

# Critère de Klarès

[On trouvera des éléments de correction pour cet exercice dans le Manuy & Mneimné, *Algèbre linéaire, Réduction des endomorphismes* p.155.]

Soient  $K$  un corps commutatif,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On pose  $\text{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$ .

## Théorème 3.1

Si  $u$  est trigonalisable, alors  $u$  est diagonalisable si, et seulement si  $\text{Ker}(\text{ad}_u) = \text{Ker}(\text{ad}_u^2)$ .

Comme  $u$  est trigonalisable, on dispose de sa décomposition de DUNFORD  $u = d + n$ , avec  $d$  diagonalisable et  $n$  nilpotent qui commutent.

⇐ Supposons que  $\text{Ker}(\text{ad}_u) = \text{Ker}(\text{ad}_u^2)$ . Alors  $\text{Ker}(\text{ad}_u) \cap \text{Im}(\text{ad}_u) = \{0\}$  (classique, voir les commentaires). Remarquons que  $n$  est un polynôme en  $u$ , donc commute avec  $u$ , i.e.  $n \in \text{Ker}(\text{ad}_u)$ . De là, pour montrer que  $u$  est diagonalisable, il suffit de montrer que  $n \in \text{Im}(\text{ad}_u)$ , i.e. qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $n = u \circ v - v \circ u$ . Comme  $u$  est trigonalisable,  $\chi_u$  est scindé : écrivons  $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ . Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , notons

$F_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}((u - \lambda \text{id}_E)^{m_\lambda})$  le sous-espace caractéristique de  $u$  associé à  $\lambda$ . D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON et le lemme des noyaux,  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} F_\lambda$ , et on sait, que dans la décomposition de DUNFORD

de  $u$ , pour chaque  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , sur  $F_\lambda$ ,  $u$  induit un endomorphisme  $u_\lambda$ ,  $d$  induit  $\lambda \text{id}_{F_\lambda}$  et  $n$  induit un endomorphisme nilpotent  $n_\lambda$ . D'après la décomposition de JORDAN, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , il existe une base  $\mathcal{B}_\lambda$  et des entiers  $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_\lambda$  tels que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(n_\lambda) = \text{Diag}(J_{k_1}, \dots, J_{k_\lambda})$  où  $J_k$  est le bloc de JORDAN élémentaire de taille  $k$ . Pour  $k \geq 1$ , posons  $M_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}(1, 2, \dots, k)$  : remarquons qu'alors

$$\begin{aligned} J_k M_k - M_k J_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & k \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & k-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= J_k \end{aligned}$$

Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , soit  $v_\lambda$  l'endomorphisme de  $F_\lambda$  de matrice  $\text{Diag}(M_{k_1}, \dots, M_{k_\lambda})$  dans  $\mathcal{B}_\lambda$ . D'après le calcul précédent,  $n_\lambda = n_\lambda \circ v_\lambda - v_\lambda n_\lambda$ , et  $\lambda \text{id}_{F_\lambda} \circ v_\lambda - v_\lambda \lambda \text{id}_{F_\lambda} = 0$ , et  $u_\lambda = \lambda \text{id}_{F_\lambda} + n_\lambda$ , donc  $n_\lambda = u_\lambda \circ v_\lambda - v_\lambda \circ u_\lambda$ . En notant  $v$  l'endomorphisme de  $E$  qui induit  $v_\lambda$  sur chaque  $F_\lambda$ , on obtient  $n = u \circ v - v \circ u \in I(\text{ad}_u)$ .

