

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

1. Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

5. $\forall x > 0, \forall y > 0, B(x, y) = B(y, x)$

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

2. Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4. Allure du graphe

6. $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ (formule d'Euler-Gauss).

Rq: ce qui est en VERT est à surveiller à l'oral, sans écrire au tableau.

1. Pour $x > 0$ et $t > 0$, posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$. Comme $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x < 1$, $f(x, \cdot) \in L^1([0, 1])$, et comme $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^x}$, $f(x, \cdot) \in L^1([1, +\infty[)$. Ainsi, $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$. Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^{+*}$, soit $x \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \ln(t)^n t^{x-1} e^{-t}$. Si $0 < t < 1$, alors $|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)| \leq |\ln(t)|^n t^{a-1} = o_{t \rightarrow 0^+}(t^{\frac{a}{2}-1})$ (croissance comparée), et si $t \geq 1$, alors $|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)| \leq |\ln(t)|^n t^{b-1} e^{-t} = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t/2})$. Ainsi $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est majorée par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ indépendante de $x \in [a, b]$, pour tout $t > 0$, $f(\cdot, t)$ est de classe C^n , donc d'après les théorèmes de transfert de régularité sous le signe intégrale, Γ est de classe C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, Γ est lisse sur $[a, b]$, quelque soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^{+*}$. Finalement, $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

(Rq: 2 possibilités de rédaction plus soignée: par récurrence sur n , ou par holomorphie sur le demi-plan. Il ne faut pas passer trop de temps sur ce point (2 min max)).

2. Γ est C^2 et $\forall x > 0, \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t}}_{\geq 0} dt \geq 0$ donc Γ est convexe.

Posons $g = \ln \circ \Gamma$: elle est C^2 , et $g'' = \frac{\Gamma'' \Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$. Or pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma'(x)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}}_{\in L^2} \cdot \underbrace{t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln(t)}_{\in L^2} dt \right)^2 \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln(t)^2 dt \right) \\ &\leq \Gamma(x) \Gamma''(x) \end{aligned}$$

Donc $g'' \geq 0$, donc $\ln(\Gamma)$ est convexe.

3. $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{x-1}}_{C^1} \underbrace{t e^{-t}}_{C^0} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_{t \rightarrow 0^+}^{t \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} -x t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + x \Gamma(x)$.

4. $x \Gamma(x) = \Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ car Γ est continue

