

Corrigé du devoir commun 1

Exercice : QCM

- 1► a► Si le point M était sur la droite d , alors il existerait $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} 2 = 1 + 2t \\ 1 = -2 + t \\ -1 = 4 - t \end{cases}.$$

D'après la première équation, $t = 0,5$. Or cela contredit la deuxième équation car $1 \neq -2 + 0,5 = -1,5$.
Donc $M \notin d$.

- b► Si le point N était sur la droite d , alors il existerait $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} -3 = 1 + 2t \\ -4 = -2 + t \\ 6 = 4 - t \end{cases}.$$

D'après la première équation, $t = -2$. Cela est compatible avec la deuxième équation car $-4 = -2 + (-2)$.
C'est aussi compatible avec la troisième équation car $6 = 4 - (-2)$.
On en conclut que $N \in d$ pour le paramètre $t = -2$.

- c► Si le point P était sur la droite d , alors il existerait $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} 0 = 1 + 2t \\ 0 = -2 + t \\ 6 = 4 - t \end{cases}.$$

D'après la première équation, $t = -0,5$. Or cela contredit la deuxième équation car $0 \neq -2 + (-0,5) = -2,5$.
Donc $P \notin d$.

- d► Si le point Q était sur la droite d , alors il existerait $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} -5 = 1 + 2t \\ -5 = -2 + t \\ 1 = 4 - t \end{cases}.$$

D'après la première équation, $t = -3$. Or cela contredit la troisième équation car $1 \neq 4 - (-3) = 7$.
Donc $Q \notin d$.

- 2► Soient a , b et c trois réels tels que $a\overrightarrow{MN} + b\overrightarrow{MP} + c\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{0}$. D'abord,

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ -4 - 1 \\ 6 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 1 \\ -6 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -5 - 2 \\ -5 - 1 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$a\overrightarrow{MN} + b\overrightarrow{MP} + c\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -5a - 2b - 7c \\ -5a - b - 6c \\ 7a - 5b + 2c \end{pmatrix}$$

Comme cette somme est égale à $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} -5a - 2b - 7c = 0 \\ -5a - b - 6c = 0 \\ 7a - 5b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{qui se réécrit} \quad \begin{cases} 5a + 2b + 7c = 0 \\ 5a + b + 6c = 0 \\ 7a - 5b + 2c = 0 \end{cases}$$

On soustrait la deuxième équation à la première : on en déduit que $c = -b$, ce qu'on substitue au reste du système :

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ 5a + b + 6c = 0 \\ 7a - 5b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} c = -b \\ 5a + b - 6b = 0 \\ 7a - 5b - 2b = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} c = -b \\ 5a - 5b = 0 \\ 7a - 7b = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} c = -b \\ a = b = 0 \\ a = b \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont redondantes, on en supprime une. On fixe la valeur d'une des inconnues : par exemple, prenons $b = 1$. Alors :

$$\begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$, donc $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont coplanaires. Comme ils ont tous M pour origine, on en déduit que M , N , P et Q sont coplanaires.

3► En lisant les coefficients devant le paramètre t , on lit que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

a► $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}$ est un vecteur directeur de d car il est colinéaire à $\vec{u}$.

b► $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, puisque $1 \times -1 \neq 1 \times 1$ (non égalité des produits en croix entre les ordonnées et les cotes).

Ainsi, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur directeur de d .

c► $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\vec{u}$ est un vecteur directeur de d car il est colinéaire à $\vec{u}$.

d► $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, puisque $1 \times 1 \neq 2 \times -2$ (non égalité des produits en croix entre les abscisses et les ordonnées). Ainsi,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur directeur de d .

4► Les points A et B appartiennent à la droite (AB) , donc leurs coordonnées doivent être compatibles avec les équations paramétriques de (AB) . On note également que tout vecteur directeur de (AB) est colinéaire à

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a► B n'appartient pas à la droite décrite par cette représentation paramétrique car $z_B \neq 2$. Donc ce système ne représente pas d .

b► Si ce système représentait d , alors il existerait t tel que A est le point décrit par le paramètre t , autrement dit $\begin{cases} 1 = t \\ 0 = 1 + t \\ 2 = 2 - 2t \end{cases}$. Or les deux premières équations sont incompatibles, donc ce système ne représente pas d .

c► Le vecteur directeur que l'on peut lire dans cette représentation paramétrique est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, puisque $1 \times (-2) \neq 1 \times 2$ (non égalité des produits en croix entre les ordonnées et les cotes)). Donc ce système ne représente pas d .

d► On remarque que :

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2 + 1t = x_B + \overrightarrow{AB}t \\ y = 1 + t = 1 + 1t = y_B + \overrightarrow{AB}t \\ z = -2t = 0 + (-2)t = z_B + \overrightarrow{AB}t \end{cases}$$

Donc ce système représente d .

