

Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, posons $\gamma_{a,\lambda}: x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}$ (densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$).

1. La fonction caractéristique φ de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est donnée par $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$.

2. La transformée de LAPLACE L de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est définie sur $]-\infty, \lambda[$ par $\forall t < \lambda, \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet un moment d'ordre n donné par $m_n = \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{\lambda^n}$.

Rappels sur la fonction Γ d'EULER: c'est la fonction définie par $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.
Elle vérifie notamment $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow \Gamma'(z+1) = z\Gamma(z)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma'(n+1) = n!$

1. Posons $D_\lambda := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < \lambda\}$. Pour $z \in D_\lambda$, la quantité:

$$\psi(z) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_{a,\lambda}(x) e^{xz} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1} dx$$

est bien définie, car $\forall x > 0, |e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1}| \leq e^{-(\lambda-\operatorname{Re}(z))x} x^{a-1}$, et $\int_0^{+\infty} |e^{-(\lambda-\operatorname{Re}(z))x} x^{a-1}| dx < +\infty$ car $\operatorname{Re}(z) < \lambda$.

Remarquons que $\forall t \in \mathbb{R}, it \in D_\lambda$ et $\psi(it) = \varphi(t)$.

• Soit $\alpha \in]0, \lambda[$, posons $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < \alpha\}$. Pour $z \in D_\alpha$

et $x > 0$, posons $f(z, x) := e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1}$.

▷ $\forall z \in D_\alpha, f(z, \cdot)$ est mesurable,

▷ $\forall x > 0, f(\cdot, x)$ est holomorphe sur D_α ,

▷ $\forall z \in D_\alpha, \forall x > 0, |f(z, x)| \leq e^{-(\lambda-\operatorname{Re}(z))x} x^{a-1} \leq e^{-(\lambda-\alpha)x} x^{a-1}$ et $\int_0^{+\infty} |e^{-(\lambda-\alpha)x} x^{a-1}| dx < +\infty$ car $\alpha < \lambda$.

D'après le théorème d'holomorphic sous le signe intégrale, ψ est holomorphe sur D_α . Comme l'holomorphic est une notion locale, on en déduit que ψ est holomorphe sur $D_\lambda = \bigcup_{0 < \alpha < \lambda} D_\alpha$.

• Soit $t < \lambda$. En effectuant le changement de variable $y = (\lambda - t)x$, on montre que:

$$\psi(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-t)x} x^{a-1} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{a-1} \frac{dy}{(\lambda-t)^a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a \frac{1}{\Gamma(a)} \Gamma(a) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$$

Comme ψ et $z \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda-z}\right)^a$ sont holomorphes et coïncident sur l'intervalle (infini) $]-\infty, \lambda[$, le théorème des zéros isolés

affirme que $\forall z \in D_\lambda, \psi(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-z}\right)^a$.

En particulier, $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \psi(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a$. ■

2. De même, $\forall t < \lambda, t \in D_\lambda$ donc $L(t) = \psi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$. ■

3. Comme φ est holomorphe, elle est analytique, donc la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet des moments de tout ordre. Le moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est donné par $m_n = i^{-n} \varphi^{(n)}(0)$. De là, deux rédactions possibles:

▷ par récurrence immédiate: $\varphi(t) = \lambda^a (\lambda - it)^{-a}$ donc $\varphi'(t) = a \lambda^a i (\lambda - it)^{-a-1}$, $\varphi''(t) = a(a+1) \lambda^a i^2 (\lambda - it)^{-a-2}$, etc., $\varphi^{(n)}(t) = a(a+1) \dots (a+n-1) \lambda^a i^n (\lambda - it)^{-a-n}$

▷ avec un développement en série entière: $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$, mais $\varphi(t) = \lambda^a (\lambda - it)^{-a} = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-a}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-a(-a-1) \dots (-a-n+1)}{n!} \left(-\frac{it}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{\lambda^n} i^n \frac{t^n}{n!}$$

Finalement, $m_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\lambda^n}$. ■

COMMENTAIRES

- ▶ Il y a le temps d'écrire proprement (sans superflu) au tableau.
- ▶ Justifions la pertinence des recasages:
 - ▷ 236 : On illustre sur un exemple une méthode de calcul d'intégrale : on montre qu'une intégrale paramétrée peut s'exprimer à l'aide du principe de prolongement analytique.
 - ▷ 239 : On étudie une intégrale à paramètre via l'holomorphie sous le signe intégrale.
 - ▷ 245 : On utilise le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, le principe de prolongement analytique et l'implication holomorphe $\Rightarrow$ analytique.
 - ▷ 261 : On étudie une loi de probabilité : on donne sa fonction caractéristique, et on utilise le théorème "si φ est de classe C^{2p} , alors la loi admet des moments d'ordre $k \leq p$ donnés par $i^{-k} \varphi^{(k)}(0)$ ".