

Thm (central limite): Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi admettant une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$.

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{où} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Application: Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p)$, $0 < p < 1$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

On déterminera un intervalle de confiance asymptotique au niveau de risque α .

Quitte à centrer et réduire les $X_n, n \in \mathbb{N}$ (i.e. les remplacer par $\frac{X_n - m}{\sigma}$) supposons que $m = 0$ et $\sigma = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme les $X_n, n \in \mathbb{N}$ sont mutuellement indépendantes, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_{\sqrt{n}\bar{X}_n}(t) = \mathbb{E}[\exp(it\sqrt{n}\bar{X}_n)] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \exp(it/\sqrt{n} X_k)\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\exp(it/\sqrt{n} X_k)] = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t/\sqrt{n})$$

puis $\varphi_{\sqrt{n}\bar{X}_n}(t) = \varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})^n$ car les $X_k, k \in \mathbb{N}$ sont identiquement distribuées. Comme X_1 est de carré intégrable, φ_{X_1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\varphi'_{X_1}(0) = i \mathbb{E}[X_1] = 0$$

$$\varphi''_{X_1}(0) = i^2 \mathbb{E}[X_1^2] = -1$$

$$\text{Ainsi, } \varphi_{\sqrt{n}\bar{X}_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Classiquement, $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-t^2/2}$. Un argument rapide pour montrer que $(1 + o(1/n))^n \rightarrow 1$ serait d'utiliser un logarithme complexe. Pour esquiver cette subtilité théorique, on procède comme suit : $|(1 + o(1/n))^n - 1| = \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left[o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k \right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |o(1/n)|^k = (1 + |o(1/n)|)^n - 1$

$$= \exp(n \ln(1 + |o(1/n)|)) - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Comme $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est la fonction caractéristique de la $\mathcal{N}(0, 1)$, on déduit du théorème de

LÉVY que $\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$. ■

Application: Comme X_1 est intégrable, la loi faible des grands nombres assure que :

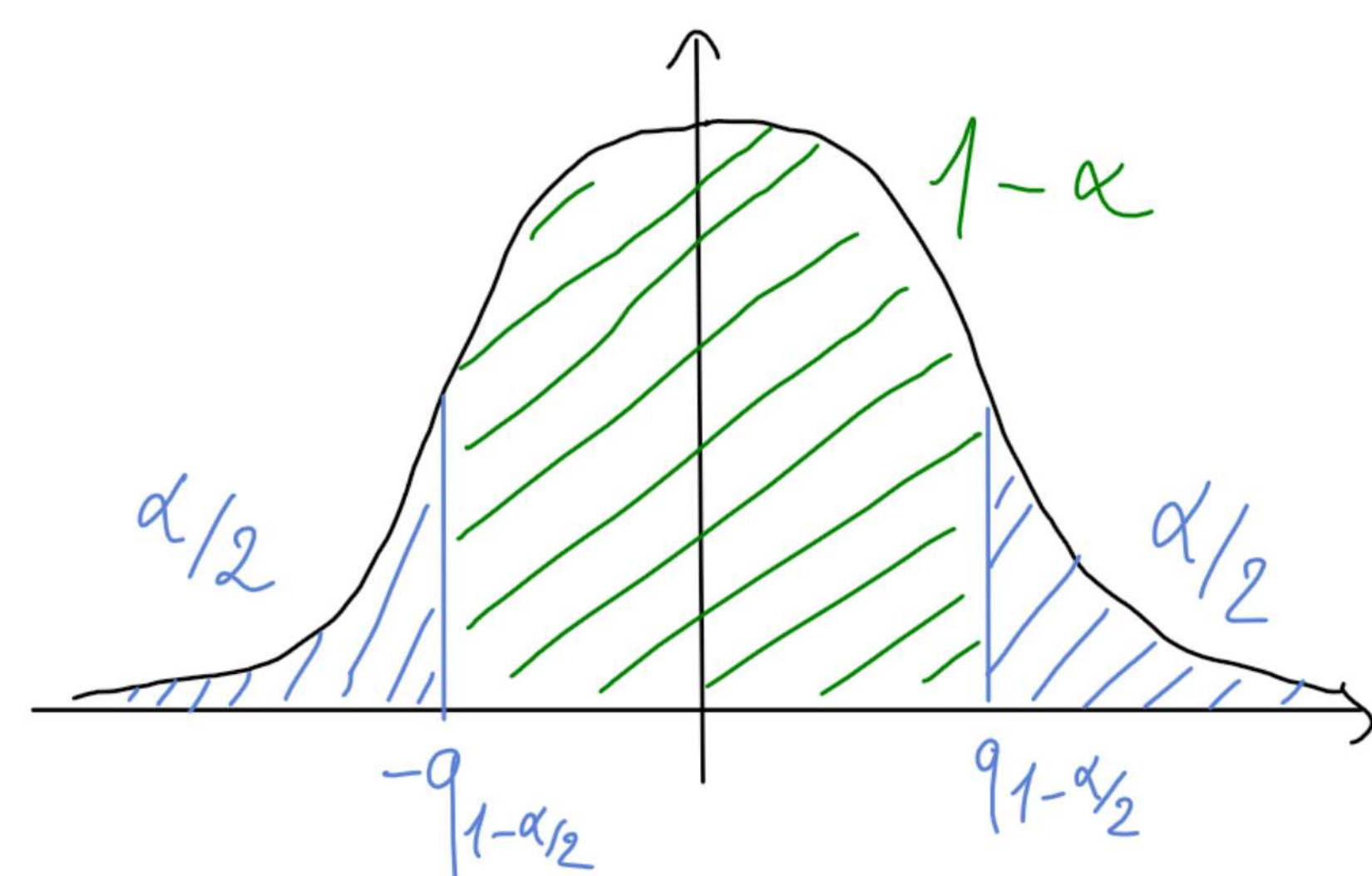
$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] = p \quad \text{donc} \quad \sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{p(1-p)}$$

D'après le théorème central limite et le lemme de SLUTSKY,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} = \underbrace{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} 1} \underbrace{\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)} \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0,1)$$

Notons $q_{1-\alpha/2}$ le $(1-\alpha/2)$ -quantile de $\mathcal{N}(0,1)$, i.e. le réel vérifiant $\mathbb{P}(Z \leq q_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Remarquons que $\mathbb{P}(|Z| \leq q_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$ par symétrie de la $\mathcal{N}(0,1)$ (voir dessin ci-contre).



On a alors, par convergence en loi :

$$\mathbb{P}\left(\left|\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Z| \leq q_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$\text{et } \left|\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2} \iff \bar{X}_n - \frac{q_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \bar{X}_n + \frac{q_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}$$

Ainsi, $\left[\bar{X}_n - \frac{q_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + \frac{q_{1-\alpha/2} \sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance $1-\alpha$ pour p . ■