 2$, donc $f(2+h) = -(2+h)^2 + 4 = -4 - 4h - h^2 + 4 = -4h - h^2$. On a alors $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \tau(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{-4h - h^2}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} -4 - h = -4$.

- Si $h > 0$, alors $2 + h > 2$, donc $f(2+h) = (2+h)^2 - 4 = 4 + 4h + h^2 - 4 = 4h + h^2$. On a alors $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \tau(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} 4 + h = 4$.

Ainsi, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \tau(h) \neq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \tau(h)$, donc le taux d'accroissement n'admet pas de limite en 0. On en déduit que f n'est pas dérivable en 2.

Correction de l'ex 4

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de fonctions continues).

D'une part, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc par produit et somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et $0 \in]-2; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'ex 5

1► D'après l'énoncé, la fonction f est continue. Pour tout $m \in]0; e^2[$:

- La fonction f est continue sur $] - \infty; 2]$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $f(2) = e^2$. Or $m \in]0; e^2]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ admet au moins solution dans $] - \infty; 2]$. De plus f est strictement croissante sur $] - \infty; 2]$, donc cette solution est unique.
- La fonction f est continue sur $[2; +\infty[$, avec $f(2) = e^2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Or $m \in] - \infty; e^2]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ admet au moins solution dans $[2; +\infty[$. De plus f est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$, donc cette solution est unique.

Ainsi, l'équation $f(x) = m$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2► D'après le tableau de variations, f est à valeurs dans $] - \infty; e^2]$. Or par hypothèse m n'appartient pas à cet intervalle, donc l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'ex 6

1►

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Un tableau de signes immédiat montre que $f'(x)$ est négatif entre 0 et 2, et positif ailleurs. Ainsi :

Justification des limites : $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$, or

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0$, donc par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
f	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

- 2► a► La fonction f est continue sur $[-2; +\infty[$ (car polynomiale), $f(-2) = -17$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $1 \in [-17; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2; +\infty[$.
- b► Sur $[-2; 2]$, d'après le tableau de variations, f est à valeurs dans $[-17; 3]$ et $5 \notin [-17; 3]$, donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet aucune solution.
- La fonction f est continue (car polynomiale) sur $[2; +\infty[$, $f(2) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $5 \in [-1; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution. De plus, f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$, donc cette solution est unique.
- À la calculatrice : $3,1 < \alpha < 3,2$.

Correction de l'ex 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

- 1► Notons $f : x \mapsto \sqrt{x + 4}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- 2► La fonction f est dérivable sur $] -4; +\infty[$, et pour tout $x > -4$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \geq 0$, donc f est croissante. Pour tout $x \in [2; 5]$, $2 \leq x \leq 5$ donc $f(2) \leq f(x) \leq f(5)$ par croissance c'est-à-dire $(2 \leq) \sqrt{6} \leq f(x) \leq \sqrt{9} (\leq 5)$. Donc $f(x) \in [2; 5]$.

Correction de l'ex 8

- 1► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$: « $15 < u_{n+1} \leq u_n$ ».

INIT

D'après l'énoncé, $u_0 = 300$, et $u_1 = 0,8u_0 + 3 = 243$. Or $15 < 243 < 300$ donc $\mathcal{H}\mathcal{R}_0$: « $15 < u_1 < u_0$ » est vraie.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$: « $15 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ

D'après $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$, $15 < u_{n+1} \leq u_n$, or $0,8 > 0$ donc $12 < 0,8u_{n+1} \leq 0,8u_n$, donc $15 < 0,8u_{n+1} + 3 \leq 0,8u_n + 3$, c'est-à-dire $15 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$, donc $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{H}\mathcal{R}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ entraîne $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ est vraie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $15 < u_{n+1} \leq u_n$.

- 2► D'après la récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante,
- $15 < u_n$ donc (u_n) est minorée (par 15).

D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

- 3► En passant à la limite dans la relation de récurrence de (u_n) , on obtient la relation $\ell = 0,8\ell + 3$, donc $\ell = 15$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 15$.

Correction de l'ex 9

- 1► $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-4) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ (changement de variable $y = x-4$). Par produit et somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- 2► Pour tout réel x , $g(x) = xe^{x-4} + 2e^{x-4} - 2 = e^{-4} \times xe^x + 2e^{x-4} - 2$. Par croissances comparées,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-4} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ (changement de variable $y = x - 4$). Par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$.

Alternative : $g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2 = (x-4)e^{x-4} + 6e^{x-4} - 2$. D'après le théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4)e^{x-4} = \lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = 0$. De plus, [...]

- 3► Pour tout x réel, $g'(x) = 1 \times e^{x-4} + (x+2)e^{x-4} = (x+3)e^{x-4}$. Or $e^{x-4} > 0$ donc $g'(x) > 0 \iff x+3 > 0 \iff x > -3$. Ainsi :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$
g	-2		$+\infty$
		$-e^{-7} - 2$	

- 4► Sur $] -\infty; -3]$, d'après le tableau de variations, g est à valeurs dans $[-2; -e^{-7} - 2]$. Or 0 n'appartient pas à cet intervalle (car $-e^{-7} - 2 < 0$), donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle. Sur $[-3; +\infty[$, g est continue (comme somme et produit de fonctions continues), $g(-3) = -e^{-7} - 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Or $0 \in [-e^{-7} - 2; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution α sur $[-3; +\infty[$. De plus g est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$, donc α est unique. Finalement, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

5►

D'après le tableau de variations et la question précédente, g s'annule uniquement en α en étant strictement croissante sur cet intervalle. On en déduit le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	ϕ	$+$

- 6► À la calculatrice : $4,591 < \alpha < 4,592$.

Correction de l'ex 10

1►

La fonction P est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et pour tout x réel, $P'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$. Or $-6 < 0$ donc $P'(x) > 0 \iff x(x+1) < 0 \iff x \in]-1; 0[$. Ainsi :

Justification des limites : $P(x) = x^3 \left(-2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$, or

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, donc par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$
f	$+\infty$		-1		$-\infty$
		-2			

- 2► Sur $] -\infty; -1]$, P est continue (car dérivable), $P(-1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$. Or $0 \in [-2; +\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution sur cet intervalle. De plus, P est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$, donc cette solution est unique. Sur $[-1; +\infty[$, d'après le tableau de variations, P est à valeurs dans $] -\infty; -1]$. Or 0 n'appartient pas à cet intervalle, donc l'équation $P(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[-1; +\infty[$. Finalement, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. À la calculatrice : $\alpha \approx -1,68$.
- 3► D'après le tableau de variations et la question précédente, P s'annule uniquement en α en étant strictement décroissante sur cet intervalle. On en déduit le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$: pour tout $x < \alpha$, $P(x) > 0$ et pour tout $x > \alpha$, $P(x) < 0$.

4► La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme quotient de fonctions dérivables, et pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^3 - 1) - (x + 1) \times 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3 - 1 - 3x^3 - 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3 - 1)^2} = \frac{P(x)}{(x^3 - 1)^2}$$

Or $(x^3 - 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $P(x)$. D'après la question précédente, $f'(x) > 0 \iff x < \alpha$. Ainsi, f est strictement croissante sur $] -\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Correction de l'ex 11

La fonction f est dérivable, *a fortiori* continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de telles fonctions).

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ (changement de variable $y = -x$). Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ (changement de variable $y = -x$). Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Enfin $0 \in] -3; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\mathbb{R}$, unique par stricte décroissance.

Correction de l'ex 12

x	0	2	4	$+\infty$
$x - 2$	-	○	+	+
$x - 4$	-	-	○	+
$f'(x)$	+	○	-	+
f	-12	8	4	$+\infty$

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

La fonction f est dérivable, *a fortiori* continue sur $[0; +\infty[$ (car polynomiale). Pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x - 2)(x - 4)$$

Justification de la limite en $+\infty$:

$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{12}{x^3}\right)$, or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^3} = 0$, donc par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Finalement, l'équation $f(x) = 0$

admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

D'une part, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 2]$, $f(0) = -12$ et $f(2) = 8$. Or $0 \in [-12; 8]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur cet intervalle, unique par stricte décroissance.

D'autre part, sur $[2; +\infty[$, d'après le tableau de variations, f est à valeurs dans $[4; +\infty[$. Or 0 n'appartient pas à cet intervalle, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[2; +\infty[$.

Correction de l'ex 13

La fonction f est dérivable, *a fortiori* continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de telles fonctions). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$. Or $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0 \iff 1 - x > 0 \iff x < 1$. Ainsi :

Justification des limites :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ (changement de variable $y = -x$). Par somme et

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
f	$-\infty$	$1 + 1/e$	1

produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = 0$ (changement de variable $y = -x$), donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Sur $] -\infty; 1]$, f est continue et strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(1) = e^{-1} + 1 > 0$. Or $0 \in] -\infty; e^{-1} + 1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur cet intervalle, unique par stricte croissance.

Sur $[1; +\infty[$, d'après le tableau de variations, f est à valeurs dans $]1; e^{-1} + 1]$. Or 0 n'appartient pas à cet intervalle, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[1; +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

À la calculatrice : $-0,568 < \alpha < -0,567$.

Correction de l'ex 14

La fonction f est dérivable, *a fortiori* continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de telles fonctions). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2e^{-x} + (-2x + 1)(-e^{-x}) = (2x - 3)e^{-x}$. Or $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0 \iff 2x - 3 > 0 \iff x > 1,5$.

Justification des limites :

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$-3 - 2e^{1,5}$	-3

- Pour tout x réel, $f(x) = -2xe^{-x} + e^{-x} - 3$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2xe^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} 2ye^y = 0$ (changement de variable $y = -x$). Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ (changement de variable $y = -x$). Par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ (changement de variable $y = -x$). Par produit et somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; 1,5]$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(1,5) = -2e^{-1,5} - 3 < 0$. Or $0 \in [-2e^{-1,5} - 3; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur cet intervalle, unique par stricte décroissance.

D'autre part, sur $[1,5; +\infty[$, d'après le tableau de variations, f est à valeurs dans $[-2e^{-1,5} - 3; -3]$. Or 0 n'appartient pas à cet intervalle (car $-3 < 0$), donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[1,5; +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

À la calculatrice : $-0,358 < \alpha < -0,357$.

Correction de l'ex 15

La fonction f est dérivable, *a fortiori* continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de telles fonctions). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times e^{x-1} + 2(x-1)e^{x-1} - 2x = 2xe^{x-1} - 2x = 2x(e^{x-1} - 1)$.

D'une part, $2x > 0 \iff x > 0$, d'autre part $e^{x-1} - 1 > 0 \iff e^{x-1} > e^0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$.

Justification des limites :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$	$+$
$e^{x-1} - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
f	$-\infty$	$-2/e$	-1	$+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ (changement de variable $y = x-1$). De plus, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{x-1} = \lim_{y \rightarrow -\infty} ye^y = 0$ (changement de variable $y = x-1$). Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$, on obtient par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- Pour tout $x > 1$, $f(x) = x^2 \left(2 \frac{x-1}{x^2} e^{x-1} - 1 \right) = x^2 \left(2e^{-1} \frac{x-1}{x} \frac{e^x}{x} - 1 \right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$. Par produit et somme, la parenthèse tend vers $+\infty$, puis par produit avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Sur $] -\infty; 1]$, d'après le tableau de variations, f est à valeurs dans $] -\infty; -2e^{-1}]$. Or 0 n'appartient pas à cet intervalle (car $-2e^{-1} < 0$), donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $] -\infty; 1]$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, avec $f(1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in [-1; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur cet intervalle, unique par stricte croissance.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

À la calculatrice : $1,429 < \alpha < 1,430$.

Correction de l'ex 16

- 1► La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et continue sur $[0; +\infty[$ comme produit et composée de telles fonctions.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^x + \sqrt{x} \times e^x = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) e^x = \frac{1+2x}{2\sqrt{x}} e^x$. Or $2\sqrt{x} > 0$, $e^x > 0$ et $1+2x > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $1 \in [0; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α sur $[0; +\infty[$, unique par stricte croissance.

- 2► À la calculatrice : $0,4 < \alpha < 0,5$.

- 3► D'après l'étude précédente, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et elle est à valeurs dans $[0; +\infty[$.

- Si $k \leq -1$, alors k n'appartient pas à cet intervalle, donc l'équation $f(x) = k$ n'admet aucune solution sur $[0; +\infty[$.
- Si $k \geq 0$, alors $k \in [0; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet une solution sur $[0; +\infty[$, unique par stricte croissance.

Correction de l'ex 17

- 1► La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et continue sur $[0; +\infty[$ comme somme et produit de telles fonctions. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} \left(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - 2 \\ &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) - 2 = \frac{2}{3} \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} \right) - 2 = \sqrt{x} - 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) > 0 \iff \sqrt{x} - 2 > 0 \iff \sqrt{x} > 2 \iff x > 4$. De là,

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		ϕ	+
f	1	$-5/3$	$+\infty$

Justification de la limite en $+\infty$: Pour tout $x > 0$, $f(x) = x \left(\frac{2}{3}\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{x} \right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par somme et produit, la parenthèse tend vers $+\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- 2► Sur $[0; 1]$, f est continue et strictement décroissante, $f(0) = 1$ et $f(1) = -\frac{1}{3}$. Or $0 \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α sur $[0; 1]$, unique par stricte décroissance.

Sur $[1; 4]$, f est à valeurs dans $\left[-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right]$, et 0 n'appartient pas à cet intervalle, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[1; 4]$.

sur $[4; +\infty[$ f est continue et strictement croissante, $f(4) = -\frac{5}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in \left[-\frac{5}{3}; +\infty\right]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution β sur $[4; +\infty[$, unique par stricte croissance.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $[0; +\infty[$ telles que $\alpha < \beta$ et $\alpha \in [0; 1]$. À la calculatrice : $0,64 < \alpha < 0,65$.

Correction de l'ex 18

- 1► La fonction $f : x \mapsto \frac{6}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ convient.
- 2► La fonction f est dérivable et pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \frac{-6}{(x+1)^2} < 0$, donc f est décroissante. Pour tout $x \in [0; 6]$, $0 \leq x \leq 6$ donc $f(0) \geq f(x) \geq f(6)$ par décroissance, c'est-à-dire $6 \geq f(x) \geq \frac{6}{7} (\geq 0)$, donc $f(x) \in [0; 6]$.
- 3► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, et $\ell \in [0; 6]$ donc f est continue en ℓ , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(\ell)$. Ainsi, $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $\ell = \frac{6}{\ell+1}$, donc $\ell(\ell+1) = 6$, donc $\ell^2 + \ell - 6 = 0$. On reconnaît une équation polynomiale de degré 2 : son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$, donc ses solutions sont $\frac{-1-5}{2} = -3$ et $\frac{-1+5}{2} = 2$, or $-3 \notin [0; 6]$ donc $\ell = 2$.

Correction de l'ex 19

- 1► La fonction f est dérivable (comme somme et quotient), et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1 \times e^x - (x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x}{e^x}$. Or $e^x > 0$ donc $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.
- 2► Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Elle est dérivable (comme somme) et pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = f'(x) - 1$. Or $f'(x) < 0$ donc $f'(x) - 1 < -1 < 0$, donc $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante. Ainsi, g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \frac{x+1}{e^x} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - x \left(\frac{x+1}{x} e^{-x} - 1 \right)$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{x+1}{e^x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - e^{\frac{x+1}{x}} - x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = 0$ par croissances comparées, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
- Or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une

solution, unique par stricte croissance, que l'on note α . Or $g(x) = 0 \iff f(x) = x$, donc α est l'unique solution de $f(x) = x$.

3► À la calculatrice, $\alpha \approx 2,76$.

4► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ ».

INIT D'après l'énoncé, $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = 3 - \frac{2}{e} \approx 1,3$. Or $1 \leq 3 - \frac{2}{e} \leq \alpha \approx 2,76$ donc $\mathcal{H}\mathcal{R}_0$: « $u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ » est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$: « $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ » est alors vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$, $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Or f est décroissante, donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$, donc $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{H}\mathcal{R}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ entraîne $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ est vraie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

On a ainsi montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) est croissante, et $u_n \leq \alpha$, donc (u_n) est majorée par α .

5► D'après la question précédente, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

6► Notons ℓ la limite de (u_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, et f est continue en ℓ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(\ell)$. Ainsi, $\ell = f(\ell)$. Or α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$, donc $\ell = \alpha$ par unicité.

Correction de l'ex 20

1► D'après l'énoncé, $u_0 = \frac{1}{2}$, et $u_1 = f(u_0) = \frac{4}{5}$.

2► a► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$: « $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ ».

INIT D'après l'énoncé, $u_0 = \frac{1}{2}$ et on a calculé $u_1 = \frac{4}{5} = 0,8$. Or $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq 2$ donc $\mathcal{H}\mathcal{R}_0$: « $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ » est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ vraie. Montrons $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$: « $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$ ».

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$ par croissance de f , c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{8}{7} (\leq 2)$, donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$, donc $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{H}\mathcal{R}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ entraîne $\mathcal{H}\mathcal{R}_{n+1}$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}\mathcal{R}_n$ est vraie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

- b► D'après la récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante, et $u_n \leq 2$ donc la suite (u_n) est majorée (par 2). D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.
- c► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$, par passage à la limite $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 2$. Donc f est continue en ℓ , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(\ell)$. Ainsi, $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire $\ell = \frac{4\ell}{1+3\ell}$, ce qui équivaut à $\ell(1+3\ell) = 4\ell \iff \ell + 3\ell^2 = 4\ell$, soit encore $3\ell^2 - 3\ell = 0$, autrement dit $3\ell(\ell - 1) = 0$. Ainsi, $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or, $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 2$ donc $\ell = 1$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Correction de l'ex 21

Partie A

- 1► • $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ (changement de variable $y = 2x$). Par ailleurs, pour tout réel x , $g(x) = e^{2x} \left(3 - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{3}{e^{2x}} \right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ (changement de variable $y = 2x$), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{2x}} = 0$, la parenthèse tend vers 3. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ (changement de variable $y = 2x$). Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 3) = +\infty$, on obtient par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.
- 2► a► Pour tout x réel, $g'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 2 = 6e^{2x} - 2$.
- b► Pour tout x réel, $g'(x) > 0 \iff 6e^{2x} - 2 > 0 \iff e^{2x} > \frac{1}{3} \iff 2x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \iff x > -\frac{\ln(3)}{2}$ (on a utilisé la stricte croissance de $\ln$).
- c► Le minimum de g vaut :

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) &= 3e^{-\ln(3)} - 2\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) - 3 \\ &= 3 \times \frac{1}{3} + \ln(3) - 3 = \ln(3) - 2 \\ &\approx -0,90 < 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\ln(3)/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ	$+$
f	$+\infty$	$\swarrow \searrow$ $\ln(3) - 2$	$+\infty$

- 3► a► On a $g(0) = 3e^0 - 2(0) - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc $x = 0$ est bien solution de $g(x) = 0$.
- b► Sur $\left]-\infty; -\frac{\ln(3)}{2}\right]$, g est continue (car dérivable) avec $g\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) = \ln(3) - 2 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$. Or $0 \in [\ln(3) - 2; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \neq 0$ sur cet intervalle.
- À la calculatrice : $-1,2 < \alpha < -1,1$.

4►

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	ϕ	$-$	$+$

Partie B

- 1► Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x} - (2e^x + (2x+1)e^x) = 3e^{3x} - (2x+3)e^x \\ &= e^x(3e^{2x} - 2x - 3) = e^x g(x) \end{aligned}$$

- 2► Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
D'après la partie A (limites à justifier!) :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
f	0 $f(\alpha)$ 0 $+\infty$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$				

Correction de l'ex 22

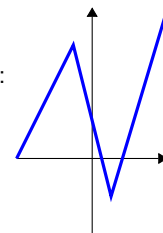
Soit f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1} + 2x - 3$. L'équation (E) est alors équivalente à $f(x) = 0$.
La fonction f est continue sur $[-1; +\infty[$ (comme somme et composée de telles fonctions). De plus, elle est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 2$. Or $\sqrt{x+1} > 0$, donc par somme, $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.
Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ (changement de variable $y = x + 1$).
De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$, $f(-1) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in [-5; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution a sur $[-1; +\infty[$, unique par stricte croissance.
À la calculatrice : $1,053 < a < 1,054$.

Correction de l'ex 23

- 1► Non car $\lim_{\substack{2 \rightarrow f \\ 2 > f}} (x) \neq \lim_{\substack{2 \rightarrow f \\ 2 < f}} (x)$ donc f n'a pas de limite en 2.
2► Tracez une ligne horizontale à l'ordonnée -4 jusqu'en $x = 2$, puis une ligne horizontale à l'ordonnée 8. Ajoutez un point aux coordonnées (2; 6).

Correction de l'ex 24

- 1► La fonction g est croissante sur $[-1; 1]$: pas nécessairement. Contre exemple :



- 2► La fonction g est positive sur $[-1; 1]$: pas nécessairement, voir contre-exemple précédent.
3► L'équation $g(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2; 4]$: elle peut en avoir trois, voir contre-exemple précédent.
4► Il existe au moins un réel a dans l'intervalle $[1; 3]$ tel que $g(a) = 1$: par élimination, c'est vrai, mais on peut aussi utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour le montrer.

Correction de l'ex 25

- La fonction g est à valeurs dans $[1; 8]$, donc si $k < 1$ ou $k > 8$, alors l'équation n'a pas de solution.
► Si $k = 1$ ou $k = 8$, alors l'équation admet exactement une solution (car ce sont le minimum et le maximum de g qui ne sont atteints qu'en 3 et 6 respectivement).

- ▶ Soit $k \in]1; 3]$. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[-2; 3]$, $g(-2) = 3$ et $g(3) = 1$. Or $k \in [1; 3]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = k$ admet une solution dans $[-2; 3]$, unique par stricte décroissance. Un raisonnement similaire montre l'existence d'une unique solution dans $[3; 6]$. Ainsi, $g(x) = k$ admet exactement 2 solutions dans $[-2; 6]$.
- ▶ Soit $k \in]3; 8]$. Sur $[-2; 3]$, g est à valeurs dans $[1; 3]$, et k n'appartient pas à cet intervalle, donc l'équation $g(x) = k$ n'admet pas de solution dans $[-2; 3]$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution dans $[3; 6]$, *a fortiori* dans $[-2; 6]$, unique par stricte croissance.

Correction de l'ex 26

La fonction f est dérivable, *a fortiori* continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Un tableau de signes immédiat montre que $f'(x)$ est négatif entre 0 et 2, et positif ailleurs. Ainsi :

Justification des limites : $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$, or
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, donc par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
f	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

- Si $k \in]-\infty; -5[\cup]-1; +\infty[$:
 Sur $]-\infty; 0]$ est sur $[2; +\infty[$, f est continue (car polynomiale) et strictement croissante. Elle est à valeurs dans $]-\infty; -5]$ et $[-1; +\infty[$ respectivement, qui contiennent k . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet une solution, unique par stricte croissance.
- Si $k \in]-5; -1[$:
 Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur les intervalles $]-\infty; 0]$, $[0; 2]$ et $[2; +\infty[$ va donner une solution pour chaque intervalle, uniques par stricte monotonie. Il y a donc exactement trois solutions.

Correction de l'ex 27

Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I . par l'absurde supposons que f ne garde pas un signe constant sur I .

Il existe alors deux réels a et b dans I tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires. Quitte à renommer les variables, on peut supposer $a < b$. Quitte à considérer $-f$ au lieu de f , on peut supposer que $f(a) < 0 < f(b)$. La fonction f est continue sur $[a, b]$. Comme $0 \in [f(a); f(b)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans cet intervalle, ce qui contredit le fait que f ne s'annule pas sur I .

Ainsi, f garde un signe constant sur I .

Correction de l'ex 28

Soit P un polynôme de degré impair. Quitte à considérer $-P$, on peut supposer son coefficient dominant positif. Notons a le coefficient dominant et n le degré de P .

La fonction P est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Le terme x^n est prépondérant : en factorisant $P(x)$ par x^n , on obtient a plus des termes de la forme $\frac{b}{x^k}$ qui tendent vers 0 aux infinis. Ainsi, la limite de P est celle de x^n (car $a > 0$), qui vaut $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ puisque n est impair.

Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'ex 29

Les courbes de f et g s'intersectent aux abscisses x telles que $f(x) = g(x)$. Soit $h : x \mapsto g(x) - f(x)$. Cette fonction est dérivable (comme somme), *a fortiori* continue sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $h'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Ainsi, h est strictement croissante. Or $h(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = +\infty$ car les quotients dans la parenthèse tendent vers 0. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution, unique par stricte croissance, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$ admet une unique solution, donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ n'ont qu'un point d'intersection.

9 Loi binomiale

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est de 0,75, et on s'intéresse aux nombres de Pile obtenus.

- 1► Justifier que l'on peut associer la situation à un schéma de Bernoulli. Préciser les paramètres.
- 2► Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
- 3► Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois Pile.

Exercice 2

On tire 15 cartes avec remise dans un jeu complet de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de trèfles obtenus.

- 1► Justifier que T suit une loi binomiale.
- 2► Calculer $\mathbb{P}(T = 5)$.

Exercice 3

On considère que la probabilité qu'un élève de Terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67.

- 1► Dans une classe de Terminale de 35 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année? Justifier.
- 2► Calculer $\mathbb{P}(M = 10)$, $\mathbb{P}(M = 11)$ et $\mathbb{P}(M = 12)$.
- 3► En déduire la probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année.

Exercice 6

Dans un lycée, 237 élèves ont réservé un repas à la cantine. Lorsqu'un élève a réservé son repas, 7% du temps il ne mange pas à la cantine.

- 1► Quel est le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95% que tous les élèves se présentant auront un repas?

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p . En se ramenant à chaque fois à des inégalités de la forme $\mathbb{P}(X \leq \dots)$, calculer dans chaque cas :

- 1► $n = 100$ et $p = 0,78$

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a► $\mathbb{P}(X < 75)$ | c► $\mathbb{P}(X \geq 74)$ |
| b► $\mathbb{P}(X > 79)$ | d► $\mathbb{P}(73 < X \leq 81)$ |

- 2► $n = 27$ et $p = 0,32$

- | | |
|------------------------|--------------------------------|
| a► $\mathbb{P}(X < 8)$ | c► $\mathbb{P}(X \geq 13)$ |
| b► $\mathbb{P}(X > 9)$ | d► $\mathbb{P}(7 < X \leq 14)$ |

- 3► $n = 45$ et $p = 0,44$

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a► $\mathbb{P}(X < 20)$ | c► $\mathbb{P}(X \geq 23)$ |
| b► $\mathbb{P}(X > 16)$ | d► $\mathbb{P}(13 < X \leq 20)$ |

Exercice 5

En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est environ de 2%.

On suppose que la population française est suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.

Dans un train, dont 1 250 places ont été réservées, sont prévues 30 places pouvant accueillir les personnes en fauteuil roulant. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour ces personnes?

- 2► Même question avec un risque que certains élèves n'aient pas de repas inférieur à 1%.

Objectif Bac

Exercice 7 (Mars 2021)

Dans une école de statistiques, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- ▶ 10% des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- ▶ Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- ▶ D : « le candidat a été sélectionné sur dossier »
- ▶ A : « le candidat a été admis »

- 1▶ Traduire la situation par un arbre pondéré.
- 2▶ Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
- 3▶ Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.
- 4▶ On choisit au hasard un candidat admis dans l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

- 1▶ On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
 - a▶ On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
 - b▶ Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
 - c▶ Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
- 2▶ Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24, et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
 - a▶ Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
 - b▶ À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 8 (Polynésie 2021)

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les tests sanitaires de ce pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1% sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population. On note :

- ▶ M : « la personne est infectée par la maladie »
- ▶ T : « le test est positif »

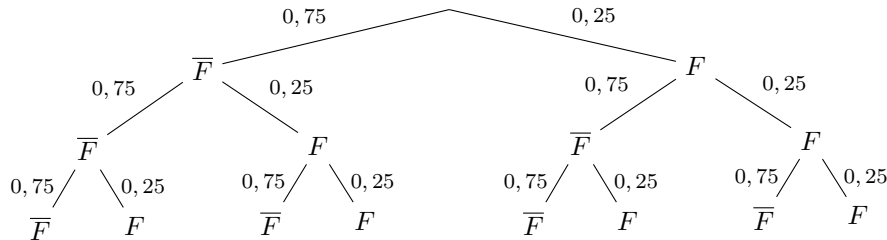
- 1▶ Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
- 2▶
 - a▶ Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
 - b▶ Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

- 3► On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près ?
- 4► On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
 - a► Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser les paramètres.
 - b► Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
- 5► Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif soit supérieure à 99%.

