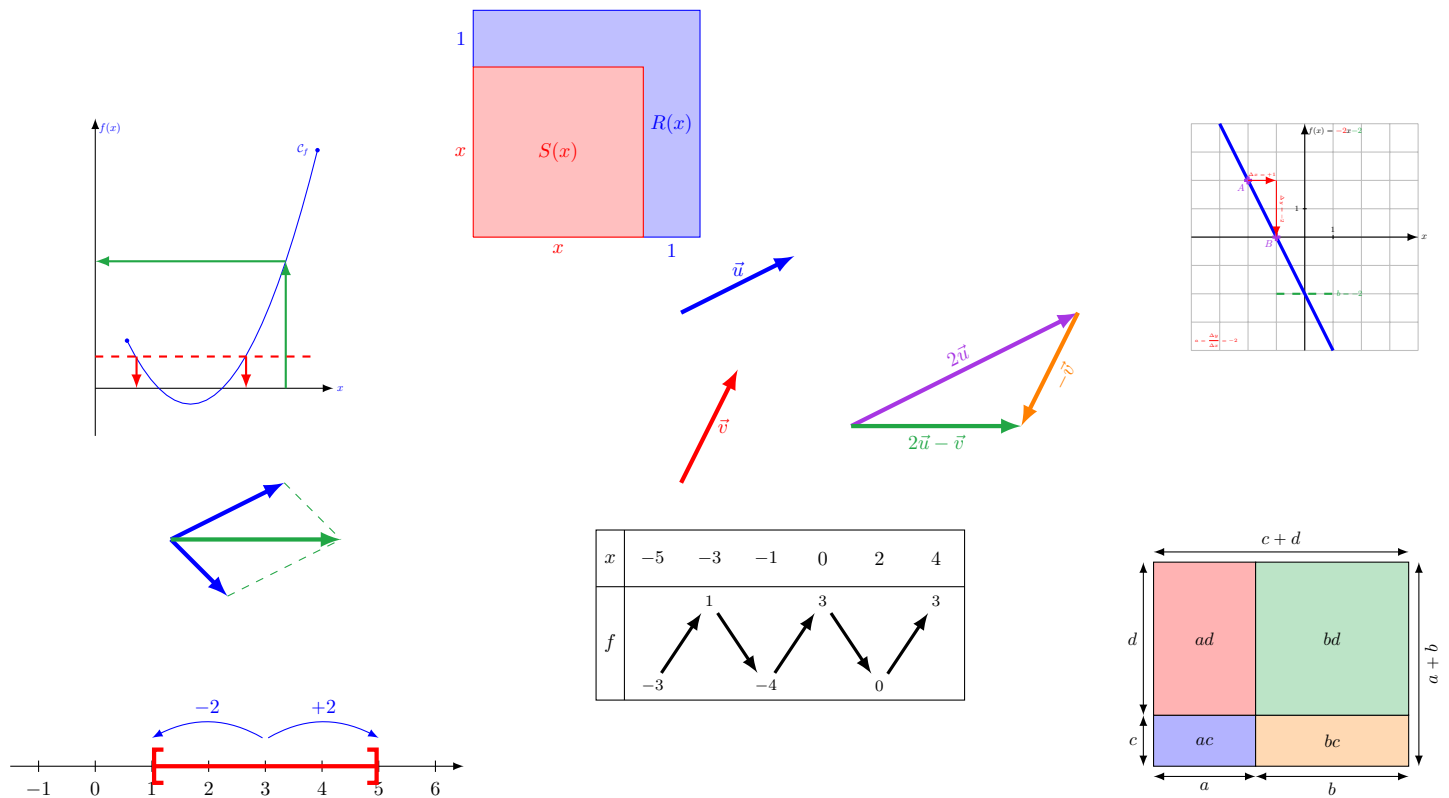
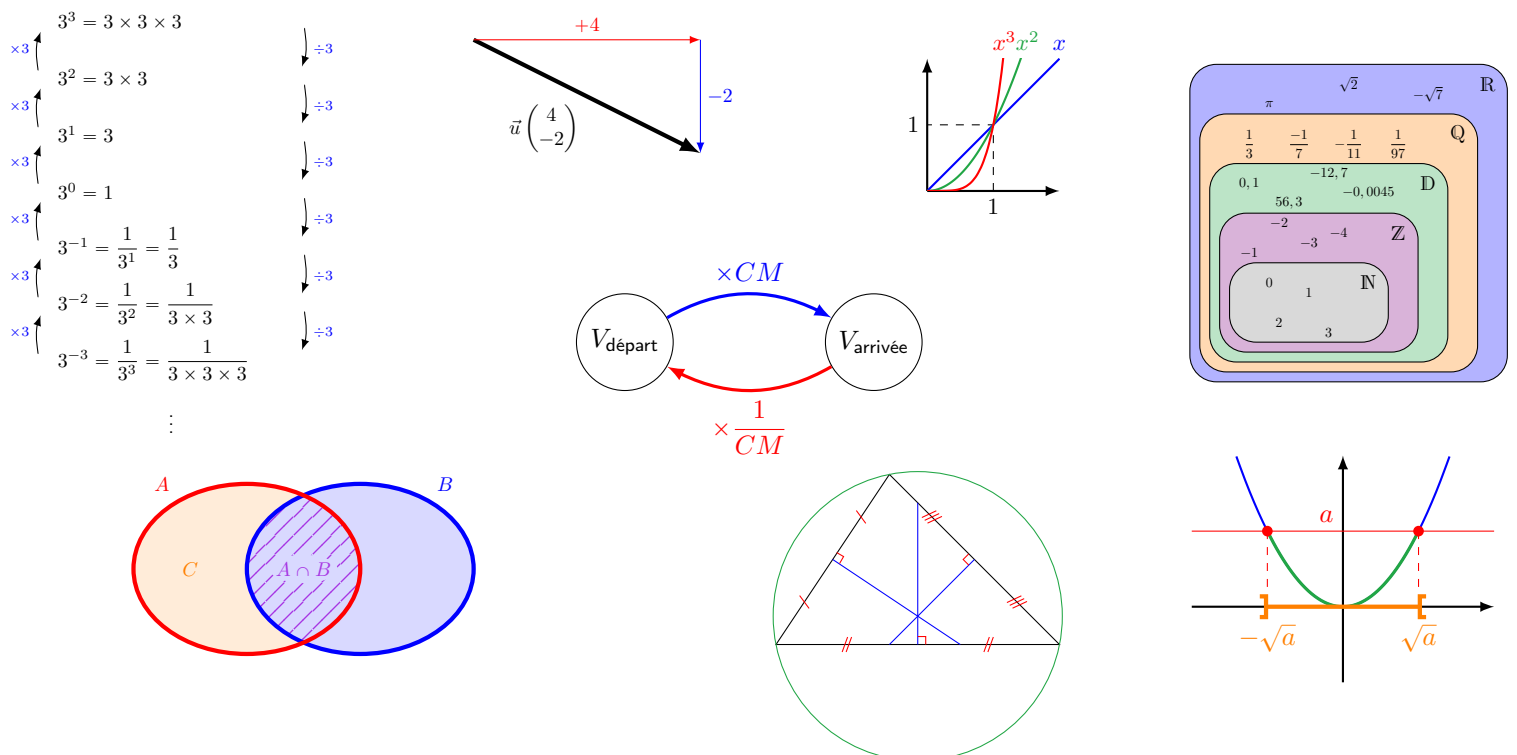




Mathématiques

Seconde GT – Cours complet



Cours de seconde GT

N1	Entiers relatifs et fractions	3
1	Nombres entiers relatifs	4
2	Nombres rationnels	6
3	Inverse	7
	Exercices	8
	Exercices en autonomie	9
C1	(In)équations de degré 1	11
1	Notion d'équation	12
2	Équations du premier degré	13
3	Inéquations du premier degré	14
	Exercices	15
N2	Nombres décimaux et puissances	19
1	Nombres décimaux	20
2	Puissances	21
	Exercices	23
G1	Notion de vecteur	25
1	L'objet « vecteur » comme translation	26
2	Manipulations de vecteurs	27
3	Vecteurs directeurs d'une droite	31
	Exercices	33
C2	Développer et réduire	37
1	Réduire	38
2	Développer	39
3	Identités remarquables	40
	Exercices	41
D1	Proportions	43
1	Rappels : vocabulaire statistique	44
2	Proportions et pourcentages	44
3	Tableaux croisés d'effectifs	47
	Exercices	49
F1	Généralités sur les fonctions	53
D2	Évolutions	55
1	Évolutions simples	56
2	Évolutions successives	59
	Exercices	60

N1 Entiers relatifs et fractions

Programme

Automatismes

Calcul numérique et algébrique

- ▶ Comparer deux nombres directement ou par calcul :
 - ▶ de leur différence ;
 - ▶ s'ils sont strictement positifs, de leur quotient.
- ▶ Effectuer des opérations et des comparaisons entre des fractions simples.
- ▶ Effectuer un calcul littéral élémentaire :
 - ▶ expressions multiplicatives : $(-1) \times a = \frac{a}{-1} = -a$, $\frac{ab}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b$, $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$, $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$,
 $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Géométrie

- ▶ Sur une droite graduée, repérer ou placer un point dont l'abscisse est un nombre relatif.

Nombres et calculs, algèbre

Arithmétique

Contenus

- ▶ Notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Capacités attendues

- ▶ Présenter les fractions sous forme irréductible.

1 – Nombres entiers relatifs

A – Méthodes de calcul

Opposé

Définition 1

L'**opposé** d'un nombre n est le nombre qui additionné à n donne 0.

Exemple 2

- ▶ L'opposé de 7 est (-7) car $7 + (-7) = 0$.
- ▶ L'opposé de (-4) est 4 car $(-4) + 4 = 0$.

Nombres entiers relatifs

Définition 3

Les **nombres entiers relatifs** sont les nombres entiers naturels et leurs opposés. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs. Autrement dit :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Méthode 4 (Les rouages de l'addition de nombres relatifs)

- ▶ Additionner deux nombres négatifs, sur des exemples :

$$(-4) + (-6) = (-10) \quad (-1) + (-12) = (-13) \quad (-100) + (-20) + (-7) = (-127)$$

- ▶ Additionner un nombre positif et un négatif :

- ▶ Cas où le terme positif est plus important :

$$5 + (-3) = 2 \quad 12 + (-2) = 10 \quad (-27) + 127 = 100 \quad (-1) + 6 = 5$$

- ▶ Cas où le terme négatif est plus important :

$$(-7) + 2 = (-5) \quad (-13) + 3 = (-10) \quad 45 + (-345) = -300 \quad 12 + (-22) = (-10)$$

- ▶ Exemple avec plus de deux termes :

$$3 + (-8) + (-42) + 17 = 3 + 17 + (-8) + (-42) = 20 + (-50) = (-30)$$

Méthode 5

Soustraire un nombre à un autre c'est ajouter son opposé.

$$(-2) - (-3) = (-2) + 3 = 1$$

Exercices conseillés : 1

Méthode 6 (Les rouages de la multiplication de nombres relatifs)

- ▶ Facteurs de signes opposés :

$$(-4) \times 5 = (-20) \quad (-3) \times 7 = (-21) \quad 6 \times (-6) = (-36) \quad (-9) \times 5 = (-45)$$

- Facteurs négatifs :

$$(-3) \times (-6) = 18 \quad (-2) \times (-6) = 12 \quad (-5) \times (-5) = 25 \quad (-6) \times (-7) = 42$$

Exercice conseillé : 2, 3, 4

B – D'où viennent ces méthodes ?

Remarque 7 (Les rouages de l'addition de nombres relatifs)

- Additionner deux nombres négatifs :

$$(-4) + (-6) + 6 + 4 = 0 \quad \text{donc} \quad (-4) + (-6) = (-10)$$

- Additionner un nombre positif et un négatif :

$$(-7) + 2 = (-5) + (-2) + 2 = (-5)$$

$$(-3) + 5 = (-3) + 3 + 2 = 0 + 2 = 2$$

Remarque 8

Les soustractions $0 - 3$, $1 - 4$, ou $2 - 5$ ont toutes pour résultat (-3) .

Remarque 9 (Les rouages de la soustraction de nombres relatifs)

Nous avons dit que soustraire un nombre à un autre c'est ajouter son opposé.

$$4 - 3 = 4 + 0 - 3 = 1$$

$$4 - (-3) = 4 - (0 - 3) = 4 - 0 + 3 = 7$$

Ici, on a utilisé la distributivité !

Remarque 10 (Les rouages de la multiplication de nombres relatifs)

$$(-4) \times 5 = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = (-20)$$

$$(-3) \times (-6) = (-3) \times (0 - 6) = (-3) \times 0 - (-3) \times 6 = 0 - (-18) = 18$$

Remarque 11

On peut décrire les nombres relatifs par leur signe et leur distance à zéro.

$$(-7) = (-1) \times 7 \quad 9 = 1 \times 9$$

(Ici on utilise la multiplication par 1 ou (-1) pour donner le signe.)

Ce genre de décomposition est particulièrement utile pour ne pas faire d'erreur de signe.

2 – Nombres rationnels

Nombres rationnels

Définition 12

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ non nul.
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Exemple 13

- ▶ $\frac{3}{7}$ est rationnel.
- ▶ -12 est rationnel. On peut l'écrire comme $\frac{-12}{1}$.
- ▶ $2,5$ est rationnel. On peut l'écrire comme $\frac{25}{10}$.
- ▶ 1 est rationnel. On peut l'écrire comme $\frac{1}{1}$.

Propriété 14

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction égale.

Exemple 15

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{14}$$

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{\times 5} \frac{15}{35}$$

$$\frac{18}{20} \xrightarrow{\div 2} \frac{9}{10}$$

$$\frac{320}{450} \xrightarrow{\div 10} \frac{32}{45}$$

Méthode 16 (Addition/Soustraction de deux rationnels)

- 1▶ On ramène les deux fractions au même dénominateur.
- 2▶ On additionne/soustrait les numérateurs.

Exemple 17

- ▶ Pour calculer $\frac{6}{2} + \frac{3}{5}$, on peut écrire

$$\frac{6}{2} + \frac{3}{5} = \frac{6 \times 5}{2 \times 5} + \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{30}{10} + \frac{6}{10} = \frac{36}{10}$$

- ▶ Pour calculer $\frac{1}{6} - \frac{3}{8}$, on peut écrire

$$\frac{1}{6} - \frac{3}{8} = \frac{1 \times 8}{6 \times 8} - \frac{3 \times 6}{8 \times 6} = \frac{8}{48} - \frac{18}{48} = \frac{-10}{48}$$

Exercice conseillé : 5

Méthode 18 (Multiplication de deux rationnels)

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple 19

Par exemple, $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$.

Exercice conseillé : 6

Propriété 20

La racine carrée de 2 et π ne sont pas des nombres rationnels.

3 – Inverse

Définition 21

Inverse

Soit x un nombre réel non nul. **L'inverse** de x est le nombre qui multiplié à x donne 1.
Autrement dit c'est la solution de la multiplication à trou : $x \times \dots = 1$

Exemple 22

- ▶ L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ car $3 \times \frac{1}{3} = 1$
- ▶ L'inverse de $-\frac{1}{4}$ est -4 .

- ▶ L'inverse de $\frac{2}{5}$ est $\frac{5}{2}$

Remarque 23

Il ne faut pas confondre *inverse* et *opposé*. Par exemple, l'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$, mais son opposé est (-2) .

Notation

L'inverse du nombre x est parfois noté x^{-1} .

Remarque 24

Diviser un nombre par x revient à le multiplier par l'inverse de x .

En effet $a \div x = a \times \frac{1}{x} = a \times x^{-1}$

Cela sert notamment à simplifier des calculs (des fractions de fractions par exemple).

