

Il existe une unique fonction $f: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}^{++}$ dérivable, logarithmiquement convexe, qui vaut 1 en 1 et telle que $\forall x > 0, f(x+1) = x f(x)$. C'est la fonction Γ .

UNICITÉ

Posons $g = \ln \circ f$ qui est convexe par hypothèse. D'après l'inégalité des trois pentes, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$,

$$\frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} \leq \left(\frac{g(n+1+x) - g(n)}{(n+1+x) - n} \right) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{(n+1+x) - (n+1)} \leq \frac{g(n+2) - g(n+1)}{(n+2) - (n+1)}$$

D'après l'équation fonctionnelle de f , $f(n+1) = n! f(1) = n!$, et $f(n+1+x) = (n+x) \cdots (x+1) x f(x)$

$$\ln(n) = \ln(n!) - \ln((n-1)!) \leq \frac{1}{x} \ln\left(\frac{(n+x) \cdots (x+1) x}{n!} f(x)\right) \leq \ln((n+1)!) - \ln(n!) = \ln(n+1)$$

donc $n^x \leq \frac{(n+x) \cdots (x+1) x}{n!} f(x) \leq (n+1)^x$, donc $1 \leq f(x) / \Gamma_n(x) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$ où $\Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

Or $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

EXISTENCE

1. Pour $x > 0$ et $t > 0$, posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$. Comme $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x < 1$, $f(x, \cdot) \in L^1([0, 1])$, et comme $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{t}\right)^x$, $f(x, \cdot) \in L^1([1, +\infty[)$. Ainsi, $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$. Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^{++}$, soit $x \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \ln(t)^n t^{x-1} e^{-t}$. Si $0 < t < 1$, alors $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\right| \leq |\ln(t)|^n t^{a-1} = o_{t \rightarrow 0^+}(t^{\frac{a}{2}-1})$ (croissance comparée), et si $t \geq 1$, alors $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\right| \leq \ln(t)^n t^{b-1} e^{-t} = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t/2})$. Ainsi $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est majorée par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ indépendante de $x \in [a, b]$, pour tout $t > 0$, $f(\cdot, t)$ est de classe C^n , donc d'après les théorèmes de transfert de régularité sous le signe intégrale, Γ est de classe C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, Γ est lisse sur $[a, b]$, quelque soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^{++}$. Finalement, $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$.

(Rq: 2 possibilités de rédaction plus soignée: par récurrence sur n , ou par holomorphie sur le demi-plan. Il ne faut pas passer trop de temps sur ce point (2 min max)).

2. Γ est C^2 et $\forall x > 0$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t}}_{\geq 0} dt \geq 0$ donc Γ est convexe.

Posons $g = \ln \circ \Gamma$: elle est C^2 , et $g'' = \frac{\Gamma'' \Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$. Or pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma'(x)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{\left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \right]}_{\in L^2} \cdot \underbrace{\left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln(t) \right]}_{\in L^2} dt \right)^2 \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln(t) \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Gamma(x) \Gamma''(x) \end{aligned}$$

Donc $g'' \geq 0$, donc $\ln(\Gamma)$ est convexe.

3. L'équation fonctionnelle découle d'une IPP.

Rq: par unicité, cela montre la formule d'EULER-GAUSS.