Corrections

Correction de l'ex 1

- 1► Les lancers d'une pièce peuvent être supposés indépendants. On répète donc 3 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir Pile », de probabilité 0,75. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et 0,75.
- 2► On note F l'événement « obtenir face ». Exceptionnellement, on représente l'arbre verticalement (pour gagner de la place).



- 3► Il y a trois chemins qui rencontrent exactement une fois Pile : $FF\bar{F}$, $F\bar{F}F$ et $\bar{F}FF$. Chacun a une probabilité $0,25^2 \times 0,75 = \frac{3}{64}$ de se réaliser. La probabilité est donc $\frac{9}{64}$.

Réponse alternative : La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli précédent suit la loi $\mathcal{B}(3; 0,75)$. La probabilité d'obtenir exactement une fois Pile est $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1} \times 0,75^1 \times 0,25^2 = \frac{9}{64}$.

Correction de l'ex 2

- 1► On tire 15 cartes de manière identique et indépendante (car avec remise) avec une probabilité de tirer une carte de trèfle (succès) de 0,25 (un quart des cartes sont des trèfles). Cette expérience aléatoire est donc un schéma de Bernoulli de paramètres 15 et 0,25. La variable aléatoire T compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, elle suit donc la loi $\mathcal{B}(15; 0,25)$.
- 2► $\mathbb{P}(T = 5) = \binom{15}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{10} \approx 0,1651$

Correction de l'ex 3

- 1► L'expérience aléatoire « l'élève est mineur » est une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,33. On répète cette épreuve 35 de manière identique et indépendante (l'âge d'un élève n'influence pas l'âge des autres). Cette expérience aléatoire est donc un schéma de Bernoulli de paramètres 35 et 0,33. La variable aléatoire M compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, elle suit donc la loi $\mathcal{B}(35; 0,33)$.

- 2► Pour tout k entre 0 et 35, $\mathbb{P}(M = k) = \binom{35}{k} \times 0,33^k \times 0,67^{35-k}$, donc :

$$\bullet \mathbb{P}(M = 10) \approx 0,1261 \quad \bullet \mathbb{P}(M = 11) \approx 0,1412 \quad \bullet \mathbb{P}(M = 12) \approx 0,1391$$

- 3► On cherche à calculer la probabilité $\mathbb{P}(10 \leq M \leq 12)$. Comme M est à valeurs entières,

$$\mathbb{P}(10 \leq M \leq 12) = \mathbb{P}(M = 10) + \mathbb{P}(M = 11) + \mathbb{P}(M = 12) \approx 0,3845$$

(Remarque : attention à ne pas utiliser de valeurs approchées dans un calcul !)

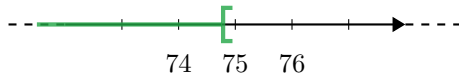
La probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves encore mineurs à la fin de l'année est d'environ 0,4064.

Correction de l'ex 4

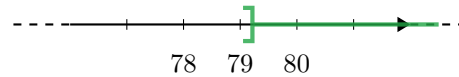
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p . En se ramenant à chaque fois à des inégalités de la forme $\mathbb{P}(X \leq \dots)$, calculer dans chaque cas :

1► $n = 100$ et $p = 0,78$

$$\mathbb{P}(X < 75) = \mathbb{P}(X \leq 74) \approx 0,20$$



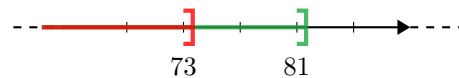
$$\mathbb{P}(X > 79) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 79) \approx 0,37$$



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 74) &= 1 - \mathbb{P}(X < 74) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 73) \approx 0,86 \end{aligned}$$

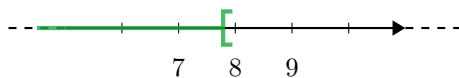


$$\begin{aligned} \mathbb{P}(73 < X \leq 81) &= \mathbb{P}(X \leq 81) - \mathbb{P}(X \leq 73) \\ &\approx 0,76 \end{aligned}$$

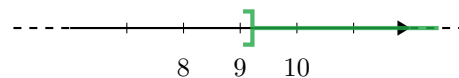


2► $n = 27$ et $p = 0,32$

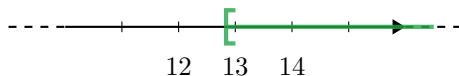
$$\mathbb{P}(X < 8) = \mathbb{P}(X \leq 7) \approx 0,32$$



$$\mathbb{P}(X > 9) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 9) \approx 0,35$$



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 13) &= 1 - \mathbb{P}(X < 13) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 12) \approx 0,06 \end{aligned}$$

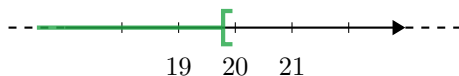


$$\begin{aligned} \mathbb{P}(7 < X \leq 14) &= \mathbb{P}(X \leq 14) - \mathbb{P}(X \leq 7) \\ &\approx 0,67 \end{aligned}$$

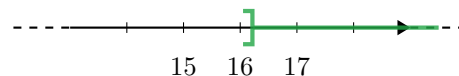


3► $n = 45$ et $p = 0,44$

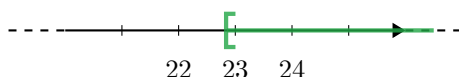
$$\mathbb{P}(X < 20) = \mathbb{P}(X \leq 19) \approx 0,46$$



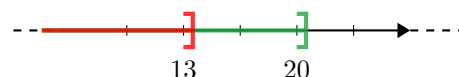
$$\mathbb{P}(X > 16) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 16) \approx 0,84$$



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 23) &= 1 - \mathbb{P}(X < 23) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 22) \approx 0,20 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(13 < X \leq 20) &= \mathbb{P}(X \leq 20) - \mathbb{P}(X \leq 13) \\ &\approx 0,57 \end{aligned}$$



Correction de l'ex 5

1► L'expérience aléatoire vérifiant si la personne tirée utilise un fauteuil roulant est une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,02. On répète cette épreuve 1 250 fois de manière identique et indépendante (la population étant suffisamment grande pour assimiler cela à un tirage avec remise). Cette expérience aléatoire est donc un schéma de Bernoulli de paramètres 1 250 et 0,02. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi $\mathcal{B}(1\,250; 0,02)$.

2► On cherche la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places dans le train pour ces personnes, c'est-à-dire la

probabilité que le nombre de personnes en fauteuil roulant soit strictement supérieur à 30. On cherche donc à calculer $\mathbb{P}(X > 30) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 30)$. À l'aide de la calculatrice, 0,1347 environ.

La probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant est d'environ 13,47%.

Correction de l'ex 6

- 1► L'expérience aléatoire vérifiant si l'élève mange à la cantine est une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,93 (puisque'il y a 7% de chances qu'il ne s'y présente pas). On répète cette épreuve 237 fois de manière identique et indépendante (le comportement d'un élève n'influençant pas celui des autres). Cette expérience aléatoire est donc un schéma de Bernoulli de paramètres 237 et 0,93. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi $\mathcal{B}(237; 0,93)$.

L'événement $\{X \leq k\}$ signifie que le nombre d'élèves présents est inférieur au nombre de repas servis, et donc que tout va bien. On cherche le plus petit nombre de repas, c'est-à-dire le plus petit entier k , tel que la probabilité que tout aille bien est supérieure à 95%, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0,95$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $\mathbb{P}(X \leq 224) \approx 0,9291$ et $\mathbb{P}(X \leq 225) \approx 0,9612$.

Il faut donc préparer au moins 225 repas.

- 2► Ne pas avoir assez de repas correspond à l'événement $\{X > k\}$. On cherche donc le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X > k) < 0,01$, ce qui équivaut à $1 - \mathbb{P}(X > k) > 1 - 0,01$ (par stricte décroissance de $x \mapsto 1 - x$), c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0,99$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\mathbb{P}(X \leq 228) \approx 0,9888$ et $\mathbb{P}(X \leq 229) \approx 0,9954$.

Il faut donc préparer au moins 229 repas pour qu'il y ait moins d'1% de chance que certains élèves ne soient pas servis.

Correction de l'ex 7

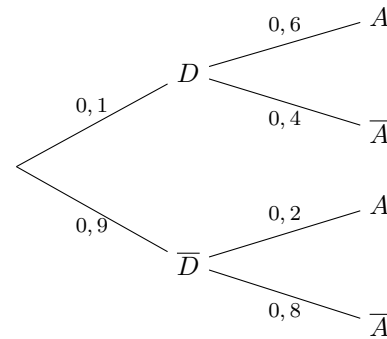
Partie 1

2► L'événement « le candidat est sélectionné sur dossier et admis » correspond à $D \cap A$. D'après la formule des probabilités composées $\mathbb{P}(D \cap A) = \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.

3► D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap A) \\ &= 0,06 + \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(A) \\ &= 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24\end{aligned}$$

4► On cherche $\mathbb{P}_A(\overline{D}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{D} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,9 \times 0,2}{0,24} = \frac{0,18}{0,24} = 0,75$. La probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné sachant qu'il est admis est de 0,75.



Partie 2

1► a► L'expérience consiste à répéter 7 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès (le candidat est admis) 0,24. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi $\mathcal{B}(7; 0,24)$.

b► On cherche $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24^1 \times 0,76^6 \approx 0,32$. La probabilité qu'un seul candidat soit admis est d'environ 0,32.

c► On cherche la probabilité qu'au moins deux candidats soient admis, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1))$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $\mathbb{P}(X \geq 2) \approx 0,52$. (**Remarque** : attention à ne pas utiliser de valeurs approchées dans un calcul !)

2► a► Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'admis parmi les n candidats : $Y \sim \mathcal{B}(n; 0,24)$. La probabilité qu'aucun candidat ne soit admis est $\mathbb{P}(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.

b► On cherche le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir au moins un admis soit supérieure ou égale à 0,99. On cherche donc n tel que $\mathbb{P}(Y \geq 1) \geq 0,99$, ce qui équivaut à $1 - \mathbb{P}(Y = 0) \geq 0,99$. On peut chercher dans le tableau de valeurs à la calculatrice, ou procéder algébriquement avec le logarithme :

$$\begin{aligned}1 - 0,76^n \geq 0,99 &\iff 0,76^n \leq 0,01 && \text{(par stricte décroissance de } x \mapsto 1 - x \text{)} \\ &\iff \ln(0,76^n) \leq \ln(0,01) && \text{(par stricte croissance de } \ln \text{)} \\ &\iff n \ln(0,76) \leq \ln(0,01) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} && \text{(car } \ln(0,76) < 0 \text{)}\end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,79$, il faut présenter au moins 17 candidats.

Correction de l'ex 8

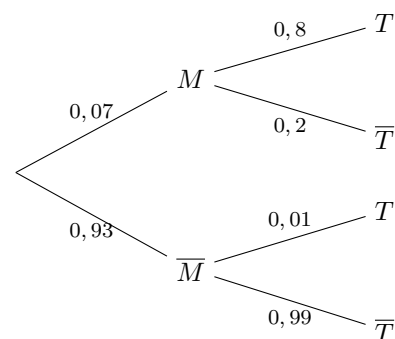
- 2► a► L'événement « la personne est infectée et son test est positif » correspond à $M \cap T$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$$

- b► D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) \\ &= 0,056 + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,056 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653\end{aligned}$$

La probabilité que le test soit positif est de 0,0653.



- 3► On cherche $\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,86$. La probabilité que la personne soit infectée sachant que son test est positif est d'environ 0,86.
- 4► a► On répète 10 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de succès « le test est positif » de probabilité 0,0653. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et 0,0653. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit la loi $\mathcal{B}(10; 0,0653)$.
- b► On cherche $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,11$. La probabilité qu'exactement deux personnes aient un test positif est d'environ 0,11.
- 5► Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n personnes testées. Elle suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,0653)$. La probabilité qu'au moins une personne ait un test positif est $\mathbb{P}(Y \geq 1)$. On cherche le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(Y \geq 1) > 0,99$, ce qui équivaut à $1 - \mathbb{P}(Y = 0) > 0,99$. Or $\mathbb{P}(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times 0,9347^n = 0,9347^n$. On peut chercher dans le tableau de valeurs à la calculatrice, ou procéder algébriquement avec le logarithme :

$$\begin{aligned}1 - 0,9347^n > 0,99 &\iff 0,9347^n < 0,01 && \text{(par stricte décroissance de } x \mapsto 1 - x \text{)} \\ &\iff \ln(0,9347^n) < \ln(0,01) && \text{(par stricte croissance de } \ln \text{)} \\ &\iff n \ln(0,9347) < \ln(0,01) \\ &\iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)} && \text{(car } \ln(0,9347) < 0 \text{)}\end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)} \approx 68,23$, il faut tester au moins 69 personnes.

10 Logarithme

11 Orthogonalité dans l'espace

Exercices

Sauf indication contraire, on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Je connais mon cours

Exercice 1

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, $\|\vec{u}\| = 8$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 24$. Que vaut alors $\|\vec{v}\|$?

Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- 1► Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 2► Quelle est, à un degré près, une mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 3

Dans le tétraèdre $HARU$, on donne $HA = 2$, $HR = 3$ et $AR = 4$.

- 1► À l'aide d'une des formules de polarisation, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HR}$.
- 2► En déduire une mesure arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{RHA}$.

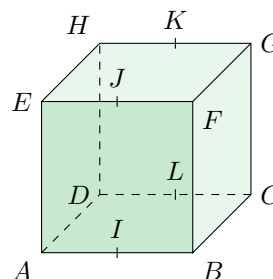
Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs de coordonnées données sont orthogonaux.

- 1► $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 2► $\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 4 \end{pmatrix}$
- 3► $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
- 4► $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soit $ABCDEFGH$ le cube d'arête 4 ci-dessous. Les points I , J , K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[EF]$, $[GH]$ et $[CD]$.



Calculer chaque produit scalaire puis une valeur approchée au degré près d'une mesure de l'angle formé par les deux vecteurs donnés.

- 1► $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AL}$
- 2► $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JH}$
- 3► $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF}$

Exercice 6

Pour chacun des plans dont on donne une équation cartésienne ci-dessous, donner un vecteur normal.

- 1► $2x + y - 3z + 1 = 0$
- 2► $3y + 5z = 0$
- 3► $z = -2x + 3y - 4$
- 4► $2x + y = 3z - 5$

Exercice 7 (BAC 2019)

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 9 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- 1► Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont-ils orthogonaux ?
- 2► Sont-ils parallèles ? Si non, déterminer leur intersection.

Exercice 8

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1cm on considère les points suivants : $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$.

- 1► Montrer que les points B , C et D définissent un plan, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas alignés.
- 2► Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) .
- 3► Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) .

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

- 1► $A(3; -1; 2)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
- 2► $A(1; -1; 0)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 3► $A(-2; 1; 2)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 4► $A(\sqrt{2}; 3; 0)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 10

On considère les points $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; 0)$ et $C(0; -1; 2)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- 1► Justifier que les points A , B et C définissent bien un plan de l'espace.
- 2► Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .
- 3► Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

Exercice 11

On donne $A(4; 5; 2)$, $B(1; 3; 1)$ et $C(3; 3; -1)$.

- 1► a► Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

- b► Montrer que A , B et C définissent un plan.

- c► Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) et en déduire une équation de ce plan.

- 2► Soit le point $D(1; 1; 1)$.

- a► Justifier que $D \notin (ABC)$.
- b► Quelle est la distance entre le point D et le plan (ABC) ?

Exercice 12

On considère le point $A(-7; 0; 4)$ et le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $x + 2y - z - 1 = 0$. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 13

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x - y + 2z - 3 = 0$.

- a► Parmi les points A , B et C suivants, lesquels appartiennent au plan $\mathcal{P}$?

- 1► $A(1; 1; 1)$
- 2► $B \left(1; 1; \frac{3}{2} \right)$
- 3► $C(2; 1; 1)$

- b► Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont normaux au plan $\mathcal{P}$?

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- c► Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$.
- d► Soit K le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées du point K .

Exercice 14

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer la distance entre $K(3; 1; 3)$ et le plan d'équation $x + 2y - 3z + 18 = 0$.

Exercice 15

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer la distance entre le point $S(1; 1; 1)$ et la droite ci-contre.

$$\Delta : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -4t \\ z = 2t + 12 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Je comprends mon cours**Exercice 16**

Déterminer deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 17

Déterminer trois plans admettant comme vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18

Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant le point $A(4; -1; 2)$. Donner une équation possible de $\mathcal{P}$.

Exercice 19

Prouver que les diagonales d'un cube ne sont pas orthogonales.

Exercice 20

Dans l'espace muni d'un repère, soient d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ainsi que $A(1; 1; 0)$ et $B(3; 0; -1)$.
Les droites d et (AB) sont-elles orthogonales ?

Exercice 21

On considère les points suivants : $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$. Soit M un point de la droite (CD) .
Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Exercice 22

Les points A , B , C et D ont pour coordonnées $A(-1; 0; 2)$, $B(3; 2; -4)$, $C(1; -4; 2)$ et $D(5; -2; 4)$. On considère les points I , J et K définis par : I est le milieu de $[AB]$, K est le milieu du segment $[CD]$ et J est tel que $\vec{BJ} = \frac{1}{4} \vec{BC}$.

- 1► Déterminer les coordonnées des points I , J , K .
- 2► Montrer que I , J et K ne sont pas alignés.
- 3► Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.
- 4► Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que (IJK) et (AD) sont sécants en un point L dont on donnera les coordonnées.

Exercice 23

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $E(1; 1; -2)$ et $F(-1; 3; 2)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + my - 2z + 8 = 0$, où m est un nombre réel.
Une valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ est (justifier) :

- | | |
|-------------|-------------|
| 1► $m = -1$ | 3► $m = 5$ |
| 2► $m = 1$ | 4► $m = -2$ |

Exercice 24

Pour chaque question une seule réponse est exacte.
On donne le point $S(1; -2; 0)$ et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

- 1► Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

a►	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
----	---

$$\text{b} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{c} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{d} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2► Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$\text{a} \rightarrow (-4; 0; 0) \quad \text{c} \rightarrow \left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{b} \rightarrow \left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right) \quad \text{d} \rightarrow \left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

3► La distance du point S au plan P est égale à :

$$\text{a} \rightarrow \frac{\sqrt{11}}{3} \quad \text{b} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{11}} \quad \text{c} \rightarrow \frac{9}{\sqrt{11}} \quad \text{d} \rightarrow \frac{9}{11}$$

Exercice 25

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$.

1► Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2► Soit Δ la droite passant par le point D de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .

3► En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

4► Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

5► Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .

Exercice 26

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définit les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ par les équations cartésiennes respectives $4x + y - 3z + 1 = 0$ et $2x - 3y + 2z + 4 = 0$.

1► Déterminer deux vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ que l'on notera respectivement $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

2► En déduire que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

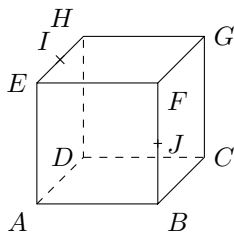
3► En posant $x = t$, déterminer en fonction de t les coordonnées y et z d'un point à l'intersection des deux plans.

4► En déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Objectif Bac

Exercice 27

Dans l'espace on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1► Donner les coordonnées des points B , G , H , I et J sans justifier.

2► Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BIG) .

3► En déduire une équation cartésienne du plan (BIG) .

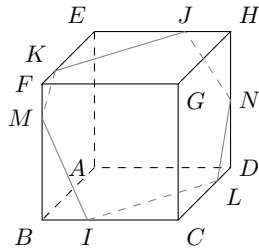
4► On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BIG) ?

Exercice 28

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On considère les points :

$$I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right) \quad J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right) \quad K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right) \quad L\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$$

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH) .



Le but de cet exercice est de déterminer les coordonnées des points M et N .

- 1► Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJK) .
- 2► En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
- 3► En déduire les coordonnées des points M et N .

Exercice 29

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1cm on considère les points suivants : $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3; 3; -1)$.

- 1► Démontrer que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
- 2► Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12cm^2 .

Exercice 30 (BAC 2021)

On considère les points $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ et $C(0; 0; 1)$.

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC .

- 1► a► Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

b► En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

- 2► On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC) .

a► Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .

b► Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49}\right)$.

c► Calculer la distance OH .

- 3► On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base et h est la hauteur correspondant à cette base. En calculant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $OABC$, déterminer l'aire du triangle ABC .

Exercice 31

Les points A , B et C ont pour coordonnées $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -6; -1)$ et $C(2; 2; 2)$.

- 1► Montrer que A , B et C ne sont pas alignés et que

le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

- 2► Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

- 3► Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) orthogonale au plan (ABC) passant par le point $D(0; 1; -1)$.

- 4► Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de (Δ) avec le plan (ABC) . Quelle est la distance de D au plan (ABC) ?

- 5► Soit M un point quelconque de (DC) . Ainsi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DC}$.

a► Vérifier que la distance AM est minimale lorsque $t = \frac{5}{14}$.

b► En déduire les coordonnées du point Q , projeté orthogonal de A sur (DC) .

Exercice 32 (BAC 2024)

On considère :

- les points $A(-2; 0; 2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(1; -1; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

► la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

1► Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2► a► Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .

b► Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

c► En déduire que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

3► a► Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D . On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C .

b► Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

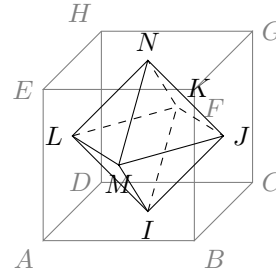
4► a► Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC) .

b► Calculer la distance du point D au plan (ABC) .

Arrondir le résultat au dixième.

Exercice 33 (BAC 2019)

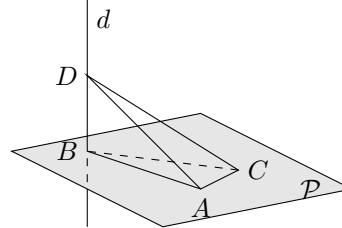
On relie les centres de chaque face d'un cube $ABCDEFGH$ pour former un solide $IJKLMN$ comme sur la figure ci-dessous. Plus précisément, les points I , J , K , L , M et N sont les centres respectifs des faces carrées $ABCD$, $BCGF$, $CDHG$, $ADHE$, $ABFE$ et $EFGH$ (donc les milieux des diagonales de ces carrés).



Justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Exercice 34 (BAC 2019)

Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC rectangle en A . Soit d la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point B . On considère un point D de cette droite distinct du point B .



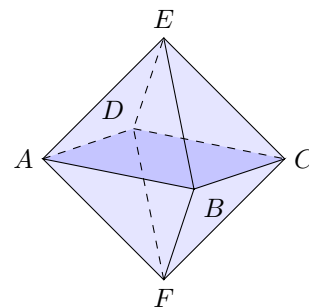
Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD) .

Vers le supérieur

Exercice 35

$ABCDEF$ est un octaèdre régulier composé de huit faces qui sont toutes des triangles équilatéraux.

Montrer que la droite (EF) est orthogonale au plan (ABC) .



Exercise 36

Montrer que les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.

(Indication : quatre sommets bien choisis d'un cube forment un tétraèdre régulier...)

Exercice 37

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(-2; 0; 1)$, $B(3; 1; -1)$ et $C(0; 2; 3)$.

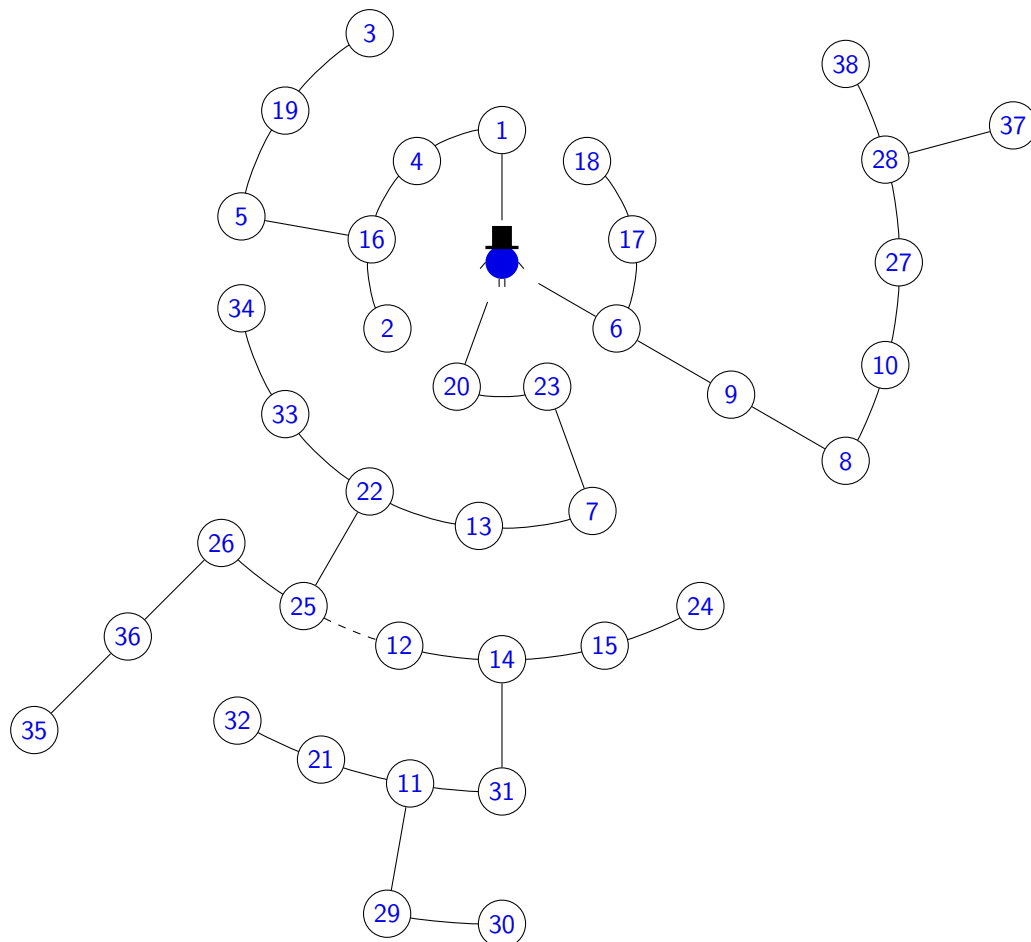
Exercise 38

Soient $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 4; 5)$ deux points de l'espace. Le *plan médiateur* du segment $[AB]$ est le plan orthogonal à $[AB]$ qui passe par son milieu.

- 1► Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$.
- 2► Démontrer que tout point de ce plan est équidistant de A et B .

ARBRE DE COMPÉTENCES

Suivez les parcours partant du centre. Plus vous vous éloignez, plus les exercices se corsent.
Chaque parcours correspond à une compétence. Les pointillés indiquent une nouvelle compétence qui s'appuie sur la précédente.