Exemple 25

- ▶ $24 \div \frac{1}{4} = 24 \times 4 = 96$. Car 4 est l'inverse de $\frac{1}{4}$.
- ▶ $27 \times \frac{1}{3} = 27 \div 3 = 9$
- ▶ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

Exercices conseillés : 7, 8, 9, 10, 11

Exercices

Exercice 1

- a► $3 + (-4)$ f► $5 - (-4)$
 b► $5 + (-7)$ g► $7 - (-12)$
 c► $(-9) + (-2)$ h► $(-9) - (-4)$
 d► $9 + (-4)$ i► $17 - 8 - 8$
 e► $17 + (-28)$

Exercice 2

- a► $5 \times (-4)$ c► $(-9) \times (-5)$
 b► $7 \times (-12)$

Exercice 3

- a► $2 - 2 \times 5$ c► $7 \times 3 - 3 \times 2$
 b► $12 - 8 + 7 - (-5) + 3$

Exercice 4

- a► $(-5) \times 3 + 2 - 2 \times (-4)$
 b► $17 \times (-3) + (2 \times (-4)) \times 2$
 c► $(5 - 6) \times (-8) \div 4$

Exercice 5

- a► $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ b► $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ c► $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ d► $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

Exercice 6

- a► $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ b► $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ c► $\frac{1}{2} \times \frac{-3}{4}$ d► $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$

Exercice 7

Donner les inverses des nombres suivants.

- a► 3 b► 5 c► (-4) d► 1,5 e► $\frac{1}{3}$ f► $\frac{3}{5}$

Exercice 8

Donner les inverses des nombres suivants.

- a► 10 c► 0,04 e► $\frac{-7}{6}$
 b► 1 d► $\frac{1}{4}$

Exercice 9

Calculer :

- a► $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ b► $\frac{3}{5} \times \frac{7}{6}$ c► $\frac{9}{5} \div 4$ d► $\frac{\frac{7}{2}}{\frac{6}{3}}$

Exercice 10

Calculer :

- a► $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{5}}$ b► $\frac{9}{13} \div 4,5$ c► $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{21}{22}}$

Exercice 11

Calculer ou simplifier :

- a► $\frac{12}{11} \div 0,1$ c► $\frac{5}{3} \times 0,6$ e► $\frac{6x+3}{2x+1}$
 b► $\frac{3}{5} \div \frac{-1}{3}$ d► $\frac{1}{7} \div \frac{3}{7}$ f► $\frac{3x^2+5x}{x}$

Exercices en autonomie

Exercice 12

- a► $7 - (-12)$
- b► $(-9) - (-4)$
- c► $17 - 8 - 8$
- d► $9 + (-12)$
- e► $(-29) - 17$
- f► $253 - 188 - 80$

Exercice 13

- a► $9 \times (-4)$
- b► $17 \times (-3)$
- c► $(-6) \times (-8)$

Exercice 14

- a► $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$
- b► $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$
- c► $\frac{2}{5} - \frac{2}{9}$
- d► $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

Exercice 15

- a► $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$
- b► $\frac{5}{8} \times \frac{2}{9}$
- c► $\frac{2}{5} \times \frac{2}{9}$
- d► $\frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5}$

Exercice 16

La moitié d'un gâteau est au frigo. Christine en mange tiers de ce qu'il reste et le remet au frigo. Une heure plus tard, Luc mange la moitié de ce qu'il reste au frigo.

Donner des fractions correspondants aux parts de Luc et de Christine.

C1 (In)équations de degré 1

Programme

Automatismes

Calcul numérique et algébrique

- ▶ Comparer deux nombres directement ou par calcul :
 - ▶ de leur différence ;
 - ▶ s'ils sont strictement positifs, de leur quotient.
- ▶ Effectuer des opérations et des comparaisons entre des fractions simples.
- ▶ Résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$, ou une inéquation du premier degré.

Algèbre

Contenus

- ▶ Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- ▶ Comparaison additive (par différence), comparaison multiplicative (par rapport, pour deux nombres strictement positifs).
- ▶ Ensemble des solutions des équations du type $ax + b = 0$, et des inéquations de la forme $ax + b > 0$.

Capacités attendues

- ▶ Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur rapport (ratio) dans le cas de quantités positives. Interpréter, selon le contexte, cette comparaison en termes de variation additive ou multiplicative.
- ▶ Modéliser un problème par une inéquation.
- ▶ Donner l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré du type $ax = b$, $a + x = b$, $ax + b = cx + d$, d'une inéquation du premier degré du type $ax \geq b$, $a + x \geq b$, $ax + b \geq cx + d$.

1 – Notion d'équation

Vocabulaire

Définition 1

- ▶ Une **équation** est une égalité faisant intervenir (au moins) un nombre de valeur inconnue, justement appelé **inconnue de l'équation**. Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue, et fausse pour d'autres.
- ▶ Trouver une **solution** d'une équation, c'est trouver une valeur que peut prendre l'inconnue pour l'égalité soit vraie.
- ▶ **Résoudre une équation**, c'est déterminer toutes ses solutions.
- ▶ Pour vérifier si une certaine valeur de l'inconnue d'une équation est solution de cette-dernière, on remplace chaque occurrence de l'inconnue par la valeur, et on vérifie si l'égalité est juste. On dit qu'on **substitue** la valeur à l'inconnue.
- ▶ La partie à gauche du signe $=$ est appelée **membre de gauche** de l'équation, et la partie à droite est appelée **membre de droite**.
- ▶ Une équation **du premier degré** est une équation dans laquelle les inconnues sont uniquement multipliées par des nombres et ajoutées entre elles (pas de puissances, pas de fonctions spéciales).

Exemple 2

- ▶ $2x - 1 = 0$ est une équation du premier degré d'inconnue x . L'égalité est vérifiée pour $x = \frac{1}{2}$, mais elle est fausse pour $x = 0$ puisque $2 \times 0 - 1 = -1 \neq 0$.
- ▶ $3y^2 - 1 = 2$ est une équation d'inconnue y qui n'est pas du premier degré. Elle est vraie pour $y = 1$, mais elle est fausse pour $y = 5$ puisque $3 \times 5^2 - 1 = 3 \times 25 - 1 = 74 \neq 2$.

Exercice conseillé : 1

Remarque 3

Il y a plusieurs types d'égalités en mathématiques :

- ▶ les **équations**, comme $2x + 1 = 0$, qui ne sont pas toujours vraies, seulement pour certaines valeurs de x , appelée **inconnue** de l'équation ;
- ▶ les **identités**, comme $3(x + 2) = 3x + 6$, qui sont toujours vraies, quelle que soit la valeur de x , alors appelée **variable** de l'identité.

Remarque 4

Certains concepts mathématiques sont définis comme les solutions d'une certaine équation :

- ▶ L'opposé d'un nombre a est la solution de l'équation $x + a = 0$ d'inconnue x .
- ▶ L'inverse d'un nombre $a \neq 0$ est la solution de l'équation $ax = 1$ d'inconnue x .
- ▶ La fraction $\frac{n}{d}$ est la solution de l'équation $dx = n$ d'inconnue x .
- ▶ La racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ est la solution **positive** de l'équation $x^2 = a$ d'inconnue x .

Définition 5

On dit que deux équations sont **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

Méthode 6 (Manipuler une équation)

Quand on manipule une équation, toute opération effectuée d'un côté doit être appliquée également de l'autre côté.

Par exemple, si on ajoute 2 à gauche, on doit aussi ajouter 2 à droite.

2 – Équations du premier degré**Méthode 7 (Résoudre une équation du premier degré)**

Pour résoudre une équation, il faut la transformer en une autre équation plus simple équivalente. Le plus souvent, l'objectif est d'arriver à la forme $x = a$. Pour cela, on dispose de deux procédures, que l'on peut mélanger :

- **Procédure 1** : Ajouter ou soustraire une même quantité aux deux membres

On peut ajouter ou soustraire aux deux membres une même quantité, qui peut dépendre ou non de l'inconnue.

Présentation 1 : en ligne

$$\begin{aligned} 6x - 2 &= 3x + 4 \\ 6x - 2 - 3x &= 3x + 4 - 3x \\ 3x - 2 &= 4 \\ 3x - 2 + 2 &= 4 + 2 \\ 3x &= 6 \end{aligned}$$

Présentation 2 : avec des flèches

$$\begin{array}{l} -3x \quad \left(\begin{array}{l} 6x - 2 = 3x + 4 \\ 3x - 2 = 4 \end{array} \right) -3x \\ +2 \quad \left(\begin{array}{l} 3x - 2 = 4 \\ 3x = 6 \end{array} \right) +2 \end{array}$$

Présentation 3 : en colonnes

$$\begin{array}{rcl} 6x - 2 & = & 3x + 4 \\ -3x & & -3x \\ \hline 3x - 2 & = & 4 \\ +2 & +2 & \\ \hline 3x & = & 6 \end{array}$$

- **Procédure 2** : Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre

On peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre. Attention : on n'a pas le droit de diviser par une quantité qui dépend de l'inconnue, sauf mention contraire.

Présentation 1 : en ligne

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Présentation 2 : avec des flèches

$$\div 3 \quad \left(\begin{array}{l} 3x = 6 \\ x = 2 \end{array} \right) \div 3$$

Une fois que l'on a déterminé toutes les solutions de l'équation, on écrit {solution n°1, solution n°2, ...}. Par exemple, ici, {2}.

Remarque 8

Dans la présentation en ligne, attention à ne pas oublier les parenthèses quand c'est nécessaire !

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 5x - 3 \\ 2 \times (2x + 4) &= 2 \times (5x - 3) \end{aligned}$$

Application 9

Résoudre les équations suivantes :

a► $x + 7 = 12$

b► $5x = 18$

c► $-x + 3 = 2x - 8$

d► $8(x + 2) = 6x + 3$

e► $4(x - 5) - 6(4 - x) = 12 + 3(1 + x)$

f► $-5(1 - x) = 2$

S'exercer : 3, 4, 5
S'entraîner : 10, 11, 12

3 – Inéquations du premier degré

Définition 10

Inéquation

Une **inéquation** est une inégalité faisant intervenir (au moins) un nombre de valeur inconnue, justement appelé **inconnue de l'inéquation**. Cette inégalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue, et fausse pour d'autres.

Le vocabulaire se transpose des équations aux inéquations.

Exercice conseillé : 2

Il faut changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou on divise par un nombre négatif.

On ne multiplie/divise jamais par du x .

Exemple 11

Réolvons l'inéquation $x - 2 \geq 5$:

$$\begin{array}{c} +2 \quad \left(x - 2 \geq 5 \right) \quad +2 \\ \quad \quad \quad x \geq 7 \end{array}$$

Les solutions sont donc les nombres supérieurs ou égaux à 7.

Exemple 12

Réolvons l'inéquation $\frac{x}{5} \leq 9$:

$$\begin{array}{c} \times 5 \quad \left(\frac{x}{5} \leq 9 \right) \quad \times 5 \\ \quad \quad \quad x \leq 45 \end{array}$$

Les solutions sont donc les nombres inférieurs ou égaux à 45

Exemple 13

Réolvons l'inéquation $-2x \leq 11$:

$$\begin{array}{c} \div (-2) \quad \left(-2x \leq 11 \right) \quad \div (-2) \\ \quad \quad \quad x \geq \frac{11}{-2} \end{array}$$

Les solutions sont donc les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{-11}{2}$.

Exemple 14

Réolvons l'inéquation $-3x + 2 \geq 11$.

$$\begin{array}{c} -2 \quad \left(-3x + 2 \geq 11 \right) \quad -2 \\ \quad \quad \quad -3x \geq 9 \\ \div (-3) \quad \left(-3x \geq 9 \right) \quad \div (-3) \\ \quad \quad \quad x \leq -3 \end{array}$$

Les solutions sont donc les nombres inférieurs ou égaux à -3 .

S'exercer : 6, 7, 8, 9

S'entraîner : 13, 14, 15

Exercices

Appliquer

Exercice 1

Relier chaque nombre aux équations dont il est solution :

- | | |
|--------|---------------------------------|
| 3 • | • $3x - 5 = 1$ |
| 2 • | |
| 0 • | • $(x - 2) \times (2x + 1) = 0$ |
| -0,5 • | |
| -3 • | • $x^2 + 4 = 13$ |

Exercice 2

Relier chaque nombre aux inéquations dont il est solution :

- | | |
|--------|------------------------------------|
| 3 • | • $3x - 5 \geq 1$ |
| 2 • | |
| 0 • | • $(x - 2) \times (2x + 1) \leq 0$ |
| -0,5 • | |
| -3 • | • $x^2 + 4 > 13$ |

S'exercer

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|----------------|----------------|
| ▶ $2x = 16$ | ▶ $3t - 3 = 9$ |
| ▶ $3y - 6 = 0$ | |
| ▶ $z + 7 = 4$ | ▶ $u + 1 = 2u$ |

Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|-----------------|--------------------|
| ▶ $3x > 9$ | ▶ $t - 15 \geq 30$ |
| ▶ $5y < 25$ | |
| ▶ $z + 10 < 16$ | ▶ $-u > 2$ |

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| ▶ $3x + 7 = 0$ | ▶ $3(z + 7) = 9$ |
| ▶ $6 - y = 4$ | ▶ $2t - 8 = 2(t - 4)$ |
| ▶ $2u + 3 = (-2)(5 - u)$ | |
| ▶ $12u + 3 = 4(5 + 3u)$ | |

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|------------------------------|----------------------|
| ▶ $2x + 1 > 3$ | ▶ $2 - t < 5$ |
| ▶ $3y - 2 \leq 7$ | ▶ $5(u + 11) > (-6)$ |
| ▶ $-5z + \frac{1}{2} \geq 3$ | |

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| ▶ $4x - 3 = 2x + 9$ | ▶ $6y - 9 = 3y + 4$ |
| ▶ $8 - (3z + 2) = 5z - 5$ | |
| ▶ $7 + 2(3 - t) = 4t - 1$ | |

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| ▶ $\frac{-9x + 1}{5} > 11$ | ▶ $7z + 3 > 2z - 5$ |
| ▶ $2 - 4y \leq 3$ | ▶ $5t - 3 \leq 8t - 6$ |

Exercice 9

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| ▶ $-5x + 4 > 19$ | ▶ $10 - z \leq 2z - 23$ |
| ▶ $100 - 3y < 34$ | |

S'entraîner

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

$$\triangleright \frac{3x}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\triangleright 0 = -3 - 2y$$

$$\triangleright \frac{z-4}{3} = \frac{z+3}{4}$$

$$\triangleright \frac{3}{4}t - \frac{5}{4} = t + \frac{1}{12}$$

Exercice 11

Alice pense à trois entier naturels consécutifs dont la somme est 135, quel sont ces nombres ?

Exercice 12

Les dépenses d'un service hospitaliers sont de deux types : les charges fixes qui s'élèvent à 1500€ et les charges variables qui s'élèvent à 300€ par patient.

- 1► Écrire en fonction du nombre p de patients le montant des dépenses du service hospitalier.
- 2► Si le service a dépensé 6900€, combien de patients a t-il soigné ?

Exercice 13

Pour prendre un taxi parisien, il faut régler 4,40€ de prise en charge et 1,20€ par kilomètre parcouru. Quelle distance peut on parcourir avec 20€ en poche ?

Exercice 14

Un vendeur de marrons dépense 30€ en marrons chaque jour, et doit payer 15€ d'énergie chaque jour pour alimenter son four. Le prix d'un sachet de marrons est de 2,50€. Combien de sachets de marrons doit vendre le commerçant pour gagner au moins 60€ en un jour ?

Exercice 15

On propose à un agent immobilier deux offres d'emploi.

La société A lui propose un fixe mensuel de 1000 € avec un intéressement de 15% sur montant des ventes effectuées. La société B lui propose un fixe de 600 € avec un intéressement de 25%.

L'agent hésite puis se décide pour la société B . Quel montant minimum de ventes pense-t-il réaliser par mois ?

