

Démonstrations, exercices-type et méthodes pour khôlles en MPSI

Luc Pares & Ewan Suong

2018 – 2019

Deux élèves de MPSI rendent leur premier devoir maison d'informatique, dactylographié. L'un des deux contenant des formules mathématiques fort bien présentées, leur professeur leur demande si celles-ci ont été tapées avec "LaTeX". Affirmant que non, n'en connaissant rien, leur professeur débute une apologie de LaTeX. Éblouis et fascinés par ce discours, ils décident d'apprendre ce langage merveilleux. Au fil de leur apprentissage, le monde de sciences qui les entoure se révèle être gouverné par LaTeX! Chaque document qu'ils manipulent – leurs cours de mathématiques plus particulièrement – sont générés grâce à LaTeX. Pour parfaire leur maîtrise du langage, en l'alliant à l'utile, ils décident de taper leurs questions de cours de khôlle de mathématiques.

Ce livre est donc un recueil de démonstrations et autres exercices-type du programme de MPSI, qui auront torturé leurs esprits chaque semaine, accompagnés des diverses méthodes qu'ils doivent maîtriser.

Ce livre se présente par-dessus tout comme l'aboutissement d'un long projet, le projet de toute une année.

Au-delà, il forme un ensemble de potentiels exercices – chaque démonstration formant en soi un exercice, puisqu'elles nous ont été soumises en khôlle, à nous, élèves auteurs de ce livre et camarades – à donner en khôlle ou pour s'exercer.

Durant l'écriture de ce chef-d'œuvre (rivalisant sans nul doute avec les plus grands!), la question de son utilité nous a été posée maintes et maintes fois... Alors voilà notre réponse :

Pour les étudiants : Ce livre permet de passer en revue les démonstrations exigibles au concours, ainsi que les méthodes, plans d'étude et autres outils permettant de mener la résolution de nombre de problèmes!

Dans la vie de tous les jours : Quoi de mieux pour briller en soirée! Ce ne sont que des "circonvolutions autour d'une porte ouverte"! (dédicace à notre professeur de maths préféré)

Pour les étudiants (bis) : Les élèves de première année peuvent voir ce livre comme un support pour le travail des khôlles, un complément pour l'apprentissage, la maîtrise ou la révision de leurs cours (sans s'y substituer pour autant!).

Pour nous, auteurs : Quelle meilleure occasion pour travailler LaTeX! À mon humble avis, pour apprendre un langage de programmation – de surcroît dans un domaine précis – tout ce qu'il faut c'est un cours synthétique et beaucoup de pratique régulière. Ce livre – dont au début, disons-le, l'idée ne nous a jamais effleuré l'esprit – était le projet parfait à mener!

Pour les khôlleurs : Modestement, nous ne prétendons pas compléter leur savoir, déjà infini, non; cependant s'ils cherchent l'inspiration pour un exercice – chaque démonstration se donnant possiblement à lire comme exercice en soi – ils peuvent feuilleter cette magnifique banque de démonstrations et exercices-type de MPSI!

Dans la vie de tous les jours (bis) : Selon le meuble, ce livre a la bonne épaisseur pour faire une cale.

Pour nous, auteurs (bis) : Cela nous a, en premier lieu, permis de travailler nos khôlles ! (cela vaut également pour les relecteurs, que je remercie chaudement ici, en plus du paragraphe de remerciement ci-dessous.)

Voilà donc ce qu'il en est de notre réponse.

Remerciements : nous remercions

- M. Sartre, pour nous avoir permis de découvrir L^AT_EX (avant l'heure, disons-le), ses précieux conseils et ses connaissances sans limites ; (on vous admire, Monsieur ! mais ce n'est pas l'objet de ce livre-ci)
- M. Pazat, pour ses merveilleux cours, si fascinants et passionnants que l'on ne peut plus s'en passer après y avoir goûté. Merci aussi de nous avoir laissé faire ce livre ! (On vous admire tout autant, Monsieur ! mais ce n'est toujours pas l'objet de ce livre-ci)
- Nos khôlleurs, oui, même si vous avez généré beaucoup de souffrance, vous nous avez permis de bien progresser ;
- Michaux Matéo, Traversié Thomas, Guivarch Tobias, Soula Benoît, pour l'aide à la relecture de cet ouvrage, et leur investissement sans faille : la qualité que ce livre a atteinte aurait été inimaginable sans vous. Nous ne le dirons ni ne l'écrirons jamais assez : merci encore et encore !
- Donias Orlane, à qui nous devons la magnifique illustration en quatrième de couverture !

Remerciements spéciaux :

- De Ewan pour Luc : merci d'avoir mené ce projet avec moi, si éreintant a-t-il pu être ! La symbiose de deux esprits à la recherche d'un but unique est, à mes yeux, une des choses les plus belles.
- De Luc pour Ewan : Initier un projet fou est une chose, le mener à son terme en est une autre – et autrement plus impressionnante ! Merci à toi pour ta patience et ta persévérance, sans lesquelles cet ouvrage n'aurait sans doute jamais dépassé le stade de l'ébauche.

Pour terminer, voici un petit message spécial pour vous, lecteurs : merci mille fois de permettre à ce livre d'exister – qu'est-ce qu'un livre sans lecteurs, nous vous le demandons ! – et merci pour l'accueil si particulier que vous lui avez réservé, qui nous a beaucoup touché.

N'hésitez pas à vous servir des espaces libres de chaque page pour prendre des notes ou compléter des passages vagues, ou à ajouter vos propres exercices !