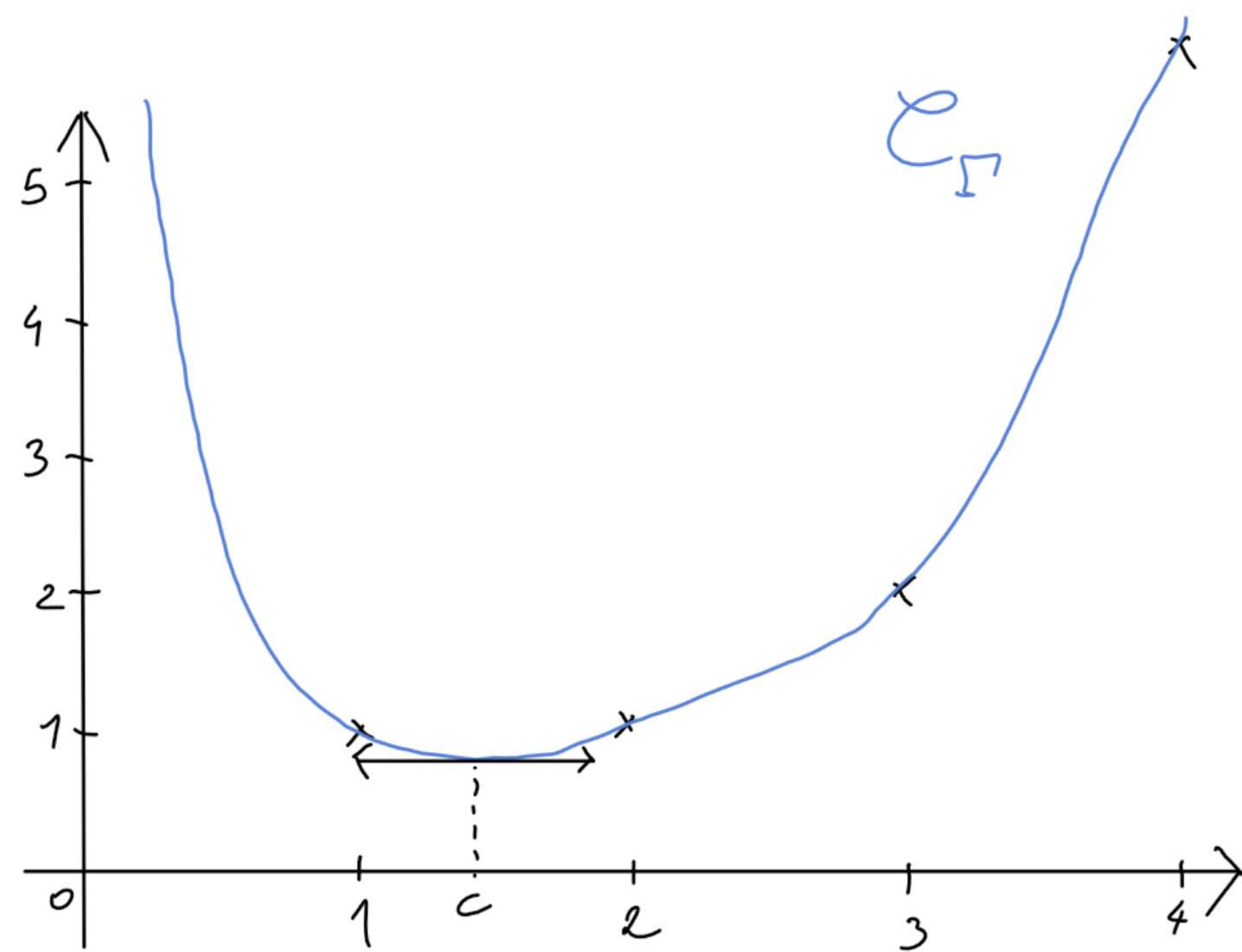
en 1, donc $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$. En

particulier, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable

sur $]1, 2[$, donc d'après le théorème de ROLLE, $\exists c \in]1, 2[$

tel que $\Gamma'(c) = 0$. De là, comme Γ est convexe, Γ' est crois-

sante, donc $\forall x > c, \Gamma'(x) \geq 0$, donc Γ est croissante sur $[c, +\infty[$. Comme $\Gamma(n+1) = n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on



en déduit que $\Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Enfin, $\frac{\Gamma(x)}{x} = \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1} \underbrace{\Gamma(x-1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

5 ▶ Soient $x > 0$ et $y > 0$.

▷ $B(x, y) = B(y, x)$ par simple changement de variable $u = 1-t$.

$$\begin{aligned} \triangleright B(x+1, y) &= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{t}{1-t}\right)^x}_{C^1} \underbrace{(1-t)^{x+y-1}}_{C^0} dt = \left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y} \right]_{t \rightarrow 0^+}^{t \rightarrow 1^-} - \int_0^1 x \frac{1-t+t}{(1-t)^2} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y} dt \\ &= 0 + \frac{x}{x+y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{x}{x+y} B(x, y). \end{aligned}$$

6 ▶ Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $g_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{0 < t \leq n}$. Pour tout $t > 0$, $g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^{x-1} e^{-t}$, et pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $|g_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < +\infty$ (en effet, par convexité de $\exp$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq 1+u$, donc

$e^{t/n} \geq 1 + \frac{t}{n}$, donc $e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.) D'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$. Or :

$$\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \stackrel{u = \frac{t}{n}}{\downarrow} = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x B(x, n+1) = n^x \frac{n}{x+n} B(x, n)$$

$$= n^x \frac{n}{x+n} \frac{n-1}{x+n-1} B(x, n-1) = \dots = n^x \frac{n!}{(x+1) \dots (x+n)} B(x, 1) = n^x \frac{n!}{(x+1) \dots (x+n)} \int_0^1 t^{x-1} dt$$

$$= n^x \frac{n!}{(x+1) \dots (x+n)} \frac{1}{x}.$$

$$\text{Donc } \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x).$$