Exercices en autonomie

Exercice 16

Résoudre les équations suivantes :

$$\triangleright 4x = 0$$

$$\triangleright 3y + 1 = 0$$

$$\triangleright z - (5z + 7) = 2z - 3$$

$$\triangleright 3t + 1 = (-1) + 3t$$

$$\triangleright 2u + 2,5 = \frac{1}{3}(6u + 7,5)$$

Exercice 17

Résoudre les équations suivantes :

$$\triangleright 8x = 4$$

$$\triangleright 6y - 4 = 5$$

$$\triangleright 9z + 9 = 45 - z$$

$$\triangleright (-2t) + 5 = t + 4$$

$$\triangleright \frac{7u}{4} = \frac{16}{14}$$

$$\triangleright x - 1 = 5x + 5$$

Exercice 18

Résoudre les équations suivantes :

$$\triangleright 4x - 5(3 - 2x) = 4 - (2x - 7)$$

$$\triangleright 9y - 3(4 - 3y) = 2 - [35 - 3(4 - 2y)]$$

$$\triangleright 5z - 3[7 - 4(3 - 2z)] = 5(3 - z) - 4$$

$$\triangleright 3t - 5(3 - 2t) = 6t - 15$$

Exercice 19

Résoudre les équations suivantes :

$$\triangleright 7x \geq 0$$

$$\triangleright 5y + 1 \geq 0$$

$$\triangleright z - 4 \geq 3$$

$$\triangleright 2t - 3 \leq 5$$

$$\triangleright u - 7 < 2$$

Exercice 20

Résoudre les équations suivantes :

$$\triangleright 5x + 1 \geq 2x + 3$$

$$\triangleright 3y + 4 \geq 2y + 2$$

$$\triangleright z + 3 \geq (-2) - z$$

$$\triangleright \frac{t}{4} \geq 8$$

$$\triangleright u \geq u + 1$$

$$\triangleright 2u + 18 \geq 2(u + 4)$$

Exercice 21

Mme A a repéré une fuite d'eau sous son évier ce matin à 7h. Pour recueillir l'eau, elle a déposé une bassine qui peut contenir 7L sous l'évier. Il tombe une goutte toute les 6 secondes. Le volume d'une goutte d'eau est de 0,05 mL.

► Mme A peut elle partir travailler et revenir vider la bassine à 19h sans risque de débordement ?

► Déterminer le temps que mettra la bassine à se remplir.

Exercice 22 (Un problème légèrement plus corsé)

Deux forfaits téléphoniques proposent SMS et appels illimités. Dans le forfait de l'opérateur A, qui coûte 9,99€ par mois on a aussi droit à 500Mo de données. Chaque Mo de données supplémentaire utilisé coûtera 0,03€. Dans le forfait de l'opérateur B, qui coûte 12,99€ par mois, on a droit à 1000 Mo de données. Chaque Mo de données supplémentaire coûtera 0,07€.

Déterminer le forfait le plus avantageux en fonction de la quantité de données utilisée chaque mois.

N2 Nombres décimaux et puissances

Programme

Automatismes

Calcul numérique et algébrique

- ▶ Effectuer des opérations sur les puissances.
- ▶ Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, pourcentage).
- ▶ Estimer un ordre de grandeur.
- ▶ S'assurer de la vraisemblance, de la cohérence d'un résultat.
- ▶ Effectuer des conversions d'unités : longueurs, aires, volumes, contenances, durées, vitesses, masses.

Nombres et calculs, algèbre

Nombres réels

Contenus

- ▶ Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- ▶ Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π .

Capacités attendues

- ▶ Lire l'abscisse d'un nombre réel sur une droite graduée et placer un nombre réel d'abscisse donnée.

- ▶ Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Démonstrations

- ▶ Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- ▶ Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Approfondissements possibles

- ▶ Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels.

Algèbre

Capacités attendues

- ▶ Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.

Exemple d'algorithme

- ▶ Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.

1 – Nombres décimaux

Définition 1

Nombres décimaux

Les **nombres décimaux** sont les nombres dont l'écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Exemple 2

- ▶ $3,575 \in \mathbb{D}$ car son écriture décimale comporte quatre chiffres.
- ▶ $27 \in \mathbb{D}$ car son écriture décimale comporte deux chiffres.
- ▶ $\frac{1}{3} = 0,33333 \dots \notin \mathbb{D}$ n'est pas décimal (son écriture décimale se répète à l'infini... démonstration dans le chapitre sur l'arithmétique !)

Propriété 3

Fractions décimales

On peut écrire tous les nombres décimaux comme des fractions décimales, c'est-à-dire une fraction de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec a et n des nombres entiers.

Démonstration. (sur un exemple générique) $3,575$ peut se lire 3 575 millièmes donc $3,575 = \frac{3\,575}{1\,000}$. □

Remarque 4

- ▶ $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1\,000$ etc.
- ▶ $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ etc.

Exercices conseillés : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13, 14

Méthode 5 (Encadrer et arrondir)

Prenons par exemple 2,71828, que l'on souhaite arrondir à 0,01, autrement dit au centième près.

- ▶ Comme le chiffre des centièmes est 1, on écrit $2,71 \leq 2,71828 \leq 2,72$: c'est un **encadrement** à 0,01 près.
- ▶ Comme le chiffre suivant est 8, qui est entre 5 et 9, on arrondit par excès, en écrivant $2,71828 \approx 2,72$.

Application 6

Encadrer puis arrondir 1 234,567 89 :

- | | | |
|----------------|------------------|-------------------------|
| a▶ à 0,01 près | c▶ à la centaine | e▶ au dix-millième près |
| b▶ à l'unité | d▶ à 0,001 près | |

Application 7

Vrai ou faux ?

- a▶ 5,27 est l'arrondi à 0,01 près de 5,265
- b▶ 12,4 est l'arrondi à 0,1 près de 12,345
- c▶ 98,7 est l'arrondi à 0,01 près de 98,069
- d▶ $3,4 \leq 3,406 \leq 3,41$ est un encadrement à 0,01 près de 3,419

Exercices conseillés : 4

2 – Puissances

Définition 8

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Soit a un nombre.

► Le nombre a^n , lu « a exposant n », ou « puissance n -ième de a », est défini par $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

► Si $a \neq 0$, alors le nombre a^{-n} , lu « a exposant moins n », est défini par $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.

► Par convention, $a^0 = 1$.

Dans l'écriture a^n (que n soit positif ou négatif), le nombre n est appelé **exposant**, et a est appelé **base** de la puissance.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \\
 \left. \begin{array}{c} \times 3 \\ \times 3 \\ \times 3 \\ \times 3 \\ \times 3 \\ \times 3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{c} \div 3 \\ \div 3 \\ \div 3 \\ \div 3 \\ \div 3 \\ \div 3 \end{array} \\
 3^2 = 3 \times 3 \\
 3^1 = 3 \\
 3^0 = 1 \\
 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \\
 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} \\
 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3} \\
 \vdots
 \end{array}$$

Exemple 9

- $2^1 = 2$, $1,5^2 = 1,5 \times 1,5$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5$, ...
- $8^{-2} = \frac{1}{8 \times 8}$, $2^{-3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$, ...

Proposition 10

Soit n un nombre entier positif.

► $10^n = 1 \underbrace{00 \cdots 00}_{n \text{ exemplaires}}$

► $10^{-n} = \underbrace{0,00 \cdots 00}_{n \text{ exemplaires}} 1$

Puissances de 10

Application 11

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 :

- a► 10 000 000 c► 0,01
b► 10 d► 0,000 01

Application 12

Écrire sous forme décimale :

- a► 10^9 c► 10^{-9}
b► 10^{13} d► 10^{-13}

Proposition 13

Soient a et b deux nombres, et m et n deux entiers relatifs.

1► $a^n \times a^m = a^{n+m}$

2► $(a^n)^m = a^{n \times m}$

3► $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

4► Si $b \neq 0$, alors $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5► Si $a \neq 0$, alors $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Règles de calcul sur les puissances

Démonstration. Commençons par le cas où m et n sont positifs.

1► $a^n \times a^m = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{m \text{ fois}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n+m \text{ fois}} = a^{n+m}.$

$$2 \blacktriangleright (a^n)^m = \underbrace{(a^n \times \cdots \times a^n)}_{m \text{ fois}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \cdots \times \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \times m \text{ fois}} = a^{n \times m}.$$

$$3 \blacktriangleright (a \times b)^n = \underbrace{(a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(b \times \cdots \times b)}_{n \text{ fois}} = a^n \times b^n$$

4 ▶ Découle de la règle de multiplication des fractions.

$$5 \blacktriangleright \text{Supposons } a \neq 0. \text{ Si } n \geq m, \text{ alors } \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ fois}}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}}} = \frac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{n-m \text{ fois}}}{1} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n-m \text{ fois}} = a^{n-m} \text{ d'après la}$$

règle de simplification des fractions. À l'inverse, si $m \geq n$, alors d'après ce qui précède, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, et par définition des exposants entiers négatifs, $a^{n-m} = a^{-(m-n)} = \frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{\frac{a^m}{a^n}} = \frac{a^n}{a^m}$ (rappel : $\frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{b}{a}$).

Le trois autres cas se déduisent du cas positif en observant que pour $n \geq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ (d'après 4 ▶ démontré ci-dessus). Par exemple, dans le cas où $n \geq 0$ et $m \leq 0$ (les autres cas sont laissés en exercice) :

$$1 \blacktriangleright a^n \times a^m = a^n \times \frac{1}{a^{-m}} = \frac{a^n}{a^{-m}} = a^{n-(-m)} = a^{a+m}.$$

$$2 \blacktriangleright (a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}} = \frac{1}{a^{n \times (-m)}} = \frac{1}{a^{-(n \times m)}} = a^{n \times m}.$$

$$3 \blacktriangleright (a \times b)^{-n} = \frac{1}{(a \times b)^n} = \frac{1}{a^n \times b^n} = \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{b^n} = a^{-n} \times b^{-n}.$$

$$4 \blacktriangleright \text{D'une part, } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n}. \text{ D'autre part, } \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = a^{-n} \times \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{\frac{1}{b^n}} = \frac{1}{a^n} \times b^n = \frac{b^n}{a^n}.$$

$$5 \blacktriangleright \frac{a^n}{a^m} = a^n \times \frac{1}{a^m} = a^n \times a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}. \text{ (Notez qu'ici, } -m \geq 0, \text{ donc le premier cas s'applique bien.)}$$

□

Remarque 14

- ▶ Attention au placement des parenthèses : $(a^n)^m$ n'est pas égal à $a^{(n^m)}$ en général !
- ▶ Remarquez que pour $a \neq 0$, $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ d'après les règles de calcul. La convention $a^0 = 1$ a donc du sens pour $a \neq 0$. La convention $0^0 = 1$ trouve également de nombreux avantages, mais dans des contextes un peu plus compliqués. Cette convention découle de la **convention du produit vide**, selon laquelle « multiplier rien du tout revient à ne rien faire ». Or « ne rien faire » pour la multiplication, c'est multiplier par 1.
- ▶ En général, on ne peut rien dire de $a^n \times b^m$.
- ▶ Il n'est pas rare d'écrire a^{-1} à la place de $\frac{1}{a}$ pour gagner en lisibilité.

Exercices conseillés : 10, 11, 12

Exercices

Appliquer

Exercice 1

Écrire sous forme décimale :

- 1► $\frac{6}{10} + \frac{1}{100} + \frac{6}{10\,000}$
- 2► 2 dizaines et 3 dixièmes
- 3► 2 douzaines

Exercice 2

Écrire les nombres suivants comme une fraction décimale.

- | | |
|---------|--------------|
| a► 31 | d► 2,06 |
| b► 25,2 | e► 1 |
| c► 0,05 | f► 1 000 020 |

Exercice 3

Donner trois exemples de nombres qui ne sont pas décimaux.

Exercice 4

Encadrer $\frac{1}{7}$ à 0,001 près.

Exercice 5

Calculer :

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a► $2,5 \times 40$ | d► $2,1 \times 3,06$ |
| b► $0,01 \times 132$ | e► $28 - 3,6 \times 2$ |
| c► $(-1,7) + 12,78$ | f► $80 \times 0,2 - 5,4$ |

Exercice 6

Parmi les fractions suivantes, lesquels sont décimaux ?

- a► $\frac{2}{5}$ b► $\frac{3}{4}$ c► $\frac{2}{9}$ d► $\frac{21}{25}$ e► $\frac{9}{15}$ f► $\frac{13}{8}$ g► $\frac{13}{33}$ h► $\frac{11}{66}$

Exercice 7

Écriture décimale	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire	Entier + Fraction < 1	Pourcentage
0,3				
31				
5,2				
	$\frac{5}{8}$			
	$\frac{22}{25}$			
			$4 + \frac{1}{5}$	
				128,5%

Exercice 8

Calculer :

- | | | | |
|----------|-------------|----------------------|-----------------------|
| a► 2^4 | c► $(-2)^3$ | e► $(-7)^2$ | g► $0,96 \times 10^2$ |
| b► 5^3 | d► 3^4 | f► $4,5 \times 10^3$ | h► $1,1^2$ |

Exercice 9

Calculer :

a► $52,5 \times 10^{-3}$

d► $4,3 \times 10^3$

b► $75,2 \times 10^{-2}$

e► 3^{-1}

c► 3×10^{-1}

f► $7^3 \times 7^{-2}$

Exercice 11

Simplifier sous forme a^b avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$

a► $4^4 \times 2^{15}$

d► $\frac{3^5}{3^5}$

f► $8^{17} \times 4^{-15}$

b► $10^5 \times 5^{-5}$

e► $\frac{6^8}{12^8}$

g► $(3^3)^2$

c► $5^5 \times 5^{-5}$

h► $14^6 \div 7^6$

Exercice 10

Simplifier sous forme a^b avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$

a► $2^4 \times 2^{15}$

d► $\frac{2^5}{2^{10}}$

f► $\frac{9^2}{3^3}$

b► $7^{17} \times 7^{-15}$

e► $\frac{6^8}{6^3}$

g► $\frac{16^3}{4^{-2}}$

c► $5^5 \times 5^5$

Exercice 12

Simplifier sous forme a^b avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$

a► $(4^3)^4$

c► $(2^3)^{-5}$

e► $(12^2)^{-1}$

b► $(7^3)^5$

d► $(18^{15})^5$

f► $(15^{-1})^2$

g► $(7^{-1})^{-1}$

h► $8^4 \times \frac{(4^2)^{-3}}{16^2 \times 4^2}$

S'entraîner

Exercice 13

Donner l'écriture décimale du résultat de $325 \div 16$

Exercice 14

Écriture décimale exacte (si possible)	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire	Entier + Fraction < 1	Pourcentage exact (si possible)
	$\frac{2}{9}$			
12,06				
0,05				
	$\frac{6}{15}$			
			$-3 + \frac{1}{4}$	
				-12,30%
				140%

G1 Notion de vecteur

Programme

Géométrie

Vecteurs et problèmes de géométrie

Au cycle 4, les notions de vecteur et de translation font l'objet d'une première approche. La somme de vecteurs est vue en lien avec l'enchaînement de deux translations et la relation de Chasles est ainsi abordée en classe de troisième.

Les professeurs peuvent définir les opérations vectorielles à partir des coordonnées, ou bien commencer par leur construction géométrique. Dans tous les cas, la relation $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est mise en évidence.

La caractérisation vectorielle du milieu d'un segment donne l'occasion de travailler le calcul vectoriel ; elle prolonge et entretient les connaissances du cycle 4.

Les problèmes de géométrie sont l'occasion de mettre en avant l'efficacité de l'outil vectoriel.

En liaison avec les autres disciplines, on signale que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être appelé vecteur déplacement de A à B que, si O est choisie comme origine du plan, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut être appelé vecteur position de M (relativement à O).

Contenus

- ▶ Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul.
- ▶ Représentants d'un vecteur.
- ▶ Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- ▶ Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment.

Capacités attendues

- ▶ Représenter la somme de deux vecteurs à partir de représentants de même origine.

Droites du plan

Au cycle 4, les élèves ont rencontré les droites au travers des représentations graphiques des fonctions affines. En seconde, ils étudient les équations de droite.

Contenus

- ▶ Vecteur directeur d'une droite.

