

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, X une variable aléatoire réelle intégrable. Il existe une variable aléatoire Z presque sûrement unique telle que Z est $\mathcal{B}$ -mesurable et $\forall B \in \mathcal{B}$, $E[X 1_B] = E[Z 1_B]$. De plus Z est intégrable, on la note $E[X|\mathcal{B}]$, et on l'appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.

► **UNICITÉ** : Soient Y et Y' intégrables, $\mathcal{B}$ -mesurables telles que $\forall B \in \mathcal{B}$, $E[Y 1_B] = E[X 1_B] = E[Y' 1_B]$. Les événements $\{Y > Y'\}$ et $\{Y < Y'\}$ sont alors dans $\mathcal{B}$, donc $E[(Y - Y') 1_{Y > Y'}] = 0$ et $E[(Y' - Y) 1_{Y < Y'}] = 0$, donc $(Y - Y') 1_{Y > Y'} = (Y' - Y) 1_{Y < Y'} = 0$ presque sûrement, donc $Y = Y'$ presque sûrement.

► **EXISTENCE** :

► Cas $X \in L^2$: l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace de Hilbert, il est donc convexe, fermé et non vide dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On peut donc considérer le projeté Z de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Elle est bien $\mathcal{B}$ -mesurable, intégrable, et pour tout $B \in \mathcal{B}$, $E[(X - Z) 1_B] = \langle X - Z | 1_B \rangle = 0$ car $X - Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})^\perp$, donc $E[X 1_B] = E[Z 1_B]$.

► Cas $X \geq 0$: pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = X \wedge n = \inf(X, n)$. Comme X_n est bornée, elle est L^2 , donc on dispose de $Y_n = E[X_n | \mathcal{B}]$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, comme $X_{n+1} \geq X_n$, le lemme suivant montre que $Y_{n+1} \geq Y_n$.

Lemme : Soit $(U, V) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$.

1► $E[\cdot | \mathcal{B}]$ est linéaire

2► Si $U \geq 0$ p.s., alors $E[U | \mathcal{B}] \geq 0$ p.s. (en particulier, si $U \geq V$ p.s., alors $E[U | \mathcal{B}] \geq E[V | \mathcal{B}]$ p.s.)

3► $E[E[U | \mathcal{B}]] = E[U]$

Preuve : 1► $E[\cdot | \mathcal{B}]$ est une projection

2► Par l'absurde, supposons que $P(E[U | \mathcal{B}] < 0) > 0$. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que $P(E[U | \mathcal{B}] < -\epsilon) > 0$.

Or $\{E[U | \mathcal{B}] < -\epsilon\} \in \mathcal{B}$ donc $0 \leq E[U 1_{E[U | \mathcal{B}] < -\epsilon}] = E[E[U | \mathcal{B}] 1_{E[U | \mathcal{B}] < -\epsilon}] < -\epsilon < 0$ p.s. : c'est absurde.

3► $E[E[U | \mathcal{B}]] = E[E[U | \mathcal{B}] 1] = E[U \cdot 1] = E[U]$.
 $\hookrightarrow \mathcal{B}$ -mesurable

Posons $Y = \limsup_{n \rightarrow +\infty} Y_n$ qui est $\mathcal{B}$ -mesurable et intégrable. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, par convergence monotone et par définition de Y_n ,

$$E[Y 1_B] = \lim_{n \rightarrow +\infty} E[Y_n 1_B] = \lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n 1_B] = E[X 1_B]$$

► Cas $X \in L^1$: On écrit $X = X^+ - X^-$. Comme $X^\pm \geq 0$, on dispose de $Z := E[X^+ | \mathcal{B}] - E[X^- | \mathcal{B}]$: elle est $\mathcal{B}$ -mesurable, intégrable, et $\forall B \in \mathcal{B}$, $E[X 1_B] = E[X^+ 1_B] - E[X^- 1_B] = E[E[X^+ | \mathcal{B}] 1_B] - E[E[X^- | \mathcal{B}] 1_B] = E[Z 1_B]$.