

Soit L/K une extension de corps intègres.

Thm : Soit $\alpha \in L$. Sont équivalentes :

1 α est algébrique sur K

2 $K(\alpha) = K[\alpha] := \{P(\alpha) : P \in K[X]\}$

3 $K[\alpha]$ est un K -e.v. de dimension finie.

Le cas échéant, $\deg(P_{\alpha,K}) = [K(\alpha):K]$.

Cor : Notons $A \subseteq L$ l'ensemble des éléments de L algébriques sur K . Alors A est un corps, algébriquement clos si L l'est, dénombrable si K l'est.

Preuve du Thm : 1 $\Rightarrow$ 2 : Soit $\text{eval}_\alpha : K[X] \rightarrow K[\alpha]$ le morphisme d'évaluation en α . Par définition, $P_{\alpha,K}$ est l'unique générateur unitaire de $\text{Ker}(\text{eval}_\alpha)$, et eval_α étant par nature surjectif, d'après le théorème de factorisation, $K[\alpha] \simeq \frac{K[X]}{\text{Ker}(\text{eval}_\alpha)} = \frac{K[X]}{\langle P_{\alpha,K} \rangle}$. Comme L est intègre, $K[\alpha] \subseteq L$ l'est aussi, donc $P_{\alpha,K}$ est premier, donc irréductible dans $K[X]$, et le quotient par un irréductible est un corps. Ainsi, $K[\alpha]$ est un corps, mais $K(\alpha) = \text{Frac}(K[\alpha])$ est le plus petit corps contenant $K[\alpha]$, donc $K[\alpha] = K(\alpha)$.

2 $\Rightarrow$ 1 : Par contraposée : si α est transcendant, alors (par définition de la transcendance) eval_α est injectif, donc bijectif, donc $K[X] \simeq K[\alpha]$, et $K(\alpha) \simeq K(X) \neq K[\alpha]$.

1 $\Rightarrow$ 3 : Soit $P(\alpha) \in K[\alpha]$. Écrivons $P = P_{\alpha,K}Q + R$, $\deg(R) < \deg(P_{\alpha,K})$ la division euclidienne de P par $P_{\alpha,K} \neq 0$. Alors $P(\alpha) = R(\alpha) \in \text{Vect}(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ ($d = \deg(P_{\alpha,K})$) donc $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ engendre $K[\alpha]$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in K^d$ tel que $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k \alpha^k = 0$. Par minimalité, $P_{\alpha,K} \mid P(X)$, mais $d = \deg(P_{\alpha,K}) > d-1 \geq \deg(P)$, donc $P = 0$, i.e. $\lambda_0 = \dots = \lambda_d = 0$, i.e. $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ est libre. Ainsi, $K[\alpha]$ est un K -espace vectoriel de dimension $\deg(P_{\alpha,K})$.

3 $\Rightarrow$ 1 : Soit d la dimension de $K[\alpha]$. La famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^d)$ est donc liée, i.e. il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in K^{d+1} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{k=0}^d \lambda_k \alpha^k = 0$, donc α est algébrique sur K .

Preuve du Cor : A est un corps : soit $(x, y) \in A \times A \setminus \{0\}$.

$\triangleright 1 \in A$ car $X-1 \in K[X]$ annule $1 \in L$.

$\triangleright x$ est algébrique sur K , donc sur $K(y)$, donc $[K(x, y) : K(y)] = [K(y)(x) : K(y)] < +\infty$. Comme y est algébrique sur K , $[K(y) : K] < +\infty$. D'après le théorème de la base télescopique, $[K(x, y) : K] = [K(x, y) : K(y)][K(y) : K] < +\infty$. Comme $K[x-y] \subseteq K(x, y)$ et $K[xy^{-1}] \subseteq K(x, y)$, on en déduit que $K[x-y]$ et $K[xy^{-1}]$ sont des K -espaces vectoriels de dimension finie, et donc $x-y \in A$ et $xy^{-1} \in A$, donc A est un corps.

$\triangleright$ Supposons L algébriquement clos. Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in A[X] \subseteq L[X]$. Comme L est algébriquement clos, il existe $\alpha \in L$ tel que $P(\alpha) = 0$, donc α est algébrique sur K , donc $\alpha \in A$, CQFD.

$\triangleright A = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{P \in K_n[X]} Z(P)$ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis si K est dénombrable (en effet, un polynôme a un nombre fini de racines, et $\#K_n[X] = \#K^{n+1}$.)