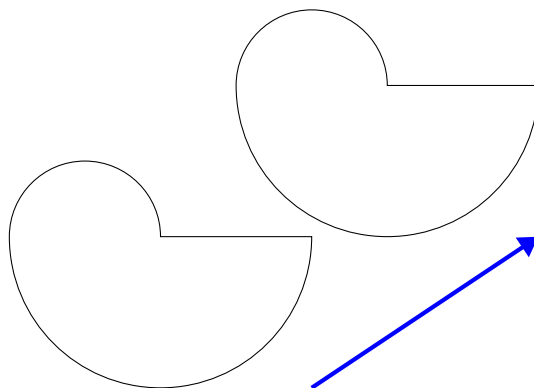
Capacités attendues

- ▶ Déterminer un vecteur directeur d'une droite donnée par une représentation graphique.

1 – L'objet « vecteur » comme translation

A – Définition et vocabulaire

Soit $\mathcal{F}$ une figure plane. Transformer $\mathcal{F}$ par **translation**, c'est la faire glisser selon une direction, un sens et une longueur. On représente ces trois informations avec une flèche, appelée **vecteur**.



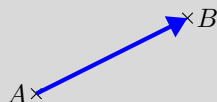
Vocabulaire vectoriel

Définition 1

Un **vecteur** est un objet géométrique représentant une translation. Il est défini par trois propriétés :

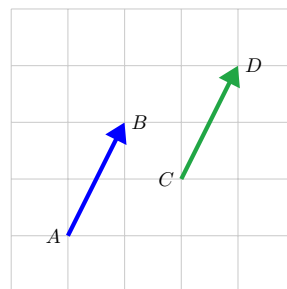
- ▶ sa **direction** (une droite selon laquelle la translation s'effectue),
- ▶ son **sens**,
- ▶ sa **norme** (la longueur du déplacement).

Lorsqu'une translation transforme un point A en un point B , on peut noter $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui lui est associé. On parle alors de **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$. Le point A est appelé **origine** de $\overrightarrow{AB}$, et le point B est appelé son **extrémité**.



Exemple 2

Dans le quadrillage ci-contre, considérons la translation qui glisse les points de 1 carreau vers la droite et de 2 carreaux vers le haut. Elle transforme le point A en le point B , et le point C en le point D . Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent donc tous deux cette translation.



Vecteur nul

Définition 3

Le vecteur associé à la translation qui ne déplace aucun point est appelé **vecteur nul**, et est noté $\vec{0}$.

B – Égalité, colinéarité

Définition 4

Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux s'ils représentent la même translation. Autrement dit, deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Proposition 5

Égalité de vecteurs

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On utilise parfois la notation $\vec{u}$ pour désigner un vecteur quand son origine et son extrémité importent peu. Un vecteur égal à $\vec{u}$ est appelé un **représentant de $\vec{u}$** .

Remarque 6

Si A et B sont deux points, alors $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$. Par convention, on dit que $\vec{0}$ n'a ni direction, ni sens.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme. Il existe une notion plus souple, avec moins de conditions :

Définition 7

Vecteurs colinéaires

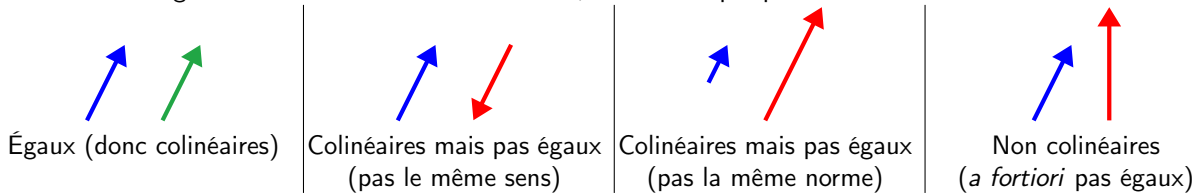
Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Remarque 8

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils forment un parallélogramme. Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils définissent un trapèze.

Remarque 9

Deux vecteurs égaux sont nécessairement colinéaires, mais la réciproque est fausse !

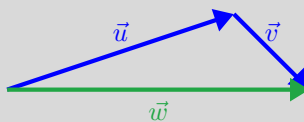


2 – Manipulations de vecteurs

A – Somme de vecteurs

Définition 10

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur représentant les deux translations successives de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Proposition 11**Relation de Chasles**

Soient A , B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

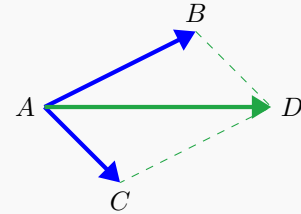
Proposition 12**Relation du parallélogramme**

Soient A , B , C et D quatre points du plan.

$ABDC$ est un parallélogramme

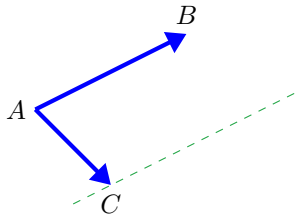
si, et seulement si

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

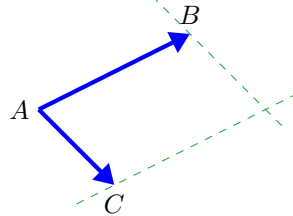
**Méthode 13 (Somme de deux vecteurs ayant même origine)**

Méthode avec parallélogramme (faire programme construction par étapes comme en 6e + rappel comment tracer une parallèle avec règle et équerre)

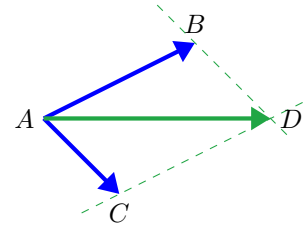
On donne A , B et C trois points du plan. On veut tracer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



ÉTAPE 1 : On trace la parallèle à (AB) passant par C



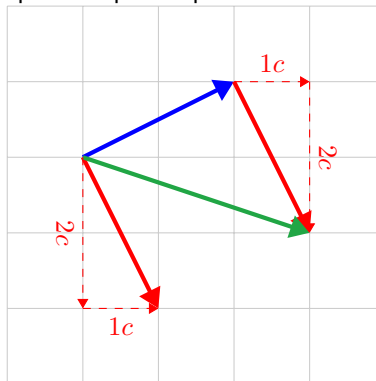
ÉTAPE 2 : On trace la parallèle à (AC) passant par B



ÉTAPE 3 : Le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ est le point d'intersection des deux parallèles.

Remarque 14

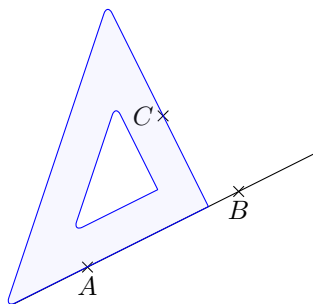
Lorsqu'on dispose d'un quadrillage, on peut l'exploiter pour tracer des sommes :



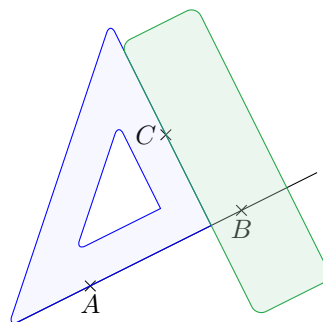
Remarque 15 (Tracer une parallèle)

Pour rappel, il y a deux méthodes pour tracer une parallèle avec les outils géométriques :

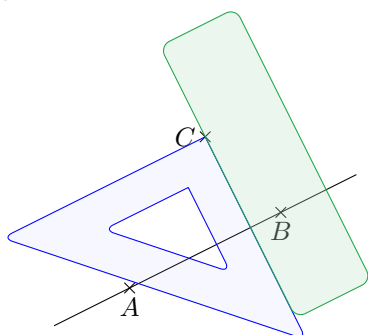
- ▶ Avec une règle et une équerre :



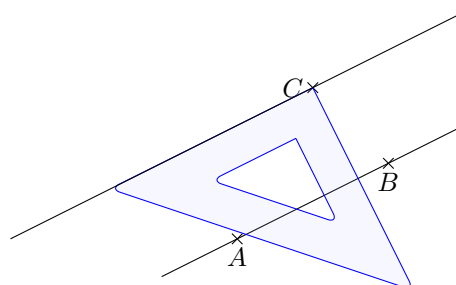
ÉTAPE 1 : On place l'équerre le long de (AB) , passant par C .



ÉTAPE 2 : On place la règle contre l'équerre.

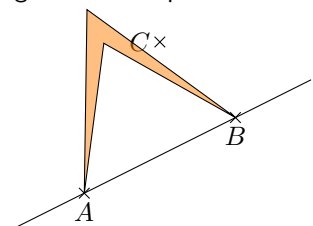


ÉTAPE 3 : On tourne l'équerre, contre la règle, le sommet en C .

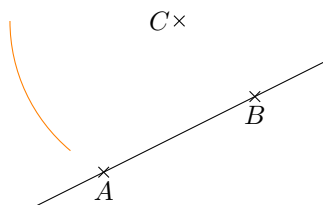


ÉTAPE 4 : On trace la parallèle.

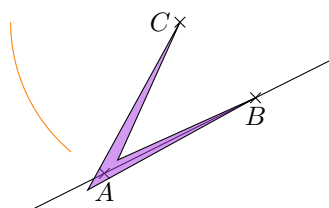
- ▶ Avec une règle et un compas :



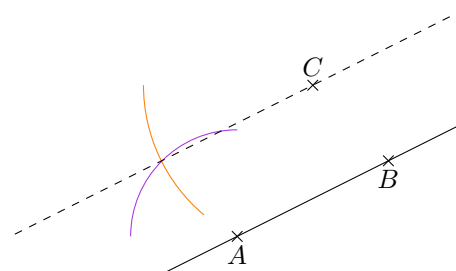
ÉTAPE 1 : On écarte le compas entre A et B .



ÉTAPE 2 : On trace un arc de cercle centré en C .



ÉTAPE 3 : On écarte le compas entre B et C .



ÉTAPE 4 : On trace un arc de cercle centré en A , qui donne un point de passage pour la parallèle.

B – Produit d'un vecteur par un réel

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On a alors bien envie d'écrire que $\overrightarrow{BA} = \vec{0} - \overrightarrow{AB}$. Comme le vecteur nul agit comme un 0 pour les vecteurs (il traduit l'absence de translation), on peut écrire $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. La notation algébrique correspond à l'intuition géométrique : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ traduit la translation qui transforme A en B ; le vecteur $\overrightarrow{BA}$ traduit la translation **opposée**, qui transforme B en A .

Définition 16

Opposé d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

L'**opposé** de $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ qui a même direction, même norme, mais un sens opposé.

Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par deux points A et B du plan,

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Géométriquement, ajouter un vecteur à lui-même donne un vecteur de même sens, de même direction, mais de norme double. L'ajouter trois fois triple sa norme, et ainsi de suite. On a donc envie de parler de 2 fois un vecteur, 3 fois un vecteur, etc. En posant que multiplier un vecteur par un réel multiplie sa norme, on étend aisément cette idée aux nombres non entiers positifs. En ce qui concerne les nombres négatifs, on a envie d'écrire $-1 \times \vec{u} = -\vec{u}$: multiplier par un négatif doit avoir un effet sur le sens.

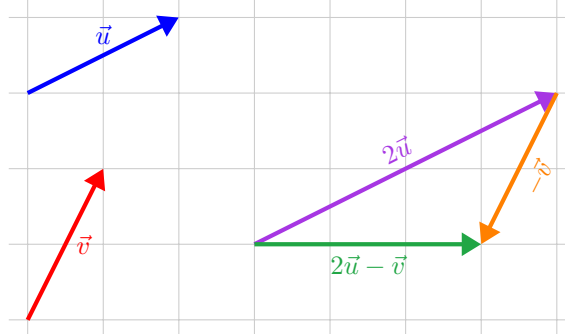
Définition 17

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et $k \in \mathbb{R}$.

- ▶ Dans ce contexte, k est appelé un **scalaire**.
- ▶ Si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur qui a mêmes direction et sens que u , et dont la norme est k fois plus grande,
- ▶ Si $k < 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même la direction que u , un sens opposé, et dont la norme est $|k|$ fois plus grande,
- ▶ Si $k = 0$, alors $k\vec{u} = 0\vec{u} = \vec{0}$.

Exemple 18

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan représentés ci-dessous. On a également représenté $2\vec{u} - \vec{v}$.



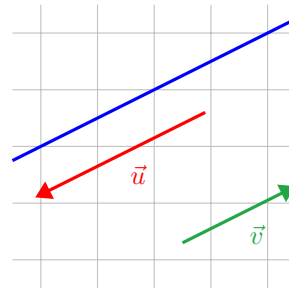
3 – Vecteurs directeurs d'une droite

Soient (Δ) une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Intuitivement, on dit que $\vec{u}$ est **un vecteur directeur** de (Δ) si $\vec{u}$ a même direction que (Δ) , et c'est comme ça qu'il faut les penser en pratique. Notez l'emploi de l'article « un » : en effet, une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.

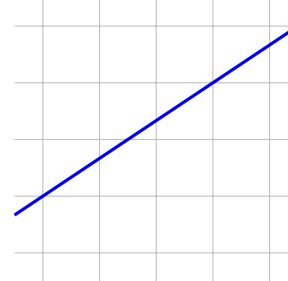
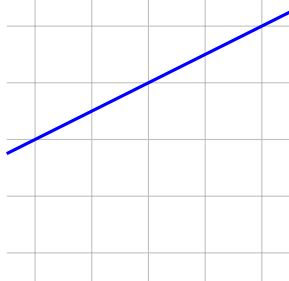
Exemple 19

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre sont deux vecteurs directeurs de la droite (Δ) .



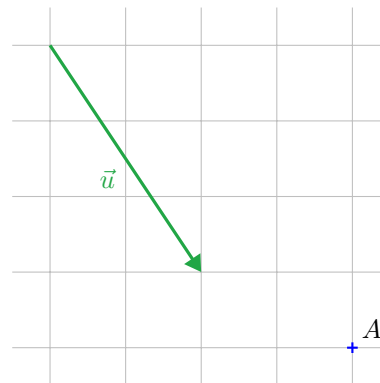
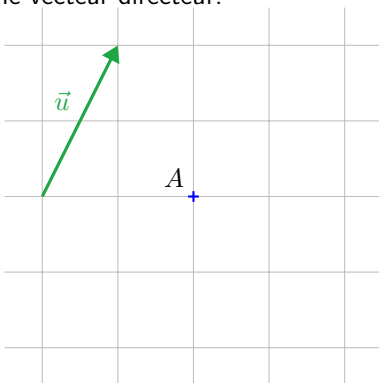
Application 20

Pour chaque droite, trouver deux vecteurs directeurs différents :



Application 21

Dans les deux cas ci-dessous, on donne un point A et un vecteur $\vec{u}$. Tracer la droite passant par A et admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.



Dans la réalité, les choses se passent dans l'autre sens : vous êtes vous déjà demandés quelle est la définition d'une droite ? En effet la question n'est pas évidente. En fait, la notion de vecteur directeur n'est pas définie à partir de la notion de droite... c'est l'inverse !

Définition 22***Droite et vecteur directeur***

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

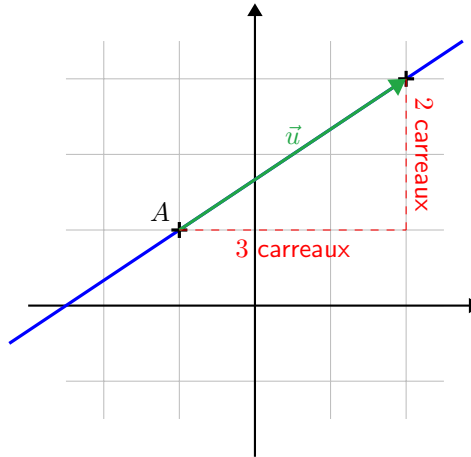
La **droite** (Δ) passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u}$ (on dit aussi que (Δ) est **dirigée par** $\vec{u}$) est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Exemple 23

On se place dans un repère du plan.

Soit $\vec{u}$ représentant la translation qui glisse les points de 3 carreaux vers la droite et 2 carreaux vers le haut.

Traçons la droite passant par le point A de coordonnées $(-1; 1)$ et dirigée par $\vec{u}$.

