

Thm (de Dirichlet) : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π -périodique. Soit $t_0 \in \mathbb{H}$ tel que :

$$h \mapsto \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

est bornée (ce qui est en particulier le cas lorsque f est C^1 par morceaux).

La série de Fourier de f converge (simplement) en t_0 vers $\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$.

Quitte à effectuer une translation $t \mapsto t + t_0$, supposons que $t_0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ le coefficient de Fourier d'ordre n de f , et pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{int} = \sum_{n=-N}^N c_n(f)$. Il s'agit alors de montrer que $S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons $e_n: t \mapsto e^{int}$ et pour $N \in \mathbb{N}$, $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$.

► D_N possède les propriétés suivantes :

▷ D_N est 2π -périodique ▷ D_N est pair

$$\triangleright \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$$

$$\triangleright \forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = e^{-iNt} \sum_{n=0}^{2N} e^{int} = e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$$

(et $D_N(0) = 2N+1$).

$$\triangleright D_N * f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(0-t) f(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(t) \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=-N}^N c_n(f) = S_N(f)$$

$$\text{or } \int_{-\pi}^{\pi} D_N(-t) f(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(-t) \frac{dt}{2\pi}, \text{ donc } S_N(f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \frac{f(t) + f(-t)}{2} dt.$$

► Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_N(f) - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} &= D_N * f(0) - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \frac{f(t) + f(-t)}{2} \frac{t}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} D_N(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin((N+\frac{1}{2})t)}_{\text{borné}} \underbrace{\frac{t}{\sin(t/2)} \frac{f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)}{2t}}_{\text{borné}} \frac{dt}{2\pi} \end{aligned}$$

Donc $g: t \mapsto \frac{t}{\sin(t/2)} \frac{f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)}{2t}$ est bornée et continue par morceaux, donc d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin((N+\frac{1}{2})t) g(t) \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $S_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$.

Application : Soit f la fonction 2π -périodique définie par $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2$. À l'aide de la série de Fourier de f , calculons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$:

Comme f est continue et C^1 par morceaux, f est somme de sa série de Fourier. Par ailleurs, f est paire, donc :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad x^2 = a_0(f) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx)$$

- $a_0(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \frac{dx}{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} 2\pi a_n(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \left[\cancel{x^2 \frac{\sin(nx)}{n}} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2x \frac{\sin(nx)}{n}} dx \\ &= -\frac{2}{n} \left(\left[x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{-\frac{\cos(nx)}{n}} dx \right) = \frac{2}{n^2} \left(\pi \cos(n\pi) + \pi \cos(-n\pi) \right) \\ &= \frac{4\pi}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Donc $a_n(f) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$

- Ainsi, $\forall x \in [-\pi, \pi], \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

Pour $x = \pi$, on obtient $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}}$