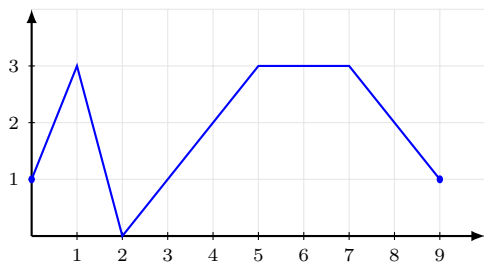
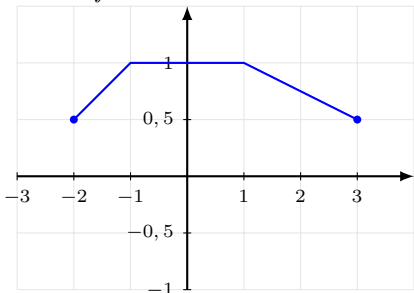
12 Intégration

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Pour chaque fonction affine par morceaux f , calculer l'intégrale I de f sur son intervalle de définition.



$$\begin{aligned} \blacktriangleright I_{13} &= \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} dx & \blacktriangleright I_{17} &= \int_{-1}^2 t^2 - 4t + 3 dt \\ \blacktriangleright I_{14} &= \int_0^3 x^2 - 3x + 4 dx & \blacktriangleright I_{18} &= \int_{-3}^0 x^3 + 2x^2 - 1 dx \\ \blacktriangleright I_{15} &= \int_0^1 x e^{x^2} dx & \blacktriangleright I_{19} &= \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx \\ \blacktriangleright I_{16} &= \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1} dt & \blacktriangleright I_{20} &= \int_0^2 (x-2)e^{2x^2-8x} dx \end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer géométriquement les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{A} \blacktriangleright \int_2^5 2x dx & & \text{C} \blacktriangleright \int_{-4}^{-1} -2u - 1 du \\ \text{B} \blacktriangleright \int_{-2}^4 3 - \frac{1}{2}x dx & & \text{D} \blacktriangleright \int_2^5 -y + 3 dy \end{aligned}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright I_1 &= \int_0^4 x - 3 dx & \blacktriangleright I_7 &= \int_1^2 \frac{2}{(3u-1)^2} du \\ \blacktriangleright I_2 &= \int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt & \blacktriangleright I_8 &= \int_0^3 x e^{-x^2} dx \\ \blacktriangleright I_3 &= \int_1^2 2e^{3x} dx & \blacktriangleright I_9 &= \int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx \\ \blacktriangleright I_4 &= \int_{-3}^3 \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}} dx & \blacktriangleright I_{10} &= \int_1^e \frac{\ln(3x)}{x} dx \\ \blacktriangleright I_5 &= \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{2x+3}} dx & \blacktriangleright I_{11} &= \int_0^4 1 dx \\ \blacktriangleright I_6 &= \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2} & \blacktriangleright I_{12} &= \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-4} dx \end{aligned}$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright I_1 &= \int_1^e x \ln(x) dx & \blacktriangleright I_6 &= \int_{-1}^2 \frac{x}{(2+x)^3} dx \\ \blacktriangleright I_2 &= \int_1^{e^2} \ln(t) dt & \blacktriangleright I_7 &= \int_0^1 -x e^x dx \\ \blacktriangleright I_3 &= \int_0^1 (x+2)e^x dx & \blacktriangleright I_8 &= \int_0^1 x^2 e^x dx \\ \blacktriangleright I_4 &= \int_1^2 (t-2)e^{2t} dt & \blacktriangleright I_9 &= \int_0^{e-1} \frac{x}{(x+1)^2} dx \\ \blacktriangleright I_5 &= \int_{-1}^0 x e^x dx & \blacktriangleright I_{10} &= \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx \end{aligned}$$

Exercice 5

Calculer :

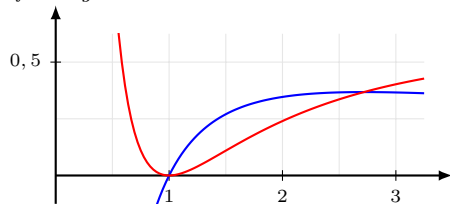
A ▶ $\int_{-2}^1 3x \, dx - 3 \int_{-2}^1 t \, dt$

B ▶ $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} \, dx$

C ▶ $\int_{-4}^1 (3t^2 + 2) \, dt + \int_1^3 (3x^2 + 2) \, dx$

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $g(x) = \frac{\ln(x)^2}{x}$ de courbes respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



- 1 ▶ Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent deux points d'intersection dont on précisera les coordonnées.
- 2 ▶ Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 3 ▶ Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. L'unité est de 1 cm sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Exercice 7

On pousse un objet de manière rectiligne sur une distance de 4m. La force F nécessaire pour pousser cet objet, en N, s'exprime en fonction de la distance parcourue x , exprimée en m.

Dans cet exercice, F est une fonction affine. Au départ, la force est de 400N pour s'annuler au bout de 4m

- 1 ▶ Exprimer $F(x)$ en fonction de x .
- 2 ▶ Le travail W , en joules, de cette force est égal à $\int_0^4 F(x) \, dx$. Calculer le travail W de cette force.

Exercice 8

Lors d'un voyage de 8 heures, on roule à une vitesse v , exprimée en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, en fonction du temps t , exprimé en heure. La vitesse v est définie par :

$$v(t) = -6t(t - 8)$$

Calculer la vitesse moyenne sur le trajet, c'est-à-dire la valeur moyenne de v sur $[0; 8]$.

Exercice 9

La suite (I_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 1 + t^n \, dt$$

- 1 ▶ Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
- 2 ▶ Est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 10

- 1 ▶ Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\frac{4x^2 + 7x + 1}{x + 2} = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

- 2 ▶ En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{4x^2 + 7x + 1}{x + 2} \, dx$.

Exercice 11

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$$

- 1 ▶ Déterminer une primitive de f .
- 2 ▶ Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[50; 100]$.

Exercice 12

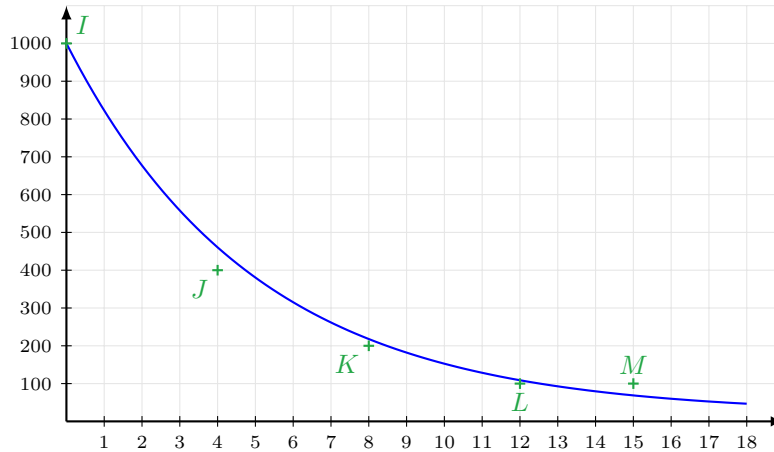
Comparer $I = \int_1^2 xe^x \, dx$ et $J = \int_1^2 x^2 e^x \, dx$.

Je comprends mon cours

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 980e^{-t/5} + 20$.

- 1► À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la valeur moyenne μ de f sur $[0; 15]$. On pourra s'aider des points I, J, K, L et M .



- 2► Déterminer la valeur exacte de μ puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 14

Calculer :

- | | |
|---|---|
| A► $\int_1^2 x^2 \, dx$ | E► $\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx$ |
| B► $\int_1^3 t^3 \, dt$ | F► $\int_1^e \frac{2}{2t^3} \, dt$ |
| C► $\int_2^{10} \frac{1}{u} \, du$ | G► $\int_0^{\ln(2)} 3x^2 e^{x^3} \, dx$ |
| D► $\int_0^4 s - 3 \, ds$ | H► $\int_{-1}^1 x(2 - x^2)^3 \, dx$ |
| I► $\int_1^2 \frac{x^3}{x^4 + 1} \, dx$ | |
| J► $\int_{-1}^2 (1 - 2t)e^{-t^2+t+1} \, dt$ | |
| K► $\int_1^e (t^2 - 1) \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) \, dt$ | |
| L► $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$ | |

Exercice 15

Calculer :

- | | |
|---|--|
| A► $\int_0^1 xe^x \, dx$ | F► $\int_1^e x^2 \ln(x) \, dx$ |
| B► $\int_0^\pi x \cos(x) \, dx$ | G► $\int_0^1 \frac{x}{(5x + 3)^3} \, dx$ |
| C► $\int_0^{10} (2t + 1)e^{-t} \, dt$ | H► $\int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x - 9)^3} \, dx$ |
| D► $\int_{-2\pi}^{\pi/2} 2x \cos(x) \, dx$ | I► $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$ |
| E► $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$ | J► $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ |
| L► $\int_{-1/3}^0 (4 - 3t)e^{3t+1} \, dt$ | |
| M► $\int_{-\pi}^\pi (3x - 2) \sin(x) \, dx$ | |
| N► $\int_0^\pi (x^2 - 2x + 1) \sin(3x) \, dx$ | |
| O► $\int_{-1}^1 2x(8x + 2)^2 \, dx$ | |

Exercice 16

- 1► Soient $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto x + 1$. Déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par les courbes de f et g , et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
- 2► Déterminer les valeurs moyennes des fonctions suivantes sur les intervalles demandés :

$f : x \mapsto x^2 + 3$
sur $[-2; 2]$

$g : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 3}$
sur $[e; 4]$
- 3► Soit g une fonction continue de valeur moyenne $\ln(2)$ sur $[1; 3]$. Calculer $\int_1^3 g(x) \, dx$.

Exercice 17

Démontrer les inégalités suivantes grâce à la croissance de l'intégrale.

- a► $2 \leq \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \, dt \leq 4$
- b► $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx \leq 3$
- c► $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} \, dx \leq 2$

Exercice 18

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx.$$

- 1► Calculer I_0 .
- 2► Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
- 3► En déduire que (I_n) converge.
- 4► Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

- 5► En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 19

On considère une fonction f définie sur $[1; 4]$, de valeur moyenne $\mu = 2$. Déterminer $\int_1^4 f(x) \, dx$.

Exercice 20

Les questions sont indépendantes.

- 1► Soient f et g deux fonctions continues telles que $\int_0^1 f(x) \, dx = 3$ et $\int_0^1 g(x) \, dx = -5$.
Calculer $\int_0^1 2f(x) - g(x) \, dx$.
- 2► Calculer $\int_1^2 \ln(x) \, dx + \int_1^2 t + \ln\left(\frac{1}{t}\right) \, dt$.
- 3► Soit f continue telle que pour tout $x \in [2; 4]$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.
Déterminer un encadrement de $\int_2^4 f(x) \, dx$.
- 4► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n une fonction continue telle que pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{-n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$.
Étudier la convergence de la suite de terme général $\int_0^1 f_n(x) \, dx$.

Exercice 21

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{x/2} - 1$.

- 1► a► Pour tout réel x , développer $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$.
b► En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 2► Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 22 (BAC 2012)

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} \, dx$.

- 1► Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x^2}$. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g . En déduire la valeur de I_1 .
- 2► À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$$

- 3► Calculer I_3 et I_5 .

Exercice 23

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_1^n \frac{x}{x+1} dx$$

- 1► Prouver que la suite (I_n) est croissante.
- 2► Est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 24

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n)$$

et (I_n) la suite de terme général $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 1► a► Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n \leq 2$$
 - b► Étudier le sens de variation de la suite (I_n) .
 - c► En déduire que la suite converge.

2► Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x$$

- a► Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
- b► En déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.
- c► Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$,

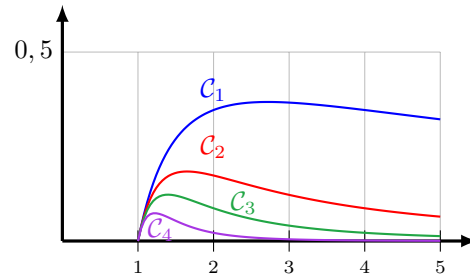
$$\ln(1 + x^n) \leq x^n$$

3► Déterminer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 25

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $[1; 5]$ par $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n la courbe de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes C_n pour $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.



- 1► Conjecturer la limite de l'aire délimitée par C_n , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 2► a► Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1; 5]$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^{n-1}}$.
b► Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$$

- c► Démontrer la conjecture de la question 1►.

Objectif Bac

Exercice 26 (BAC 2019)

Partie A

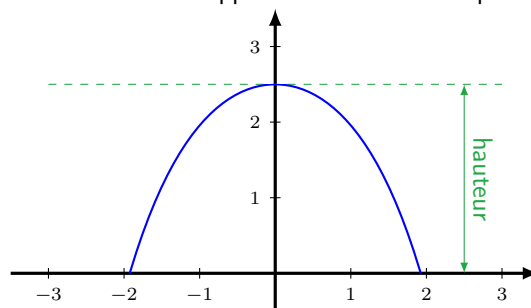
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

- 1► a► Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 b► Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
 c► Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, une unique solution α .
- 2► En remarquant que, pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les serres en forme de tunnel sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température. Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.



Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la partie A. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.

On admettra que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

- 1► Calculer la hauteur d'un arceau.
- 2► Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0; \alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par :

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

- a► Montrer que pour tout réel x ,

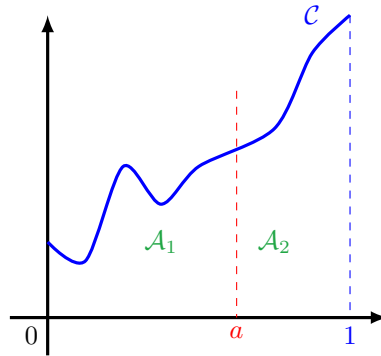
$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$$

- b► En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α .
 c► Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à $e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Exercice 27

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$, continue et positive sur cet intervalle. Soit $a \in]0; 1[$. On note :

- ▶ $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal,
- ▶ $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine plan entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$,
- ▶ $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine plan entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$,



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f , une valeur du réel a telle que la condition (E) : « les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales » est vérifiée. On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

1▶ Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a , et déterminer sa valeur.

- a▶ f est une fonction constante strictement positive,
- b▶ f est définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x$,

2▶ a▶ À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aire, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

b▶ On note F une primitive de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

Démontrer que si a satisfait la condition (E) , alors $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$.

c▶ La réciproque est-elle vraie ?

3▶ Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

a▶ La fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = e^x$. Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel a et donner sa valeur.

b▶ La fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. Vérifier que $a = \frac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, $f : x \mapsto 4 - 3x^2$.

1▶ Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E) , alors a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

2▶ On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

- a▶ Calculer u_1 .
- b▶ Démontrer que g est croissante sur $[0; 1]$.
- c▶ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
- d▶ Prouver que la suite (u_n) est convergente. À l'aide d'opérations sur les limites, prouver que la limite est a .
- e▶ On admet que $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Donner une valeur approchée de a à 10^{-8} près.

Exercice 28

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto x^n e^x$ sur $[0; 1]$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- 1► a► Soit $F_1 : x \mapsto (x-1)e^x$ définie sur $[0; 1]$. Vérifier que F_1 est une primitive de f_1 .

b► Calculer I_1 .

- 2► À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

- 3► Calculer I_2 .