**Application 24**

Dans un repère, tracer les droites définies par les couples point-vecteur suivants :

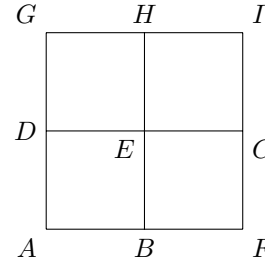
- ▶ $A(-2; 1)$ et $\vec{u}$ qui translate les points de 4 carreaux à droite et 1 carreau en haut.
- ▶ $B(0, 4)$ et $\vec{v}$ qui translate les points de 2 carreaux en haut et 3 carreaux en bas.
- ▶ $C(2, -1)$ et $\vec{w}$ qui translate les points de 3 carreaux à gauche et 3 carreaux en haut.

Exercices

Appliquer

Exercice 1

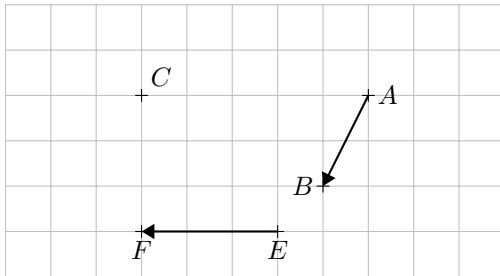
- 1► Lister quatre paires distinctes de vecteurs égaux.
- 2► Donner deux vecteurs opposés.
- 3► Donner deux paires distinctes de vecteurs colinéaires qui ne sont pas égaux.
- 4► Donner trois vecteurs qui se sont pas colinéaires deux à deux.
- 5► Donner trois vecteurs qui ont des normes différentes.



Exercice 2

Dans la figure ci-dessous, placer :

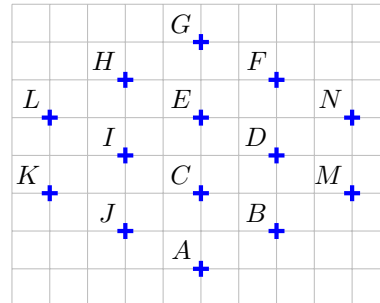
- D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$
- G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EF}$
- H tel que $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}$
- I tel que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CG}$
- J tel que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$



Exercice 3

Dans la figure ci-dessous,

- 1► Citer un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$.
- 2► Citer deux vecteur égal à $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{KE}$.
- 3► Citer deux vecteur égal à $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{IB}$.
- 4► Citer un vecteur égal à $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{NC}$.
- 5► Citer deux vecteur égal à $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{DE}$.



Exercice 4

Compléter les relations suivantes :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \dots$
- $\overrightarrow{CB} + \dots = \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{IL} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IL}$
- $\overrightarrow{E\dots} = -\overrightarrow{FE}$
- $\overrightarrow{G\dots} - \overrightarrow{\dots H} = \overrightarrow{0}$

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

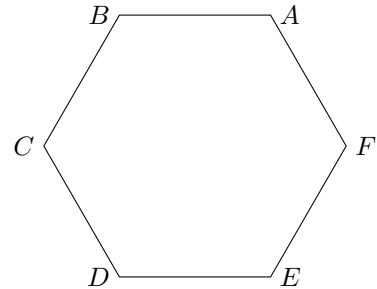
- a► $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ}$
- b► $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}$
- c► $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LK}$
- d► $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

S'exercer

Exercice 6

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier.

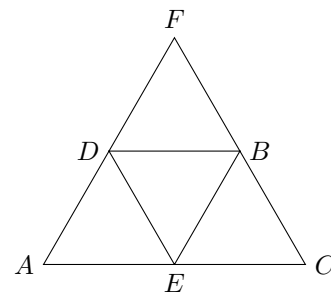
- 1► Donner cinq paires de vecteurs égaux.
- 2► Donner deux vecteurs opposés.
- 3► Donner deux vecteurs colinéaires qui ne sont pas égaux.
- 4► Donner trois vecteurs qui se sont pas colinéaires deux à deux.
- 5► Donner trois vecteurs qui ont des normes différentes.



Exercice 7

On considère un triangle équilatéral divisé en 4 triangles équilatéraux. Exprimer les sommes suivantes sous la forme d'un unique vecteur :

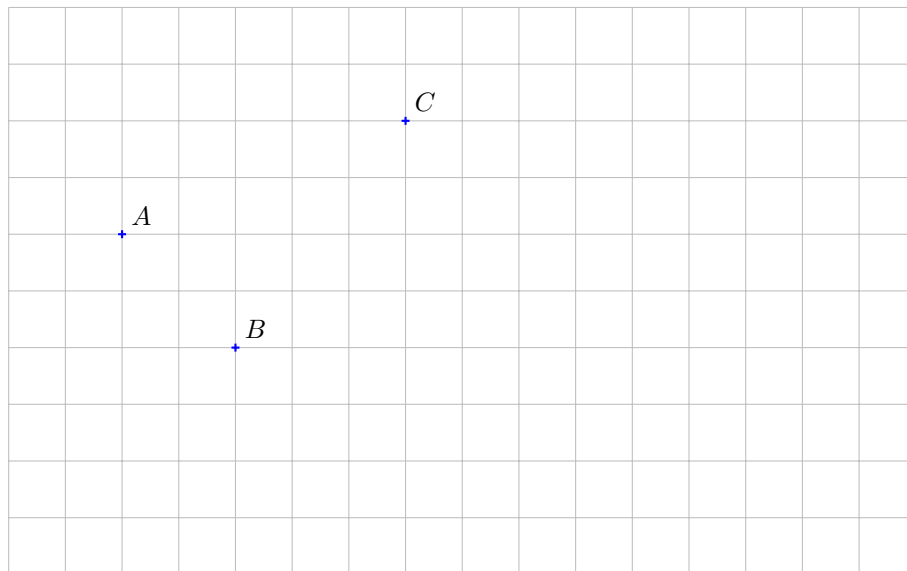
- | | |
|--|--|
| 1► $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF}$ | 4► $2\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FB}$ |
| 2► $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$ | 5► $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{DE}$ |
| 3► $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$ | 6► $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{CF}$ |



Exercice 8

On a placé trois points A , B et C . Construire :

- | | |
|---|---|
| ► Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, | ► Le point P tel que $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. |
| ► Le point N tel que $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. | ► Le point Q tel que $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. |



Exercice 9

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

- a► « Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $AB = CD$. »
- b► « Si $EF = EG$, alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$. »
- c► « Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $(AB) \parallel (CD)$. »
- d► « Si $(EF) \parallel (GH)$, alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$. »
- e► « Si $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{AB}$, alors $T \in (AB)$. »

Exercice 10

Les points A, B, C, D, O et I sont alignés sur une droite graduée représentée ci-dessous.



Déterminer les réels k, k' et k'' tels que :

$$\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{DB} \quad , \quad \overrightarrow{DB} = k'\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{IB} = k''\overrightarrow{IA}$$

C2 Développer et réduire

Programme

Automatismes

Calcul numérique et algébrique

- ▶ Effectuer un calcul littéral élémentaire :
 - ▶ expressions additives : $-(a + b) = -a - b$, $-(a - b) = b - a$;
 - ▶ expressions multiplicatives : $x = 1 \times x$, $x = \frac{x}{1}$, $(-1) \times a = \frac{a}{-1} = -a$, $0 = 0 \times x$, $\frac{0}{a} = 0$, $\frac{x}{a} = \frac{1}{a}x$,
 $\frac{ab}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b$, $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$, $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
- ▶ Développer, réduire une expression algébrique simple :
 - ▶ identités (développement) : $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$;
- ▶ Isoler une variable dans une égalité qui en comporte plusieurs, sur des exemples internes aux mathématiques ou issus des autres disciplines.
- ▶ Effectuer une application numérique d'une formule (notamment pour les formules utilisées dans les autres disciplines).

Nombres et calculs, algèbre

Algèbre

Contenus

- ▶ Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.

Capacités attendues

- ▶ Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- ▶ Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$ ou $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.

Approfondissements possibles

- ▶ Développement de $(a + b + c)^2$.
- ▶ Développement de $(a + b)^3$.

1 – Réduire

Définition 1

Réduire

Réduire une expression, c'est l'écrire de la manière la plus simple possible. On peut dire que cela revient à l'écrire avec le moins de symboles possible.

Notations

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 1 \times a &= a = \frac{a}{1} \\ \blacktriangleright 0 \times a &= 0 \\ \blacktriangleright \frac{0}{a} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright ab &= a \times b \\ \blacktriangleright a(b+c) &= a \times (b+c) \\ \blacktriangleright (a+b)(c+d) &= (a+b) \times (c+d) \end{aligned}$$

Notation

On parle du **carré** d'un nombre n quand on multiplie ce nombre par lui même. On le note n^2 .

$$n^2 = n \times n$$

Définition 2

Carré parfait

On appelle **carrés parfaits** les carrés des entiers naturels.

Remarque 3

Il faut connaître les premiers carrés parfaits :

$$\begin{array}{lllll} \blacktriangleright 1^2 = 1 & \blacktriangleright 3^2 = 9 & \blacktriangleright 5^2 = 25 & \blacktriangleright 7^2 = 49 & \blacktriangleright 9^2 = 81 \\ \blacktriangleright 2^2 = 4 & \blacktriangleright 4^2 = 16 & \blacktriangleright 6^2 = 36 & \blacktriangleright 8^2 = 64 & \blacktriangleright 10^2 = 100 \end{array}$$

Méthode 4 (Réduire une expression développée)

Pour réduire une somme, on rassemble ceux qui se ressemblent.

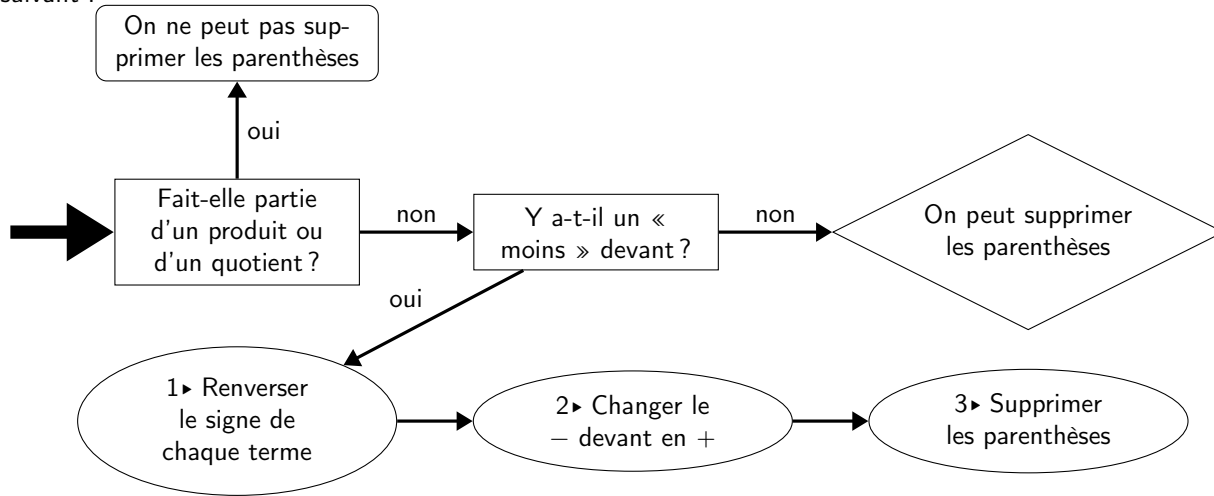
- ▶ Dans l'expression $9x + 3x$, on peut rassembler les deux termes pour donner $12x$.
- ▶ Dans l'expression $9x + 3y$, on ne rassemble pas les deux termes car ils ne se ressemblent pas.
- ▶ Dans l'expression $9x^3 + 3x$, on ne rassemble pas les deux termes car ils ne se ressemblent pas (dans le premier, le x est au carré, contrairement à l'autre).

On peut toujours réduire un produit, mais on doit faire attention aux puissances.

- ▶ $3 \times 5x = 15x$
- ▶ $3x \times 5y = 15xy$
- ▶ $3x \times 5x = 15x^2$ ⚠ (les deux facteurs contiennent chacun un x , la puissance 2 indique qu'il y avait donc initialement 2 exemplaires de x)
- ▶ $3x^2 \times 5x = 15x^3$ ⚠ (les deux facteurs contiennent chacun un x , le premier en a 2 exemplaires d'après la puissance 2, et le second terme n'en a qu'un : au total, il y a 3 exemplaires.)

Méthode 5 (Supprimer des parenthèses)

Pour savoir si l'on peut supprimer une paire de parenthèses et comment, on peut suivre l'arbre de décision suivant :



Exemple 6

- ▶ $5(3x + 7) = 5 \times (3x + 7)$: les parenthèses font partie d'un produit, on ne peut pas les supprimer (il faut distribuer)
- ▶ $(8 - 2x)(3x + 7) = (8 - 2x) \times (3x + 7)$: les parenthèses font partie d'un produit, on ne peut pas les supprimer (il faut distribuer)
- ▶ $5 - (3x - 7) = 5 + (-3x + 7) = 5 + (-3x) + 7 = 5 - 3x + 7 = 12 - 3x$ (il y avait un $-$ devant la parenthèse : on l'a changé en $+$, renversé tous les signes puis supprimé les parenthèses)
- ▶ $(8 - 2x) + (3x + 7) = 8 - 2x + 3x + 7 = 15 + 1x = 15 + x$ (aucune parenthèse n'est dans un produit ni un quotient, il n'y a rien devant la première parenthèse, et un $+$ devant la seconde : on peut donc supprimer toutes les parenthèses)

2 – Développer

Développer

Définition 7

On dit qu'on **développe** une expression quand on transforme un produit en somme. Pour cela on applique le principe de distributivité.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{Développer}} \\
 a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\
 \xleftarrow{\text{Factoriser}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{Développer}} \\
 (a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \\
 \xleftarrow{\text{Factoriser}}
 \end{array}$$

Exemple 8 (Distributivité simple)

$$3 \times (2y - 5) = 3 \times 2y + 3 \times (-5) = 6y - 15$$

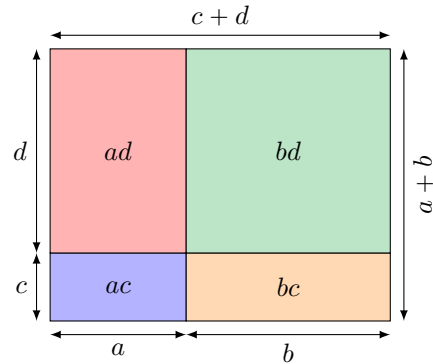
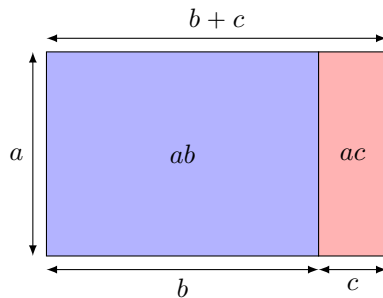
Exemple 9 (Double distributivité)

$$\begin{aligned}(y + 3)(2y + 1) &= 2y^2 + y + 6y + 3 \\ &= 2y^2 + 7y + 3\end{aligned}$$

Exercices conseillés : 1, 2, 5, 6

Remarque 10

On peut interpréter ces formules géométriquement :



Exercices conseillés : 8, 7

3 – Identités remarquables**Proposition 11****IDENTITÉS REMARQUABLES**

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemple 12

- ▶ $(4a - 3b)^2 = 4a^2 - 2 \times 4a \times 3b + 3b^2 = 16a^2 - 12ab + 9b^2$
- ▶ $25 - 9a^2 = 5^2 - (3a)^2 = (5 + 3a)(5 - 3a)$
- ▶ $(10 + 7)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289$

Remarque 13

- ▶ Notez qu'une égalité se lit dans les deux sens, dans le deuxième exemple on utilise une identité remarquable à l'envers !
- ▶ Notez que dans le dernier cas on a utilisé une identité remarquable pour effectuer astucieusement un calcul laborieux.

