

Sujet du devoir commun 2

Exercice 1

Alice s'intéresse à l'isolation thermique de sa maison. Elle réalise quelques mesures :

- ▶ La température extérieure est de 5°C (on la considérera constante durant tout le problème).
- ▶ À 22h00, il fait environ 20°C à l'intérieur de la maison.
- ▶ Le lendemain à 8h00, il fait environ $17,3^{\circ}\text{C}$ à l'intérieur de la maison (Alice n'a pas allumé le chauffage dans cet intervalle).

Partie A : premier modèle

On suppose que la variation de température à l'intérieur de la maison est constante, c'est-à-dire que la baisse de température est la même heure après heure.

- 1▶ Selon ce modèle, quelle serait la température à l'intérieur de la maison le lendemain à 22h00 ?
- 2▶ Ce modèle semble-t-il pertinent ?

Partie B : second modèle

On note T_n la température en degrés Celsius après n heures. On considère la première heure comme l'heure 0. Ainsi, $T_0 = 20$ et $T_{10} = 17,3$. La loi de Newton stipule que la variation de température est proportionnelle à l'écart de température entre l'intérieur et l'extérieur. On modélisera donc l'évolution de température par la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} - T_n = -0,02(T_n - 5)$$

- 1▶ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = 0,98T_n + 0,1$.
- 2▶ Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième. Interpréter ces valeurs.
- 3▶
 - a▶ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \geq 5$.
 - b▶ Étudier le sens de variation de (T_n) . Expliquer pourquoi c'est cohérent avec la situation.
 - c▶ Justifier que (T_n) converge.
- 4▶ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = T_n - 5$.
 - a▶ Montrer que (U_n) est géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
 - b▶ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 5 + 15 \times 0,98^n$
 - c▶ En déduire la valeur de la limite de (T_n) .
- 5▶ La qualité de l'isolation thermique est quantifiée par le coefficient k dans la loi de Newton $T_{n+1} - T_n = -k(T_n - 5)$ (par exemple, le coefficient dans la première partie est $k = 0,02$). Alice a ajouté de la laine de verre pour améliorer l'isolation de son logement. Elle a relevé dans le tableau suivant la température (arrondie au centième) à intervalle régulier avec cette nouvelle isolation.
Estimez le nouveau coefficient k .

Temps (heures)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Température ($^{\circ}\text{C}$)	20,00	19,85	19,70	19,55	19,41	19,26	19,12	18,98	18,84	18,70	18,57

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}.$$

Affirmation 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
f	5 ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ 3	7 ↘ 1	

Affirmation 2 : La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .

Affirmation 3 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = -\infty$

Affirmation 4 : La courbe représentative de la fonction f admet deux asymptotes verticales.

Exercice 3

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5% des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $P(E)$ la probabilité d'un évènement E .

On considère les évènements suivants :

- ▶ D : « la pièce est défectueuse » ;
- ▶ T : « la pièce présente un test positif » ;
- ▶ $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T .

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- ▶ La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à 0,98 ;
- ▶ la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

- 1▶ Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2▶ a▶ Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
b▶ Démontrer que : $P(T) = 0,0775$.
- 3▶ On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.

Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

On rappelle que : $P(D) = 0,05$.

- 1▶ Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
- 2▶ Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.

On donnera un résultat arrondi au centième.

- 3▶ Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.