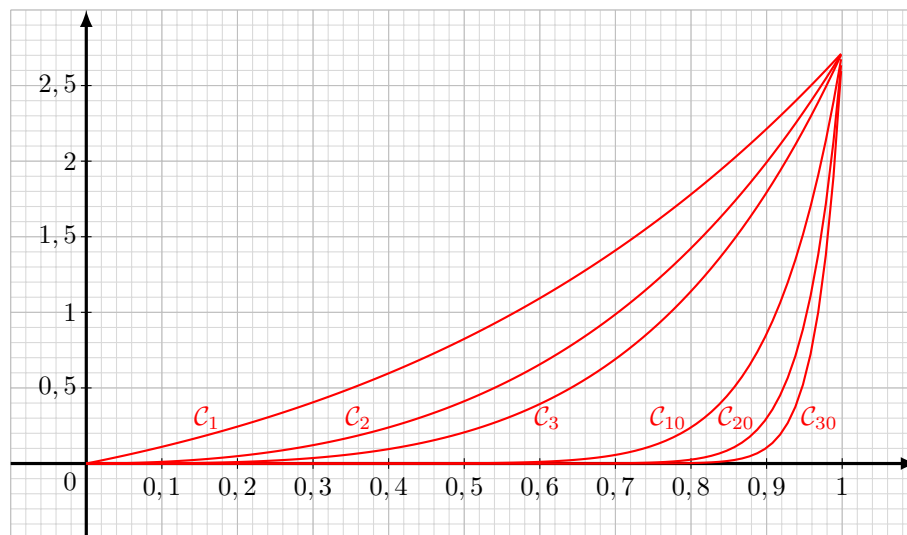
- 4► On considère la fonction mystere écrite dans le langage Python :

```
1 def mystere(n):
2     a = 1
3     L = [a]
4     for i in range(1,n):
5         a = e - (i + 1)*a
6         L.append(a)
7     return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

Partie II

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$.



- 1► a► Donner une interprétation graphique de I_n .
b► Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
- 2► Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$.
- 3► En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Vers le supérieur

Exercice 29

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

- 1► Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$$

- 2► La suite (I_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
 3► Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 30

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. Cela signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+T) = f(x)$$

- 1► On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\ell(a) = \int_a^{a+T} f(x) \, dx$$

- a► Démontrer que ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que, pour tout réel a , $\ell'(a) = 0$.
 b► Que peut-on en déduire pour ℓ ?

- 2► Justifier alors que :

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx$$

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $[0; 3]$ telle que :

$$f(x) = (5x - 2)e^{-2x}$$

- 1► Calculer $\int_0^3 f(x) \, dx$.
 2► En déduire la valeur moyenne de f sur $[0; 3]$.

Exercice 32

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_1^e x \ln(x)^n \, dx$$

- 1► Calculer I_0 .
 2► À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

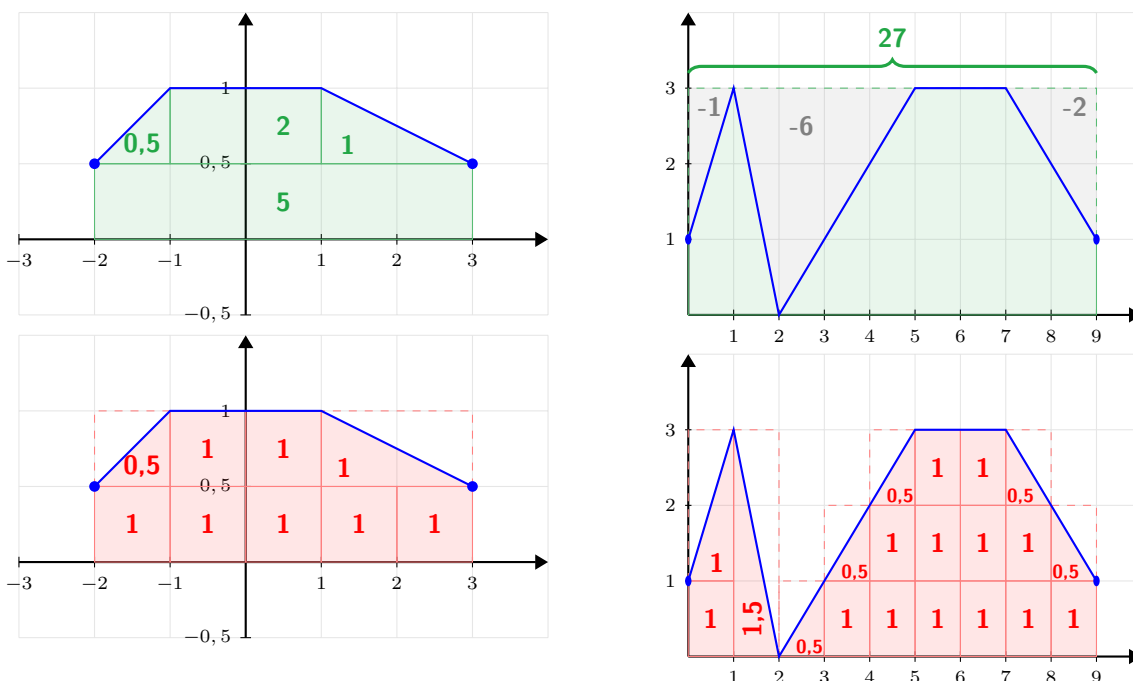
Corrections

Les corrections ne sont pas toujours rédigées dans les moindres détails. Pour plus d'explications, consultez une source extérieure. ✨

Correction de l'ex 1

L'intégrale d'une fonction positive correspond à l'aire sous sa courbe en unités d'aire. Le plus simple est de compter la surface en carreau, mais attention ! il faut ensuite la convertir en unité d'aire en regardant combien de carreaux il y a dans une unité d'aire. Deux méthodes pour compter les carreaux : découper la surface en formes élémentaires (rectangles et triangles) (en vert), ou compter directement les carreaux (en comptant les triangles comme des demi-rectangles) (en rouge). On peut varier la première méthode en comptant trop de surface et en soustrayant ce qu'on a compté en trop !

Rappel : aire d'un triangle = base $\times$ hauteur $\div 2$.



Ainsi, l'aire sous la première courbe mesure 8,5 carreaux, or à en croire les graduations, une unité d'aire contient 2 carreaux, autrement dit 1 u.a. = 2 carr., donc 8,5 carr. = 4,25 u.a., donc l'intégrale vaut 4,25. Pour la seconde, 1 u.a. = 1 carr., donc l'intégrale vaut 18.

Correction de l'ex 2

$$I_1 = \int_0^4 x - 3 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^4 = \left(\frac{4^2}{2} - 3 \times 4 \right) - \left(\frac{0^2}{2} - 3 \times 0 \right) = -4$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t} \, dt = \int_1^e \frac{1}{t} \times \ln(t) \, dt = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t} \, dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2} \right]_1^e = \left(\frac{\ln(e)^2}{2} \right) - \left(\frac{\ln(1)^2}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \int_1^2 2e^{3x} \, dx = \left[\frac{2}{3} e^{3x} \right]_1^2 = \left(\frac{2}{3} e^6 \right) - \left(\frac{2}{3} e^3 \right) = \frac{2}{3} e^3 (e^3 - 1)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-3}^3 \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}} \, dx = \int_{-3}^3 5 \times \frac{2x \xleftarrow{u'} }{2\sqrt{x^2+3} \xleftarrow{2\sqrt{u}} } \, dx = \left[5\sqrt{x^2+3} \right]_{-3}^3 \\ &= (5\sqrt{3^2+3}) - (5\sqrt{(-3)^2+3}) = 5\sqrt{12} - 5\sqrt{12} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{2x+3}} \, dx = \int_0^3 5 \times \frac{2 \xleftarrow{u'} }{2\sqrt{2x+3} \xleftarrow{2\sqrt{u}} } \, dx = \left[5\sqrt{2x+3} \right]_0^3 \\ &= (5\sqrt{2 \times 3 + 3}) - (5\sqrt{2 \times 0 + 3}) = 5\sqrt{9} - 5\sqrt{3} = 15 - 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2} = \int_0^3 -\frac{1}{2} \times \frac{-2 \xleftarrow{-u'} }{(2t+1)^2 \xleftarrow{u^2} } \, dt = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2t+1} \right]_0^3 = \left[-\frac{1}{2(2t+1)} \right]_0^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2(2 \times 3 + 1)} \right) - \left(-\frac{1}{2(2 \times 0 + 1)} \right) = -\frac{1}{14} + \frac{1}{2} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_1^2 \frac{2}{(3u-1)^2} \, du = \int_1^2 -\frac{2}{3} \times \frac{-3 \xleftarrow{-v'} }{(3u-1)^2 \xleftarrow{v^2} } \, du = \left[-\frac{2}{3} \times \frac{1}{3u-1} \right]_1^2 = \left[-\frac{2}{3(3u-1)} \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{2}{3(3 \times 2 - 1)} \right) - \left(-\frac{2}{3(3 \times 1 - 1)} \right) = -\frac{2}{15} + \frac{2}{6} = -\frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_8 &= \int_0^3 x e^{-x^2} \, dx = \int_0^3 -\frac{1}{2} \times \underset{u'}{(-2x)} \times \underset{e^u}{e^{-x^2}} \, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2} e^{-3^2} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{-0^2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-9} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_1^2 \frac{1}{3x-2} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{3} \times \frac{3 \xleftarrow{-u'} }{3x-2 \xleftarrow{u>0} } \, dx = \left[\frac{1}{3} \ln(3x-2) \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \ln(3 \times 2 - 2) \right) - \left(\frac{1}{3} \ln(3 \times 1 - 2) \right) = \frac{1}{3} \ln(4) - \frac{1}{3} \ln(1) = \frac{1}{3} \ln(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_1^e \frac{\ln(3x)}{x} \, dx = \int_1^e \underset{u'}{\frac{1}{x}} \times \underset{u}{\ln(3x)} \, dx = \left[\frac{\ln(3x)^2}{2} \right]_1^e = \left(\frac{\ln(3e)^2}{2} \right) - \left(\frac{\ln(3)^2}{2} \right) \\ &= \frac{(\ln(3) + \ln(e))^2 - \ln(3)^2}{2} = \frac{(\ln(3) + 1)^2 - \ln(3)^2}{2} = \frac{2\ln(3) + 1}{2} = \ln(3) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$I_{11} = \int_0^4 1 \, dx = [x]_0^4 = (4) - (0) = 4$$

$$I_{12} = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-4} \, dx = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \times \frac{2x \xleftarrow{-u'} }{4-x^2 \xleftarrow{u>0} } \, dx = \left[-\frac{1}{2} \ln(4-x^2) \right]_{-1}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \ln(4 - 1^2)\right) - \left(-\frac{1}{2} \ln(4 - (-1)^2)\right) = -\frac{1}{2} \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(3) = 0$$

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x} dx = \int_{-2}^{-1} 1 - 3 \times \frac{-1 \xleftarrow{u'} }{-x \xleftarrow{u>0}} dx = [x - 3 \ln(-x)]_{-2}^{-1} \\ &= (-1 - 3 \ln(1)) - (-2 - 3 \ln(2)) = 1 + 3 \ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{14} &= \int_0^3 x^2 - 3x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^3 \\ &= \left(\frac{3^3}{3} - 3 \times \frac{3^2}{2} + 4 \times 3 \right) - \left(\frac{0^3}{3} - 3 \times \frac{0^2}{2} + 4 \times 0 \right) = 9 - \frac{27}{2} + 12 - 0 = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$I_{15} = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \times 2x \times e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} e^{1^2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^{0^2} \right) = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e - 1)$$

$$\begin{aligned} I_{16} &= \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{e^t \xleftarrow{u'} }{e^t + 1 \xleftarrow{u>0}} dt = [\ln(e^t + 1)]_0^1 \\ &= (\ln(e^1 + 1)) - (\ln(e^0 + 1)) = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{17} &= \int_{-1}^2 t^2 - 4t + 3 dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{3} - 2 \times 2^2 + 3 \times 2 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) \right) = \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 5 \right) = \frac{2}{3} + \frac{16}{3} = 6 \end{aligned}$$

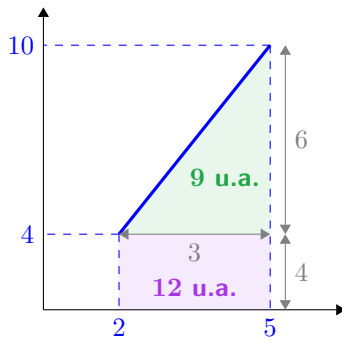
$$\begin{aligned} I_{18} &= \int_{-3}^0 x^3 + 2x^2 - 1 dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - x \right]_{-3}^0 \\ &= \left(\frac{0^4}{4} + \frac{2 \times 0^3}{3} - 0 \right) - \left(\frac{(-3)^4}{4} + \frac{2 \times (-3)^3}{3} - (-3) \right) = 0 - \left(\frac{81}{4} - 18 + 3 \right) = -\frac{81}{4} + 15 = -\frac{21}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{19} &= \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \times \frac{2x-2 \xleftarrow{u'} }{x^2-2x+2 \xleftarrow{u>0(*)}} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln(2^2 - 2 \times 2 + 2) \right) - \left(\frac{1}{2} \ln(1^2 - 2 \times 1 + 2) \right) = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) = \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

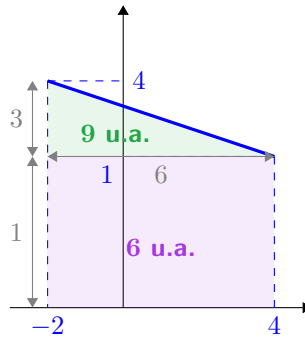
$$\begin{aligned} I_{20} &= \int_0^2 (x-2)e^{2x^2-8x} dx = \int_0^2 \frac{1}{4} \times (4x-8) \times e^{\frac{2x^2-8x}{4}} dx = \left[\frac{1}{4} e^{2x^2-8x} \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} e^{2 \times 2^2 - 8 \times 2} \right) - \left(\frac{1}{4} e^{2 \times 0^2 - 8 \times 0} \right) = \frac{1}{4} e^{-8} - \frac{1}{4} e^0 = \frac{1}{4} (e^{-8} - 1) \end{aligned}$$

(*) : Car $\Delta = -4 < 0$ et le coefficient dominant est $1 > 0$.

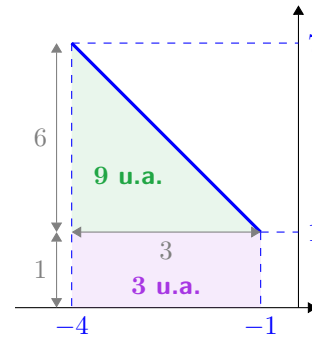
Correction de l'ex 3



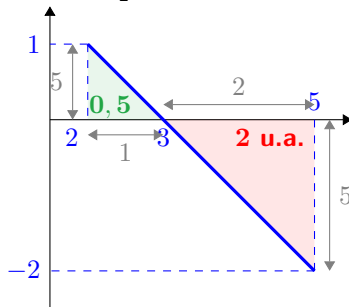
$$\int_2^5 2x \, dx = 21$$



$$\int_{-2}^4 3 - \frac{1}{2}x \, dx = 15$$



$$\int_{-4}^{-1} -2u - 1 \, du = 12$$



$$\int_2^5 -y + 3 \, dy = -1,5$$

Méthode : on découpe la surface sous la courbe en formes élémentaires (triangles, rectangles). Pour une fonction positive, l'aire en unités d'aire correspond à l'intégrale. Attention, pour la partie négative d'une fonction, l'aire est comptée négativement.

Remarque : les schémas ne sont pas à l'échelle, et il n'est pas utile de s'en soucier : on donne juste l'allure de la fonction affine, et on indique les données clés. Il n'y a pas besoin de plus pour calculer les aires correspondantes.

Correction de l'ex 4

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e x \times \ln(x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left(\frac{e^2}{2} \ln(e) \right) - \left(\frac{1^2}{2} \ln(1) \right) - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^{e^2} \frac{1}{t} \times \ln(t) \, dt = \left[t \times \ln(t) \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} t \times \frac{1}{t} \, dt \\ &= (e^2 \ln(e^2)) - (1 \ln(1)) - \int_1^{e^2} 1 \, dt = 2e^2 - [t]_1^{e^2} = 2e^2 - (e^2) + (1) = e^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 (x+2) \times e^x \, dx = \left[(x+2) \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x \, dx \\ &= (3e) - (2e^0) - [e^x]_0^1 = 3e - 2 - (e) + (e^0) = 2e - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_1^2 (t-2) \times e^{2t} dt = \left[(t-2) \times \frac{1}{2} e^{2t} \right]_1^2 - \int_1^2 1 \times \frac{1}{2} e^{2t} dt \\
&= (0) - \left(-\frac{1}{2} e^2 \right) - \left[\frac{1}{4} e^{2t} \right]_1^2 = \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{1}{4} e^4 \right) + \left(\frac{1}{4} e^2 \right) = \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^4 = \frac{1}{4} e^2 (3 - e^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{-1}^0 x \times e^x dx = \left[x \times e^x \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1 \times e^x dx \\
&= (0) - (-1e^{-1}) - [e^x]_{-1}^0 = e^{-1} - (e^0) + (e^{-1}) = 2e^{-1} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{-1}^2 x \times \frac{1}{(2+x)^3} dx = \left[x \times \frac{-1}{2(2+x)^2} \right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 1 \times \frac{-1}{2(2+x)^2} dx \\
&= \left(-\frac{2}{2(4)^2} \right) - \left(-\frac{-1}{2(1)^2} \right) + \int_{-1}^2 -\frac{1}{2} \times \frac{-1}{(2+x)^2} dx = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2+x} \right]_{-1}^2 \\
&= -\frac{9}{16} + \left(-\frac{1}{2(4)} \right) - \left(-\frac{1}{2(1)} \right) = -\frac{9}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_0^1 -x \times e^x dx = \left[-x \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 -1 \times e^x dx \\
&= (-e) - (0) + \int_0^1 e^x dx = -e + [e^x]_0^1 = -e + (e) - (e^0) = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_0^1 x^2 \times e^x dx = \left[x^2 \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x \times e^x dx \\
&= (e) - (0) - \int_0^1 2x \times e^x dx = e - \left(\left[2x \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2 \times e^x dx \right) \\
&= e - (2e - 0 - [2e^x]_0^1) = e - 2e + (2e - 2e^0) = e - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9 &= \int_0^{e-1} x \times \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[x \times \left(-\frac{1}{x+1} \right) \right]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} 1 \times \left(-\frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \left(-\frac{e-1}{e} \right) - (0) + \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = -1 + \frac{1}{e} + [\ln(x+1)]_0^{e-1} \\
&= -1 + \frac{1}{e} + (\ln(e) - \ln(1)) = -1 + \frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \int_{-1}^1 (x+3) \times e^{-x} dx = \left[(x+3) \times (-e^{-x}) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1 \times (-e^{-x}) dx \\
&= (-4e^{-1}) - (-2e^1) + \int_{-1}^1 e^{-x} dx = -4e^{-1} + 2e + [-e^{-x}]_{-1}^1 \\
&= -4e^{-1} + 2e + (-e^{-1}) - (-e^1) = 3e - 5e^{-1} = 3e - \frac{5}{e}
\end{aligned}$$

Correction de l'ex 5

On rappelle que la variable d'intégration est muette. L'utilisation de la linéarité de l'intégrale est signalée par le symbole $\underline{\underline{L}}$:

$$A \triangleright \int_{-2}^1 3x \, dx - 3 \int_{-2}^1 t \, dt = \int_{-2}^1 3x \, dx - 3 \int_{-2}^1 x \, dx \stackrel{\underline{\underline{L}}}{=} \int_{-2}^1 3x - 3x \, dx = \int_{-2}^1 0 \, dx = 0(1 - (-1)) = 0.$$

$$B \triangleright \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} \, dx \stackrel{\underline{\underline{L}}}{=} \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 1} \, dx = \int_0^1 1 \, dx = 1(1 - 0) = 1.$$

$$C \triangleright \int_{-4}^1 (3t^2 + 2) \, dt + \int_1^3 (3x^2 + 2) \, dx = \int_{-4}^1 (3x^2 + 2) \, dx + \int_1^3 (3x^2 + 2) \, dx \stackrel{(*)}{=} \int_{-4}^3 3x^2 + 2 \, dx = [x^3 + 2x]_{-4}^3 = (3^3 - 2 \times 3) - ((-4)^3 + 2 \times (-4)) = -51.$$

(*) : d'après la relation de Chasles

Correction de l'ex 6

1► Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'intersectent aux points dont l'abscisse x vérifie $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)^2}{x}$, soit $\ln(x)^2 - \ln(x) = 0$, autrement dit $\ln(x)[\ln(x) - 1] = 0$. C'est une équation produit nul, elle est vérifiée si, et seulement si $\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = e$. Les coordonnées des points d'intersection sont donc $(1; 0)$ et $(e; 1/e)$.

2► Soit $x > 0$. Séparons trois cas :

- Si $x < 1$: alors $\ln(x) < \ln(1) = 0$ (par stricte croissance de $\ln$), or $\ln(x)^2 > 0$ donc $\ln(x) < \ln(x)^2$, donc $f(x) < g(x)$ en divisant par $x > 0$.
- Si $x > e$: alors $\ln(x) > \ln(e) = 1$ (par stricte croissance de $\ln$), donc $\ln(x) \times \ln(x) > 1 \times \ln(x)$ car en particulier, $\ln(x) > 0$. Autrement dit, $\ln(x)^2 > \ln(x)$, puis $g(x) > f(x)$ en divisant par $x > 0$.
- Si $1 < x < e$: alors $\ln(1) < \ln(x) < \ln(e)$ par stricte croissance de $\ln$, soit $0 < \ln(x) < 1$. On multiplie la seconde inégalité par $\ln(x) > 0$ pour obtenir $\ln(x)^2 < \ln(x)$, puis $g(x) < f(x)$ en divisant par $x > 0$.

Conclusion : la courbe de f est en-dessous de celle de g sauf entre 1 et e .

3► Entre 1 et e , d'après la question précédente, $g < f$, donc on calcule $\int_1^e f(x) - g(x) \, dx$, c'est-à-dire $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(x)^2}{x} \, dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} \, dx - \int_1^e \frac{\ln(x)^2}{x} \, dx$ par linéarité. Ces deux intégrales se calculent de la même manière ; pour aller plus loin, montrons une formule générale. Calculons $\int_1^e \frac{\ln(x)^k}{x} \, dx$ pour tout k

entier naturel non nul. Une réécriture sous la forme $\int_1^e \frac{1}{u'} \times \ln(x)^k \, dx$ permet de voir la formule de primitive

$$\text{usuelle } u' u^k. \text{ Ainsi, on a } \left[\frac{\ln(x)^{k+1}}{k+1} \right]_1^e = \frac{\ln(e)^{k+1}}{k+1} - \frac{\ln(1)^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\int_1^e f(x) - g(x) \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, donc $\mathcal{A} = \frac{1}{6} \text{ u.a.} = \frac{1}{6} \text{ cm}^2$ car l'unité de longueur de chaque axe est le centimètre.

Correction de l'ex 7

1► Comme F est une fonction affine, elle est de la forme $F(x) = ax + b$. D'après l'énoncé, au départ ($x = 0$), la force est de 400N, donc $F(0) = 400$, ce qui donne $b = 400$. De plus, elle s'annule au bout de 4m, donc $F(4) = 0$, soit $a \times 4 + 400 = 0$, d'où $4a = -400$ et $a = -100$. On en déduit que : $F(x) = -100x + 400$.

2▶

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^4 F(x) \, dx = \int_0^4 -100x + 400 \, dx = [-50x^2 + 400x]_0^4 \\
 &= (-50 \times 4^2 + 400 \times 4) - (-50 \times 0^2 + 400 \times 0) = -800 + 1600 - 0 = 800 \text{ J}
 \end{aligned}$$

Correction de l'ex 8

La vitesse moyenne est la valeur moyenne de v sur $[0; 8]$.

$$\frac{1}{8-0} \int_0^8 -6t^2 + 48t \, dt = \frac{1}{8} [-2t^3 + 24t^2]_0^8 = \dots = 64 \text{ km/h}$$

Correction de l'ex 9

1▶ Pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [0; 1]$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1 + t^{n+1}) \, dt - \int_0^1 (1 + t^n) \, dt = \int_0^1 t^{n+1} - t^n \, dt = \int_0^1 t^n(t-1) \, dt$$

Or, pour tout $t \in [0; 1]$, $t^n \geq 0$ et $t-1 \leq 0$, donc par produit $t^n(t-1) \leq 0$. Par positivité de l'intégrale*, on en déduit que $\int_0^1 t^n(t-1) \, dt \leq 0$, soit $I_{n+1} - I_n \leq 0$. La suite (I_n) est donc décroissante.

2▶ Pour tout $t \in [0; 1]$, $1 + t^n \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, (I_n) converge.

Remarque : On aurait pu faire tout l'exercice en calculant directement I_n et ainsi avoir une expression explicite de la suite : $I_n = \left[t + \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) - (0) = 1 + \frac{1}{n+1}$. La décroissance et la convergence sont alors immédiates.

Correction de l'ex 10

1▶ Pour tout $x \in [0; 1]$,

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2) + c}{x+2} = \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + (2b+c)}{x+2}$$

Or cette expression doit être égale à $\frac{4x^2 + 7x + 1}{x+2}$, donc par identification il suffit que :

$$\begin{cases} a = 4 \\ 2a + b = 7 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 4 \\ 8 + b = 7 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ 2(-1) + c = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

On a donc pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{4x^2 + 7x + 1}{x+2} = 4x - 1 + \frac{3}{x+2}$.

*. Techniquement on devrait dire par « négativité » de l'intégrale, mais ça ne se dit pas. Si l'on voulait faire dans l'excès de zèle, on devrait plutôt calculer $I_n - I_{n+1}$ qui donne une intégrale positive, et conclure que $I_n \geq I_{n+1}$.

2► D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4x^2 + 7x + 1}{x + 2} dx &= \int_0^1 4x - 1 + 3 \times \frac{1 \xleftarrow{u'} \quad \xrightarrow{u>0}}{x + 2} dx = [2x^2 - x + 3 \ln(x + 2)]_0^1 \\ &= (2 \times 1^2 - 1 + 3 \ln(1 + 2)) - (2 \times 0^2 - 0 + 3 \ln(0 + 2)) \\ &= (1 + 3 \ln(3)) - (3 \ln(2)) = 1 + 3 \ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Correction de l'ex 11

1► Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{2}{0,04} \times \frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = 50 \times \frac{0,04e^{0,04t} \xleftarrow{u'} \quad \xrightarrow{u>0}}{e^{0,04t} + 19}$ donc $F : t \mapsto 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2► En utilisant la primitive fraîchement trouvée, la valeur moyenne de f sur $[50; 100]$ est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{100 - 50} \int_{50}^{100} f(t) dt &= \frac{1}{50} [50 \ln(e^{0,04t} + 19)]_{50}^{100} = [\ln(e^{0,04t} + 19)]_{50}^{100} \\ &= (\ln(e^{0,04 \times 100} + 19)) - (\ln(e^{0,04 \times 50} + 19)) = \ln(e^4 + 19) - \ln(e^2 + 19) = \ln\left(\frac{e^4 + 19}{e^2 + 19}\right)\end{aligned}$$

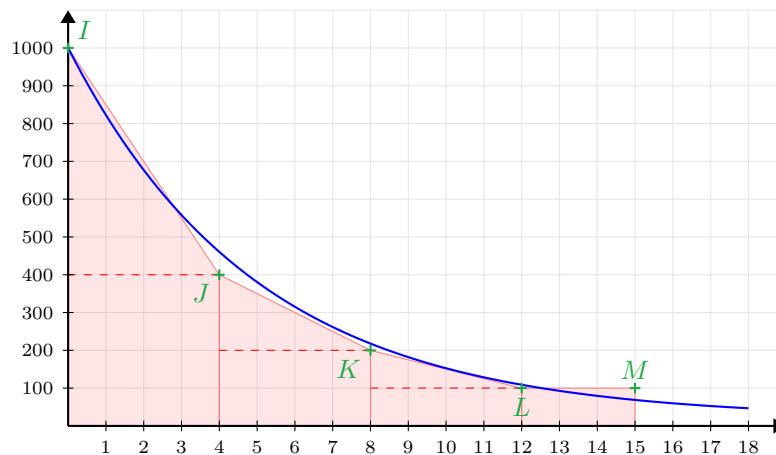
Correction de l'ex 12

Par linéarité de l'intégrale, $J - I = \int_1^2 x^2 e^x dx - \int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 (x^2 - x) e^x dx = \int_1^2 \underbrace{x}_{>0} \underbrace{(x - 1)}_{\geq 0} \underbrace{e^x}_{>0} dx$.

L'intégrande étant positive comme produit de trois réels positifs, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_1^2 x(x - 1)e^x dx \geq 0$, soit $J - I \geq 0$, donc $I \leq J$.

Correction de l'ex 13

1► On applique la méthode des trapèzes pour trouver que $\int_0^{15} f(x) dx \approx 4\,900$.



2► La valeur moyenne de f entre 0 et 15 est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{15-0} \int_0^{15} f(t) \, dt &= \frac{1}{15} \int_0^{15} 980e^{-t/5} + 20 \, dt = \frac{1}{15} \left[980 \times (-5)e^{-t/5} + 20t \right]_0^{15} \\ &= \frac{1}{15} [(980 \times (-5)e^{-15/5} + 20 \times 15) - (980 \times (-5)e^{-0/5} + 20 \times 0)] \\ &= 5200 - 4900e^{-3} \approx 4\,956,04\end{aligned}$$

Correction de l'ex 14

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{1^3}{3} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$B = \int_1^3 t^3 \, dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} \right) - \left(\frac{1^4}{4} \right) = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

$$C = \int_2^{10} \frac{1}{u} \, du = \int_2^{10} \frac{1}{u} \, du = [\ln(u)]_2^{10} = \ln(10) - \ln(2) = \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln(5)$$

$$D = \int_0^4 s - 3 \, ds = \left[\frac{(s-3)^2}{2} \right]_0^4 = \left(\frac{(4-3)^2}{2} \right) - \left(\frac{(0-3)^2}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

$$E = \int_0^1 2xe^{x^2} \, dx = \int_0^1 \underset{u'}{2x} \times \underset{e^u}{e^{x^2}} \, dx = [e^{x^2}]_0^1 = e^{1^2} - e^{0^2} = e - 1$$

$$F = \int_1^e \frac{2}{2t^3} \, dt = \int_1^e t^{-3} \, dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^e = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^e = \left(-\frac{1}{2e^2} \right) - \left(-\frac{1}{2 \times 1^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2})$$

$$G = \int_0^{\ln(2)} 3x^2 e^{x^3} \, dx = \int_0^{\ln(2)} \underset{u'}{3x^2} \times \underset{e^u}{e^{x^3}} \, dx = [e^{x^3}]_0^{\ln(2)} = e^{\ln(2)^3} - e^{0^3} = e^{\ln(2)^3} - 1$$

$$\begin{aligned}H &= \int_{-1}^1 x(2-x^2)^3 \, dx = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \times \underset{u'}{(-2x)} \times \underset{u^3}{(2-x^2)^3} \, dx = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{(2-x^2)^4}{4} \right]_{-1}^1 = \left[-\frac{(2-x^2)^4}{8} \right]_{-1}^1 \\ &= \left(-\frac{(2-1^2)^4}{8} \right) - \left(-\frac{(2-(-1)^2)^4}{8} \right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{4} \times \frac{\underset{u'}{4x^3}}{\underset{u>0}{x^4+1}} \, dx = \left[\frac{1}{4} \ln(x^4+1) \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \ln(2^4+1) \right) - \left(\frac{1}{4} \ln(1^4+1) \right) = \frac{1}{4} \ln(17) - \frac{1}{4} \ln(2) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{17}{2}\right)\end{aligned}$$

$$J = \int_{-1}^2 (1-2t)e^{-t^2+t+1} \, dt = \int_{-1}^2 (1-2t) \times \underset{u'}{e^{-t^2+t+1}} \, dt = [e^{-t^2+t+1}]_{-1}^2$$

$$= \left(e^{-2^2+2+1} \right) - \left(e^{-(-1)^2+(-1)+1} \right) = e^{-1} - e^{-1} = 0$$

$$\begin{aligned} K &= \int_1^e (t^2 - 1) \times \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) dt = \left[\frac{\left(\frac{1}{3} t^3 - t \right)^2}{2} \right]_1^e = \left(\frac{\left(\frac{1}{3} e^3 - e \right)^2}{2} \right) - \left(\frac{\left(\frac{1}{3} (1)^3 - 1 \right)^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{18} (e^2 - 4)(e^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_{-1}^2 \frac{2x \overset{\leftarrow u'}{}}{2\sqrt{x^2+1} \overset{\leftarrow 2\sqrt{u}}{}} dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_{-1}^2 = \left(\sqrt{2^2+1} \right) - \left(\sqrt{(-1)^2+1} \right) \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Correction de l'ex 15

† (Commentaire pour la I) Une technique fréquente : l'intégration par parties nous fait retomber sur l'intégrale de base. Cela exhibe une équation élémentaire vérifiée par l'intégrale, qu'il suffit alors de résoudre pour conclure.

$$A = \int_0^1 x \times e^x dx = \left[x \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx = e - 0 - [e^x]_0^1 = e - (e - e^0) = 1$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi x \times \cos(x) dx = \left[x \times \sin(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \times \sin(x) dx = (\pi \sin(\pi)) - (0) - [-\cos(x)]_0^\pi \\ &= 0 + \cos(\pi) - \cos(0) = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{10} (2t+1) \times e^{-t} dt = \left[(2t+1) \times (-e^{-t}) \right]_0^{10} - \int_0^{10} 2 \times (-e^{-t}) dt \\ &= (-21e^{-10}) - (-1e^0) - \int_0^{10} 2e^{-t} dt = -21e^{-10} + 1 - [-2e^{-t}]_0^{10} \\ &= -21e^{-10} + 1 - (-2e^{-10} + 2e^0) = -19e^{-10} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \int_{-2\pi}^{\pi/2} 2x \times \cos(x) dx = \left[2x \times \sin(x) \right]_{-2\pi}^{\pi/2} - \int_{-2\pi}^{\pi/2} 2 \times \sin(x) dx \\ &= \left(2 \times \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - (-4\pi \sin(-2\pi)) - [-2\cos(x)]_{-2\pi}^{\pi/2} \\ &= \pi - 0 + (2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)) - (2\cos(-2\pi)) = \pi + 0 - 2 = \pi - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e \frac{1}{x^2} \times \ln(x) dx = \left[\left(-\frac{1}{x} \right) \times \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x} \right) \times \frac{1}{x} dx \\ &= \left(-\frac{\ln(e)}{e} \right) - (0) + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} \right) - (-1) = 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

*. On pouvait le voir sans aucun calcul : l'intégrande est impaire, donc symétrique par rapport à l'origine. Or on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0, donc la surface sous la courbe à gauche et à droite de 0 ont la même aire, mais sont comptées de manière opposées ; ainsi, elles se compensent exactement.

$$\begin{aligned}
 F &= \int_1^e \underset{u'}{x^2} \times \underset{v}{\ln(x)} \, dx = \left[\underset{u}{\frac{x^3}{3}} \times \underset{v}{\ln(x)} \right]_1^e - \int_1^e \underset{u}{\frac{x^3}{3}} \times \underset{v'}{\frac{1}{x}} \, dx \\
 &= \left(\frac{e^3}{3} \ln(e) \right) - (0) - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3 + 1}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \int_0^1 \underset{u}{x} \times \underset{v'}{\frac{1}{(5x+3)^3}} \, dx = \left[\underset{u}{x} \times \underset{v}{\left(-\frac{1}{10(5x+3)^2} \right)} \right]_0^1 - \int_0^1 \underset{u'}{1} \times \underset{v}{\left(-\frac{1}{10(5x+3)^2} \right)} \, dx \\
 &= \left(-\frac{1}{10 \times 8^2} \right) - (0) + \int_0^1 \frac{1}{50} \times \frac{5 \leftarrow u'}{(5x+3)^2 \leftarrow v^2} \, dx = -\frac{1}{640} + \left[-\frac{1}{50(5x+3)} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{640} + \left(-\frac{1}{400} \right) - \left(-\frac{1}{150} \right) = \frac{23}{9600}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= \int_{-1}^0 \underset{u}{5x} \times \underset{v'}{\frac{1}{(3x-9)^3}} \, dx = \left[\underset{u}{5x} \times \underset{v}{\left(-\frac{1}{6(3x-9)^2} \right)} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \underset{u'}{5} \times \underset{v}{\left(-\frac{1}{6(3x-9)^2} \right)} \, dx \\
 &= (0) - \left(\frac{-5}{6(-12)^2} \right) + \int_{-1}^0 \frac{5}{18} \times \frac{3 \leftarrow u'}{(3x-9)^2 \leftarrow v^2} \, dx = \frac{5}{864} + \left[-\frac{5}{18(3x-9)} \right]_{-1}^0 \\
 &= \frac{5}{864} + \left(\frac{-5}{18(-9)} \right) - \left(\frac{-5}{18(-12)} \right) = \frac{5}{648}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I^\dagger &= \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \int_1^4 \underset{u'}{1} \times \underset{v}{\sqrt{x}} \, dx = \left[\underset{u}{x} \times \underset{v}{\sqrt{x}} \right]_1^4 - \int_1^4 \underset{u}{x} \times \underset{v'}{2\sqrt{x}} \, dx \\
 &= 4\sqrt{4} - 1\sqrt{1} - \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = 7 - \frac{1}{2} I
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } I = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}$$

$$J = \int_0^1 \underset{u}{x^2} \times \underset{v'}{e^x} \, dx = \left[\underset{u}{x^2} \times \underset{v}{e^x} \right]_0^1 - \int_0^1 \underset{u'}{2x} \times \underset{v}{e^x} \, dx = e - 0 - 2A = e - 1$$

$$\begin{aligned}
 K &= \int_{-1/3}^0 (4-3t) \times \underset{v'}{e^{3t+1}} \, dt = \left[\underset{u}{(4-3t)} \times \underset{v}{\frac{1}{3}e^{3t+1}} \right]_{-1/3}^0 - \int_{-1/3}^0 \underset{u'}{-3} \times \underset{v}{\frac{1}{3}e^{3t+1}} \, dt \\
 &= \left(\frac{4}{3}e \right) - \left(5 \times \frac{1}{3}e^0 \right) + \int_{-1/3}^0 e^{3t+1} \, dt = \frac{4}{3}e - \frac{5}{3} + \left[\frac{1}{3}e^{3t+1} \right]_{-1/3}^0 = \frac{4}{3}e - \frac{5}{3} + \left(\frac{1}{3}e \right) - \left(\frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{5}{3}e - 2
 \end{aligned}$$

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} (3x-2) \times \underset{v'}{\sin(x)} \, dx = \left[\underset{u}{(3x-2)} \times \underset{v}{(-\cos(x))} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \underset{u'}{3} \times \underset{v}{(-\cos(x))} \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= (-(3\pi - 2) \cos(\pi)) - (-(-3\pi - 2) \cos(-\pi)) - \int_{-\pi}^{\pi} -3 \cos(x) \, dx \\
&= (3\pi - 2) - (-3\pi - 2) + [3 \sin(x)]_{-\pi}^{\pi} = 6\pi + 0 = 6\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{\pi} (x^2 - 2x + 1) \times \sin(3x) \, dx \\
&= \left[(x^2 - 2x + 1) \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (2x - 2) \times \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) \, dx \\
&= \left(-\frac{(\pi - 1)^2}{3} (-1) \right) - \left(-\frac{1}{3} (1) \right) - \left(\left[(2x - 2) \left(-\frac{1}{9} \sin(3x) \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \left(-\frac{1}{9} \sin(3x) \right) \, dx \right) \\
&= \frac{(\pi - 1)^2 + 1}{3} - \left(0 - 0 - \left[\frac{2}{27} \cos(3x) \right]_0^{\pi} \right) = \frac{\pi^2 - 2\pi + 2}{3} + \left(\frac{2}{27} (-1) - \frac{2}{27} (1) \right) \\
&= \frac{\pi^2 - 2\pi + 2}{3} - \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \int_{-1}^1 2x(8x + 2)^2 \, dx = \int_{-1}^1 2x(64x^2 + 32x + 4) \, dx = \int_{-1}^1 128x^3 + 64x^2 + 8x \, dx \\