Exercices conseillés : 3, 4

Exercices

Appliquer

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

- A ▶ $4 \times (3y + 5)$ C ▶ $(a + 2) \times (a - 2)$
 B ▶ $5 \times (6y - 2)$ D ▶ $dx(a + 7) - 3d$

Exercice 2

Développer et réduire les expressions suivantes :

- A ▶ $a(5 + a) + 2$ C ▶ $(c + 7)(c + 1)$
 B ▶ $b(2 + b + c)$ D ▶ $(b + 3)(a + 4)$

Exercice 3

Énoncer les trois identités remarquables en prenant pour variables u et w .

Exercice 4

Calculer en utilisant les identités remarquables :

- A ▶ 14^2 C ▶ 998^2
 B ▶ 18^2 D ▶ $1,12 \times 0,88$

S'entraîner

Exercice 5

Développer les expressions suivantes :

- A ▶ $7 \times (4y + 6)$ B ▶ $6 \times (-6y - 2)$ C ▶ $(3c + 1) \times (2c + 3)$ D ▶ $(-2b + 3) \times (a - 4)$

Exercice 6

Développer les expressions suivantes :

- A ▶ $3a \times (2 + 2a) + 2$ B ▶ $5b \times (8 + 2b + 3c)$ C ▶ $(2a + 2) \times (2a - 2)$ D ▶ $3d \times (a + 1) - 5d$

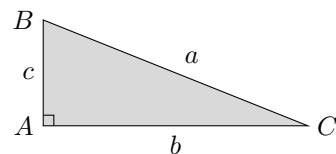
Approfondir

Exercice 7 $((a + b)^3 ?)$

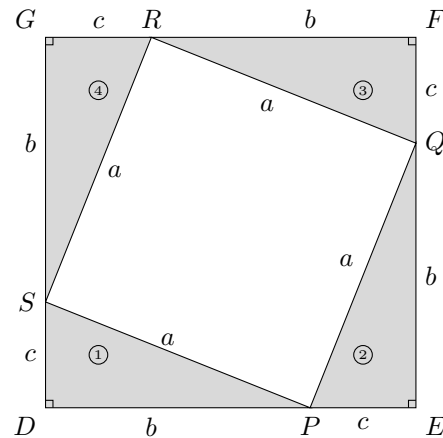
- 1 ▶ Développer et réduire $(a + b)^3$.
- 2 ▶ En déduire la valeur de 102^3 et celle de 97^3

Exercice 8 (Une preuve du théorème de Pythagore)

On veut montrer que n'importe quel triangle rectangle vérifie l'égalité de Pythagore. On considère un triangle ABC rectangle en A , dont les côtés sont de longueurs quelconques a , b et c .



On dispose 4 copies de ABC comme sur la figure ci-contre. On imagine les placer comme des pièces en bois : on place les pièces ①, ②, ③ et ④ sommets contre sommet, de façon à former un carré. Pour rappel, on ne peut pas croire ce que l'on voit ! Rien ne garantit que la grande figure est vraiment un carré, c'est-à-dire que les sommets sur chaque côté sont bien alignés (si ça se trouve il y a un écart minuscule et invisible... comme dans le paradoxe de Lewis Carroll).



- 1► Que vaut la somme des trois angles d'un triangle ?
- 2► En déduire que D, S et G sont alignés, que G, R et F sont alignés, que F, Q et E sont alignés, et que E, P et D sont alignés.
- 3► En déduire que $DEFG$ est un carré.
- 4► Donnez la longueur des côtés de $DEFG$ en fonction de b et de c . En déduire son aire en fonction de b et c (inutile de développer l'expression).
- 5► Justifiez que :

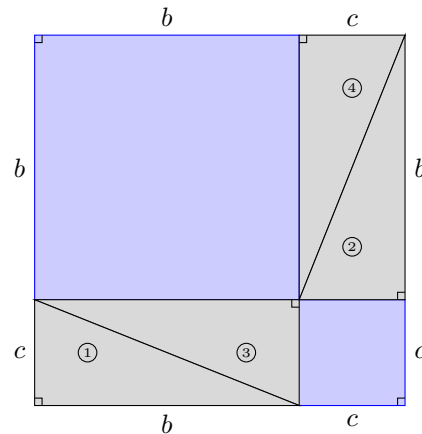
$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(PQRS) = a^2$$

On place maintenant les 4 copies de ABC comme ci-dessous, de manière à faire apparaître à nouveau un grand carré.

- 6► Justifier que l'aire du grand carré dans cette figure est la même que le grand carré dans la figure précédente.
- 7► Exprimez les aires des deux carrés bleus en fonction de b et de c .
- 8► Justifier que :

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = b^2 + c^2$$

- 9► Conclure : expliquer comment ce jeu d'aires permet de démontrer le théorème de Pythagore.



D1 Proportions

Programme

Automatismes

Calcul numérique et algébrique

- ▶ Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, pourcentage).
- ▶ S'assurer de la vraisemblance, de la cohérence d'un résultat.

Proportions et pourcentages

- ▶ Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes (décimale, fractionnaire, pourcentage).
- ▶ Utiliser une proportion pour calculer une partie connaissant le tout, ou le tout connaissant une partie.

Statistiques et probabilités

Information chiffrée et statistique descriptive

Contenus

▶ **Proportions**

- ▶ Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage.

Capacités attendues

- ▶ Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- ▶ Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages.

Croisement de deux variables qualitatives

Contenus

- ▶ Tableau croisé d'effectifs.
- ▶ Fréquence conditionnelle, fréquence marginale.

Capacités attendues

- ▶ Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
- ▶ Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles.

Exemples d'algorithmes

- ▶ À partir de deux listes représentant deux caractères d'individus, déterminer un sous-ensemble d'individus répondant à un critère (filtre, utilisation de ET, OU, NON).
- ▶ Dresser le tableau croisé de deux variables qualitatives à partir du fichier des individus et calculer des fréquences conditionnelles ou marginales.

1 – Rappels : vocabulaire statistique

Vocabulaire

Définition 1

- ▶ Quand on a un ensemble de données, on parle de **série de données**.
- ▶ Le **caractère** est la grandeur ou l'attribut que l'on observe.
- ▶ La **population** est l'ensemble des individus sur lesquels on effectue l'étude statistique.
- ▶ Soit E une population. Une **sous-population** de E est une partie de E .

Exemple 2

- ▶ On recense la taille des arbres d'une forêt : le caractère est la taille des arbres, et la population est l'ensemble des arbres de la forêt.
- ▶ On étudie les couleurs de cheveux dans un collège. Le caractère étudié est la couleur des cheveux, la population est l'ensemble des élèves du collège.

Exemple 3

Considérons la population E constituée des arbres de la forêt des Landes. L'ensemble des arbres de E qui sont des pins en est une sous-population. L'ensemble des arbres qui mesurent plus de 15m en est une autre.

Définition 4

Effectifs

Dans une série de données,

- ▶ l'**effectif total** est le nombre de données,
- ▶ l'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois que cette donnée apparaît,

2 – Proportions et pourcentages

Définition 5

Proportion, fréquence

Soit E une population comportant $n_E > 0$ individus, et A une sous-population de E comportant n_A individus.

La **proportion** (ou **fréquence**) de A dans E est le nombre $p = \frac{n_A}{n_E}$.

En réécrivant cette définition avec des notations non mathématiques, on peut écrire :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre d'individus réellement concernés}}{\text{nombre d'individus potentiellement concernés}}$$

Exemple 6

Lors de l'élection présidentielle de 2022, 35 096 478 votants étaient inscrits sur les listes électorales. Parmi eux, 6 106 787 se sont abstenus lors des deux tours.

La proportion de ceux-ci parmi les votants est donc $p = \frac{6\,106\,787}{35\,096\,478} \approx 0,174$.

Exemple 7

Lors d'un sondage, on demande "quel assaisonnement préférez-vous avec du poulet frit ?" Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant, dans lequel on a également calculé les fréquences de chaque valeur du caractère (chaque assaisonnement possible).

Assaisonnement	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre
Effectif	4	10	6
Fréquence	0,2	0,5	0,3

Corollaire 8

- ▶ Si on connaît l'effectif de la population totale E et la proportion que représente A dans E , on peut retrouver l'effectif de la population A par $n_A = p \times n_E$.
- ▶ Si on connaît l'effectif de la population de A et la proportion qu'elle représente dans E , on peut retrouver l'effectif global par $n_E = \frac{n_A}{p}$.

Exemple 9

- ▶ Dans une classe de 20 élèves, 40% portent des lunettes. Combien d'élèves portent des lunettes ?
La population est la classe entière, donc $n_E = 20$. La sous population est celle des élèves portant des lunettes, au nombre n_A que l'on cherche. Leur proportion dans la classe est $p = 40\% = 0,40$. Comme $p = \frac{n_A}{n_E}$, c'est-à-dire $0,40 = \frac{n_A}{20}$, on a $n_A = 0,40 \times 20 = 8$. Il y a donc 8 élèves à lunettes.
- ▶ Une entreprise, 60% des salariés ont moins de 40 ans, ce qui représente 48 employés. Combien de salariés cette entreprise compte-t-elle ?
La population est l'entreprise entière, au nombre n_E d'employés que l'on cherche. La sous population est celle des salariés de moins de 40 ans, au nombre $n_A = 48$. Leur proportion dans la classe est $p = 60\% = 0,60$. Comme $p = \frac{n_A}{n_E}$, c'est-à-dire $0,60 = \frac{48}{n_E}$, on a $n_E = \frac{48}{0,6} = \frac{8}{0,1} = \frac{80}{1} = 80$. Il y a donc 80 salariés dans cette entreprise.

Propriété 10

Une proportion est comprise entre 0 et 1.

Pourcentage d'une quantité**Proposition 11**

Calculer $t\%$ d'une quantité Q revient à calculer $Q \times \frac{t}{100}$.

Remarque 12

Un pourcentage est une proportion relative à une population de référence contenant 100 individus : ainsi, un pourcentage de, par exemple, 12%, qui correspond à une proportion de 0,12, signifie que dans une population de référence de 100 individus, 12 sont concernés.

Si vous avez du mal à mémoriser la méthode, vous pouvez faire un tableau de proportionnalité (on a le droit car les pourcentages sont une situation de proportionnalité).

	Pourcentage	Données
Population	100	n_E
Sous-popu.	12	n_A

Exemple 13

Dans une plaquette de 180g de chocolat, le cacao représente 55%. Cela représente donc $180 \times \frac{55}{100} = 99\text{g}$.
Avec un tableau de proportionnalité, cela donne :

	Pourcentage	Masse (g)
Tablette	100	180
Cacao	55	

Méthode 14 (Quelques pourcentages utiles)

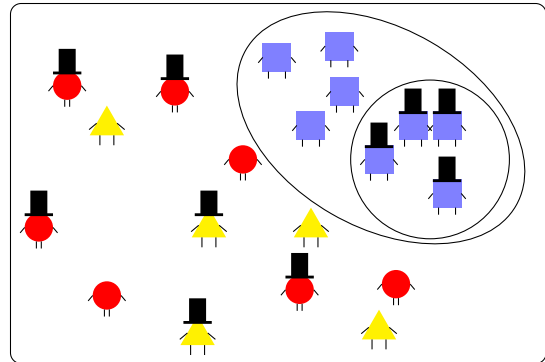
- ▶ 10% de $Q = Q \div 10$ ▶ 25% de $Q = Q \div 4$ ▶ 50% de $Q = Q \div 2$
- ▶ 20% de $Q = Q \div 5$ ▶ 33% de $Q \approx Q \div 3$ ▶ 75% de $Q = Q \div 4 \times 3$

Exercices conseillés : 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 13

On considère une population d'êtres géométriques illustrée ci-contre. Il y a des carrés, des disques et des triangles. Certains portent un chapeau, d'autre non. On considère la sous-population des carrés. À l'intérieur de cette sous-population, on considère la sous-population des carrés qui portent un chapeau.

Les carrés sont 8 dans une population de 20 individus, ils représentent donc une proportion de $\frac{8}{20}$ (soit 40%) de la population totale.

Parmi les 8 carrés, 4 portent un chapeau, ils représentent donc une proportion de $\frac{4}{8}$ (soit 50%) des carrés (pas de la population totale!).



Sous-population d'une sous-population

Proposition 15

Sur un exemple générique : dans l'illustration précédente, la proportion de carrés portant un chapeau se calcul en multipliant les deux proportions successives :

$$\frac{8}{20} \times \frac{4}{8} = \frac{4}{20}$$

Exemple 16

En 2024, 51,5% des électeurs français se sont rendus aux urnes pour les élections européennes. En France, 44,1% des suffrages exprimés étaient dirigés vers des partis classés à droite, 14,6% vers des partis classés au centre, et 31,6% vers des partis classés à gauche.

On voudrait savoir quel pourcentage des électeurs (et non des suffrages exprimés) français ont voté pour chaque bloc : on multiplie donc la proportion de votant par les proportions de chaque bloc.

- ▶ $0,515 \times 0,441 \approx 0,227$: environ 22,7% des électeurs ont voté pour le bloc de droite,
- ▶ $0,515 \times 0,146 \approx 0,075$: environ 7,5% des électeurs ont voté pour le bloc du centre,
- ▶ $0,515 \times 0,316 \approx 0,163$: environ 16,3% des électeurs ont voté pour le bloc de gauche.

Exercice 1 (Faux négatifs)

Un virus touche 1% de la population. Il existe un test de dépistage qui tombe juste dans 95% de cas, c'est-à-dire que la test indique "malade" pour 95% des malades (et échoue à détecter la maladie chez 5% des malades), et indique "non malade" pour 95% des non malades (et indique injustement "malade" pour 5% des non malades). On teste l'ensemble de la population.

Notations pour l'exercice : On note P le nombre d'individus dans la population totale, M le nombre de malades, S le nombre de non malades (sains), T^+ le nombre de personnes recevant un test positif, et T^- le nombre de personnes recevant un test négatif.

Pour répondre aux questions suivantes, il est vivement conseillé de faire un schéma des différentes populations et sous-populations, et de rédiger rigoureusement les proportions.

- 1► Quelle proportion de la population totale P (malade ou non) reçoit un test positif?
- 2► On s'intéresse à la sous-population M^+ des individus malades et testés positifs.
 - a► À l'aide de la formule du cours, exprimez la proportion de M^+ dans P , en considérant M^+ comme une sous-population de M .
 - b► À l'aide de la formule du cours, exprimez la proportion de M^+ dans P , en considérant M^+ comme une sous-population de T^+ .
- 3► Dédurre de la question précédente une égalité de deux produits.
- 4► À partir de cette égalité, exprimez la proportion de M dans T^+ en fonction de trois autres proportions.
- 5► Quelle est la proportion des individus malades parmi les testés positifs? Commentez.

Exercices conseillés : 7, 8, 10, 11, 14

3 – Tableaux croisés d'effectifs

Tableau croisé d'effectifs

Définition 17

Un **tableau croisé d'effectifs** est un tableau à double entrée décrivant les effectifs d'une population selon deux caractères.

Souvent, on représente dans une ligne et une colonne supplémentaires (souvent appelées **marges** du tableau) la somme des effectifs de chaque ligne et de chaque colonne.

Exemple 18

On interroge des lycéens en classe de terminale dans les voies générale, technologique et professionnelle pour déterminer la proportion de filles dans ces filières. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant avec les totaux en marge :

	Générale	Techno	Pro	Total
Filles	1 402	477	384	2 263
Garçons	1 098	523	616	2 237
Total	2 500	1 000	1 000	4 500

Par exemple, on lit dans ce tableau que sur 2 500 élèves interrogés en filière générale, 1 402 sont des filles. On lit également que sur les 2 237 garçons interrogés, 616 sont en filière professionnelle.

Dans toute la suite, on reprendra les données de l'exemple 18 précédent.

Fréquence marginale

Définition 19

Dans un tableau croisé d'effectifs, l'**effectif marginal** d'une valeur d'un caractère est la somme des effectifs de cette valeur, qui se lit donc dans une marge du tableau.