⇒ Supposons  $u$  diagonalisable. Déjà,  $\text{Ker}(\text{ad}_u) \subseteq \text{Ker}(\text{ad}_u^2)$ . Pour  $v \in \mathcal{L}(E)$ , posons  $G_v : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto v \circ f$  et  $D_v : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ v$ , de sorte que  $\text{ad}_u = G_u - D_u$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $G_u^k = G_{u^k}$ , donc par linéarité, pour tout  $P \in K[X]$ ,  $P(G_u) = G_{P(u)}$ . De même,  $P(D_u) = D_{P(u)}$ . En particulier,  $\pi_u(G_u) = G_{\pi_u(u)} = G_0 = 0$ , et  $\pi_u(D_u) = 0$ , mais  $u$  est diagonalisable donc  $\pi_u$  est scindé à racines simples, donc  $G_u$  et  $D_u$  sont diagonalisables. Enfin,  $G_u$  et  $D_u$  commutent, donc  $G_u$  et  $D_u$  sont codiagonalisables, donc  $\text{ad}_u$  est diagonalisable. De là,  $\dim(\text{Ker}(\text{ad}_u)) = \dim(\text{Ker}(\text{ad}_u^2))$  (dans une base de diagonalisation, la dimension du noyau est le nombre de zéros sur la diagonale, donc dans une base de codiagonalisation, le nombre de zéros sur la diagonale de  $\text{ad}_u$  est le même que celui de  $\text{ad}_u^2$ ), d'où  $\text{Ker}(\text{ad}_u) = \text{Ker}(\text{ad}_u^2)$ .

- Recasages : 148 (Exemples de décompositions de matrices. Applications.), 154 (Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.), 155 (Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.), 157 (Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.)
- Proposition :  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) \iff \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ . Si  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ , alors pour tout  $y = u(x) \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$ ,  $0 = u(y) = u^2(x)$  donc  $x \in \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$ , donc  $y = 0$ . Réciproquement, on a toujours  $\text{Ker}(u) \subseteq \text{Ker}(u^2)$ , et pour tout  $x \in \text{Ker}(u^2)$ ,  $0 = u(u(x))$  donc  $u(x) \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ , donc  $x \in \text{Ker}(u)$ .
- Rappel :  $u$  diagonalisable  $\iff \pi_u$  est scindé à racines simples  $\iff$  il existe  $P \in K[X]$  scindé à racines simples tel que  $P(u) = 0$ .
- Rappel : pour prouver le théorème de codiagonalisation d'une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, on procède par récurrence sur la dimension de l'espace. Si la famille est une famille d'homothéties, alors il n'y a rien à faire, sinon on prend un endomorphisme qui n'est pas un homothétie et on décompose l'espace en somme de sous-espaces propres de cet endomorphisme. Chaque endomorphisme de la famille induit un endomorphisme sur les sous-espaces propres en question, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.
- Contre-exemple : une rotation de  $\mathbb{R}^2$  distincte de l'identité n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , pourtant elle l'est sur  $\mathbb{C}$ , donc *a fortiori* vérifie l'identité des noyaux. L'hypothèse de trigonalisabilité est donc capitale.
- On trouvera une preuve alternative *via* la forme trace dans le *Carnet de voyage en Algèbre* de Caldero et Germoni (p.93).
- À quoi sert le critère de KLARÈS : ce n'est pas un critère utile dans la pratique, et surtout informatiquement, puisque de complexité de l'ordre de  $n^6$ . J'ai entendu dire que ça pouvait servir pour les algèbres de LIE... en attendant, ça fait une très belle application des décompositions classiques !
- Si  $\bar{K}$  désigne une clôture algébrique de  $K$  et si  $u^{(K)}$  désigne  $u$  vu comme endomorphisme du  $\bar{K}$ -espace vectoriel  $K$ , alors on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
u \text{ diag} & \longleftrightarrow & \text{ad}_u \text{ diag} \\
\downarrow \Bigg) & \text{(si } \pi_u \text{ scindé)} & \Bigg( \downarrow \\
u^{(K)} \text{ diag} & \longleftrightarrow & \text{Ker}(\text{ad}_u) \\
& & = \text{Ker}(\text{ad}_u^2) \\
\downarrow \Bigg) & \text{(si } \pi_u \text{ séparable)} & \Bigg( \downarrow \\
u \text{ semi-simple} & \longleftrightarrow & \text{ad}_u \text{ semi-simple}
\end{array}$$

FIGURE 3.1 – Critère de KLARÈS et semi-simplicité