&= \left[32x^4 + \frac{64x^3}{3} + 4x^2 \right]_{-1}^1 = \left(32 + \frac{64}{3} + 4 \right) - \left(32 - \frac{64}{3} + 4 \right) = \frac{128}{3}
\end{aligned}$$

Correction de l'ex 16

- 1► Pour tout $x \in [-1; 2]$, $g(x) - f(x) = (x + 1) - (x^2 - 1) = -x^2 + x + 2$. C'est un trinôme du second degré, son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$. Ses racines sont $x_1 = \frac{-1 - 3}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1 + 3}{-2} = -1$. Son coefficient dominant est $-1 < 0$. Ainsi, ce trinôme est positif entre ses racines et négatif ailleurs. En particulier, ce qui signifie que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[-1; 2]$. De là,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 g(x) - f(x) \, dx &= \int_{-1}^2 -x^2 + x + 2 \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\
&= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \times 2 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \times (-1) \right) \\
&= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = 4,5
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{A} = 4,5$ u.a.

- 2► Notons μ_f et μ_g les valeurs moyennes de f et g respectivement.

$$\mu_f = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 x^2 + 3 \, dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{2^3}{3} + 3 \times 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 3 \times (-2) \right) \right) = \frac{13}{3}$$

$$\begin{aligned}
\mu_g &= \frac{1}{4 - e} \int_e^4 \frac{x}{x^2 + 3} \, dx = \frac{1}{4 - e} \int_e^4 \frac{1}{2} \times \frac{2x \leftarrow u'}{x^2 + 3 \leftarrow u > 0} \, dx = \frac{1}{4 - e} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) \right]_e^4 \\
&= \frac{1}{2(4 - e)} [\ln(4^2 + 3) - \ln(e^2 + 3)] = \frac{\ln(19) - \ln(e^2 + 3)}{2(4 - e)} = \frac{1}{2(4 - e)} \ln \left(\frac{19}{e^2 + 3} \right)
\end{aligned}$$

- 3► Par définition, la valeur moyenne μ de g sur $[1; 3]$ est donnée par $\mu = \frac{1}{3-1} \int_1^3 g(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_1^3 g(x) \, dx$.
- Comme l'énoncé précise que $\mu = \ln(2)$, on a $\frac{1}{2} \int_1^3 g(x) \, dx = \ln(2)$ donc $\int_1^3 g(x) \, dx = 2 \ln(2) = \ln(4)$.

Correction de l'ex 17

- a► Pour tout $t \in [1; 9]$,

$$\begin{aligned}
 &1 \leq t \leq 9 \\
 \text{donc} \quad &1 + \sqrt{1} \leq 1 + \sqrt{t} \leq 1 + \sqrt{9} && \text{par croissance de } t \mapsto 1 + \sqrt{t} \\
 \text{c'est-à-dire} \quad &2 \leq 1 + \sqrt{t} \leq 3 \\
 \text{donc} \quad &\frac{1}{2} \geq \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \geq \frac{1}{3} && \text{par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \\
 \text{donc} \quad &\int_1^9 \frac{1}{2} \, dt \geq \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \, dt \geq \int_1^9 \frac{1}{3} \, dt && \text{par croissance de l'intégrale} \\
 \text{donc} \quad &\frac{1}{2}(9-1) \geq \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \, dt \geq \frac{1}{3}(9-1) \\
 \text{c'est-à-dire} \quad &4 \geq \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \, dt \geq \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

- b► Pour tout $x \in [1; 2]$,

$$\begin{aligned}
 &1 \leq x \leq 2 \\
 \text{donc} \quad &1 + 1^3 \leq 1 + x^3 \leq 1 + 2^3 && \text{par croissance de } x \mapsto 1 + x^3 \\
 \text{c'est-à-dire} \quad &2 \leq 1 + x^3 \leq 9 \\
 \text{donc} \quad &\sqrt{2} \leq \sqrt{1 + x^3} \leq \sqrt{9} = 3 && \text{par croissance de } t \mapsto \sqrt{t} \\
 \text{donc} \quad &\int_1^2 \sqrt{2} \, dx \leq \int_1^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx \leq \int_1^2 3 \, dx && \text{par croissance de l'intégrale} \\
 \text{donc} \quad &\sqrt{2}(2-1) \leq \int_1^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx \leq 3(2-1) \\
 \text{c'est-à-dire} \quad &\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx \leq 3
 \end{aligned}$$

- c► Pour tout $x \in [0; 2]$,

$$\begin{aligned}
 &0 \leq x \leq 2 \\
 \text{donc} \quad &1^2 \leq x^2 \leq 2^2 && \text{par croissance de la fonction carré sur } [0; +\infty[\\
 \text{c'est-à-dire} \quad &1 \leq x^2 \leq 4 \\
 \text{donc} \quad &e^1 \leq e^{x^2} \leq e^4 && \text{par croissance de l'exponentielle} \\
 \text{donc} \quad &\frac{1}{e^1} \geq \frac{1}{e^{x^2}} \geq \frac{1}{e^4} && \text{par décroissance de l'inverse} \\
 \text{donc} \quad &\int_0^2 \frac{1}{e^1} \, dx \geq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} \, dx \geq \int_0^2 \frac{1}{e^4} \, dx && \text{par croissance de l'intégrale} \\
 \text{donc} \quad &\frac{1}{e^1}(2-0) \geq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} \, dx \geq \frac{1}{e^4}(2-0)
 \end{aligned}$$

$$\text{c'est-à-dire } 2 \geq 2e^{-1} \geq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \geq 2e^{-4}$$

Correction de l'ex 18

$$1 \blacktriangleright I_0 = \int_0^1 x^0 e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = (-e^{-1}) - (-e^{-0}) = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

2 \$\blacktriangleright\$ Pour tout entier naturel \$n\$ et pour tout \$x \in [0; 1]\$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^{-x} dx = \int_0^1 x^n (x - 1) e^{-x} dx$$

Or, pour tout \$x \in [0; 1]\$, on a \$x^n \geq 0\$, \$e^{-x} > 0\$ et \$x - 1 \leq 0\$. L'intégrande est donc négative, donc par positivité* de l'intégrale, \$\int_0^1 x^n (x - 1) e^{-x} dx \leq 0\$, soit \$I_{n+1} - I_n \leq 0\$, autrement dit \$I_{n+1} \leq I_n\$, donc \$(I_n)\$ est décroissante.

3 \$\blacktriangleright\$ Pour tout \$x \in [0; 1]\$, \$x^n \geq 0\$ et \$e^{-x} > 0\$, donc \$x^n e^{-x} \geq 0\$. Par positivité de l'intégrale, \$I_n \geq 0\$, autrement dit \$(I_n)\$ est minorée par 0. Étant décroissante d'après la question précédente, on conclut à sa convergence grâce au théorème de la limite monotone.

4 \$\blacktriangleright\$ Pour tout \$x \in [0; 1]\$ et pour tout \$n\$ entier naturel, \$-x \leq 0\$ donc par croissance de l'exponentielle, \$e^{-x} \leq e^0\$, c'est-à-dire \$e^{-x} \leq 1\$. En multipliant par \$x^n \geq 0\$, on obtient \$x^n e^{-x} \leq x^n\$. Par croissance de l'intégrale, \$\int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx\$, c'est-à-dire \$I_n \leq \int_0^1 x^n dx\$.

5 \$\blacktriangleright\$ Pour tout \$n \in \mathbb{N}\$, \$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \left(\frac{1^{n+1}}{n+1} \right) - (0) = \frac{1}{n+1}\$. Or \$I_n \geq 0\$ d'après une précédente question, donc pour tout \$n \in \mathbb{N}\$, \$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}\$. Comme \$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0\$, d'après le théorème des gendarmes, \$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0\$.

Correction de l'ex 19

La valeur moyenne \$\mu\$ de \$f\$ sur \$[1; 4]\$ est définie par \$\mu = \frac{1}{4-1} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx\$. Or \$\mu = 2\$, donc \$\frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx = 2\$, donc \$\int_1^4 f(x) dx = 2 \times 3 = 6\$.

Correction de l'ex 20

1 \$\blacktriangleright\$ Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 2f(x) - g(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 2 \times 3 - (-5) = 6 + 5 = 11.$$

2 \$\blacktriangleright\$ Par linéarité de l'intégrale, la variable d'intégration étant muette :

$$\int_1^2 \ln(x) dx + \int_1^2 x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \ln(x) + x - \ln(x) dx = \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^2}{2} \right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

*. Techniquement on devrait dire par « négativité » de l'intégrale, mais ça ne se dit pas. Si l'on voulait faire dans l'excès de zèle, on devrait plutôt calculer \$I_n - I_{n+1}\$ qui donne une intégrale positive, et conclure que \$I_n \geq I_{n+1}\$.

- 3► Pour tout $x \in [2; 4]$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. Par croissance de l'intégrale, $\int_2^4 \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} dx \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \int_2^4 \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} dx$. Calculons l'intégrale de gauche : $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x \right]_2^4 = \left(\frac{4^2}{4} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{2}{2} \right) = 2$. Calculons l'intégrale de droite : $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x \right]_2^4 = \left(\frac{4^2}{4} - \frac{4}{4} \right) - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{2}{4} \right) = \frac{5}{2}$. Finalement, $2 \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \frac{5}{2}$.
- 4► Pour tout $x \in [0; 1]$, pour tout n entier naturel non nul, $e^{-n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 e^{-n} dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dx \quad \text{donc} \quad e^{-n}(1-0) \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n}(1-0)$$

et donc $e^{-n} \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, la suite de terme général $\int_0^1 f_n(x) dx$ converge et sa limite est 0.

Correction de l'ex 21

- 1► a► Pour tout réel x :

$$\left(e^{x/2} - 1 \right)^2 = \left(e^{x/2} \right)^2 - 2e^{x/2} + 1 = e^{2 \times x/2} - 2e^{x/2} + 1 = e^x - 2e^{x/2} + 1.$$

- b► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = e^x - (2e^{x/2} - 1) = e^x - 2e^{x/2} + 1 = (e^{x/2} - 1)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq g(x)$.
Par conséquent, $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

- 2► Puisque $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[0; 1]$, l'aire $\mathcal{A}$ se calcule comme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) - g(x) dx &= \int_0^1 e^x - 2e^{x/2} + 1 dx = \left[e^x - 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} e^{x/2} + x \right]_0^1 = \left[e^x - 4e^{x/2} + x \right]_0^1 \\ &= \left(e^1 - 4e^{\frac{1}{2}} + 1 \right) - \left(e^0 - 4e^0 + 0 \right) = e - 4e^{1/2} + 4 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A} = (e - 4e^{1/2} + 4)$ u.a.

Correction de l'ex 22

- 1► Pour tout x réel, $G'(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = xe^{x^2} = g(x)$, donc G est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$. De là,

$$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} e^{1^2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^{0^2} \right) = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e - 1).$$

- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx = \int_0^1 \underset{u}{x^{n+1}} \times \underset{v'}{x e^{x^2}} dx = \left[\underset{u}{x^{n+1}} \times \underset{v}{\frac{1}{2} e^{x^2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \underset{u'}{(n+1)x^n} \times \underset{v}{\frac{1}{2} e^{x^2}} dx \\ &= \left(1^{n+1} \times \frac{1}{2} e^{1^2} \right) - (0) - \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

- 3► En appliquant la formule de récurrence établie à la question précédente :

- Pour $n = 1$: $I_3 = \frac{1}{2}e - \frac{1+1}{2}I_1 = \frac{1}{2}e - I_1 = \frac{1}{2}e - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
- Pour $n = 3$: $I_5 = \frac{1}{2}e - \frac{3+1}{2}I_3 = \frac{1}{2}e - 2I_3 = \frac{1}{2}e - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e - 1$.

Correction de l'ex 23

1► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la relation de Chasles, $I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{x}{x+1} dx - \int_1^n \frac{x}{x+1} dx = \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1} dx$. Or pour tout $x \in [n; n+1]$, on a $x > 0$ et $x+1 > 0$, de sorte que $\frac{x}{x+1} > 0$. Par positivité de l'intégrale, $\int_n^{n+1} \frac{x}{x+1} dx \geq 0$. Ainsi, $I_{n+1} - I_n \geq 0$, donc $I_{n+1} \geq I_n$, donc (I_n) est croissante.

2► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_1^n 1 - \frac{1}{x+1} dx = [x - \ln(x+1)]_1^n \\ &= n - \ln(n+1) - (1 - \ln(1+1)) = n - \ln(n+1) - 1 + \ln(2) \\ &= (n+1) - \ln(n+1) - 2 + \ln(2) = (n+1) \left(1 - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) - 1 + \ln(2) \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$, donc par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Correction de l'ex 24

- 1► a► Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x^n \leq 1$, d'où par croissance de $\ln$, $\ln(1) \leq \ln(1+x^n) \leq \ln(1+1)$ donc $0 \leq f_n(x) \leq \ln(2)$. Par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 \ln(2) dx$, donc $0 \leq I_n \leq \ln(2)(1-0)$ c'est-à-dire $0 \leq I_n \leq \ln(2)$. Or $\ln(2) \approx 0,69 \leq 2$, donc $0 \leq I_n \leq 2$.
- b► Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \leq 1$ mais $x \geq 0$ donc $x^{n+1} \leq x^n$, donc $1+x^{n+1} \leq 1+x^n$. Par croissance de $\ln$, $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$, ce qui donne $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$, c'est-à-dire $I_{n+1} \leq I_n$, donc (I_n) est décroissante.
- c► La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de convergence monotone, (I_n) converge.
- 2► a► La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$. Pour tout $x > 0$, $-x < 0$ et $1+x > 0$, donc $g'(x) < 0$, donc g est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- b► On a $g(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$. Comme g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) \leq g(0)$, c'est-à-dire $g(x) \leq 0$.
- c► D'après la question précédente, pour tout $y \geq 0$, $g(y) \leq 0$ c'est-à-dire $\ln(1+y) - y \leq 0$ donc $\ln(1+y) \leq y$. En posant $y = x^n$, il vient $\ln(1+x^n) \leq x^n$.
- 3► D'après ce qui précède, pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$. Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{n+1}\right) - (0) = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Correction de l'ex 25

- 1► La région du plan délimitée par C_n entre $x = 1$ et $x = 5$ semble s'écraser au fur et à mesure que n grandit, on conjecture donc que son aire tend vers 0.
- 2► a► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [1; 5]$, $1 \leq x \leq 5$ donc $0 = \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5)$ par croissance du logarithme, puis $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$ en divisant par $x^n > 0$.
- b► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \int_1^5 x^{-n} dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^5 = \left(\frac{5^{-n+1}}{1-n} \right) - \left(\frac{1^{-n+1}}{1-n} \right) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$$

- c► D'après la question a►, par croissance de l'intégrale, $\int_1^5 0 dx \leq \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n} dx \leq \int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n} dx$, donc par linéarité de l'intégrale, $0(5-1) \leq \int_1^5 f_n(x) dx \leq \ln(5) \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx$ donc d'après la question b►, $0 \leq \int_1^5 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$. Or $5 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-1} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{5^{n-1}} = 1 - 0 = 1$ par somme et quotient, or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ donc le membre de droite tend vers 0 par produit. Il en va de même pour le membre de gauche, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^5 f_n(x) dx = 0$. Or f_n est positive sur $[1; 5]$, donc son intégrale correspond à son aire, donc l'aire de la région délimitée par C_n entre $x = 1$ et $x = 5$ tend bien vers 0.

Correction de l'ex 26

Partie A

- 1► a► On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ (changement de variable $y = -x$). Par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- b► La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme, produit et composée de telles fonctions, et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Or pour $x > 0$ on a $-x < x$, donc $e^{-x} < e^x$ par stricte croissance de la fonction exponentielle, donc $e^x - e^{-x} > 0$, donc $f'(x) < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- c► La fonction f est continue (car dérivable, voir précédemment) et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $f(0) = 2,5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $0 \in]-\infty; 2,5]$, donc d'après le théorème de la bijection continue, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on note α .
- 2► Le fait que pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$ signifie que f est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Le fait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$ signifie que la courbe de f intersecte l'axe des abscisses une et une seule fois sur le demi-axe positif : par symétrie, la courbe de f intersecte le demi-axe négatif une et une seule fois, en une abscisse symétrique, c'est-à-dire en $-\alpha$.

Partie B

- 1► La hauteur d'un arceau est la valeur du maximum de f . D'après l'étude menée en première partie et par symétrie, ce maximum est atteint en 0 et faut $f(0) = 2,5$.
- 2► a► Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} & 1 + f'(x)^2 \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} ((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2) = 1 + \frac{1}{4} ((e^x)^2 - 2 + (e^{-x})^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{1}{4}(e^x)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^x)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{-x})^2 \\
 &= \frac{1}{4}((e^x)^2 + 2 + (e^{-x})^2) = \frac{1}{4}((e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2
 \end{aligned}$$

Remarque méthode : Il est conseillé de développer et réduire séparément les deux membres de l'égalité, et constater que les expressions simplifiées correspondent.

- b► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$ donc $\sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = e^x + e^{-x}$, donc $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, donc :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\alpha \sqrt{1 + f'(x)} \, dx &= \int_0^\alpha \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \, dx = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_0^\alpha \\
 &= \left(\frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \right) - \left(\frac{1}{2}(e^0 - e^{-0}) \right) \\
 &= \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})
 \end{aligned}$$

- c► Comme f est symétrique, la longueur de la moitié droite (entre 0 et α) de l'arceau est la même que la longueur de la moitié gauche (entre $-\alpha$ et 0). Or l'intégrale I donne la longueur de la moitié droite, donc la longueur totale mesure $2I = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

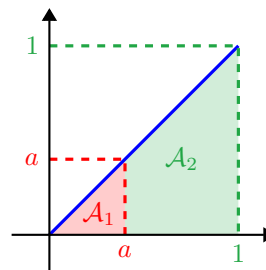
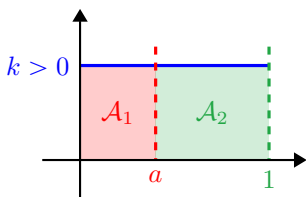
Correction de l'ex 27

Partie A : Étude de quelques exemples

- 1► Un joli dessin est ici bienvenu pour illustrer ces situations très concrètes. Le texte justifie le dessin.

- a► Notons $k > 0$ la valeur constante strictement positive de f . L'aire $\mathcal{A}_1$ est celle d'un rectangle de côtés a et k (car a et k sont positifs!), donc $\mathcal{A}_1 = ak$. L'aire $\mathcal{A}_2$ est celle d'un rectangle de côtés k et $1 - a$ (car $1 - a \geq 0$ puisque $a \leq 1$), donc $\mathcal{A}_2 = k(1 - a)$. On cherche a tel que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, c'est-à-dire $ka = k(1 - a)$, donc $a = 1 - a$ car $k \neq 0$, donc $a = \frac{1}{2}$.

- b► L'aire $\mathcal{A}_1$ est celle d'un triangle d'aire et de hauteur $a \geq 0$. Ainsi, $\mathcal{A}_1 = \frac{a^2}{2}$. On pourrait exprimer l'aire $\mathcal{A}_2$ comme celle d'un rectangle plus un triangle, mais on peut aussi être plus malin : $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ est l'aire d'un (grand) triangle de base et de hauteur 1, donc d'aire $\frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} - \mathcal{A}_1$. On veut $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} - \mathcal{A}_1$ donc $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{4}$. Or $\mathcal{A}_1 = \frac{a^2}{2}$, donc $\frac{a^2}{2} = \frac{1}{4}$, donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



- 2► a► Comme f est positive, la mesure de $\mathcal{A}_1$ en unités d'aire est $\int_a^1 f(x) \, dx$. De même, $\mathcal{A}_2$ est mesurée par $\int_0^a f(x) \, dx$.
- b► D'une part, $\int_0^a f(x) \, dx = [F(x)]_0^a = F(a) - F(0)$. D'autre part, $\int_a^1 f(x) \, dx = [F(x)]_a^1 = F(1) - F(a)$.

Ainsi, si a satisfait (E) , alors ces deux intégrales sont égales, donc $F(a) - F(0) = F(1) - F(a)$, donc $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$.

- c► Les précédents calculs sont vrais pour une primitive quelconque de f . Comme f est continue, elle admet des primitives : notons F l'une d'entre elles. Grâce à l'équivalence entre aires et intégrales, le raisonnement précédent peut être pris à l'envers, donc la réciproque est vraie.
- 3► a► La fonction exponentielle est une primitive d'elle-même, donc d'après ce qui précède, a satisfait (E) si, et seulement si $e^a = \frac{e^0 + e^1}{2} = \frac{1+e}{2}$. Ceci est équivalent à $a = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$, qui est donc l'unique valeur satisfaisant (E) .
- b► La fonction $F : x \mapsto \frac{-1}{x+2}$ est une primitive de f . D'après ce qui précède, il suffit de vérifier si $F\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$. Or $F\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{12}$, et $\frac{F(0) + F(1)}{2} = \frac{\frac{-1}{2} + \frac{-1}{3}}{2} = -\frac{5}{12}$. La valeur convient !

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

- 1► La fonction $F : x \mapsto 4x - x^3$ est une primitive de f . D'après la partie précédente, a satisfait (E) si, et seulement si $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$, c'est-à-dire $4a - a^3 = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$, autrement dit $4a = a^3 + \frac{3}{2}$, soit $a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}$. Ainsi, a satisfait (E) si, et seulement si a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.
- 2► a► $u_1 = g(u_0) = \frac{3}{8}$.

- b► La fonction g est dérivable car polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 \geq 0$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; 1]$.

- c► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{HR}_n : \ll 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \gg$.

INIT D'après la question a►, $\mathcal{HR}_0 : \ll 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1 \gg$ est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1} : \ll 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1 \gg$ est aussi vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{HR}_n$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, or g est croissante sur $[0; 1]$ donc $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$, c'est-à-dire $(0 \leq) \frac{3}{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{5}{8} (\leq 1)$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$, donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors $\mathcal{HR}_{n+1}$ l'est également : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

- d► D'après la récurrence,

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) est croissante,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$, donc (u_n) est majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge. Notons ℓ sa limite. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, on a $\ell \in [0; 1]$. Or g est continue sur $[0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, donc $g(\ell) = g(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Ainsi, $g(\ell) = \ell$, c'est-à-dire

$$\ell = \frac{\ell^3}{4} + \frac{3}{8}, \text{ ce qui est l'équation vérifiée par } a.$$

- e► À la calculatrice, on a $u_{10} \approx 0,389807841$, or $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$, donc $u_{10} < a < u_{10} + 10^{-9}$, donc $0,389807841 < a < 0,389807842$, donc $a \approx 0,38980784$.

Correction de l'ex 28

Partie I

1► a► La fonction F_1 est dérivable sur $[0; 1]$ (comme produit) et pour tout $x \in [0; 1]$, $F'_1(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x = xe^x = x^1 e^x = f_1(x)$. Donc F_1 est bien une primitive de f_1 .

b► $I_1 = \int_0^1 f_1(x) \, dx = [F_1(x)]_0^1 = F_1(1) - F_1(0) = 1.$

2► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x) \, dx = \int_0^1 x_{n+1} \times e^x \, dx = \left[x_{n+1} \times e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n \times e^x \, dx \\ &= 1^{n+1} e^1 - 0^{n+1} e^0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x \, dx = e - (n+1) I_n \end{aligned}$$

(l'avant dernière égalité utilise la linéarité de l'intégrale).

3► D'après la relation précédente, $I_2 = e - (1+1)I_1 = e - 2$.

4► L'appel `mystere(5)` renvoie la liste des valeurs de I_1 à I_5 , puisque chaque tour de boucle calcule la nouvelle valeur de I_n grâce à la relation précédente, et l'ajoute à la liste `L`.

Partie II

1► a► Puisque f_n est positive, I_n mesure l'aire sous sa courbe, C_n , entre les abscisses 0 et 1.

b► Il semble que l'aire sous C_n , donc I_n , tend vers 0.

2► Pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x \leq 1$ donc $e^0 \leq e^x \leq e^1$ par croissance de l'exponentielle, c'est-à-dire $(0 \leq) 1 \leq e^x \leq e$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \geq 0$ donc $0 \times x^n \leq x^n e^x \leq e x^n$, c'est-à-dire $0 \leq f_n(x) \leq e x^n$. Par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 f_n(x) \, dx \leq \int_0^1 e x^n \, dx$, et donc $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n \, dx$ par linéarité de l'intégrale.

3► Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Correction de l'ex 29

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \, dx$$

1► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [n; n+1]$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

Par croissance de l'intégrale, $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} \, dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \, dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} \, dx$, donc $\frac{1}{n+1}((n+1) - n) \leq I_n \leq \frac{1}{n}((n+1) - n)$ et donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

2► On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes appliqués à l'encadrement précédent, la suite (I_n) est donc convergente et sa limite est 0.

Remarque : On pouvait également calculer I_n directement : $I_n = [\ln(x)]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, par continuité du logarithme on retrouve bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \ln(1) = 0$.

3► En utilisant l'inégalité de droite de la question 1►, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $I_k \leq \frac{1}{k}$. De là,

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = u_n$$

D'après la relation de Chasles,

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

d'où $[\ln(x)]_1^{n+1} \leq u_n$ c'est-à-dire $\ln(n+1) - \ln(1) \leq u_n$ c'est-à-dire $u_n \geq \ln(n+1)$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc, par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'ex 30

1► On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\ell(a) = \int_a^{a+T} f(x) dx$$

a► Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (qui existe car f est continue). Par définition, $\ell(a) = F(a+T) - F(a)$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f . Par composition et somme, ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\ell'(a) = 1 \times F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a)$$

Comme la fonction f est périodique de période T , on a $f(a+T) = f(a)$ pour tout réel a . Ainsi, $\ell'(a) = f(a) - f(a) = 0$.

b► La dérivée de la fonction ℓ est nulle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que ℓ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

2► Puisque la fonction ℓ est constante, pour tout réel a , on a $\ell(a) = \ell(0)$. On remplace par l'expression sous forme d'intégrale :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^{0+T} f(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Correction de l'ex 31

1► On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^3 (5x-2) \times e^{-2x} dx &= \left[(5x-2) \times \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \right]_0^3 - \int_0^3 5 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx \\ &= \left(13 \times \left(-\frac{1}{2}e^{-6}\right)\right) - \left(-2 \times \left(-\frac{1}{2}e^0\right)\right) + \frac{5}{2} \int_0^3 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{13}{2}e^{-6} - 1 + \frac{5}{2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^3 = -\frac{13}{2}e^{-6} - 1 - \frac{5}{4} [e^{-2x}]_0^3 \\ &= -\frac{13}{2}e^{-6} - 1 - \frac{5}{4} (e^{-6} - e^0) = -\frac{13}{2}e^{-6} - 1 - \frac{5}{4}e^{-6} + \frac{5}{4} = -\frac{31}{4}e^{-6} + \frac{1}{4} = \frac{1-31e^{-6}}{4} \end{aligned}$$

2► La valeur moyenne μ de f sur $[0; 3]$ est donnée par :

$$\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \times \frac{1-31e^{-6}}{4} = \frac{1-31e^{-6}}{12}.$$

Correction de l'ex 32

1► $I_0 = \int_1^e x \ln(x)^0 dx = \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{e^2-1}{2}.$

2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int_1^e x \times \ln(x)^{n+1} dx = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times (n+1) \times \frac{1}{x} \ln(x)^n dx \\
 &= \left(\frac{e^2}{2} \ln(e)^{n+1} \right) - \left(\frac{1^2}{2} \ln(1)^{n+1} \right) - \frac{n+1}{2} \int_1^e x^2 \times \frac{1}{x} \ln(x)^n dx \\
 &= \left(\frac{e^2}{2} \times 1 \right) - (0) - \frac{n+1}{2} \int_1^e x \ln(x)^n dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n
 \end{aligned}$$

13 Variables aléatoires

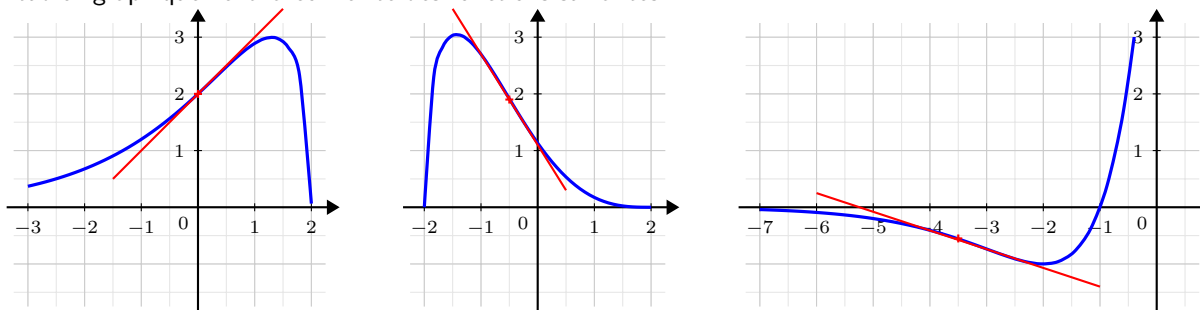
14 Convexité

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Étudiez graphiquement la convexité des fonctions suivantes :



Exercice 2

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous les variations de leurs dérivées. Étudier la convexité de f et g .

x	$-\infty$	6	$+\infty$
f'	$-\infty$	-2	$-\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'		-1	

Exercice 3

En étudiant le signe de leur dérivée seconde, étudier la convexité des fonctions définies par les expressions suivantes :

$\triangleright f(x) = x^3 + 6x^2$
 $\triangleright g(x) = \frac{3-x}{x+1}$
 $\triangleright h(x) = 5x + 3 + \frac{1}{x}$
 $\triangleright k(x) = 3x - 3x\sqrt{x}$

Exercice 4

Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

(On étudiera la convexité de la fonction exponentielle, et utiliser la tangente en 0.)