5► On a vu que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige (AB) et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige d .

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, puisque $1 \times 1 \neq 1 \times 2$ (non égalité des produits en croix des abscisses et des ordonnées). Donc d et (AB) ne sont pas parallèles.

Supposons que d et (AB) sont sécantes en un point C . Alors il existe deux réels t et t' tels que leurs représentations paramétriques pour ces deux paramètres coïncident en ce point, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_C = 1 + 2t \\ y_C = -2 + t \\ z_C = 4 - t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_C = 2 + t' \\ y_C = 1 + t' \\ z_C = -2t' \end{cases}$$

En particulier,

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + t' \\ -2 + t = 1 + t' \\ 4 - t = -2t' \end{cases} \quad \text{autrement dit} \quad \begin{cases} 2t - t' = 1 \\ t' = t - 3 \\ t + 2t' = -4 \end{cases}$$

En injectant l'expression de t' donnée par la deuxième équation dans les deux autres équations, on obtient :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + t - 3 \\ t' = t - 3 \\ 4 - t = -2(t - 3) \end{cases}$$

Après simplification et résolution, on trouve :

$$\begin{cases} t = -2 \\ t' = t - 3 \\ t = 2 \end{cases}$$

La première et la troisième équation sont contradictoires : cela signifie que nous avons raisonné par l'absurde, et montré que notre hypothèse initiale est fautive : ainsi, d et (AB) ne sont pas sécantes.

Comme elles ne sont ni parallèles ni sécantes, elles ne sont pas coplanaires.

Problème : déclin de population

1► Le nombre de macareux en 2021 = 2020 + 1 est $u_1 = 0,8 \times u_0 + 3 = 0,8 \times 300 + 3 = \boxed{243}$.

Le nombre de macareux en 2022 = 2020 + 2 est $u_2 = 0,8 \times u_1 + 3 = 0,8 \times 243 + 3 = \boxed{197,4 \approx 197}$.

2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « $15 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

INIT

D'après la question précédente, $u_1 = 243$ donc $15 \leq u_1 \leq u_0 = 300$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors aussi vraie.

HÉRÉDITÉ

$$\begin{array}{ll}
 15 \leq u_{n+1} \leq u_n & \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
 \text{Donc } 0,8 \times 15 \leq 0,8 \times u_{n+1} \leq 0,8 \times u_n & \text{car } 0,8 \geq 0 \\
 \text{Donc } 12 \leq 0,8 \times u_{n+1} \leq 0,8 \times u_n & \\
 \text{Donc } 12 + 3 \leq 0,8 \times u_{n+1} + 3 \leq 0,8 \times u_n + 3 & \\
 \text{Donc } 15 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} & \text{d'après la relation de récurrence de } (u_n)
 \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

CCL

On a montré que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ entraîne $\mathcal{P}_{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $15 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- 3► D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 15, donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente.
- 4► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 15 = 0,8u_n + 3 - 15 = 0,8u_n - 12 = 0,8(u_n - 15) = 0,8v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 15 = 285$.

- 4► a► D'après la formule des suites géométriques, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $v_n = v_0 \times q^n = 285 \times 0,8^n$, et $u_n = v_n + 15$, donc
 $u_n = 15 + 285 \times 0,8^n$.

- b► Comme $0 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 15 + 285 \times 0,8^n = 15 + 285 \times 0 = 15$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 15$.

- c► Interprétation : au bout d'un temps arbitrairement long, la population de macareux se stabilisera autour de 15 individus.
- 5► a► À l'aide de la calculatrice, on calcule les premières valeurs de (u_n) données dans le tableau ci-contre.
Pour $n \geq 14$, on a $u_n \leq 30$ (car (u_n) est décroissante).
- b► À partir de $2034 = 2020 + 14$, la population de macareux passera en-dessous des 30 individus.
- c► Le programme se complète comme ci-dessous :

	A	B
1	n	u_n
2	0	300.0
3	1	243.00087
4	2	197.39983
5	3	160.91812
6	4	131.73363
7	5	108.38516
8	6	89.70726
9	7	74.76494
10	8	62.81021
11	9	53.2473
12	10	45.59784
13	11	39.4748
14	12	34.58244
15	13	30.66422
16	14	27.52876

```

1 def population(S):
2     n = 0
3     u = 300
4     while u > S:
5         u = 0.8*u + 3
6         n = n + 1
7     return n

```