

Système de Lotka-Volterra

[On trouvera ce développement dans le Berthelin, *Équations différentielles*, p.204, avec une présentation un peu différente.]

Soient $a, b, c, d > 0$, $(E) : \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$, $x_0, y_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de (E) satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$. On donnera une intégrale première de (E) ainsi que son portait de phase.

► Comme (E) est un système autonome réduit défini par une fonction de classe C^1 , le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale $(I, (x, y))$ satisfaisant les conditions initiales. Nous allons montrer que $I = \mathbb{R}$ et que (x, y) est périodique.

► Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $x(t_1) = 0$. Alors $t \mapsto (0, y(t_1)\exp(-c(t-t_1)))$ est une solution de (E) et coïncide avec (x, y) en t_1 . Par unicité dans le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ et par maximalité de (x, y) , ces deux solutions sont égales sur I , *a fortiori* en t_0 , ce qui est impossible car $x(t_0) = x_0 > 0$. Ainsi, $\forall t \in I$, $x(t) \neq 0$, puis $x(t) > 0$ par continuité. De même, $\forall t \in I$, $y(t) > 0$.

► Déterminons une intégrale première : on a $\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$ et $x, y > 0$ donc $\begin{cases} x'/x = a - by \\ y'/y = -c + dx \end{cases}$. En effectuant un produit en croix, on obtient $\frac{x'}{x}(-c + dx) = \frac{y'}{y}(a - by)$, donc $H : (x, y) \mapsto dx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$ est une intégrale première de (E) (NB : $x, y > 0$)

► Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, posons $\mathcal{F}_{\alpha, \beta} : u \mapsto \beta u - \alpha \ln(u)$, de sorte que $H(x, y) = \mathcal{F}_{a, d}(x) + \mathcal{F}_{c, b}(y)$. Pour tout $u > 0$, $\mathcal{F}'_{a, d}(u) = d - a/u = 0 \Leftrightarrow u = a/d$, et $\mathcal{F}''_{a, d}(u) = a/u^2 > 0$, donc $\mathcal{F}_{a, d}$ est convexe et admet un unique minimum atteint en a/d . De même, $\mathcal{F}_{c, b}$ est convexe et admet un unique minimum atteint en c/b .

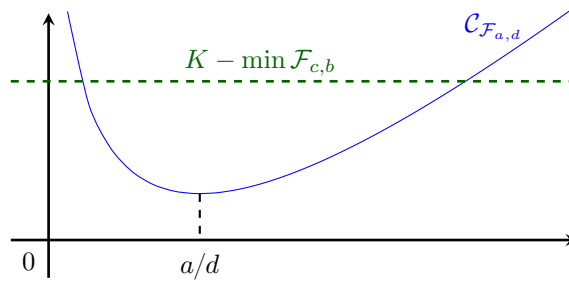


FIGURE 4.1 – Allure du graphe de $\mathcal{F}_{a,d}$

Par ailleurs, (x, y) est contenue dans une ligne de niveau de H , *i.e.* il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $H(x(t), y(t)) = \mathcal{F}_{a, d}(x(t)) + \mathcal{F}_{c, b}(y(t)) = K$. De là, $\forall t \in I$, $\mathcal{F}_{a, d}(x(t)) \leq K - \min \mathcal{F}_{c, b}$. De là, x est bornée (*Note : la figure ci-dessous est suffisante lors d'une présentation à l'oral. Pour donner un argument précis, on peut dire que x n'était pas bornée, étant positive, on pourrait la faire diverger vers $+\infty$. Or $\mathcal{F}_{a, d}$ tend vers $+\infty$ et $+\infty$, contredisant la majoration de $\mathcal{F}_{a, d}(x(t))$ pour tout $t \in I$.*) On montre que même que y est bornée, donc (x, y) est bornée. D'après le théorème des bouts, $I = \mathbb{R}$.

► Les isoclines verticales sont :

$$I_0 = \{(x, y) \mid ax - bxy = 0\} = \{(x, y) \mid x(a - by) = 0\} = \{x = 0\} \cup \left\{y = \frac{a}{b}\right\}$$

$$I_\infty = \{(x, y) \mid -cy + dxy = 0\} = \{(x, y) \mid y(-c + dx) = 0\} = \{y = 0\} \cup \left\{x = \frac{c}{d}\right\}$$

et leurs points d'intersection $(0, 0)$ et $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ sont les points stationnaires de (E) . On découpe le quart de plan selon les quatre régions A, B, C et D représentées sur la figure ci-dessous (attention aux frontières). Dans ces régions, on connaît la direction globale du champ de vecteurs, *i.e.* les sens de variation de x et y , comme représenté avec les flèches sur la figure ci-dessous.