Exercice 5

Étudier la convexité des fonctions suivantes et déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion.

1 $\triangleright f : x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

3 $\triangleright f : x \mapsto (x^2 - 3x + 2)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

2 $\triangleright f : x \mapsto (5 - x^2)\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

4 $\triangleright f : x \mapsto (2 - x^2)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

Exercice 6

Pour chaque fonction ci-dessous, étudier sa convexité en étudiant le signe de sa dérivée seconde :

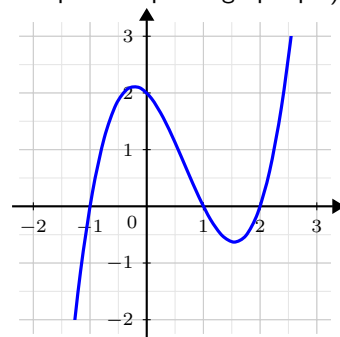
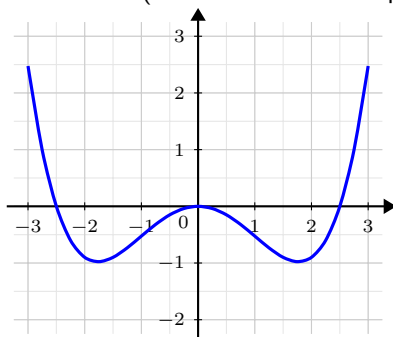
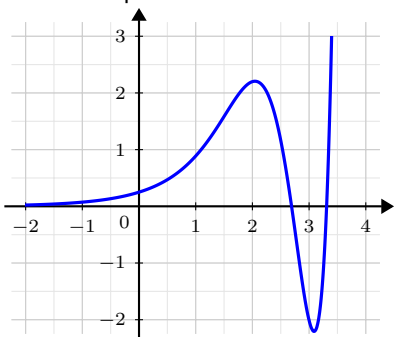
$$\triangleright f : x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$$

$$\triangleright g : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$$

$$\triangleright h : x \mapsto 4\sqrt{x} + 3x$$

Exercice 7

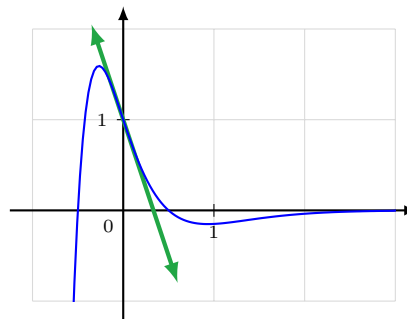
Donner les points d'inflexion des courbes suivantes (on arrondira selon la précision permise par le graphique).



Exercice 8

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-contre. Vrai ou faux ?

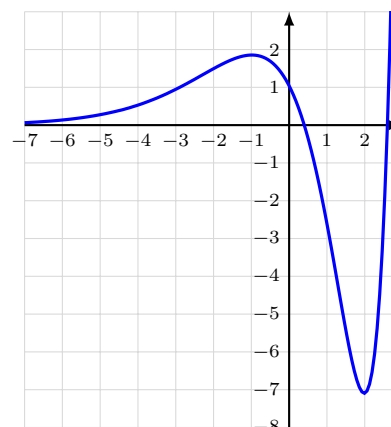
- 1► $f'(0) \approx 1$
- 2► La courbe semble avoir un point d'inflexion en 0
- 3► f semble convexe sur $[0; 1]$
- 4► Si $f = g'$ alors g est concave sur $[0; 0, 5]$



Exercice 9

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction f au mieux.
- 2► Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.



Exercice 10

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 5]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f' .

x	-6	-2	1	2	5
f'	4		2	0	-2

- 1► Dresser le tableau de variations de f sur $[-6; 5]$.
- 2► Déterminer la convexité de la fonction f .
- 3► Tracer, dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que ses tangentes horizontales.

Exercice 11

- 1► Justifier la concavité de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
- 2► Déterminer une équation de la tangente à C_f en 1.
- 3► En déduire que $\forall x > 0, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- 4► En déduire que $\sqrt{2} \leq 1,5$.

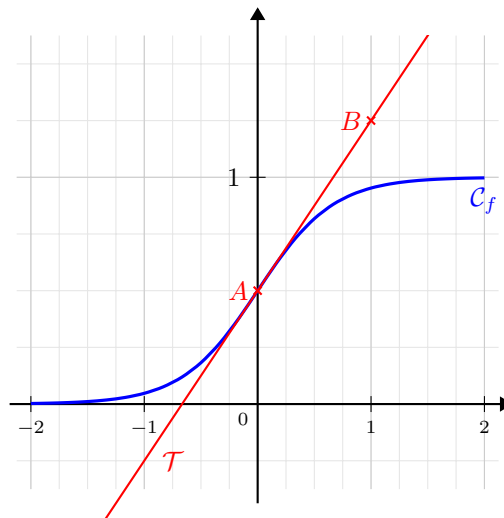
Objectif Bac

Exercice 12 (Centres étrangers 2023 – sujet 2)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On nomme A le point de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, et B le point de coordonnées $\left(1; \frac{5}{4}\right)$. On a tracé ci-contre la courbe C_f , et la tangente $\mathcal{T}$ à C_f au point d'abscisse 0.

**Partie A : Lectures graphiques**

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

- 1► Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
- 2► Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : Étude de la fonction

- 1► On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f' .
- 2► Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 3► Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Partie C : Tangente et convexité

- 1► Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en 0.

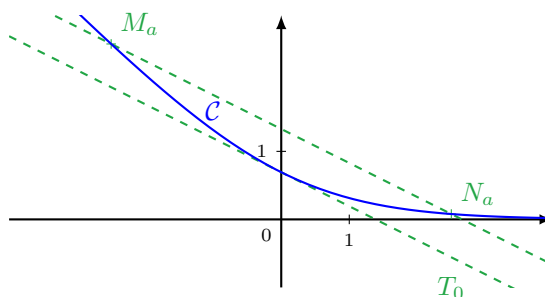
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée seconde est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\text{par } f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}.$$

- 2► Étudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$.
- 3► a► Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
 b► Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
 c► En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 13 (BAC 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé suivant.

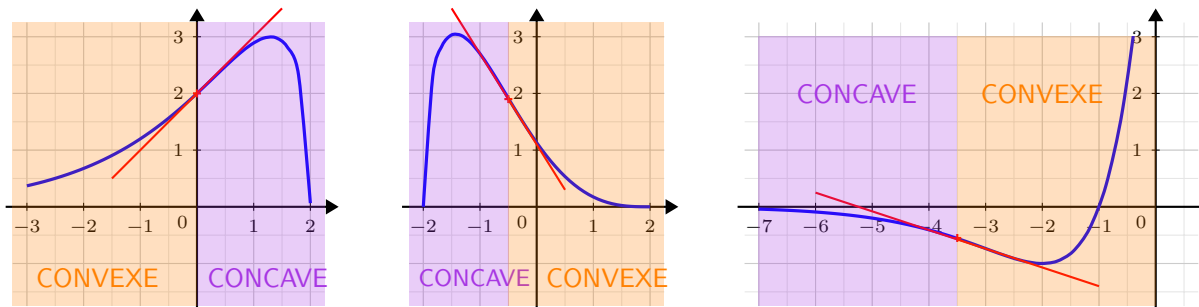


- 1► a► Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 b► Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
 c► On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.
 d► Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2► On note $\mathcal{T}_0$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
 a► Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$.
 b► Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
 c► En déduire que, pour tout nombre réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.
- 3► Pour tout nombre réel a non nul, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a . On a donc $M_a(-a; f(-a))$ et $N_a(a; f(a))$.
 a► Montrer que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) - f(-x) = -x$.
 b► En déduire que les droites $\mathcal{T}_0$ et (M_aN_a) sont parallèles.

Corrections

Remarque préliminaire : lorsqu'on étudie la convexité d'une fonction, il est toujours bon d'avoir son graphe sous les yeux en guise de garde-fou ou d'aide à l'intuition. Attention, comme toujours, un tracé à la calculatrice n'est pas une justification !

Correction de l'ex 1



Remarques :

- 1► La courbe traverse sa tangente au point de coordonnées $(0; 2)$ qui est donc un point d'inflexion. Avant, la courbe est au-dessus de ses tangentes, donc la fonction est convexe, et après le point d'inflexion, elle change de convexité, et devient concave.
- 2► La courbe traverse sa tangente au point de coordonnées $(-0, 5; 2)$ qui est donc un point d'inflexion. Avant, la courbe est en-dessous de ses tangentes, donc la fonction est concave, et après le point d'inflexion, elle change de convexité, et devient convexe.
- 3► La courbe traverse sa tangente au point de coordonnées $(-3, 5; -0, 5)$ qui est donc un point d'inflexion. Avant, la courbe est en-dessous de ses tangentes, donc la fonction est concave, et après le point d'inflexion, elle change de convexité, et devient convexe.

Correction de l'ex 2

Une fonction dérivable est convexe là où sa dérivée est croissante, et concave là où sa dérivée est décroissante.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
f'	$-\infty \nearrow -2 \searrow -\infty$		
f	CONVEXE	CONCAVE	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$\searrow -1 \nearrow$		
g	CONCAVE	CONVEXE	

Correction de l'ex 3

- La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale), et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 12x$ puis $f''(x) = 6x + 12$, par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x + 12 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Ainsi, f est convexe sur $[-2; +\infty[$ et concave sur $]-\infty; -2]$.
- La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (comme quotient de fonctions affines), et pour tout $x \neq -1$,

$$g'(x) = \frac{-1 \times (x+1) - (3-x) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2}$$

puis :

$$g''(x) = -\frac{4 \times 2(x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{8(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{8}{(x+1)^3}.$$

Ainsi, pour tout $x > -1$, $x+1 > 0$, donc $(x+1)^3 > 0$, et $g''(x) > 0$; de même, pour tout $x < -1$, $x+1 < 0$, donc $(x+1)^3 < 0$, et $g''(x) < 0$. Finalement, g est convexe sur $] -1; +\infty[$ et concave sur $] -\infty; -1[$.

- La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme somme de telles fonctions), et pour tout $x \neq 0$,

$$h'(x) = 5 - \frac{1}{x^2} \quad \text{puis} \quad h''(x) = \frac{2x}{(x^2)^2} = \frac{2}{x^3}$$

qui est du signe de x^3 , lequel est du signe de x . Ainsi, h est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.

- La fonction k est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ (comme somme et produit de telles fonctions), et pour tout $x > 0$,

$$k'(x) = 3 - 3 \left(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 3 - 3\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 3 - 4,5\sqrt{x}$$

(note : on a simplifié le dernier terme par $\sqrt{x}$ en utilisant le fait que $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$), puis

$$k''(x) = -4,5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0.$$

Ainsi, k est concave sur $]0; +\infty[$ (remarque : on peut inclure la borne 0 en laquelle k est définie mais pas dérivable, la frontière du domaine de convexité a peu d'importance).

Correction de l'ex 4

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto e^x$, laquelle est croissante. Ainsi, la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de sa tangente en 0. Or l'équation de la tangente en 0 à la courbe de la fonction exponentielle est :

$$T_0 : y = e^0(x - 0) + e^0 = x + 1$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Correction de l'ex 5

- 1► La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (comme quotient de fonctions affines), et pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

puis :

$$f''(x) = -\frac{-3 \times 2(x-1)}{((x-1)^2)^2} = \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}$$

laquelle est du signe de $(x-1)^3$, lui-même du signe de $x-1$. Ainsi, pour tout $x < 1$, $f''(x) < 0$ et pour tout $x > 1$, $f''(x) > 0$. Ainsi, f est concave sur $] -\infty; 1[$ et convexe sur $]1; +\infty[$. Comme f'' ne s'annule jamais, la courbe de f n'admet aucun point d'inflexion.

- 2► La fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ (comme somme et produit de telles fonctions), et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -2x \times \sqrt{x} + (5 - x^2) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

puis :

$$f''(x) = -2x\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x\sqrt{x} = -2,5x\sqrt{x} + \frac{2,5}{\sqrt{x}}$$

(note : on a simplifié le dernier terme par $\sqrt{x}$ en utilisant le fait que $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$), puis :

$$f''(x) = -2,5(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}) - 2,5 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -2,5\sqrt{x} - 1,25\sqrt{x} - 2,5 \frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$$

donc f est concave sur son domaine de définition, et n'admet aucun point d'inflexion.

- 3► La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de telles fonctions), et pour tout réel x ,

$$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 2)e^x = (x^2 - x - 1)e^x$$

puis :

$$f''(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $x^2 + x - 2$, trinôme du second degré dont il convient alors d'étudier le signe. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = 3^2$, donc ses racines sont $\frac{-1-3}{2} = -2$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$. Enfin, son coefficient dominant est $1 > 0$, donc $x^2 + x - 2 < 0$ pour $x \in]-2; 1[$, nul pour $x = -2$ et $x = 1$, et strictement positif ailleurs. On peut résumer la situation et conclure sur la convexité de f à l'aide d'un tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	○	+
f	CONVEXE	CONCAVE	CONVEXE	

Par ailleurs, la courbe de f admet deux points d'inflexion, aux abscisses -2 et 1 .

- 4► La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de telles fonctions), et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2xe^x + (2 - x^2)e^x = (-x^2 - 2x + 2)e^x$$

puis :

$$f''(x) = (-2x - 2)e^x + (-x^2 - 2x + 2)e^x = (-x^2 - 4x)e^x = -x(x + 4)e^x.$$

Notons que $x \mapsto x + 4$ est une fonction affine de coefficient directeur positif, elle est donc négative puis positive. On peut résumer la situation et conclure sur la convexité de f à l'aide d'un tableau de signe :

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$-x$	+	+	○	-
$x + 4$	-	○	+	+
e^x	+	+	+	+
$f''(x)$	-	○	○	-
f	CONCAVE	CONVEXE	CONCAVE	

Par ailleurs, la courbe de f admet deux points d'inflexion, aux abscisses -2 et 1 .

Correction de l'ex 6

- La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (comme quotient de telles fonctions), et pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x) - e^x \times (-1)}{(1-x)^2} = e^x \frac{2-x}{(1-x)^2} = -e^x \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

(ndlr : cette réécriture est moins susceptible de mener à des erreurs de signe), puis :

$$f''(x) = -e^x \frac{x-2}{(x-1)^2} + (-e^x) \frac{1 \times (x-1)^2 - (x-2) \times 2(x-1)}{((x-1)^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^x \left(\frac{(x-2)}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)[(x-1) - 2(x-2)]}{(x-1)^4} \right) \\
&= -e^x \left(\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^3} + \frac{(x-1) - 2(x-2)}{(x-1)^3} \right) \\
&= \frac{-e^x}{(x-1)^3} [(x-2)(x-1) + (x-1) - 2(x-2)] \\
&= \frac{-e^x}{(x-1)^3} [x^2 - 4x + 5].
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-e^x < 0$ et $(x-1)^3$ est du signe de $x-1$, qui est l'expression d'une fonction affine croissante, donc négative puis positive avant puis après $x = 1$. Il s'agit maintenant d'étudier le signe du trinôme du second degré $x^2 - 4x + 5$. Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$, ainsi ce trinôme est de signe constant, plus précisément positif car son coefficient dominant est $1 > 0$. On peut résumer la situation et conclure sur la convexité de f à l'aide d'un tableau de signe :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-e^x$	—	—	—
$(x-1)^3$	—	○	+
$x^2 - 4x + 5$	+	+	+
$f''(x)$	+		—
f	CONVEXE		CONCAVE

- La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de telles fonctions), et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2x \times e^x + (x^2 + 1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x$$

puis :

$$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + 1)e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $x^2 + 4x + 3$, trinôme du second degré dont il convient alors d'étudier le signe. Son discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 = 2^2$, donc ses racines sont $\frac{-4-2}{2} = -3$ et $\frac{-4+2}{2} = -1$. Enfin, son coefficient dominant est $1 > 0$, donc $x^2 + 4x + 3 < 0$ pour $x \in]-3; -1[$, nul pour $x = -3$ et $x = -1$, et strictement positif ailleurs. On peut résumer la situation et conclure sur la convexité de f à l'aide d'un tableau de signe :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	○	+
f	CONVEXE	CONCAVE	CONVEXE	

- La fonction h est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ (comme somme et produit de telles fonctions), et pour tout $x > 0$,

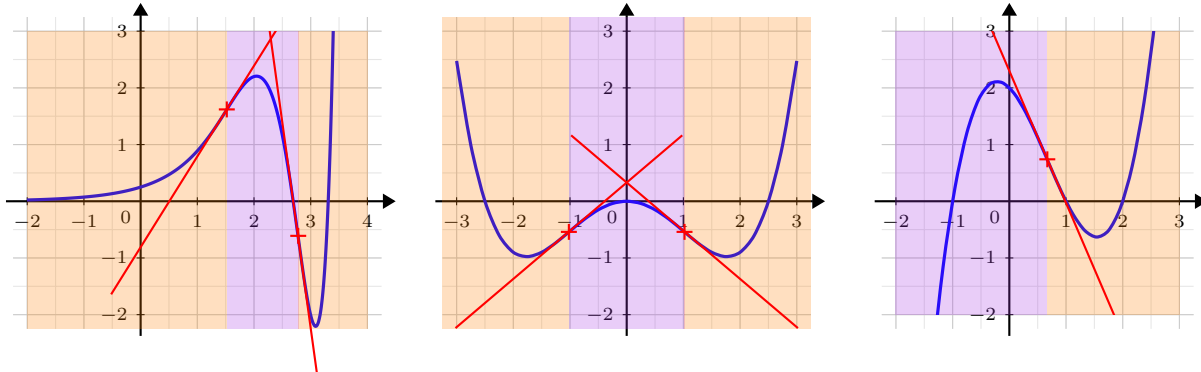
$$h'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} + 3 = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3$$

puis :

$$h''(x) = -2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -2 \frac{1}{2\sqrt{x}x} = -\frac{1}{x\sqrt{x}} < 0$$

donc h est concave sur $[0; +\infty[$ (remarque : on peut inclure la borne 0 en laquelle k est définie mais pas dérivable, la frontière du domaine de convexité a peu d'importance).

Correction de l'ex 7



- 1► La fonction est convexe, puis concave, puis convexe. Elle admet deux points d'inflexion, de coordonnées (avec la précision permise par le graphique) $(1, 5; 1, 6)$ et $(2, 8; -0, 6)$.
- 2► La fonction est convexe, puis concave, puis convexe. Elle admet deux points d'inflexion, de coordonnées (avec la précision permise par le graphique) $(-1; -0, 5)$ et $(1; -0, 5)$.
- 3► La fonction est concave, puis convexe. Elle admet un point d'inflexion, de coordonnées (avec la précision permise par le graphique) $(0, 7; 0, 7)$.

Correction de l'ex 8

- 1► Faux : la tangente en 0 est la courbe d'une fonction affine décroissante, donc de coefficient directeur, *a fortiori* de nombre dérivé négatif.
- 2► Vrai : le courbe traverse sa tangente en 0.
- 3► Vrai : la courbe semble au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle.
- 4► Vrai : une fonction dérivable (ici, g) est concave si, et seulement si sa dérivée (ici, f) est décroissante, ce qui est le cas sur $[0; 0, 5]$.

Correction de l'ex 9

- 1► On lit graphiquement le signe de f' (avec la précision permise par le graphique) :

x	$-\infty$	$0, 4$	$2, 6$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$
f					

- 2► On dresse le tableau de variations de f' (avec la précision permise par le graphique) :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'				
f	CONVEXE	CONCAVE	CONVEXE	

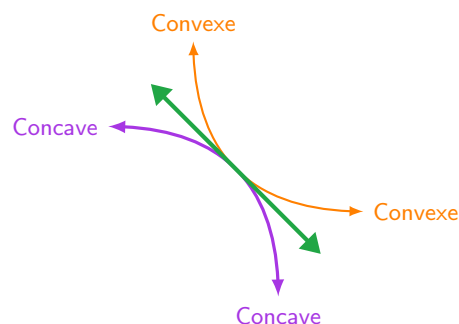
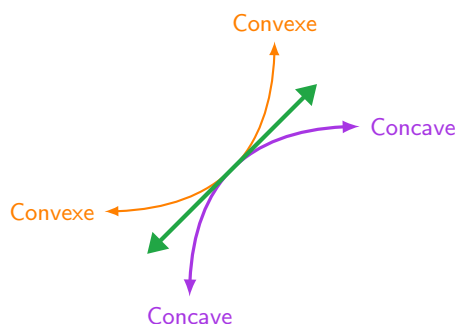
(On rappelle qu'une fonction dérivable est convexe lorsque sa dérivée est croissante, et concave lorsque sa dérivée est décroissante).

Correction de l'ex 10

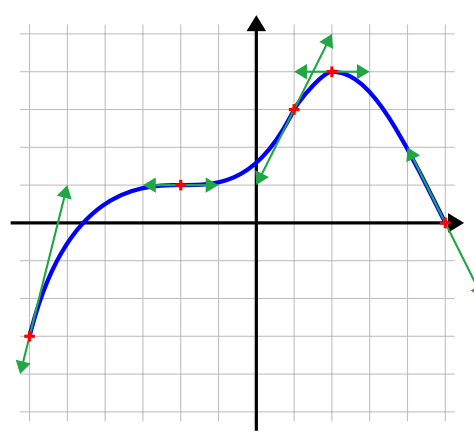
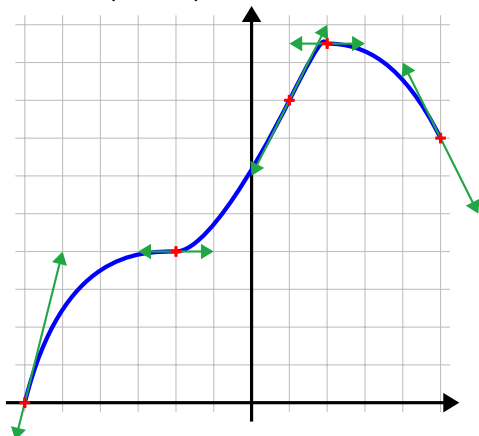
- 1► D'après le tableau de variations de f' , celle-ci est positive de -6 à 2 , puis négative. Ainsi, f est croissante sur $[-6; 2]$, et décroissante sur $[2; 5]$.
- 2► Une fonction dérivable est convexe lorsque sa dérivée est croissante, et concave lorsque sa dérivée est décroissante.
- 3► Dans ce genre de question, il faut placer les informations dans le bon ordre :
 - i► Nous n'avons aucune information sur d'éventuelles images, on va donc en décider arbitrairement, tout en respectant les autres contraintes : on commence par tracer des points de passage (ci-dessous en rouge) qui respectent les variations de f , à toutes les abscisses remarquables du tableau de signes/variations.

x	-6	-2	1	2	5
f'	4		2	0	-2
$f'(x)$		+		0	-
f	CONCAVE CONVEXE CONCAVE 				

- ii► À ces points de passage, on trace la tangente, matérialisée par une double flèche (ci-dessous en vert, et dont la pente est égale au nombre dérivé tel qu'indiqué par le tableau.
- iii► On relie les points de passage de manière lisse (pas de pointes, que des courbes fluides), en faisant attention à épouser les tangentes, et en respectant la convexité (notamment en respectant le fait que la courbe traverse la tangent aux points d'inflexion). Conseil : Après avoir placé les points et les tangentes, ne pas tracer directement la courbe. Commencer par tracer le petit morceau de courbe tangent à... la tangente, partant « dans le bon sens », selon si f est convexe ou concave avant et après le point de passage (voir schéma ci-dessous).



Voici deux réponses possibles :



Correction de l'ex 11

- 1► La fonction f est dérivable deux fois sur I (fonction usuelle), et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{puis} \quad f''(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$$

donc f est concave sur I .

- 2► $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$, donc $T_1 : y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- 3► Par concavité, f est en-dessous de ses tangentes, en particulier en-dessous de la tangente en 1, donc pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- 4► On applique l'inégalité précédente pour $x = 2$: $\sqrt{2} \leq \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} = 1,5$.

Correction de l'ex 12

Partie A : Lectures graphiques

- 1► L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée de A , c'est-à-dire 0,5, et A et B sont séparés d'un déplacement d'une unité à droite et 0,75 unité en haut, donc le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $\frac{0,75}{1} = 0,75$. Finalement,

$$\mathcal{T} : y = 0,75x + 0,5.$$

- 2► La courbe de f est au-dessus de ses tangentes sur $] -\infty; 0]$, elle y est donc convexe; la courbe de f est en-dessous de ses tangentes sur $[0; +\infty[$, elle y est donc concave.

Partie B : Étude de la fonction

- 1► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2} = \frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$.
- 2► Pour tout x réel, $f'(x)$ est le quotient d'un nombre positif, d'une exponentielle et d'un carré, ainsi $f'(x)$ est positif, et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- 3► Étant donné que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$, par changement de variable : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$. Par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
- Étant donné que $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$, par changement de variable : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$. Par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Partie C : Tangente et convexité

- 1► La tangente à la courbe de f en 0 admet pour équation :

$$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{3e^0}{(1+e^0)^2}x + \frac{1}{1+e^0} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 0,75x + 0,5.$$

(On retrouve le résultat de la partie A !)

- 2► Pour tout x réel, $e^{-3x} > 0$, donc $1 + e^{-3x} > 0$, donc $(1 + e^{-3x})^3 > 0$. Finalement, $f''(x)$ est du signe de $e^{-3x} - 1$. or $e^{-3x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-3x} > 1 = e^0 \Leftrightarrow -3x > 0$ (par stricte croissance du logarithme ou de l'exponentielle, justification au choix !) $\Leftrightarrow x < 0$. Conclusion : $f''(x)$ est strictement positive lorsque $x < 0$, strictement négative lorsque $x > 0$, et nulle en $x = 0$.
- 3► a► Une fonction deux fois dérivable convexe (resp. concave) là où sa dérivée seconde est positive (resp. négative). Ainsi, d'après la question précédente, f est convexe sur $] -\infty; 0]$ et concave sur $[0; +\infty[$.
- b► Le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ car la dérivée seconde de f y change de signe.
- c► Une fonction est convexe (resp. concave) si, et seulement si elle est au-dessus (resp. en-dessous) de ses tangentes. Ainsi, la courbe de f est au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $] -\infty; 0]$, la traverse en 0 et est au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $[0; +\infty[$.

Correction de l'ex 13

- 1► a► On effectue les changements de variable $y = -x$ puis $z = 1 + e^y$. Remarquons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, et que $\lim_{y \rightarrow +\infty} z = +\infty$ par somme. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \ln(z) = +\infty$.
- b► On effectue les changements de variable $y = -x$ puis $z = 1 + e^y$. Remarquons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, et que $\lim_{y \rightarrow -\infty} z = 1 + 0 = 1$ par somme. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{z \rightarrow 1} \ln(z) = \ln(1) = 0$ par continuité de $\ln$ en 1. Graphiquement, cela signifie que la courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.
- c► Pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{-e^x \times e^x}{(1 + e^x) \times e^x} = \frac{-1 \times 1}{e^x + 1} = \frac{-1}{1 + e^x}$.
- d► Pour tout x réel, $e^x > 0$, a fortiori $1 + e^x > 0$, et donc $f'(x) < 0$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$	0

- 2► a► La tangente à la courbe de f en 0 a pour équation :

$$\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -\frac{1}{1 + e^0}x + \ln(1 + e^0) = -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

- b► La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et quotient non nul de telles fonctions), et pour tout x réel,

$$f''(x) = -\frac{-1 \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

qui est positif comme quotient de deux quantités positives (une exponentielle et un carré). Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

- c► Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes ; en particulier, la courbe de f est au-dessus de la tangente en 0, autrement dit pour tout x réel, $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

- 3► a► Soit x réel. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(1 + e^{-x}) \times e^{-x}}{(1 + e^x) \times e^{-x}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(1 + e^{-x})e^{-x}}{e^{-x} + 1}\right) = \ln(e^{-x}) = -x. \end{aligned}$$

Remarque pour voir l'astuce : au brouillon, on part de ce qu'on veut montrer : $\ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = -x$. On fusionne les logarithmes : $\ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) = -x$. On passe à l'exponentielle : $\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x} = e^{-x}$.

On se débarrasse de l'écriture fractionnaire : $1 + e^{-x} = (1 + e^x)e^{-x}$. La clé est donc de multiplier $1 + e^x$ par e^{-x} ! Mais bien évidemment, tout multiplication appliquée au dénominateur doit être appliquée au numérateur... et voilà !

- b► La droite $(M_a N_a)$ a pour coefficient directeur $\frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$ (d'après la question précédente), qui est le même que $\mathcal{T}_0$ (voir question 2a►) : elles sont donc parallèles.

15 Trigonométrie

Exercices

Je connais mon cours

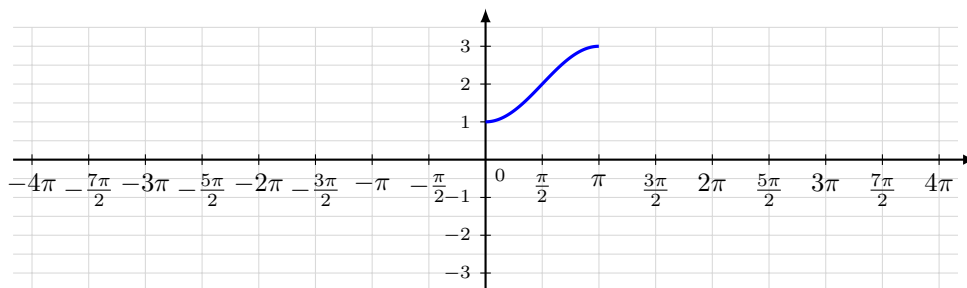
Exercice 1

Placer les réels suivants sur le cercle trigonométrique (on fera attention à la précision du tracer) :

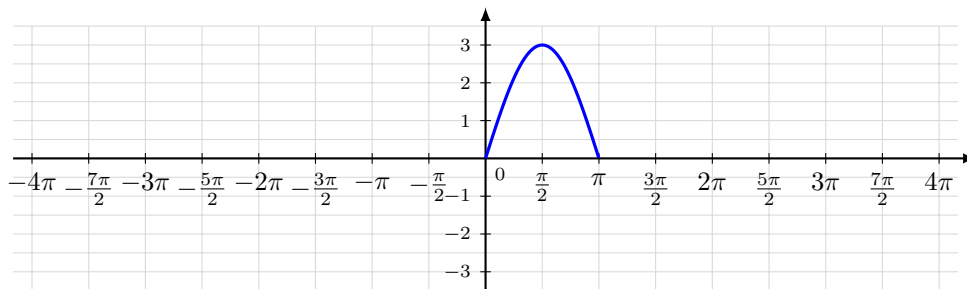
- $\triangleright \frac{\pi}{2}$ $\triangleright \frac{\pi}{3}$ $\triangleright \frac{\pi}{4}$ $\triangleright \frac{\pi}{6}$ $\triangleright \frac{3\pi}{4}$ $\triangleright -\frac{2\pi}{3}$ $\triangleright -\frac{5\pi}{6}$ $\triangleright \frac{9\pi}{4}$

Exercice 2

- 1► On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - \cos(x)$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal, sur l'intervalle $[0; \pi]$.



- a► Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Compléter $\mathcal{C}_f$ en justifiant.
 b► Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Compléter $\mathcal{C}_f$ en justifiant.
- 2► Mêmes questions avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 \sin(x)$.



Exercice 3

Déterminer la parité des fonctions définies par les expressions suivantes :

- $\triangleright f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{2 + \cos(x)}$ $\triangleright g(x) = \sin(x) \cos(x)$ $\triangleright h(x) = 7 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 4

Dériver les fonctions définies par les expressions suivantes :

- | | | |
|--|--|-----------------------------------|
| ▶ $a(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos(x)}$ | ▶ $c(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$ | ▶ $e(x) = 5 \sin(3x + 12)$ |
| ▶ $b(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ | ▶ $d(x) = \frac{x + \cos(x)}{3 + \sin(x)}$ | ▶ $f(x) = 8 \cos(\sqrt{1 + x^2})$ |
| ▶ $g(x) = \cos(2x - 1) \sin(5x + 3)$ | ▶ $i(x) = \cos(x) \sin(x)$ | ▶ $k(x) = \sin^3(x) + \sin(x)$ |
| ▶ $h(x) = \sqrt{4 + \sin(2x)}$ | ▶ $j(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + 2}$ | ▶ $\ell(x) = \sqrt{3 + \cos(x)}$ |

Exercice 5 (BAC 2024)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par $f(x) = x + \sin(x)$. On admet que f est deux fois dérivable.

Une seule des quatre propositions est exacte :

- ▶ La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- ▶ La fonction f est concave sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- ▶ La fonction f admet sur l'intervalle $[0; \pi]$ un unique point d'inflexion.
- ▶ La fonction f admet sur l'intervalle $[0; \pi]$ exactement deux points d'inflexion.

Exercice 6

Montrer que l'équation $(E) : \sin(x) = x - 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; \pi]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

Je comprends mon cours

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \cos(2x) - \frac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1▶ Étudier la parité de f .
- 2▶ Démontrer que f est π -périodique.
- 3▶ Étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 4▶ Représenter graphiquement f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis étendre cette représentation par parité et périodicité.

Exercice 8

- 1▶ Déterminer le sinus et le cosinus de :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{▶ } -\frac{2\pi}{3} & \text{▶ } \frac{3\pi}{4} & \text{▶ } -\frac{5\pi}{6} & \text{▶ } \frac{3\pi}{2} & \text{▶ } -\frac{4\pi}{2} & \text{▶ } 2k\pi & \text{▶ } \frac{15\pi}{6} & \text{▶ } \frac{17\pi}{3} \end{array}$$

2► Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a► $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b► $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

c► $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

d► $\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -1$

3► Résoudre les inéquations suivantes :

a► Dans $[0; \pi[$: $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b► Dans $[0; 2\pi]$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{1}{2}$

c► Dans $[-\pi; \pi]$: $1 + 2\cos(x) > 0$

d► Dans $[-\pi; \pi[$: $\sqrt{2} - 2\cos(x) > 0$

Exercice 9

Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ à l'aide du cercle trigonométrique.

1► $2\sin(x) + 1 = 0$

3► $4\cos^2(x) - 1 = 0$

5► $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2► $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$

4► $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

6► $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$

Exercice 10

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ et représenter les solutions sur le cercle unité.

1► $2\sin(x) + \sqrt{2} < 0$

2► $2\cos(x) - \sqrt{3} \leq 0$

3► $2\sin(x) + 1 \geq 0$

4► $\sqrt{2}\cos(x) > 1$

Exercice 11

Montrer que l'équation $(E) : \cos(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

Objectif Bac

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto \frac{2\cos(x) + 1}{2 + \cos(x)}$.

- 1► Montrer que f est 2π -périodique.
- 2► Montrer que f est paire.
- 3► En déduire que l'on peut restreindre l'étude de f à un intervalle I que l'on déterminera.
- 4► Dresser le tableau de variations de f sur I .
- 5► Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur I dont on donnera une valeur approchée au millièmes.

Exercice 13

Soit $f : x \mapsto 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1► Montrer que f est π -périodique.
- 2► Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 3$.
- 3► Déterminer la dérivée de f .
- 4► Déterminer les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$.
- 5► En déduire que f admet un minimum sur $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$ et déterminer sa valeur.
- 6► Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{8}$.

Exercice 14 (BAC 2024)

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) \, dx \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) \, dx$$

- 1► Calculer I_0 .
- 2► a► Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
b► Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
c► Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
- 3► a► Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :
$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} \, dx$$

b► Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :
$$\int_0^\pi e^{-nx} \, dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

c► Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .
- 4► a► En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

- b► En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

- 5► On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient strictement inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```

1 from math import *
2 def seuil():
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6     n = n+1
7     I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n

