

Notons $E = \text{Lip}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. E n'est pas complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

2. Pour $f \in E$, on pose :

$$K(f) = \inf L(f) \quad \text{où } L(f) = \{\alpha \geq 0 \mid \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|\}$$

et $N(f) = |f(0)| + K(f)$.

a. N est une norme sur E non équivalente à $\|\cdot\|_\infty$

b. (E, N) est complet.

Avant toute chose, précisons que si $f \in E$ est α -lipschitzienne et si $g \in E$ est β -lipschitzienne, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est $(|\lambda|\alpha + \beta)$ -lipschitzienne : en particulier, E est un espace vectoriel.

1. Précisons que $E \subseteq C([0,1], \mathbb{R})$, donc $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur E .

D'après l'inégalité des accroissements finis, toute fonction polynomiale sur $[0,1]$ est lipschitzienne.

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément (pour $\|\cdot\|_\infty$) vers $g: x \mapsto \sqrt{x}$. En particulier, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de E . Or $g \notin E$, donc $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas fermé, donc pas complet.

($g \notin E$ car $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$).

2. a. Soient $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Déjà, $K(f)$ et $K(g)$ sont bien définies car $L(f)$ et $L(g)$ sont des parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$. Ensuite :

• $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$: on a $|\lambda f(0)| = |\lambda| \cdot |f(0)|$ et $K(\lambda f) = |\lambda| K(f)$. En effet, soit $(x,y) \in [0,1]^2$. Comme $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| |f(x) - f(y)| \leq |\lambda| K(f) |x - y|$, on a $K(\lambda f) \leq |\lambda| K(f)$. Ensuite, si $\lambda = 0$, il n'y a rien à faire ($K(0) = 0$), et si $\lambda \neq 0$, alors $K(f) = K(\frac{\lambda f}{\lambda}) \leq |\frac{1}{\lambda}| K(\lambda f)$ d'après ce qu'on vient de montrer, donc $|\lambda| K(f) \leq K(\lambda f)$, puis $K(\lambda f) = |\lambda| K(f)$, et donc $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

• Si $N(f) = 0$, alors $|f(0)| + K(f) = 0$, mais $|f(0)| \geq 0$ et $K(f) \geq 0$ donc $|f(0)| = K(f) = 0$, donc $f(0) = 0$ et $\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \leq 0 \cdot |x - y|$ i.e. $f(x) = f(y)$, donc $f = 0$.