La **fréquence marginale** d'une valeur A d'un caractère est la proportion de la population totale représentée par cette valeur du caractère, notée $f(A)$. Autrement dit :

$$f(A) = \text{fréquence marginale de } A = \frac{\text{effectif marginal de } A}{\text{effectif total}}$$

Exemple 20

- L'effectif marginal des filles est 2 263. La fréquence marginale des filles est donc $f(\text{Filles}) = \frac{2\,263}{4\,500}$.
- L'effectif marginal de la filière technologique est 1 000. La fréquence marginale de la filière technologique est donc $f(\text{Techno}) = \frac{1\,000}{4\,500}$.

Définition 21

Fréquence conditionnelle

Soient A une valeur d'un caractère et B une valeur de l'autre caractère.

La **fréquence conditionnelle de A parmi B** est la proportion que représente A au sein de la sous-population concernée par B , notée $f_B(A)$. Autrement dit :

$$f_B(A) = \text{fréquence conditionnelle de } A \text{ parmi } B = \frac{\text{effectif vérifiant à la fois } A \text{ et } B}{\text{effectif marginal de } B}$$

Exemple 22

- La fréquence conditionnelle des garçons parmi la filière professionnelle est la proportion de garçon en filière professionnelle, c'est-à-dire $f_{\text{Pro}}(\text{Garçon}) = \frac{616}{1\,000}$.
- La fréquence conditionnelle de la filière générale parmi les garçons est la proportion d'élèves en filière générale parmi les garçons, c'est-à-dire $f_{\text{Garçon}}(\text{Générale}) = \frac{1\,098}{2\,237}$.

Remarque 23

Dans les deux cas, marginal ou conditionnel, la formule donnée au début du cours reste valable :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre d'individus } \textit{réellement} \text{ concernés}}{\text{nombre d'individus } \textit{potentiellement} \text{ concernés}}$$

En effet, dans le cas de la fréquence marginale, tous les individus sont **potentiellement** concernés. Dans le cas conditionnel, seule une catégorie est **potentiellement** concernée.

Dans l'exemple précédent, lorsqu'on demande la fréquence conditionnelle de la filière générale parmi les garçons, les élèves potentiellement concernés par cette description sont les garçons du lycée, au nombre de 2 237. Les élèves réellement concernés par cette description sont au nombre de 1 098.

Exercices conseillés : 15, 16

Exercices

Entraînement au calcul

Exercice 2 (Pourcentage et fractions)



1► Calculer :

- a► 30% de 60 c► 60% de 70
b► 40% de 80 d► 90% de 20

2► Exprimer ces fractions en pourcentages :

- a► $\frac{6}{10}$ c► $\frac{7}{8}$ e► $\frac{5}{2}$
b► $\frac{12}{15}$ d► $\frac{1}{2}$ f► $\frac{61}{1000}$

Exercice 3 (Calculs usuels)



Calculer :

- a► $\frac{12}{15} \times 4$ e► $\frac{12}{6} - \frac{1}{12}$
b► $\frac{7}{8} \times 2$ f► $\frac{1}{3} \times \frac{3}{12}$
c► $\frac{1}{27} \times 18$ g► $\frac{12}{15} \times \frac{1}{2}$
d► $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{1}{24}$ h► $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$

Exercice 4 (Tableau de correspondances)



Écriture décimale	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire	Entier + Fraction < 1	Pourcentage
0,59				
	$\frac{6}{5}$			
		$1 + \frac{7}{10}$		
				229%

Calculs simples en situation

Exercice 5 (Fraction d'une quantité)



- 1► Pour le goûter, Aurore a bu les deux tiers d'une canette de 33cL de soda, et Amel les trois cinquièmes d'une bouteille de 25cL d'eau gazeuse. Calculer la quantité bue par chacun en cL.
- 2► Lors de son séjour à Venise, Nino a parcouru 13,5km, dont deux neuvièmes confortablement installé dans une gondole. Quelle distance a-t-il parcouru en gondole ?
- 3► Sur 600 articles dans un magasin, deux tiers sont en soldes. Donner le nombre d'articles soldés.

Exercice 6 (Pourcentage d'une quantité)



- 1► La chemise que Lucie achète devrait coûter 60 euros mais a 20% de réduction. Quel est son prix ?
- 2► Une veste coûte 50 euros. Quel sera son prix si le marchand pose une étiquette -70% ?

Exercice 7 (Proportion de proportion)

- 1► Garance boit un tiers de son Soda, puis la moitié de ce qu'il reste.
Combien a-t-elle bu de Soda ?
- 2► Antoine a préparé 10 cookies. Guillaume mange deux cinquièmes des cookies, Margaux prend deux tiers de ce qu'il reste.
Combien de cookies reste-t-il pour Antoine ?
- 3► Walid dépense deux tiers de ses économies pour acheter un jeu vidéo. Il dépense un cinquième du reste pour acheter un sandwich. Il lui reste alors 24€.
Combien d'argent avait-il au départ ?
- 4► Camille a 50€ en poche, elle achète un jeu vidéo avec trois dixièmes de cette somme, puis va au restaurant en dépensant trois cinquièmes de ce qu'elle avait initialement en poche.
Combien d'argent lui reste-t-il ?

Exercice 8 (Proportions et fractions)

- 1► Pour sa grenadine, Mme A a rempli un tiers de son verre de sirop, puis a versé de l'eau jusqu'à raz bord. Son verre fait 21cL.
Quel volume de Sirop a-t-elle versé dans le verre ?
- 2► Mr B a parcouru 36km aujourd'hui. La moitié en bus, un tiers en vélo et le reste à pieds.
Quelle distance a parcouru Mr B en vélo ? En bus ? À pieds ?
Quelle proportion du parcours a été parcouru à pieds ?
- 3► Une question dont la réponse est oui ou non est posée à la classe. 6 élèves sur 18 répondent oui, un tiers de la classe répond non.
Combien d'élèves n'ont pas répondu ?

Exercice 9 (Pourcentages)

- 1► 80% des 55 personnes interrogées disent aimer le chocolat noir.
Combien de personnes interrogées aiment le chocolat noir ?
- 2► 56% des 50 chatons nés cette année ont le pelage gris.
Combien de chatons nés cette année ont le pelage gris ?
- 3► 28% des 850 personnes interrogées connaissent le théorème de Pythagore.

Combien de personnes interrogées connaissent le théorème de Pythagore ?

- 4► Une veste qui coûte habituellement 35€ est à 60% de réduction.
Donner son prix soldé.
- 5► Sur les 120 élèves de mathématiques spécifiques de l'an dernier, 30 n'ont jamais été absents.
Quelle est la proportion d'élèves qui n'a jamais été absent ? (Donner une fraction puis un pourcentage.)
- 6► Sur les 50 chatons nés cette année, 15 ont les yeux bleus.
Quelle est la proportion de chatons ayant les yeux bleus ? (Donner une fraction puis un pourcentage)

Exercice 10

Dans la bibliothèque de Jojo, on peut trouver 1200 livres. 600 de ces livres sont des ouvrages datant d'avant 1900, qu'il appelle des "classiques". Parmi ces classiques, il a marqué d'une gommette rouge 200 ouvrages qu'il appelle les "classiques essentiels" : des livres qu'il faut absolument avoir lu.

- 1► Dans la bibliothèque de Jojo, quelle est la proportion de "classiques" ?
- 2► Donner la proportions de "classiques essentiels" parmi les "classiques".
- 3► Dans la bibliothèque de Jojo, quelle est la proportion de "classiques essentiels" ?

Cependant depuis 1900 il est sorti de nombreux livres que Jojo trouve extraordinaires, selon lui 150 de ces ouvrages récents dans sa bibliothèques sont des "incontournables".

- 4► Quelle est la proportion de livres "incontournables" dans la collection de Jojo ?
- 5► Donner la proportion de livres "incontournables" parmi les ouvrages sortis après 1900.
- 6► Si Dio, un ami de Jojo, devait lire les "classiques essentiels" et les "incontournables", quelle proportion de la bibliothèque de Jojo aurait-il besoin de lire ?
- 7► Après avoir examiné la bibliothèque de Jojo, Dio pense qu'il possède déjà chez lui deux tiers de ses ouvrages au total et trois quarts de ses "classiques". Parmi les ouvrages qui sont communs à leurs deux bibliothèques, quelle est la proportion de "classiques" ?

Exercice 11



Laura affirme qu'elle passe un tiers de chaque jour à dormir, un quart à être en cours, un huitième à s'alimenter, un douzième à faire ses devoirs et faire des tâches ménagères, un douzième à utiliser son téléphone ou regarder la télé, et le reste à s'adonner ses loisirs.

- 1► Exprimer les durées de chacune des 6 activités qu'à évoqué Laura en heure.
Il est vivement recommandé d'utiliser le modèle en barres.
- 2► Donner la proportion de sa journée consacrée aux loisirs.
- 3► Exprimer chacune des fractions données ci dessus en pourcentages si possible.

Avec la calculatrice

Exercice 12 (Proportion via effectif)

En 1998, le film *Titanic* avait enregistré 20 634 793 entrées. Cette année-là, tous films confondus, les cinémas en France ont enregistré 170,1 millions d'entrées.

En 2008, le film *Bienvenue chez les Ch'tis* avait enregistré 20 489 303 entrées. Cette année-là, tous films confondus, les cinémas en France ont enregistré 212,7 millions d'entrées.

Lequel de ces deux films a attiré la plus grande proportion de spectateurs l'année de sa sortie ?

Exercice 13 (Effectif via proportion)

- 1► L'Asie compte environ 4,6 milliards d'habitants, et 31% d'entre eux vivent en Inde. Combien l'Inde compte-t-elle d'habitants ?
- 2► La France compte environ 67 millions d'habitants, ce qui représente environ 15% de la population totale de l'Union Européenne (UE).
Combien l'UE compte-t-elle d'habitants au total ?

Exercice 14 (Proportion de proportion)

L'été dernier, 64% des Espagnols sont partis en vacances, et parmi ceux-ci, 61% sont allés à la mer.
Quel pourcentage des Espagnols sont allés à la mer l'été dernier ?

Tableaux croisés d'effectifs

Exercice 15

Un restaurant effectue un sondage auprès de ses clients le premier septembre. On donne les résultats de ce sondage dans ce tableau :

	Très satisfaits	Satisfaits	Pas satisfaits	Total
Sur place	10	12	8	
À emporter	14		15	50
Total		33	23	

- 1► Quels sont les caractères étudiés ?

- 2► Quelle est la quantité de clients qui ont pris un repas sur place ?
- 3► Compléter le tableau.
- 4► Quelle est la proportion de clients qui ont pris un repas à emporter ? Le gérant est satisfait si au moins 70% des clients sont satisfaits ou très satisfaits.
- 5► Le gérant est-il satisfait ?
- 6► Calculer la proportion de clients très satisfaits parmi ceux qui ont pris un repas sur place.
- 7► Suite à ce sondage, le gérant du restaurant affirme que les clients prenant un repas à emporter sont plus souvent très satisfaits que ceux qui prennent un repas sur place.
Discuter la pertinence de cette affirmation en vous appuyant sur vos calculs.

Exercice 16

On a listé tous les participants à une course de 20 chevaux suivant leur sexe et leur âge. (Par exemple : F5 désigne une femelle âgée de 5 ans).

F5 – M6 – M5 – F6 – F7 – F5 – F5 – M6 – M7 – F5 – F6 – F7 – M7 – F5 – F5 – F6 – F7 – M6 – M5 – F6

- 1► Quels sont les deux caractères permettant de catégoriser ces chevaux ?
- 2► Compléter le tableau croisé d'effectifs suivant :

	5 ans	6 ans	7 ans	Total
Femelle				
Mâle				
Total				

- 3► Calculer la proportion de femelles.
- 4► Parmi les femelles quelle est la proportion de femelles âgées de 5 ans ?
- 5► Mettre en lien les résultats des questions précédents avec la proportion de femelles âgées de 5 ans parmi l'ensemble des participants.

F1 Généralités sur les fonctions

D2 Évolutions

Table des matières

1	Évolutions simples	56
2	Évolutions successives	59
	Exercices	60

Programme

Automatismes

À la liste ci-dessous s'ajoute la liste des automatismes travaillés en classe de seconde, qui doivent être entretenus en classe de première.

Capacités attendues

Évolutions et variations

- ▶ Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale.
- ▶ Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage.
- ▶ Calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives.
- ▶ Calculer un taux d'évolution réciproque.

1 – Évolutions simples

Variation absolue, variation relative, coefficient multiplicateur

Définition 1

Soit V une grandeur strictement positive qui prend la valeur $V_{\text{départ}}$ puis la valeur $V_{\text{arrivée}}$.

- ▶ La **variation absolue** de V est $\Delta V = V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}$.
Elle correspond à l'écart en valeur (par exemple, si la valeur est en euros, la variation absolue est en euros.)
- ▶ La **variation relative**, ou **taux d'évolution** de V est $\tau = \frac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}} = \frac{\Delta V}{V_{\text{départ}}}$.
Elle correspond à l'écart en proportion, souvent exprimée comme un pourcentage.
- ▶ Le **coefficient multiplicateur entre $V_{\text{départ}}$ et $V_{\text{arrivée}}$** est le nombre CM par lequel il faut multiplier $V_{\text{départ}}$ pour obtenir $V_{\text{arrivée}}$, c'est-à-dire $V_{\text{arrivée}} = CM \times V_{\text{départ}}$. Autrement dit, $CM = \frac{V_{\text{arrivée}}}{V_{\text{départ}}}$.

Exemple 2

Un pantalon vendu à 25€ est soldé à 20€.

- ▶ La variation absolue est $\Delta V = 20\text{€} - 25\text{€} = -5\text{€}$.
- ▶ La variation relative est $\tau = \frac{20 - 25}{25} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5} = -0,2 = -20\%$
- ▶ Le coefficient multiplicateur est $CM = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0,8$. Autrement dit $20\text{€} = 25\text{€} \times 0,8$.

Propriété 3

Le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution sont liés par la relation :

$$\tau = CM - 1$$

En particulier,

$$V_{\text{arrivée}} = (1 + \tau)V_{\text{départ}}$$

Proposition 4

- ▶ Augmenter une quantité Q de $t\%$, c'est calculer $Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$
- ▶ Diminuer une quantité Q de $t\%$, c'est calculer $Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$

+10%	+25%	+40%	+100%	-10%	-25%	-50%	-40%
$\times 1,10$	$\times 1,25$	$\times 1,40$	$\times 2$	$\times 0,90$	$\times 0,75$	$\times 0,50$	$\times 0,60$

Remarque 5

- ▶ Les taux sont souvent exprimés en pourcentages. Ainsi, un taux de 0,25 correspond à un pourcentage de 25% (et à une multiplication par 1,25).
- ▶ Un taux positif correspond à une *augmentation* : un taux de 0,67 correspond à une augmentation de 67% (et à une multiplication par 1,67).
- ▶ Un taux négatif correspond à une *diminution* : un taux de -0,52 correspond à une évolution de -52%, autrement dit une *diminution* de 52%. Cela correspond également à une multiplication par $1 - 0,52 = 0,48$.

Attention à bien distinguer un *taux* et un *coefficient multiplicateur* :

- Un coefficient multiplicateur est toujours positif : si $CM > 1$, cela correspond à une augmentation, et si $0 \leq CM < 1$, cela correspond à une diminution.
- Un taux peut être soit positif, soit négatif selon les ouvrages, OU un taux est toujours accompagné des termes «augmentation de» ou «diminution de». Si $\tau > 0$, cela correspond à une augmentation, et si $\tau < 0$, cela correspond à une diminution.
Il est courant d'écrire le signe + d'un taux positif pour accentuer le sens de la variation : on peut dire «une augmentation de +12%» au lieu de «une augmentation de 12%». On évitera cependant de parler d'une «diminution de -12%».