```

Exercice 15 (BAC 2024)

Une seule des quatre propositions est exacte.

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\sin(x) = 0,1$ admet :

- zéro solution
- deux solutions
- une solution
- quatre solutions

Exercice 16 (BAC 2024)

On considère l'équation différentielle :

$$(E_0) : y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

- 1► Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
- 2► Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) . On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

- 3► La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2\cos(x) + \sin(x).$$

On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .

- 4► On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalente à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
- 5► En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 6► Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
- 7► Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)] \, dx$$

Vers le supérieur

Exercice 17

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- 1► Montrer que f est 0-périodique.
- 2► Montrer que si f est à la fois T_1 -périodique et T_2 -périodique, alors elle est $(T_1 + T_2)$ -périodique.
- 3► Montrer que si f est T_1 -périodique, alors elle est $-T_1$ -périodique.
- 4► En déduire que si f est T -périodique, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle est aussi nT -périodique.

Exercice 18

On note id la fonction qui tout $x \in \mathbb{R}$ associe x lui-même. On l'appelle la *fonction identité*. On admet que les fonctions $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$ vérifient les relations (attention aux quantificateurs!) :

- $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- $\forall x \in [0; \pi], \arcsin(\sin(x)) = x$.
- $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x$
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arccos(\cos(x)) = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x$.

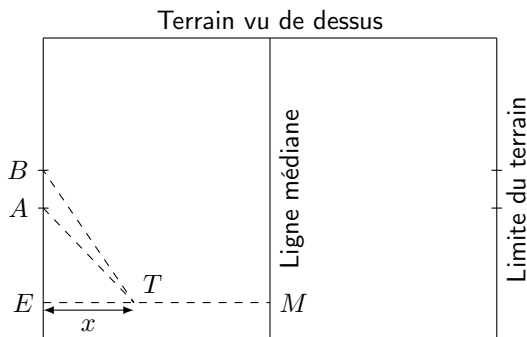
- 1► Déterminer la dérivée de id .
- 2► Dériver la relation $\sin \circ \arcsin = \text{id}$ en utilisant, pour le membre de gauche, la formule de dérivation d'une fonction composée. (*Les questions de définition et de dérivabilité sont admises.*)
- 3► Justifier que pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \cos(y) = \sqrt{1 - \sin(y)^2}$.
- 4► Appliquer l'égalité précédente à $y = \arcsin(x)$, et en déduire une expression simplifiée de $\arcsin'(x)$ pour tout $x \in]-1; 1[$.
- 5► Répéter l'exercice pour déterminer une expression simplifiée de la dérivée de $\arccos$.
- 6► En utilisant la formule $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer une expression simplifiée de la dérivée de $\arctan$.
- 7► Démontrer que $\forall x \in [-1; 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19 (BAC 2016)

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-dessous) situé à l'extérieur du segment $[AB]$. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E . La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible. Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle. Dans toute la suite, on note

x la longueur ET , qu'on cherche à déterminer. Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50\text{m}$, $EA = 25\text{m}$ et $AB = 5,6\text{m}$. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.



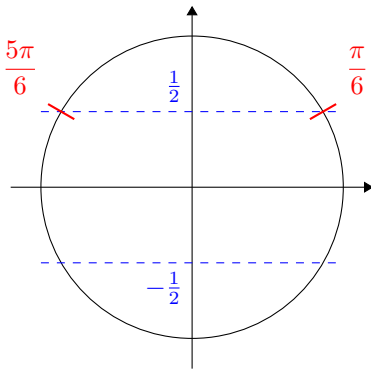
- 1► En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x . La fonction tangente est définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
- 2► Montrer que la fonction $\tan$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.
- 3► L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure. On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}$. Montrer que $\tan(\gamma) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$.
- 4► L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par

$$f(x) = x + \frac{765}{x}$$

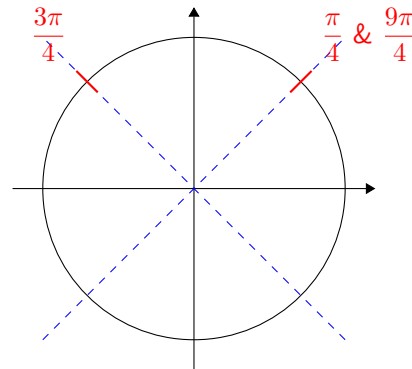
- 5► Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près puis au degré près.

Corrections

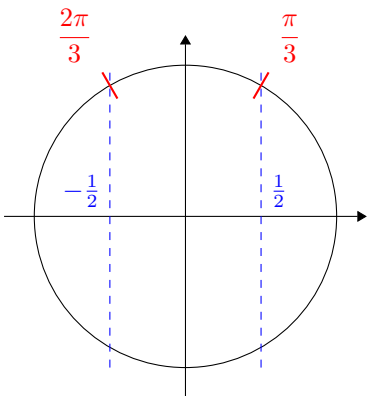
Correction de l'ex 1



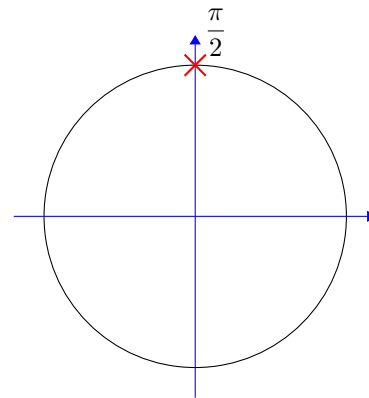
Famille des irréductibles $\frac{\pi}{6}$:
leur sinus est égal à $\pm \frac{1}{2}$



Famille des irréductibles $\frac{\pi}{4}$:
ils se situent sur les « diagonales » (les bissectrices des axes)



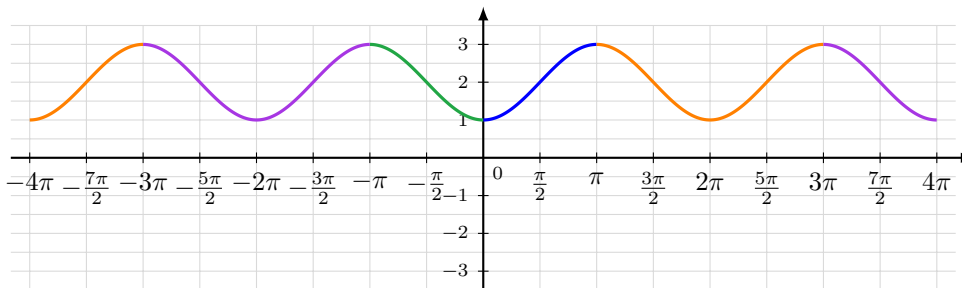
Famille des irréductibles $\frac{\pi}{3}$:
leur cosinus est égal à $\pm \frac{1}{2}$



Famille des $\frac{\pi}{2}$:
ils se situent sur les quatre points cardinaux

Correction de l'ex 2

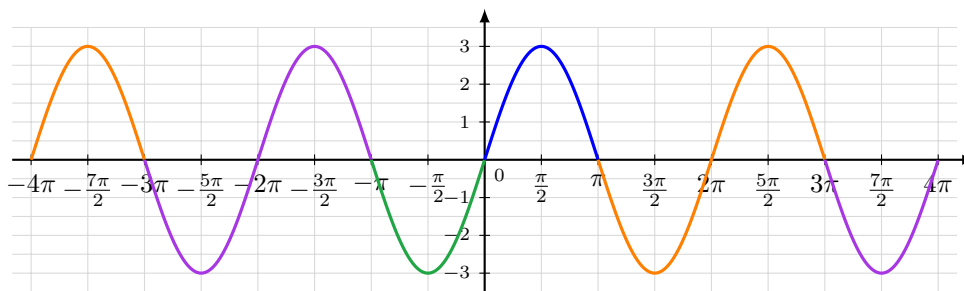
1►



- a► Pour tout x réel, comme $\cos$ est paire, $f(-x) = 2 - \cos(-x) = 2 - \cos(x) = f(x)$, donc f est paire. Par conséquent, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (le morceau **bleu** donne le morceau **vert** par symétrie).
- b► Pour tout x réel, comme $\cos$ est 2π -périodique, $f(x + 2\pi) = 2 - \cos(x + 2\pi) = 2 - \cos(x) = f(x)$, donc f est 2π -périodique. Par conséquent, son graphe se répète tous les intervalles de longueur 2π ,

en particulier le morceau entre $-\pi$ et π (en vert et bleu) est répété par translation horizontale (les morceaux oranges et violets).

2►



- a► Pour tout x réel, comme $\sin$ est impaire, $g(-x) = 3 \sin(-x) = 3 \times (-\sin(x)) = -(3 \sin(x)) = -g(x)$, donc g est impaire. Par conséquent, son graphe est symétrique par rapport à l'origine (le morceau bleu donne le morceau vert par symétrie).
- b► Pour tout x réel, comme $\sin$ est 2π -périodique, $g(x+2\pi) = 3 \sin(x+2\pi) = 3 \sin(x) = g(x)$, donc g est 2π -périodique. Par conséquent, son graphe se répète tous les intervalles de longueur 2π , en particulier le morceau entre $-\pi$ et π (en vert et bleu) est répété par translation horizontale (les morceaux oranges et violets).

Correction de l'ex 3

Rappelons que la parité de $\cos$ et l'imparité de $\sin$ donnent les relations $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout x réel. Ainsi, pour tout x réel :

- $f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{1 - \cos(x)}{2 + \cos(x)} = f(x)$ donc f est paire.
- $g(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin(x) \cos(x) = -g(x)$ donc g est impaire.
- $h(-x) = 7 \sin\left(\frac{-x}{2}\right) = 7 \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 7 \times \left[-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -7 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -h(x)$ donc h est impaire.
- (Remarque : on a utilisé la relation d'imparité de $\sin$ avec $\frac{x}{2}$ au lieu de x .)

Correction de l'ex 4

Remarque : l'utilisation de crochets à la place de parenthèses facilite la lecture en évitant l'abondance de parenthèses imbriquées dont l'appariage deviendrait difficile à suivre.

L'exercice ne demande pas de simplifier les expressions, mais à toutes fins utiles, la relation $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ peut se révéler utile. Rappelons que l'étape suivant le calcul de la dérivée est souvent l'étude de son signe, aussi n'avoir que des cosinus ou que des sinus se révèle souvent utile (factorisation, polynômes en (co)sinus, ou tout simplement une forme plus digeste à lire, ...).

- a► On dérive a comme un quotient de deux fonctions dérivables :

$$\begin{aligned} a'(x) &= \frac{[\cos(x) - \sin(x)] \times [1 + \cos(x)] - [\sin(x) + \cos(x)] \times [-\sin(x)]}{[1 + \cos(x)]^2} \\ &= \frac{\cos(x) + \cos(x)^2 - \sin(x) - \sin(x) \cos(x) + \sin(x)^2 + \sin(x) \cos(x)}{[1 + \cos(x)]^2} \\ &= \frac{1 + \cos(x) - \sin(x)}{[1 + \cos(x)]^2} \end{aligned}$$

b► On dérive b comme l'inverse d'une fonction dérivable : $b'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}$.

c► On dérive c comme le quotient de deux fonctions dérivables :

$$c'(x) = \frac{\cos(x) \times x^2 - \sin(x) \times 2x}{[x^2]^2} = \frac{x \cos(x) - 2 \sin(x)}{x^3}$$

d► On dérive d comme le quotient de deux fonctions dérivables :

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{[1 - \sin(x)] \times [3 + \sin(x)] - [x + \cos(x)] \times \cos(x)}{[3 + \sin(x)]^2} \\ &= \frac{3 + \sin(x) - 3 \sin(x) - \sin(x)^2 - x \cos(x) - \cos(x)^2}{[3 + \sin(x)]^2} \\ &= \frac{3 - 2 \sin(x) - 1 - x \cos(x)}{[3 + \sin(x)]^2} \\ &= \frac{2 - 2 \sin(x) - x \cos(x)}{[3 + \sin(x)]^2} \end{aligned}$$

e► On dérive e comme la composée de deux fonctions dérivables : $e'(x) = 5 \times 3 \cos(3x+12) = 15 \cos(3x+12)$.

f► La fonction f est une composée de trois fonctions dérivables. Allons-y doucement : de l'intérieur vers l'extérieur. L'expression $\sqrt{1+x^2}$ se dérive en $\sqrt{u}$, avec $u(x) = 1+x^2$. La formule du cours menant à la dérivée est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, ici : $\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ensuite, on dérive la composée du cosinus et de la fonction précédente, avec la formule du cours : la dérivée de $\cos(u)$ est donnée par $-u' \times \sin(u)$, où cette fois-ci, $u(x) = \sqrt{1+x^2}$. Ainsi :

$$f'(x) = -8 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \sin(\sqrt{1+x^2})$$

g► On dérive g comme un produit de fonctions dérivables. Attention, à la composée par des fonctions affines dans les deux facteurs :

$$g'(x) = 2 \sin(2x-1) \sin(5x+3) + \cos(2x-1) \times 5 \cos(5x+3)$$

h► On dérive h comme la composée de trois fonctions dérivables :

$$h'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{2\sqrt{4+\sin(2x)}} = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{4+\sin(2x)}}$$

i► On dérive i comme le produit de deux fonctions dérivables :

$$i'(x) = -\sin(x) \sin(x) + \cos(x) \cos(x) = -\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 2 \cos(x)^2 - 1$$

j► On dérive j comme le quotient de deux fonctions dérivables :

$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{\cos(x) \times [\sin(x) + 2] - \sin(x) \times \cos(x)}{[\sin(x) + 2]^2} = \frac{\cos(x) \sin(x) + 2 \cos(x) - \sin(x) \cos(x)}{[\sin(x) + 2]^2} \\ &= \frac{2 \cos(x)}{[\sin(x) + 2]^2} \end{aligned}$$

k► On rappelle la formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$:

$$k'(x) = 3 \cos(x) \sin(x)^2 + \cos(x) = 3 \cos(x)[1 - \cos(x)^2] + \cos(x) = -3 \cos(x)^3 + 4 \cos(x)$$

l► On dérive ℓ comme la composée de fonctions dérivables : $\ell'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{3+\cos(x)}}$.

Correction de l'ex 5

Pour tout x réel, $f'(x) = 1 + \cos(x)$, puis $f''(x) = -\sin(x)$. On rappelle que $\sin$ est positive entre 0 et π et négative entre π et 2π . Ainsi, $f''(x) < 0$, donc f est concave.

Correction de l'ex 6

La fonction $f : x \mapsto \sin(x) - x$ est continue et dérivable (comme somme de fonctions usuelles), de dérivée $f' : x \mapsto \cos(x) - 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leq 1$, donc $f'(x) \leq 0$; plus précisément, pour tout $x \in]0; \pi[$, $\cos(x) < 1$ donc $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0; \pi]$. Enfin, $f(0) = 0 \geq -1 \geq f(\pi) = -\pi$, donc d'après le théorème de la bijection continue/corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution $\alpha \in [0; \pi]$. Autrement dit l'équation $\sin(x) - x = -1$ admet α comme unique solution, par conséquent $(E) : \sin(x) = x - 1$ également.

Par balayage à la calculatrice, on obtient l'encadrement $1,934 \leq \alpha \leq 1,935$.

Correction de l'ex 7

- 1► Comme $\cos$ est paire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \cos(2 \times (-x)) - \frac{1}{2} = \cos(-2x) - \frac{1}{2} = \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$$

donc f est paire.

- 2► Comme $\cos$ est 2π -périodique, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

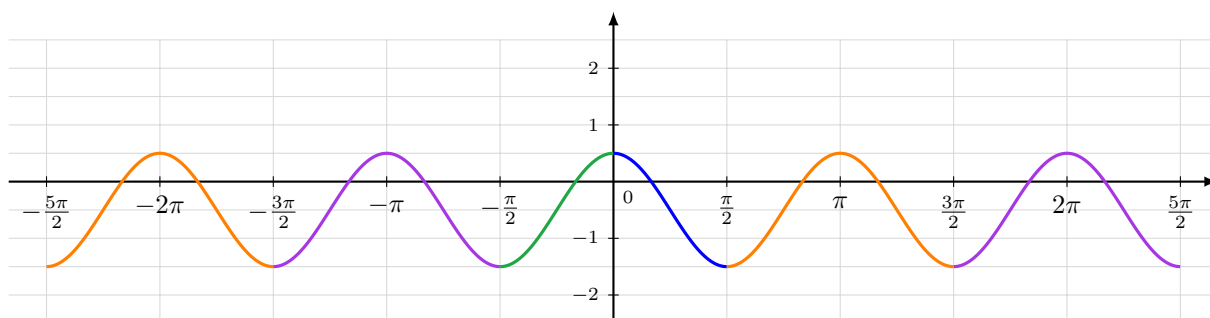
$$f(x + \pi) = \cos(2[x + \pi]) - \frac{1}{2} = \cos(2x + 2\pi) - \frac{1}{2} = \cos(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$$

donc f est π -périodique.

- 3► la fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (comme somme et composée de telles fonctions), et pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -2\sin(2x)$.

Or $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $2x \in [0; \pi]$ donc $\sin(2x) \geq 0$ donc $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 4► On commence par représenter le morceau **bleu**, puis on l'étend en **vert** par parité qui induit une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, puis on l'étend par périodicité en répétant le motif élémentaire de longueur π (entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$) en **orange** et **violet**.



Correction de l'ex 8

1► Voir la correction de l'exercice 2 pour apprendre à retrouver les valeurs avec un cercle trigonométrique.

$$\blacktriangleright \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\blacktriangleright \cos(2k\pi) = 1$$

$$\blacktriangleright \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\blacktriangleright \cos\left(\frac{15\pi}{6}\right) = 0$$

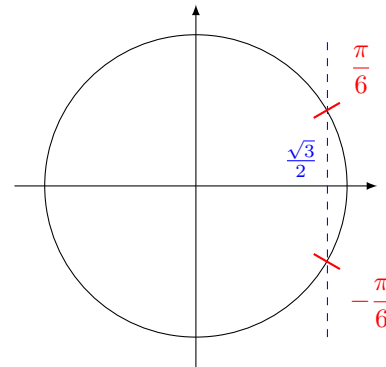
$$\blacktriangleright \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\blacktriangleright \cos\left(-\frac{4\pi}{2}\right) = 1$$

$$\blacktriangleright \cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

2► a► On commence par remarquer que deux angles ont pour cosinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$, à savoir $\pm\frac{\pi}{6}$. Ainsi, par 2π -périodicité de $\cos$:

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : &\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : &\begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$



Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \pm\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(ce que, chez les grands, l'on note aussi $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$).

b► Suivant la question précédente, l'on imagine qu'il y aura deux cas, découlant de la parité du cosinus :

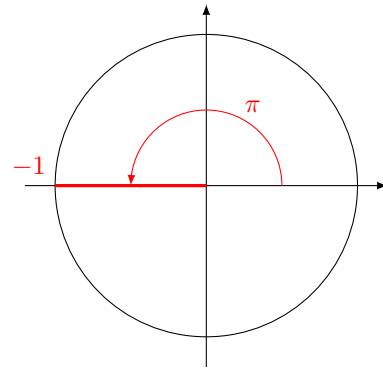
$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : &\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 3x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{3} = -\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : &\begin{cases} -2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : &\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} - k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \frac{5\pi}{12} - k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c► Un petit dessin nous permet cette fois-ci de nous rendre compte que la parité du cosinus ne crée pas deux possibilités, car la valeur proposée se trouve exactement sur l'axe de symétrie.

$$\begin{aligned}
 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) &= -1 \\
 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x - \frac{\pi}{2} &= \pi + 2k\pi \\
 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\
 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x &= \frac{3\pi}{4} + k\pi
 \end{aligned}$$



Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) &= -1 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x - \frac{\pi}{2} &= \pi + 2k\pi \\
 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x &= \frac{3\pi}{4} + k\pi
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d► La situation est la même que la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) &= -1 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \pi - \frac{x}{2} &= \pi + 2k\pi \\
 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x &= -4k\pi & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x &= 4k\pi
 \end{aligned}$$

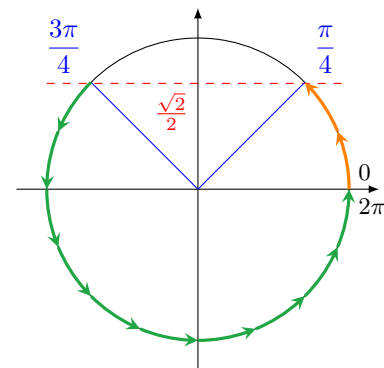
(Remarque : on a, en quelque sorte, effectué un changement de variable, car k est entier si, et seulement si $-k$ l'est. Cela simplifie l'écriture.)

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{4k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, ce que l'on notera $4\pi\mathbb{Z}$ quand on sera grand.

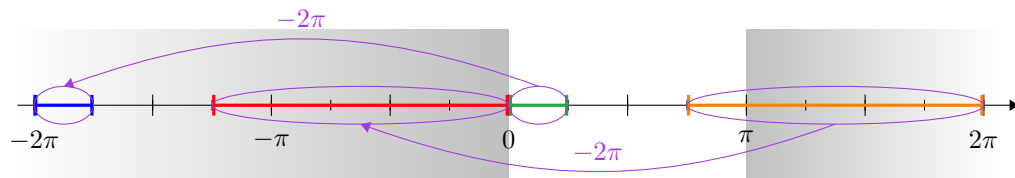
3► a► On procède d'abord graphiquement :

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après le schéma ci-contre,

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$$



Pour obtenir toutes les solutions réelles, il faut et il suffit de traduire ces intervalles de 2π . Il s'agit maintenant de trouver le bon jeu de translations qui permet d'obtenir la partie contenue dans $[0; \pi[$. Il est bon de se représenter les intervalles solutions et leurs traduits sur la droite réelle avec une subdivision adaptée au problème :



Cette représentation permet ainsi de voir que, de toutes les solutions réelles, les seules qui tombent dans l'intervalle $[0; \pi[$ sont celles de l'ensemble $S = \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right[$.

- b► On procède d'abord graphiquement : on choisit les mesures d'angles adaptées à la situation (bien que l'on puisse toujours se ramener au bon intervalle par translations *a posteriori*).

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{1}{2}$$

Par lecture graphique sur la figure ci-contre :

$$x + \frac{\pi}{6} \in \left] \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right[$$

donc, en soustrayant $\frac{\pi}{6}$ aux bornes de chaque intervalle,

$$x \in \left] \frac{6\pi}{6}; \frac{10\pi}{6} \right[= \left] \pi; \frac{5\pi}{3} \right[$$

Cette écriture est déjà contenue dans $[0; 2\pi]$, donc les translations éventuelles nous mèneraient au-delà de cet intervalle : ainsi, l'ensemble des solutions est directement celui trouvé précédemment.

- c► Avant toute chose, on remarque que l'inéquation $1 + 2\cos(x) > 0$ est équivalente à $\cos(x) > -\frac{1}{2}$. On procède d'abord graphiquement. Notez que cette fois-ci, on ne va plus lire les angles de 0 à 2π (autrement dit en partant du pôle est du cercle trigonométrique), mais de $-\pi$ à π (autrement dit en partant du pôle ouest).

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de :

$$\cos(x) > -\frac{1}{2}$$

Par lecture graphique sur la figure ci-contre :

$$x \in \left] -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right[$$

Cette écriture est déjà contenue dans $[-\pi; \pi]$, donc les translations éventuelles nous mèneraient au-delà de cet intervalle : ainsi, l'ensemble des solutions est directement celui-ci.

- d► Avant tout, l'inéquation $\sqrt{2} - 2\cos(x) > 0$ est équivalente à $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. On procède d'abord graphiquement, en choisissant des mesures d'angle **INadaptées** à la situation (comme ça vous allez voir comment rattraper le coup *a posteriori*!).