► Supposons que $(x_0, y_0) \in A$ (NB : les trois autres régions ne sont pas bornées comme l'est A , donc on pourrait se dire qu'on perd en généralité en faisant cette hypothèse, mais il faut également se souvenir qu'on a montré que la solution est bornée!). Montrons par l'absurde qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in B$: supposons le contraire. Dès lors, comme $\forall t > t_0, (x(t), y(t)) \in A$, on a $x'(t) > 0$ et $y'(t) < 0$, donc x et y sont monotones et bornées sur $]t_0, +\infty[$, donc d'après le théorème de la limite monotone, x et y convergent en $+\infty$, nécessairement vers un point stationnaire de (E) . Par croissance de x , $\lim_{+\infty} x \geq x_0 > 0$, donc $\lim_{+\infty} (x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. par décroissance de y , $\frac{a}{b} = \lim_{+\infty} y \leq y_0 \leq \frac{a}{b}$, donc y est constante égale à a/b à partir t_0 . Comme $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \notin A$, et $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in A$, nécessairement $x(t) \neq c/d$, puis $x(t) < c/d$, donc $y'(t_0) = -cy(t_0) + dx(t_0)y(t_0) < 0$, ce qui contredit la constance de y à partir de t_0 .

► Ainsi, il existe $t_1 > t_0$ tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in B$. On montre de même qu'il existe $t_5 > t_4 > t_3 > t_2 > t_1$ tels que $(x(t_2), y(t_2)) \in C$, $(x(t_3), y(t_3)) \in D$, $(x(t_4), y(t_4)) \in A$ et $(x(t_5), y(t_5)) \in B$. Plus précisément, prenons pour t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5 les instant où (la trajectoire de) (x, y) traverse la frontière entre deux régions, *i.e.* les isoclines.

Pour conclure à la périodicité de (x, y) , il suffit de montrer que $p_1 \stackrel{\text{def}}{=} (x(t_1), y(t_1)) = p_5 \stackrel{\text{def}}{=} (x(t_5), y(t_5))$, autrement dit $y(t_1) = y(t_5)$. Comme ces points précédents appartiennent à la trajectoire de (x, y) , laquelle est contenue dans une ligne de niveau de H ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{a,d}(x(t_1)) + \mathcal{F}_{c,b}(y(t_1)) &= H(x(t_1), y(t_1)) \\ &= H(x(t_5), y(t_5)) = \mathcal{F}_{a,d}(x(t_5)) + \mathcal{F}_{c,b}(y(t_5)) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}_{c,b}(y(t_1)) = \mathcal{F}_{c,b}(y(t_5))$. Comme $p_1, p_5 \in A$, $y(t_1), y(t_5) < a/b$, mais $\mathcal{F}_{c,b}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, a/b[$, donc elle y est injective, donc $y(t_1) = y(t_5)$. $\square$

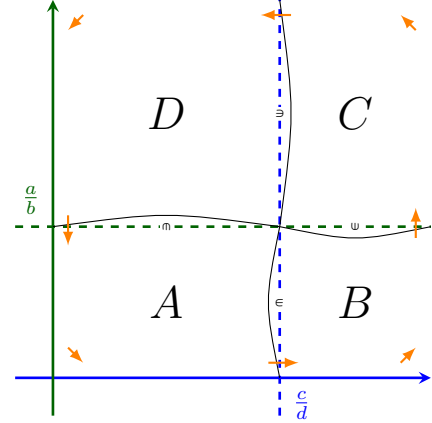


FIGURE 4.2 – Découpage du quart de plan en régions

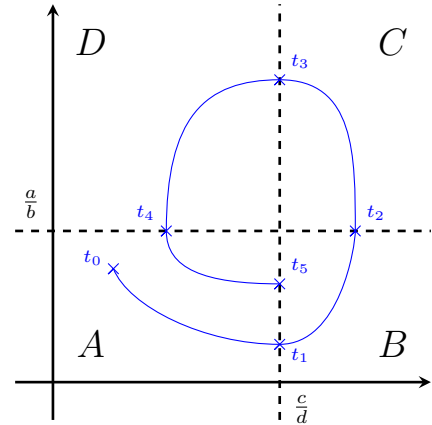


FIGURE 4.3 – Instants t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5

► Recasages : 220 (Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.), 267 (Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.)

► C'est un peu long à présenter : il est souhaitable, dans la fin de la preuve, de faire un grand dessin au tableau, et le compléter au fur et à mesure, ce qui permet d'écrire moins de texte au tableau et de gagner du temps.