Exemple 6

- Le prix du kWh l'électricité en février 2020 était de 0,1546€. En juillet 2024, il était de 0,2516€. Comme $0,2516 \approx 1,63 \times 0,1546$, le coefficient multiplicateur est d'environ 1,63. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 1,63 - 1 = 0,63$, soit +63% d'augmentation.
- En 1980, la demande mondiale de plastique était de 60 tonnes environ. En 2020, elle était de 360 tonnes. Comme $360 = 6 \times 60$, cela correspond à un coefficient multiplicateur de 6. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 6 - 1 = 5$, soit +500% d'augmentation.
- Dans les années 1980, la superficie des glaces arctiques de plus de 4 ans d'âge atteignait environ 3 millions de km^2 . Dans les années 2020, elle dépassait à peine 0,3 millions de km^2 . Comme $0,3 = 0,1 \times 3$, cela correspond à un coefficient multiplicateur de 0,1. Cela correspond donc à un taux de $\tau = 0,1 - 1 = -0,9$, soit -90%, autrement dit une diminution de 90%.

Méthode 7 (Évolutions simples avec un tableau de proportionnalité)

Le fait que les taux d'évolution s'expriment traditionnellement en pourcentages traduit le fait qu'ils relèvent d'une situation de proportionnalité. On peut donc se servir d'un tableau de proportionnalité, et lire les variations absolue et relative sur chaque ligne.

	Départ	Arrivée	
Pourcentage	100	...	→ Écart = variation relative en %
Données	$V_{\text{départ}}$	$V_{\text{arrivée}}$	→ Écart = variation absolue

Exemple 8

Dans le pays d'Algérie, la consommation de jus de fruits était de 120L par habitant. L'année suivante, elle est montée à 150L par habitant. Quelle augmentation cela représente-t-il dans l'absolu ? Et en pourcentage ?

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessous, on trouve que la quatrième proportionnelle est :

$$\frac{100 \times 150}{120} = \frac{100 \times 15}{12} = \frac{100 \times 5}{4} = 100 \times 1,25 = 125$$

	Départ	Arrivée	
Pourcentage	100	125	→ Variation relative = +25%
Volume (L)	120	150	→ Variation absolue = +30L

La variation absolue est donc $150\text{L} - 120\text{L} = 30\text{L}$ par habitant, la variation relative est +25% car $125 - 100 = 25$.

Exemple 9

Le service *Comme ça me plaît* propose un régime alimentaire pour perdre du poids. Un témoignage affirme qu'après avoir suivi le programme, son poids est de 102kg contre 120kg auparavant. Quelle perte cela représente-t-il dans l'absolu ? Et en pourcentage ?

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessous, on trouve que la quatrième proportionnelle est :

$$\frac{100 \times 102}{120} = \frac{10 \times 102}{12} = \frac{10 \times 51}{6} = \frac{10 \times 17}{2} = 85$$

	Départ	Arrivée
Pourcentage	100	85
Poids (kg)	120	102

→ Variation relative = -15%

→ Variation absolue = -18kg

La variation absolue est donc $12\text{kg} - 102\text{kg} = -18\text{kg}$, la variation relative est -15% car $85 - 100 = -15$.

Par définition, le coefficient multiplicateur est le nombre qui complète le produit à trou $V_{\text{arrivée}} = \dots \times V_{\text{départ}}$. On l'a noté CM , de sorte que $V_{\text{arrivée}} = CM \times V_{\text{départ}}$. Et si les choses s'étaient passées dans l'autre sens ? Autrement dit, que se passe-t-il si les valeurs d'arrivée et de départ changeaient de rôle ? On veut donc compléter le produit à trou $V_{\text{départ}} = \dots \times V_{\text{arrivée}}$. En manipulant la première égalité, on trouve que le nombre manquant est $\frac{1}{CM}$. Cela est cohérent : pour défaire une multiplication par CM , il faut une division par CM . Et rappelons que diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse !

Taux réciproque

Définition 10

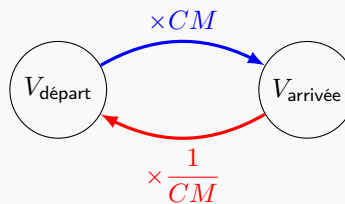
Soit V une grandeur strictement positive qui prend la valeur $V_{\text{départ}}$ puis la valeur $V_{\text{arrivée}}$. On note τ le taux d'évolution de $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.

Le **taux d'évolution réciproque** est le taux τ' qui correspond à l'évolution dans l'autre sens (réciproque) de $V_{\text{arrivée}}$ à $V_{\text{départ}}$.

Proposition 11

Notons CM le coefficient multiplicateur de l'évolution de $V_{\text{départ}}$ à $V_{\text{arrivée}}$.

Le coefficient multiplicateur réciproque est $CM' = \frac{1}{CM}$.



Exemple 12

Un vendeur baisse le prix d'un article de 20% en été. Autrement dit, le prix a été multiplié par 0,8.

Pour ramener le prix à sa valeur initiale à la fin de l'été, ce vendeur se demande quel pourcentage d'augmentation il doit appliquer. Le coefficient multiplicateur étant 0,8, le coefficient réciproque est :

$$\frac{1}{0,8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Il doit donc multiplier le prix par 1,25, ce qui correspond à une augmentation de 25%.

2 – Évolutions successives

Activité 13

Support vidéo : <https://youtu.be/9o4cl3WYZ5s?si=CDzLXhTkwLyxLRN6>

Dans ce journal télévisé, le présentateur et économiste affirme que cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre représentent une augmentation globale de 30%.

- 1► À quel *taux d'évolution*, et à quel *coefficient multiplicateur* correspond une augmentation de 6% ?
- 2► Exprimez puis calculez le taux d'évolution global et le coefficient multiplicateur global correspondant à cinq augmentations successives de 6% d'une année à l'autre. Commentez les propos du présentateur.

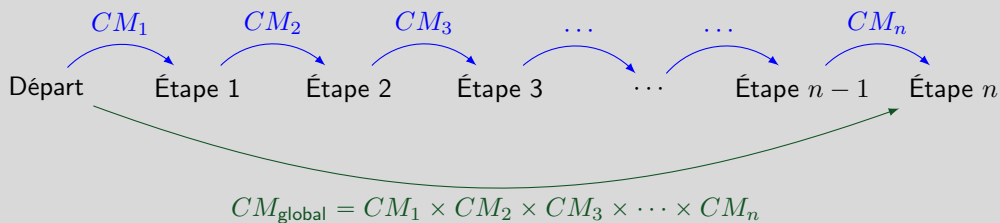
Définition 14

Taux d'évolution global

Lorsqu'une grandeur évolue plusieurs fois successivement, le **taux d'évolution global** correspond au taux d'évolution entre la valeur initiale et la valeur finale.

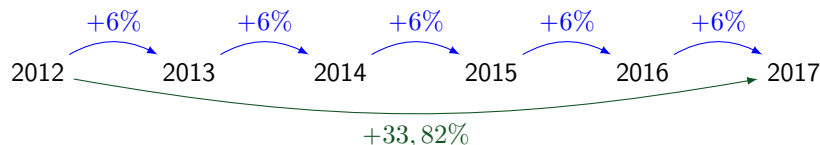
Il correspond au coefficient multiplicateur qui est égal au produit de tous les coefficients intermédiaires :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \cdots \times CM_n$$



Exemple 15

Reprenons l'Activité 13. D'une année à l'autre, le taux d'évolution est de 6%. Cela correspond à un coefficient multiplicateur de $CM = \frac{6}{100} = 0,06$. Ainsi, l'évolution globale est $CM_{\text{global}} = 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06 = 1,06^5 = 1,3382255776$. Le taux d'évolution global est donc environ de 33,82%.



Activité 16 (Fluctuations boursières)

En 2023, le cours d'une cryptomonnaie était de 60% supérieur au cours de 2022. En 2024, il est redescendu de 60% par rapport au cours de 2023.

- 1► Est-il revenu au cours initial ?
- 2► Le résultat serait-il le même si le cours avait d'abord baissé puis augmenté de 60% ?
- 3► Quel est le cours de la cryptomonnaie en 2024 s'il augmente de 60% puis baisse de 62,5% ? Discutez ce dernier pourcentage.

Exercices

Évolutions simples

Exercice 1 (Taux d'évolution)

Recopier et compléter sans justifier le tableau ci-dessous :

Variation en pourcentage	Baisse de 28%	Hausse de 73%		
Coefficient multiplicateur			0,9	1,23

Exercice 2 (Soldes : prix final)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 3 (Soldes : réduction)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 4 (Soldes : prix initial)

Un magasin affiche des étiquettes de promotion pendant les soldes, avec l'ancien prix barré, le pourcentage de réduction et le nouveau prix.

Complétez les étiquettes ci-dessous.



Exercice 5 (Défi)

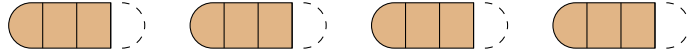
Depuis 2018, les commerçants n'ont plus le droit d'offrir sur les produits alimentaires des promotions au-delà d'un tiers de leur valeur (c'est-à-dire concernant les produits que l'on peut acheter à l'unité : un concombre, une bouteille, ...) ou d'un quart de leur volume (c'est-à-dire concernant les produits dont le prix est affiché au kg ou au L : des pommes, des boissons, de la lessive, ...).

Autrement dit, on doit calculer la réduction entre l'unité du produit (la valeur d'un article seul, ou d'un kg, ou d'un L) sans promotion et avec. Par exemple, si on vend 4 baguettes pour le prix de 3, alors 1 baguette coûte alors le prix de $3 \div 4 = 0,75$ baguette, soit une réduction de 25%.

Il est commode de représenter la situation avec un dessin, sur lequel on peut lire la réduction globale :



On voit 3 baguettes payées au plein tarif, 1 baguette gratuite, ce qui, si on réarrange le remplissage, revient à offrir un quart de chaque baguette :



Complétez les étiquettes de réduction suivantes pour qu'elles offrent la plus grande promotion possible dans la limite de la loi.

40 rouleaux
+ ... offerts !

... achetés
1 offert !

2 achetés
le 2^e à ...%

40cL
dont ... cL gratuits

Évolutions successives

Exercice 6 (Hausse des prix)

Un jouet sophistiqué de la marque GW coûtait 26€ en 2012, ce même article en coûte 52€ en 2024.

- 1► Calculer la hausse du prix (variation relative) et l'exprimer en pourcentage.

L'entreprise justifie son augmentation de prix par l'inflation, c'est-à-dire le fait que tous les produits du marché soient plus chers et donc qu'il est plus cher de produire.

L'inflation était de 2% en moyenne chaque année de 2012 à 2021. Elle a bondi à 5% en 2022 et 5% en 2023, puis est finalement retombée à 2% en 2024.

- 2► La hausse du prix du fabricant de jouet est-elle justifiée ?
3► Quel serait le prix du jouet si l'augmentation du prix avait suivi l'inflation ? (On arrondira par excès à l'unité.)

Exercice 8 (Chiffre d'affaire)

Bob a créé son entreprise de comptabilité en 2020. Son chiffre d'affaire est de 24 000€ cette année. Les trois années suivantes, Bob voit son chiffre d'affaire augmenter de 20%, puis de 10% et enfin de 5%.

- 1► Donner le chiffre d'affaire de Bob en 2021.
2► Quel est le taux d'évolution global correspondant à ces trois évolutions successives ?
3► Donner le chiffre d'affaire de Bob en 2023.

Exercice 9 (Effectifs de deux lycées)

Le lycée A a vu sa population augmenter de 5% en 2023 puis de 5% en 2024.

Le lycée B a vu sa population augmenter de 3% en 2023 puis de 7% en 2024.

Dans quel lycée l'augmentation est-elle (en proportion) la plus grande sur ces deux années ?

Exercice 7 (Réductions cumulées)

Un pantalon à 50€ est soldé à 10% mais Charles qui travaille dans le magasin a droit à une remise de 20% sur ses achats. Quelle somme dépensera Charles s'il applique les deux réductions ?

Exercice 10 (Évolutions successives)

Quelle évolution en pourcentage correspond à :

- 1► Deux augmentations successives de 20% ?
- 2► Une augmentation de 60% suivie d'une autre de 40% ?
- 3► Une augmentation de 20% puis une autre de 80% ?
- 4► Une augmentation de 10% suivie d'une diminution de 10% ?
- 5► Une augmentation de 100% suivie d'une baisse de 50% ?

Exercice 11 (Stocks en baisse)

Julia a vendu 75% de son stock. Son partenaire a vendu le lendemain 75% du reste. Il reste alors 12 palettes à Julia et son partenaire.

- 1► Quelle proportion du stock a vendu le partenaire de Julia ?
- 2► De combien de palettes disposaient Julia et son partenaire avant la vente ?

Exercice 12 (Les économies de Mme B)

Mme B a fait un dépôt sur son compte en 2019. On lit dans le tableau suivant que de 2019 à 2020, Mme B a vu ses économies augmenter de 5%.

Compléter ce tableau.

Année	Valeur des économies de Mme B	Taux d'évolution par rapport à l'année précédente
2019		×
2020	10 000	+5%
2021		+20%
2022		+5%
2023	13 860	
2024	16 632	

Exercice 13 (Exercice complet)

Un magasin de meubles propose des soldes.

- 1► Une table coûtait 345€ et est soldée à -45%. Quel est son nouveau prix ?
- 2► Un lot de chaises coûte, solde comprises, 202,80€. Sachant qu'il est soldé à -35%, quel est le prix initial du lot de chaises ?
- 3► Une armoire coûtait 340€, et est proposée à 119€ pendant les soldes.
 - a► Quelle est la variation absolue du prix de cette armoire ?
 - b► Quel est le pourcentage de réduction ?

Exercice 14 (La boucle est-elle bouclée ?)

Le prix des barres de céréales a augmenté de 40% puis diminué de 40%. Comment a-t-il évolué globalement ? A-t-il augmenté, diminué ? De quel pourcentage ?

Mathématiques

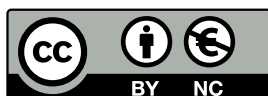
Seconde GT – Cours complet

La série « Mathématiques – Seconde GT » est composée de quatre ouvrages :

- *Cours complet* est une version enrichie du cours, avec des remarques supplémentaires et des démonstrations, qu'elles soient exigibles par le programme ou bien au-delà de sa portée, tout en restant abordables pour quiconque peut faire preuve de suffisamment de motivation et de patience. Cette version a été écrite avec plusieurs objectifs en tête. Permettre aux absents et absentes de rattraper le cours sans trop de pertes. Donner à celles et ceux qui souhaitent s'avancer suffisamment de matériel pour le faire en autonomie. Satisfaire l'appétit des esprits les plus gourmands, en culture comme en technique. Donner un aperçu de ce que peuvent être des mathématiques plus amusantes.
- *Squelette de cours* est, comme son nom le suggère, une extraction de la version complète, qui ne contient que les essentiels du cours parfois à compléter, et les exercices. Il n'y a pas les démonstrations ni les détails supplémentaires. Cet élagage a pour objectif de créer un support de cours à la fois synthétique et fourni, afin d'optimiser la prise de notes en classe.
- *Extras* est un complément au *Cours complet*, avec des approfondissements, des points culture supplémentaires, des activités, et des annexes contenant des rappels « éclairés » (des notions vues les années passées, agrémentées de démonstrations permettant une compréhension plus profonde) et des outils qui ne sont pas ou plus au programme, mais qui peuvent rester utiles.
- *Corrections* rassemble tous les exercices présents dans les feuilles de fin de chapitre, ainsi que leur correction plus ou moins rédigée. Il s'agit d'un support d'aide pour le travail en autonomie, aussi certains exercices ne bénéficient que d'éléments de correction. Voir la préface du manuel en question pour plus d'explications.

Cours complet (et *Squelette de cours* par conséquent) regroupe tous les cours et exercices dispensés lors de l'année de seconde générale et technologique. Les chapitres sont ordonnés selon une progression arbitraire, qui n'est pas la seule envisageable.

Cours composé par E. Suong & S. Damase, illustrations par E. Suong
Les exercices sont issus de sources multiples. Pour tout ajout de référence, adaptation ou retrait, merci de nous contacter.



Version du 13 septembre
2026

