

L'application $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
 $M \mapsto e^M$

- Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $S = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^tP$. On a alors $\exp(S) = P \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) {}^tP$ (par continuité de la multiplication matricielle), donc $\text{Sp}(\exp(S)) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\} \in \mathbb{R}_+^*$, et $\exp(S) \in S_n(\mathbb{R})$, donc $\exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Notre application est donc bien définie, et continue car $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'est.
- Montrons qu'elle est surjective. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $B = P \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP$. Comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \in \mathbb{R}_+^*$, donc on peut poser $A = P \text{Diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n)) {}^tP \in S_n(\mathbb{R})$, qui vérifie $\exp(A) = B$.
- Montrons qu'elle est injective : soit $(A, A') \in S_n(\mathbb{R})^2$, supposons que $\exp(A) = \exp(A')$. D'après le théorème spectral, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que $A = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$. Notons Q le polynôme interpolateur de LAGRANGE tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. On a :

$$\begin{aligned} Q(\exp(A')) &= Q(\exp(A)) = Q(P \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}) = P Q(\text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})) P^{-1} \\ &= P \text{Diag}(Q(e^{\lambda_1}), \dots, Q(e^{\lambda_n})) P^{-1} = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} = A. \end{aligned}$$

Comme A' commute avec $Q(\exp(A')) = A$, on en déduit que A et A' sont codiagonalisables. De là, il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $A = R \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) R^{-1}$ et $A' = R \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) R^{-1}$. Alors $R \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) R^{-1} = \exp(A) = \exp(A') = R \text{Diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}) R^{-1}$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$, donc $\lambda_i = \mu_i$ par injectivité de l'exponentielle réelle. Ainsi, $A = A'$.

- Montrons que $\exp^{-1}$ est continue : soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} \in S_n^{++}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in S_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall p \in \mathbb{N}$, $B_p = \exp(A_p)$ et $B = \exp(A)$. Montrons que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} A$. Remarquons que $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge, donc est bornée pour $\|\cdot\|_2$ (NB : toutes les normes sont ici équivalentes, on prend celle qui nous arrange), et par continuité de l'inversion matricielle, $(B_p^{-1})_{p \in \mathbb{N}}$ converge (vers B^{-1}), donc est aussi bornée pour $\|\cdot\|_2$. Or pour tout $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$,

$$\|M\|_2 = \left(\sqrt{\rho({}^t M M)} \right) = \sqrt{\rho(M^2)} = \rho(M) = \max \text{Sp}(M)$$

En effet, soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$; il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $P M P^{-1} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, posons $y = P x = (y_1, \dots, y_n)$. On a :

$$\|M x\|_2 = \|P^{-1} \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P x\|_2 = \|P^{-1} \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y\|_2 = \|P^{-1}(\lambda_1 y_1, \dots, \lambda_n y_n)\|_2$$

$$\begin{aligned} &= \|(\lambda_1 y_1, \dots, \lambda_n y_n)\|_2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \cdot \|y\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \|P x\|_2 = \max \text{Sp}(M) \cdot \|x\|_2 \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\text{car } P \in O_n(\mathbb{R}) \quad \text{car } M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ donc } \text{Sp}(M) \subseteq \mathbb{R}_+^* \quad \text{car } P \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

donc $\|M\|_2 \leq \max \operatorname{Sp}(M)$, et le cas d'égalité est atteint pour $x = (\delta_{i,i_0})_{1 \leq i \leq n}$ où $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est tel que $\lambda_{i_0} = \max \operatorname{Sp}(M)$.

Il existe donc $C > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Sp}(B_p) \in]0, C[$. De même, il existe $C' > 0$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Sp}(B_p^{-1}) \in]0, \frac{1}{C'}[$. Comme $\forall p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Sp}(B_p^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \operatorname{Sp}(B_p)\}$, on en déduit que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Sp}(B_p) \leq K := [C', C] \subset]0, +\infty[$ (quitte à prendre C plus grand, supposons $C' < C$). Comme $\forall p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Sp}(A_p) = \ln(\operatorname{Sp}(B_p))$, on a $\operatorname{Sp}(A_p) \in [\ln(C'), \ln(C)]$.

Ainsi, $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_2$, donc admet une valeur d'adhérence (d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS dans $B(0, \ln(C))$, qui est compact car fermé borné en dimension finie).

Notons $\bar{A}$ cette valeur d'adhérence. Il existe $(A_{q(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ extraite de $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{A}$. Par continuité de $\exp$, $B_{q(p)} = \exp(A_{q(p)}) \longrightarrow \exp(\bar{A})$, donc $\exp(\bar{A}) = B = \exp(A)$. Par injectivité de $\exp$ sur $S_n(\mathbb{R})$, il vient $\bar{A} = A$. ■

(Rq : $\bar{A} \in \overline{S_n(\mathbb{R})} = S_n(\mathbb{R})$)