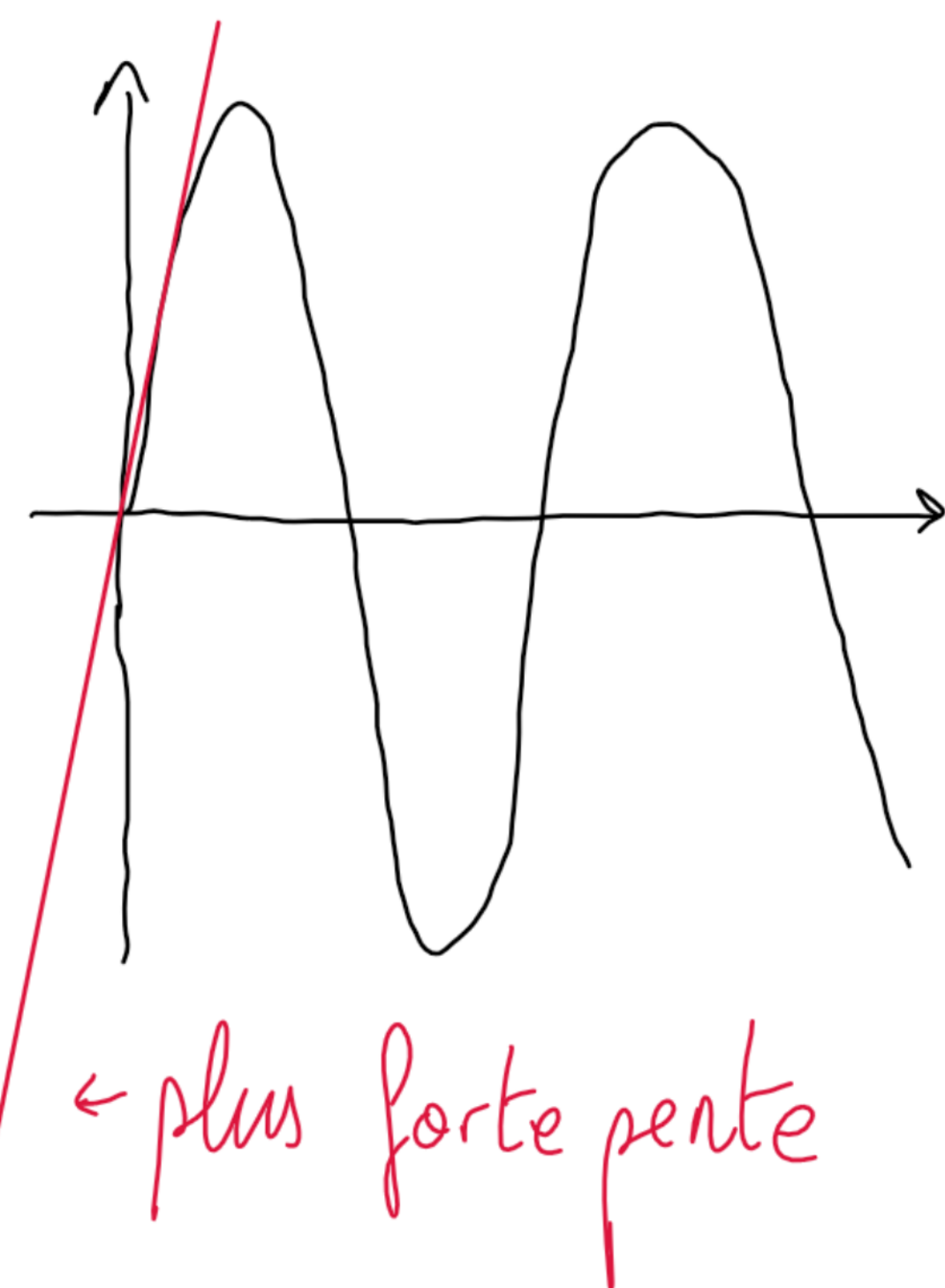
• $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$: on a $|(f+g)(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$. Ensuite, on a vu en introduction que $K(f+g) \leq K(f) + K(g)$. CQFD.

Justifions que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes :

▷ Pour $f \in E$, $\forall x \in [0,1], |f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq K(f) |x - 0| \leq K(f)$ donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$. (utile pour 2.b)

▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $f_n: x \mapsto \sin(nx)$. On a $\|f_n\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\sin(nx)| = 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, f_n est n -lipschitzienne. Plus précisément,

$$K(f_n) = \inf_{x \neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin(nx) - \sin(n0)|}{|x - 0|} = n$$



Ainsi, $N(f_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ mais $\|f_n\|_\infty = 1$.

b. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy pour N . D'après l'inégalité $\|\cdot\|_\infty \leq N$ montrée précédemment, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$ dans $C([0,1], \mathbb{R})$. Ce dernier étant complet, $(f_n)_n$ converge.

Notons f sa limite (uniforme), montrons que $f \in E$ et que $N(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

• Remarquons que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}$, $|K(f_n) - K(f_p)| \leq K(f_n - f_p) \leq N(f_n - f_p)$, donc $(K(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc converge. Notons K sa limite. Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K(f_n) |x - y|$, donc en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$, donc $f \in E$.

• Comme $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $|f_n(0) - f(0)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $p \geq M$, $N(f_n - f_p) \leq \varepsilon$, en particulier $K(f_n - f_p) \leq \varepsilon$. Soient $n \geq M$, $p \geq M$ et $(x, y) \in [0, 1]^2$. On a :

$$|(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(y)| \leq K(f_n - f_p) |x - y| \leq \varepsilon |x - y|$$

En faisant tendre $p \rightarrow +\infty$, on obtient $|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)| \leq \varepsilon |x - y|$, ce qui prouve que pour tout $n \geq M$, $K(f_n - f) \leq \varepsilon$, CQFD. ■