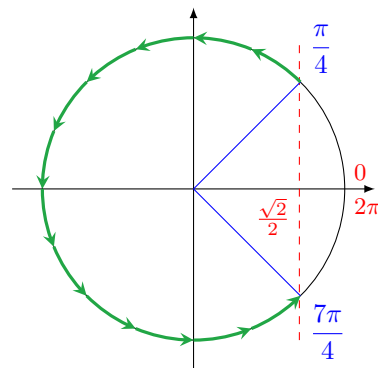
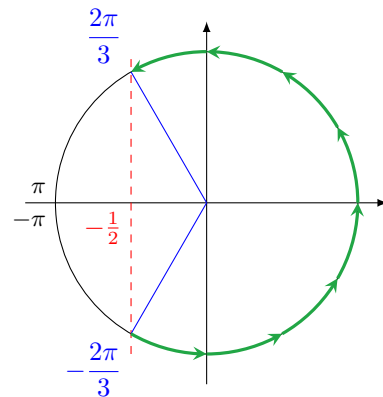
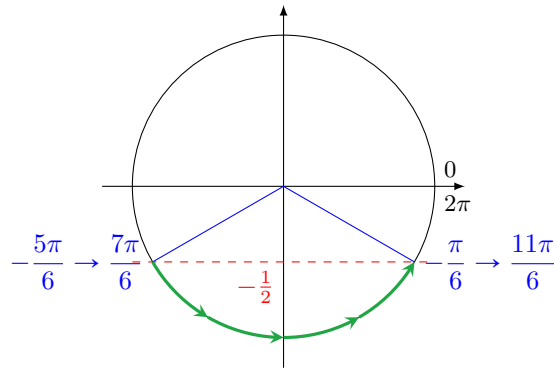
Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de :

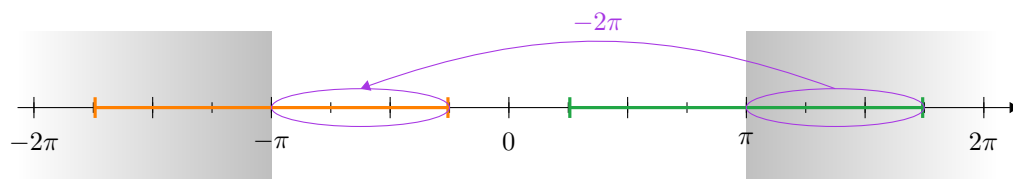
$$\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par lecture graphique sur la figure ci-contre :

$$x \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right[$$

Or cette écriture n'est pas satisfaisante car non contenue dans $[-\pi; \pi]$: il y a un morceau à droite qui dépasse. On le fait revenir à gauche du domaine en le décalant de -2π :





Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left[-\pi; -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{4}; \pi \right[$$

Correction de l'ex 9

Remarque : en toute rigueur, pour les trois premières questions, il faudrait utiliser les formules du cours avec les « $+2k\pi$ », puis utilisant la contrainte selon laquelle $x \in [-\pi; \pi]$, on trouverait les seules valeurs de k satisfaisantes. Ici, on se contentera de citer les angles remarquables ; **un petit dessin du cercle trigonométrique associé constituera, en supplément de la rédaction, une justification satisfaisante.**

Les deux questions suivantes ne relevant pas directement d'angles remarquables, la rédaction complète est nécessaire.

▲ Tracer les courbes associées aux deux membres de l'équation est une excellente idée, pour savoir à l'avance le nombre de solutions que l'on est censé trouver. Attention cependant, la calculatrice n'est pas une justification !

1► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2}$. Cela correspond aux angles remarquables $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$, qui sont dans l'intervalle voulu.

2► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cela correspond aux angles remarquables $\pm\frac{5\pi}{6}$, qui sont dans l'intervalle voulu.

3► Pour tout x réel, $4\cos(x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Le premier cas correspond aux

angles remarquables $\pm\frac{\pi}{3}$, le second aux angles remarquables $\pm\frac{2\pi}{3}$. Ces quatre nombres sont dans l'intervalle voulu, ce sont donc les solutions recherchées.

4► Pour tout x réel, $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{cases}$

Après simplification, le premier cas donne $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Or :

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

$$\text{donc } -\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$$

$$\text{donc } -1 \leq \frac{1}{4} + 2k \leq 1 \quad (\text{car } \pi > 0)$$

$$\text{puis } -1,25 \leq 2k \leq 0,75$$

$$\text{et finalement } -0,625 \leq k \leq 0,375 \quad (\text{car } 2 > 0)$$

Or k est entier, et le seul entier satisfaisant ces inégalités est $k = 0$. Cela donne $x = \frac{\pi}{4}$, qui, après vérification, satisfait l'équation.

Passons au second cas : après simplification, on a $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$. Or :

$$\begin{aligned} -\pi &\leq x \leq \pi \\ \text{donc } -\pi &\leq -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \leq \pi \\ \text{donc } -1 &\leq -\frac{1}{12} + k\frac{2}{3} \leq 1 && (\text{car } \pi > 0) \\ \text{puis } -\frac{11}{8} &\leq k \leq \frac{13}{8} && (\text{car } \frac{2}{3} > 0) \end{aligned}$$

Or k est entier, et les seuls entiers satisfaisant ces inégalités sont $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$. Cela donne $x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{9\pi}{12}$, $x = -\frac{\pi}{12}$ et $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$, qui, après vérification, satisfont l'équation.

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{9\pi}{3}; -\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}\right\}$.

5► Pour tout x réel, $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{cases}$

Après simplification, le premier cas donne $x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi$. Or $-\pi \leq x \leq \pi$, donc $-\pi \leq -\frac{5\pi}{24} + k\pi \leq \pi$, donc $-1 \leq -\frac{5}{24} + k \leq 1$ (car $\pi > 0$), puis $-\frac{19}{24} \leq k \leq \frac{29}{24}$. Or k est entier, et les seuls entiers satisfaisant ces inégalités sont $k = 0$ et $k = 1$. Cela donne $x = -\frac{5\pi}{24}$ et $x = -\frac{5\pi}{24} + \pi = \frac{19\pi}{24}$, qui, après vérification, satisfont l'équation.

Passons au second cas : après simplification, on a $x = \frac{11\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}$. Or $-\pi \leq x \leq \pi$, donc $-\pi \leq \frac{11\pi}{48} + k\frac{\pi}{2} \leq \pi$, donc $-1 \leq \frac{11}{48} + \frac{1}{2}k \leq 1$ (car $\pi > 0$), puis $(-2,46 \approx) -\frac{118}{48} \leq k \leq \frac{74}{48} (\approx 1,54)$. Or k est entier, et les seuls entiers satisfaisant ces inégalités sont $\{-2; -1; 0; 1\}$. Cela donne $\left\{-\frac{37\pi}{48}; -\frac{13\pi}{48}; \frac{11\pi}{48}; \frac{35\pi}{48}\right\}$, qui, après vérification, satisfont l'équation.

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{-\frac{5\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}; -\frac{37\pi}{48}; -\frac{13\pi}{48}; \frac{11\pi}{48}; \frac{35\pi}{48}\right\}$.

6► Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $u = \cos(x)$. Alors $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2u^2 + u - 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 = 3^2$, donc $u = \frac{-1-3}{4} = -1$ ou $u = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$. Cela correspond aux angles remarquables $x = \pm\pi$ et $x = \pm\frac{\pi}{3}$, qui sont dans l'intervalle voulu. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{-\pi; \pm\frac{\pi}{3}\right\}$.

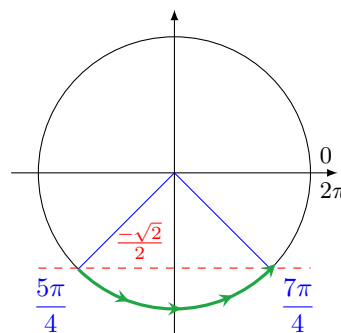
Correction de l'ex 10

- 1► Pour tout x réel, $2\sin(x) + \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow \sin(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'inéquation. D'après le schéma ci-contre,

$$x \in \left] \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right[$$

et cet intervalle est déjà dans la plage recherchée.

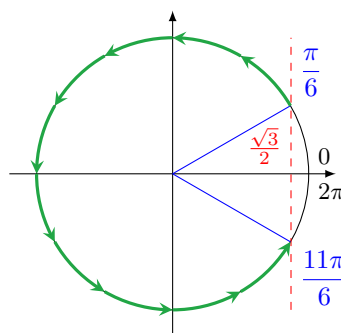


- 2► Pour tout x réel, $2\cos(x) - \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'inéquation. D'après le schéma ci-contre,

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]$$

et cet intervalle est déjà dans la plage recherchée.

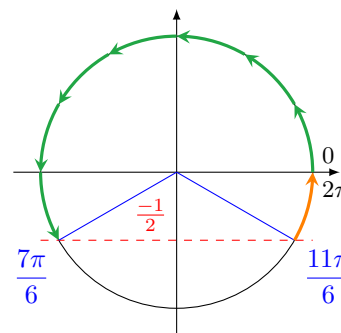


- 3► Pour tout x réel, $2\sin(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin(x) \geq -\frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'inéquation. D'après le schéma ci-contre,

$$x \in \left[0; \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$$

et cet intervalle est déjà dans la plage recherchée.

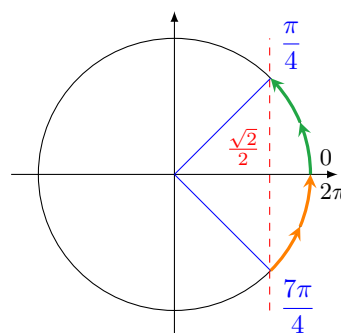


- 4► Pour tout x réel, $\sqrt{2}\cos(x) > 1 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'inéquation. D'après le schéma ci-contre,

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{4}; 2\pi \right]$$

et cet intervalle est déjà dans la plage recherchée.



Correction de l'ex 11

Soit $f : x \mapsto \cos(x) - x$ définie sur $[0; 1]$. Elle y est dérivable comme somme de telles fonctions, et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\sin(x) - 1$ qui est strictement négative sur $]0; 1[$ car pour tout réel x dudit intervalle, $|\sin(x)| < 1$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; 1]$. Par ailleurs, f est continue sur $[0; 1]$ car dérivable, et $f(1) \leq 0 \leq \underbrace{f(0)}_{=1}$ (note : $f(1) = \cos(1) - 1 \leq 0$ car $1 \in [0; \pi/2]$ et $\cos$ est comprise entre 0 et 1 sur cet

intervalle), donc d'après le théorème de la bijection continue, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Cette équation est équivalente à (E).

Par balayage à la calculatrice, on trouve que la solution est entre 0,739 et 0,740.

Fun fact : cette constante est appelée « Nombre de Dottie ». Elle correspond également à la limite d'une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Correction de l'ex 12

1► Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 2\pi) = \frac{2\cos(x + 2\pi) + 1}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{2\cos(x) + 1}{2 + \cos(x)} = f(x)$$

par 2π -périodicité de $\cos$.

2► Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{2\cos(-x) + 1}{2 + \cos(-x)} = \frac{2\cos(x) + 1}{2 + \cos(x)} = f(x)$$

par parité de $\cos$.

3► Par 2π -périodicité, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$. Par parité, il suffit d'étudier f sur la partie positive d'un intervalle symétrique autour de 0 : en conclusion, il suffit d'étudier f sur $I = [0; \pi]$.

4► Soit $x \in I$. La fonction f est dérivable en x (comme somme et quotient de telles fonctions, sachant que $\cos(x) \geq -1$ donc $2 + \cos(x) \geq 1 > 0$ et donc le dénominateur ne s'annule pas), et :

$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)[2 + \cos(x)] - [2\cos(x) + 1] \times [-\sin(x)]}{[2 + \cos(x)]^2} = \frac{-3\sin(x)}{[2 + \cos(x)]^2}$$

Le carré d'un réel étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\sin(x)$. Or $\sin(x)$ est strictement positif quel que soit $x \in]0; \pi[$, donc $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur I . Par ailleurs, $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$.

5► La fonction f est continue sur I comme somme et quotient (de dénominateur non nul) de telles fonction, et d'après la question précédente, f est strictement monotone sur I et $f(\pi) \leq 0 \leq f(0)$. D'après le théorème de la bijection continue (ou le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on note α . Par balayage à la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2,094$.

Correction de l'ex 13

Soit $f : x \mapsto 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1► Par 2π -périodicité de $\cos$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + \pi) = 3\cos\left(2(x + \pi) + \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi\right) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

2► Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\cos(y)| \leq 1$, donc $|3\cos(y)| \leq 3$. Pour $y = 2x + \frac{\pi}{4}$ où x est un réel quelconque, on obtient $|f(x)| \leq 3$.

3► La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3 \times 2 \times \left[-\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \right] = -6 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

4► Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$. Alors (les justifications des affirmations suivantes sont laissées en exercice au lecteur) :

$$2x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right] \quad \text{puis} \quad 2x + \frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi]$$

Or, pour tout $y \in [0; 2\pi]$, $\sin(y) \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0; \pi]$, et :

$$0 \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \pi \iff -\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$$

Ainsi, f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$.

5► Note : la meilleure présentation pour cet exercice serait de tracer un tableau de variations, mais moi, j'ai la flemme de le taper là, maintenant...

D'après la question précédente, f admet en $\frac{3\pi}{8}$ un minimum valant :

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 3 \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 3 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

6► Le nombre dérivé de f en $\frac{\pi}{8}$ est :

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -6 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = -6 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -6$$

L'image de $\frac{\pi}{8}$ par f est :

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{8}$ a pour équation :

$$\begin{aligned} T_{\pi/8} : y &= f'\left(\frac{\pi}{8}\right) \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= -6 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= -6x + \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Correction de l'ex 14

1► On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi} e^{-0 \times x} \sin(x) \, dx = \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

2► a► Soit n un entier naturel. Pour tout $x \in [0; \pi]$, $e^{-nx} \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$, donc l'intégrande est positive : par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.

b► Soit n un entier naturel. Pour tout $x \in [0; \pi]$, $-(n+1) \leq -n$ donc $-(n+1)x \leq -nx$ (car x est positif) donc $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$ (car la fonction exponentielle est croissante), donc $e^{-(n+1)x} \sin(x) \leq e^{-nx} \sin(x)$

(car $\sin(x) \geq 0$), donc $\int_0^\pi e^{-(n+1)x} \sin(x) \, dx \leq \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) \, dx$ (par croissance de l'intégrale), donc $I_{n+1} \leq I_n$, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

c► D'après la question a►, (I_n) est minorée par 0. D'après la question b►, (I_n) est décroissante. D'après le théorème de la limite monotone, (I_n) converge.

3► a► Soit n un entier naturel. Pour tout $x \in [0; \pi]$, $\sin(x) \leq 1$, donc $e^{-nx} \sin(x) \leq e^{-nx} \times 1$ (car e^{-nx} est positif), donc $\int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) \, dx \leq \int_0^\pi e^{-nx} \, dx$ par croissance de l'intégrale, donc $I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} \, dx$.

b► Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} \, dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^\pi = \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \frac{e^{-n \times 0}}{-n} = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

c► Pour commencer, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n\pi = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\pi} = 0$. Par somme et quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n\pi}}{n} =$

0. Or d'après ce qui précède, pour tout $n \geq 1$ entier naturel, $0 \leq I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} \, dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4► a► Soit $n \geq 1$ un entier naturel. D'une part :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \underbrace{e^{-nx}}_u \times \underbrace{\sin(x)}_{v'} \, dx = \left[\underbrace{\frac{e^{-nx}}{-n}}_u \times \underbrace{(-\cos(x))}_v \right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{-ne^{-nx}}_{u'} \times \underbrace{(-\cos(x))}_v \, dx \\ &= -e^{-n\pi} \cos(\pi) + e^{-n \times 0} \cos(0) + n \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) \, dx \\ &= 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \underbrace{e^{-nx}}_{u'} \times \underbrace{\sin(x)}_v \, dx = \left[\underbrace{\frac{e^{-nx}}{-n}}_u \times \underbrace{\sin(x)}_v \right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{\frac{e^{-nx}}{-n}}_u \times \underbrace{\cos(x)}_{v'} \, dx \\ &= \frac{e^{-n\pi}}{-n} \sin(\pi) - \frac{e^{-n \times 0}}{-n} \sin(0) + \frac{1}{n} \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) \, dx \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{n} J_n = \frac{1}{n} J_n \end{aligned}$$

b► Soit $n \geq 1$ entier naturel. D'après la deuxième relation de question précédente, $J_n = nI_n$. En injectant ceci dans la première relation, on obtient :

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - n^2 I_n \quad \text{ce qui devient} \quad I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5► D'après la question précédente,

```
1 from math import *
2 def seuil():
3     n = 0
4     I = 2
5     while I >= 0.1:
6         n = n+1
7         I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8     return n
```

Correction de l'ex 15

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\sin(x) = 0,1$ admet deux solutions. Pour le voir, tracez un cercle trigonométrique, et une barre à 0,1. Faites le tour du cercle : vous ne franchirez la barre que deux fois, exactement.

Correction de l'ex 16

- 1► Soit $y = k \in \mathbb{R}$ une solution constante de (E_0) . Alors $y' = 0$, or $y' = y$ donc $y = 0$, donc $k = 0$. Réciproquement, la fonction nulle satisfait (E_0) : c'est donc bien l'unique fonction constante qui en est solution.
- 2► L'équation (E_0) est de la forme $y' = ay$ avec $a = 1$, l'ensemble de ses solutions est $\{Ce^{1x} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 3► Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x) = (2\cos(x) + \sin(x)) - \cos(x) - 3\sin(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

Donc h est solution de (E) .

- 4► Supposons f solution de (E) . Alors $f'(x) - h'(x) = [f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)] - [h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)]$ (car f et h sont solutions de (E)) $= f(x) - h(x)$ donc $(f - h)' = (f - h)$ donc $f - h$ est solution de (E_0) . Réciproquement, supposons $f - h$ solution de (E_0) . Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$, donc, comme h est solution de (E) :

$$f'(x) = f(x) + h'(x) - h(x) = f(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

donc f est solution de (E) .

- 5► Soit f une solution de (E) . D'après la question précédente, $f - h$ est solution de (E_0) . D'après la question 2►, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) - h(x) = Ce^x$. Donc :

$$f(x) = h(x) + Ce^x = 2\cos(x) + \sin(x) + Ce^x$$

On vérifie réciproquement qu'une telle fonction est solution de (E) . Ainsi,

$$\mathcal{S}(E) = \{2\cos(x) + \sin(x) + Ce^x : C \in \mathbb{R}\}$$

- 6► Soit g l'unique solution de (E) telle que $g(0) = 0$. D'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2\cos(x) + \sin(x) + Ce^x$. En particulier,

$$0 = g(0) = 2\cos(0) + \sin(0) + Ce^0 = 2 + C \quad \text{donc} \quad C = -2$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - 2e^x$

- 7► D'après ce qui précède,

$$\int_0^{\pi/2} [-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)] \, dx = \int_0^{\pi/2} g(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} g'(x) + \cos(x) + 3\sin(x) \, dx$$

car g est solution de (E) donc $g'(x) = g(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$. Or g est une primitive de g' , donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} g'(x) + \cos(x) + 3\sin(x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} g'(x) \, dx + \int_0^{\pi/2} \cos(x) + 3\sin(x) \, dx \\ &= [g(x)]_0^{\pi/2} + [\sin(x) - 3\cos(x)]_0^{\pi/2} \\ &= g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (\sin(0) - 3\cos(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2e^{\pi/2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-2e^0 + \sin(0) + 2\cos(0)) + 1 - 0 - 0 + 3 \\
&= -2e^{\pi/2} + 1 + 0 + 2 - 0 - 2 + 4 \\
&= -2e^{\pi/2} + 5
\end{aligned}$$

Correction de l'ex 17

1► Pour tout x réel, $f(x+0) = f(x)$.

2► Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x)$$

(la première égalité fait appel à la T_2 -périodicité de f , la seconde à sa T_1 -périodicité)

3► Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f((x - T_1) + T_1) = f(x - T_1)$$

par T_1 -périodicité.

4► Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{HR}_n$: « f est nT -périodique ».

La première question donne l'initialisation. Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\mathcal{HR}_n$ est vraie, alors f est nT -périodique, mais également T périodique par hypothèse, donc $nT + T = (n+1)T$ -périodique d'après la deuxième question. Sous ces hypothèses, $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vrai. En vertu du principe de récurrence, $\mathcal{HR}_n$ est vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$. D'après la troisième question, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est $-nT$ périodique. En rassemblant tous ces éléments, on montre la propriété recherchée.

Correction de l'ex 18

1► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{id}'(x) = 1$.

2► La dérivabilité étant supposée valide,

$$(\sin \circ \arcsin)'(x) = \arcsin'(x) \times \sin'(\arcsin(x)) = \arcsin'(x) \times \cos(\arcsin(x))$$

d'après la question précédente : $\arcsin'(x) \times \cos(\arcsin(x)) = \text{id}'(x) = 1$

3► Pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(y) \geq 0$, or $\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$ donc $\cos(y)^2 = 1 - \sin(y)^2$ donc $\cos(y) = \sqrt{\cos(y)^2} = \sqrt{1 - \sin(y)^2}$.

4► Soit $x \in]-1; 1[$.

$$\begin{aligned}
1 &= \arcsin'(x) \times \cos \circ \arcsin(x) = \arcsin'(x) \times \cos(y) = \arcsin'(x) \times \sqrt{1 - \sin(y)^2} \\
&= \arcsin'(x) \times \sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2} = \arcsin'(x) \times \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5► La dérivabilité étant supposée valide,

$$(\cos \circ \arccos)'(x) = \arccos'(x) \times \cos'(\arccos(x)) = -\arccos'(x) \times \sin(\arccos(x))$$

d'après la question précédente : $-\arccos'(x) \times \sin(\arccos(x)) = \text{id}'(x) = 1$

Pour tout $y \in [0; \pi]$, $\sin(y) \geq 0$, or $\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$ donc $\sin(y)^2 = 1 - \cos(y)^2$ donc $\sin(y) = \sqrt{\sin(y)^2} = \sqrt{1 - \cos(y)^2}$.

Soit $x \in]-1; 1[$.

$$\begin{aligned}
1 &= -\arccos'(x) \times \sin \circ \arccos(x) = -\arccos'(x) \times \sin(y) = -\arccos'(x) \times \sqrt{1 - \cos(y)^2} \\
&= -\arccos'(x) \times \sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2} = -\arccos'(x) \times \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6► La dérivabilité étant supposée valide,

$$(\tan \circ \arctan)'(x) = \arctan'(x) \times \tan'(\arctan(x)) = \arctan'(x) \times (1 + \tan(\arctan(x))^2 = \arctan'(x) \times (1+x^2)$$

$$\text{Or pour tout } x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0 \text{ donc } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

7► Soit $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ définie sur $[-1; 1]$. D'après les deux premières questions, elle est dérivable sur $] -1; 1[$, et pour tout $x \in] -1; 1[$, $f'(x) = \arcsin'(x) + \arccos'(x) = 0$. Comme $] -1; 1[$ est un intervalle, on en déduit que f est constante. Or $f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc f est constante égale à $\frac{\pi}{2}$, autrement dit $\forall x \in] -1; 1[$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. Cette relation s'étend à $[-1; 1]$ car $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(1) = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arccos(-1) = \pi$.

Correction de l'ex 19

1► Le triangle ETA est rectangle en E , donc $\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}$. Le triangle ETB est rectangle en E , donc $\tan(\beta) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$.

2► La fonction $\tan$ est dérivable sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ (comme quotient de telles fonctions de dénominateur qui ne s'annule pas – attention à ce dernier point !). Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x) \times [-\sin(x)]}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} > 0 \end{aligned}$$

donc $\tan$ est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3► Comme $\gamma = \beta + \alpha$, d'après la formule donnée par l'énoncé dont on admet les hypothèses,

$$\tan(\gamma) = \tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha) \times \tan(\beta)} = \frac{\frac{30,6}{x} + \frac{25}{x}}{1 - \frac{25}{x} \times \frac{30,6}{x}} = \frac{\frac{55,6}{x}}{\frac{x^2 - 765}{x^2}} = \frac{55,6x}{x^2 - 765}$$

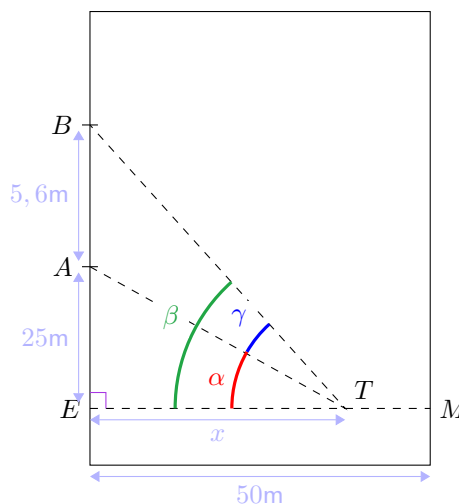
4► Remarquons que pour tout $x \in]0; 50]$,

$$\frac{1}{\tan(\gamma)} = \frac{x^2 - 765}{55,6x} = \frac{1}{55,6} \frac{x^2 - 765}{x} = \frac{1}{55,6} \left(x - \frac{765}{x} \right) = \frac{1}{55,6} f(x)$$

Or $\tan(\gamma)$ est maximale si, et seulement si son inverse est minimal; ainsi maximiser $\tan(\gamma)$ revient à minimiser f (le facteur $\frac{1}{55,6}$ étant positif, il n'a pas d'influence sur les variations).

5► La fonction f est dérivable (comme somme et produit), et pour tout $x \in]0; 50]$, $f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2}$. De là,

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{765}{x^2} > 0 \iff x^2 > 765 \iff x > \sqrt{765}$$



(attention, la dernière équivalence est vraie uniquement par ce que x est une longueur, donc une quantité positive.)

Ainsi, f est décroissante sur $]0; \sqrt{765}]$ puis croissante sur $[\sqrt{765}; 50]$; en particulier, elle admet un minimum en $\sqrt{765}$, valant $f(\sqrt{765}) = 2\sqrt{765}$.

D'après les calculs de la question précédente, pour x minimisant f , $\tan(\gamma) = \frac{5,6}{f(\sqrt{765})} = \frac{5,6}{2\sqrt{765}}$ est la valeur maximale de γ .

Enfin, $\tan$ étant une fonction strictement croissante d'après la question 2►, maximiser $\tan(\gamma)$ revient à maximiser γ . Ainsi, la valeur maximale de γ est :

$$\gamma = \arctan\left(\frac{5,6}{2\sqrt{765}}\right) \approx 0,10 \text{ rad} \approx 6^\circ$$

Mathématiques

Terminale spécialité – Corrections

La série « Mathématiques – Terminale spécialité » est composée de quatre ouvrages :

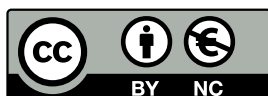
- *Cours complet* est une version enrichie du cours, avec des remarques supplémentaires et toutes les démonstrations, qu'elles soient exigibles par le programme ou bien au-delà de sa portée, tout en restant abordables pour quiconque peut faire preuve de suffisamment de motivation et de patience. Cette version a été écrite avec plusieurs objectifs en tête. Permettre aux absents et absentes de rattraper le cours sans trop de pertes. Donner à celles et ceux qui souhaitent s'avancer, notamment pour le Grand Oral, suffisamment de matériel pour le faire en autonomie. Satisfaire l'appétit des esprits les plus gourmands, en culture comme en technique. Donner un aperçu de ce que sont les mathématiques dans le supérieur – et à ce titre rester une ressource pertinente plusieurs années après la terminale –.
- *Squelette de cours* est, comme son nom le suggère, une extraction de la version complète, qui ne contient que les essentiels du cours parfois à compléter, et les exercices. Il n'y a pas les démonstrations ni les détails supplémentaires. Cet élagage a pour objectif de créer un support de cours à la fois synthétique et fourni, afin d'optimiser la prise de notes en classe.
- *Extras* est un complément au *Cours complet*, avec des approfondissements, des points culture supplémentaires, et des annexes contenant des rappels « éclairés » (des notions vues les années passées, agrémentées de démonstrations permettant une compréhension plus profonde) et des outils qui ne sont pas ou plus au programme, mais qui peuvent rester utiles, notamment pour le Grand Oral.
- *Corrections* rassemble tous les exercices présents dans les feuilles de fin de chapitre, ainsi que leur correction plus ou moins rédigée. Il s'agit d'un support d'aide pour le travail en autonomie, aussi certains exercices ne bénéficient que d'éléments de correction. Voir la préface du manuel en question pour plus d'explications.

Cours complet (et *Squelette de cours* par conséquent) regroupe tous les cours et exercices dispensés lors de l'année de terminale, en spécialité mathématique. Les chapitres sont ordonnés selon une progression arbitraire, qui n'est pas la seule envisageable.

Cours & illustrations réalisés par E. Suong

Les exercices sont issus de sources multiples. Pour tout ajout de référence, adaptation ou retrait, merci de me contacter.

Des outils d'intelligence artificielle ont été utilisés pour assister la rédaction de certaines corrections.



Version du 30 août 2026

