

THÉORÈME DE GAUSS-LUCAS & UNE APPLICATION

Thm (de GAUSS-LUCAS): Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2 . On a $Z_{\mathbb{C}}(P') \subset \text{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P))$ où, si $Z_{\mathbb{C}}(P) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$,
alors: $\text{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P)) = \left\{ \sum_{k=1}^r \lambda_k \alpha_k : (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in [0,1]^r, \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1 \right\}$.

Appli: 7 est le plus grand entier $n \geq 2$ tel que: $Z_{\mathbb{C}}((X+1)^n - X^n - 1) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} \cup \{0\}$.

Preuve du thm: Écrivons $P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Classiquement, $P' = \sum_{k=1}^r m_k (X - \alpha_k)^{m_k-1} \prod_{\ell \neq k} (X - \alpha_{\ell})^{m_{\ell}}$
et $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{X - \alpha_k}$. Soit z une racine de P' . Si $z \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, alors il n'y a rien à faire: supposons que $z \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.

On a alors $0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{z - \alpha_k} \times \frac{\overline{z - \alpha_k}}{\overline{z - \alpha_k}} = \sum_{k=1}^r m_k \frac{\overline{z - \alpha_k}}{|z - \alpha_k|^2}$ donc $0 = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{|z - \alpha_k|^2} (z - \alpha_k)$. Ainsi,

$$z = \sum_{k=1}^r \lambda_k \alpha_k \in \text{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P)) \quad \text{où} \quad \lambda_k = \frac{m_k}{|z - \alpha_k|^2} \left(\sum_{\ell=1}^r \frac{m_{\ell}}{|z - \alpha_{\ell}|^2} \right)^{-1} \in [0,1]$$

Application: Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$. Remarquons que $P_2 = 2X$. Prenons $n \geq 3$. On a alors
 $P'_n = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}$. Remarquons que $P'_n(0) \neq 0$. De là, considérant une racine z de P'_n qui donc est non nulle, on
a $P'_n(z) = 0$ donc $\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1} = 1$. Il existe donc $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ tel que $\frac{z+1}{z} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right)$. Comme $z \neq z+1$, on a $k \neq 0$.

En résolvant l'équation $\frac{z+1}{z} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right)$ pour z_k , on montre que (puisque $k \neq 0$):

$$z_k = \left[\exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right) - 1 \right]^{-1} = \frac{\exp\left(-\frac{ik\pi}{n-1}\right)}{\exp\left(\frac{ik\pi}{n-1}\right) - \exp\left(\frac{ik\pi}{n-1}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{ik\pi}{n-1}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}$$

et $Z_{\mathbb{C}}(P'_n) \subseteq \{z_k : 1 \leq k \leq n-2\}$. Les implications précédentes étant des équivalences, cette inclusion est une
égalité. Si $Z_{\mathbb{C}}(P'_n) \subseteq S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$, alors d'après le théorème de GAUSS-LUCAS, $Z_{\mathbb{C}}(P'_n) \subseteq B(0,1)$. Si $n \geq 8$, alors
 $|z_1| = \left| 2 \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right) \right|^{-1} > \left| 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right|^{-1} = 1$, ce qui n'est pas. Ainsi $n \leq 7$.

Vérifions que P_7 convient: comme $P_7(0) = P_7(-1) = 0$, on pose la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{7}[(X+1)^7 - X^7 - 1] = X^6 + 3X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X & X(X+1) = X^2 + X \\ 2X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X & X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \\ 3X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X & \\ 2X^3 + 3X^2 + X & \\ X^2 + X & \end{array}$$

(⚠ Erreur de signe dans le FGN!)

Donc $P_7 = 7X(X+1)(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = 7X(X+1)X^2 \left(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3 \right)$
 $= 7X(X+1)X^2 \left(\left(X + \frac{1}{X}\right)^2 - 2 + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3 \right) = 7X(X+1)X^2 \left(X + \frac{1}{X} + 1 \right)^2 = 7X(X+1)(X^2 + X + 1)^2$. Soit z une ra-
cine de P_7 distincte de 0 et -1. Nécessairement, $z^2 + z + 1 = 0$, donc $z \in \{j, j^2\}$. Finalement,
 $Z_{\mathbb{C}}(P_7) = \{0, -1, j, j^2\} \subseteq S^1 \cup \{0\}$

⚠ Remarque (à savoir absolument en cas de questions): cette dernière étape peut être court-circuitée en connaissant le résul-
tat: on vérifie que 0, -1, j, j^2 sont racines de P_7 (on en a trouvé 4 sur 7), et j et j^2 sont racines de P'_7 (elles sont donc
au moins doubles dans P_7 : on en a trouvé 6 sur 6). De là, on a directement le résultat et la factorisation ci-dessus.