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur de nature quelconque, indiquez dans la marge (entre vos démonstrations personnelles) les raisons de votre initiative, et poursuivez votre lecture en conséquence.

Gardez aussi à l'esprit :

$$\forall (\text{livre}_1, \text{livre}_2) \in (\text{Maths})^2, \text{livre}_1 \neq \text{livre}_2 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{connaissances}(t) = +\infty$$

Table des matières

I	Démonstrations	13
1	Complexes	14
1.1	Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$	14
1.2	Formule de Moivre	15
1.3	Formulaire de trigonométrie - principe des démonstrations . . .	16
1.4	Formules trigonométriques avec $\tan(\frac{\pi}{2})$	17
1.5	Racines n-ièmes de l'unité	18
1.6	Racines n-ièmes d'un nombre complexe	19
1.7	Caractérisation des similitudes directes	20
2	Fonctions et applications	21
2.1	Graphes de fonctions usuelles	21
2.2	Études des fonctions trigonométriques	26
2.3	Définitions d'une puissance	31
2.4	Théorème de la bijection continue	31
2.5	Extension de la dérivée d'une composé par exp dans $\mathbb{C}$	31
2.6	Conservation de l'injectivité et de la surjectivité par composition	32
2.7	Démonstration d'une méthode de détermination de la bijection réciproque	32
2.8	Condition nécessaire d'extremum local	33
2.9	Théorème de Rolle	34
2.10	Égalité des Accroissements Finis	34
2.11	Inégalité des Accroissements Finis	35
2.12	Théorème de Limite de la Dérivée	36
2.13	Formule de Leibniz	37
2.14	Le contre-exemple fondamental	38
3	Sommes	40
3.1	Somme des entiers de 1 à n	40
3.2	Formule des sommes géométriques	41
3.3	À propos du coefficient du binôme	41
3.4	Formule du binôme	42
3.5	Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$	43

4	Intégration	44
4.1	Théorèmes de calcul intégral	44
4.1.1	Calcul intégral avec une primitive	44
4.1.2	Théorème d'intégration par parties	44
4.1.3	Théorème de changement de variable	45
4.2	Intégrale et nullité	46
4.3	Théorème Fondamental de l'Intégration	47
5	Équations différentielles	51
5.1	Solutions d'une équation différentielle homogène linéaire du 1 ^{er} ordre	51
5.2	Solutions d'une équation différentielle linéaire du 1 ^{er} ordre	52
5.3	Méthode de variation de la constante	52
5.4	Résolution des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants homogènes dans le cas complexe	53
5.5	Résolution des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants homogènes dans le cas réel	55
6	Structures algébriques et ensembles	58
6.1	La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre partielle	58
6.2	Caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$. . .	59
6.3	Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée possède un maximum . .	59
6.4	Caractérisation séquentielle de la densité	60
6.5	Densités de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	61
6.6	Une condition suffisante pour être un sous-groupe	61
6.7	Formule du binôme dans un anneau	62
6.8	Propriétés d'anneaux et de corps	63
6.8.1	Les éléments inversibles d'un anneau forment un groupe par $\times$	63
6.8.2	Tout corps est un anneau intègre	64
7	Limites	65
7.1	Unicité de la limite	65
7.2	Limite d'une somme	65
7.3	Composition de limites	66
7.4	Théorème des Limites Monotones	67
8	Suites	68
8.1	Une suite convergente est bornée	68
8.2	Théorème des suites extraites	68
8.3	Théorème de limite monotone	69
8.4	Suites adjacentes	70
8.5	Relations de récurrence	71
8.6	Équivalents usuels	72
8.7	Prépondérance de la factorielle	72

9 Arithmétique	74
9.1 Unicité d'une congruence	74
9.2 Propriété fondamentale du PGCD	75
9.3 Théorème de Bézout et corollaires	76
9.4 Infinitude des nombres premiers	77
9.5 Petit théorème de Fermat	77
9.6 Décomposition en produit de facteurs premiers	78
10 Continuité	80
10.1 Théorème des Valeurs Intermédiaires	80
10.2 Théorème des Bornes Atteintes	81
10.3 Continuité n'implique pas uniforme continuité	82
10.4 Théorème de Heine	82
11 Développements limités	84
11.1 Primitivation des développements limités	84
11.2 Formule de Taylor-Young	86
11.3 Formule de Taylor avec reste intégral	87
11.4 Inégalité de Taylor-Lagrange	88
11.5 Formules de développements limités usuels en 0	89
12 Polynômes et fractions rationnelles	90
12.1 Résolution des équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes	90
12.2 Formule de Taylor	91
12.3 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	92
12.4 Caractérisation de l'ordre de multiplicité	93
12.4.1 Existence d'un polynôme non annulé	93
12.4.2 Annulation des dérivées	94
12.5 Théorème de d'Alembert-Gauss	95
12.6 Relations coefficients-racines	96
12.7 Interpolation polynomiale	97
12.8 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$	98
12.9 Forme et unicité d'une fraction rationnelle irréductible	98
12.10 Parties entière et fractionnaire d'une fraction rationnelle	99
12.11 Coefficient d'une partie polaire d'un pôle simple	100
12.12 Formule donnant la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$	101
13 Espaces vectoriels	102
13.1 Sous-espaces vectoriels engendrés	102
13.2 Sous-espaces vectoriels et images directes ou réciproques	103
13.3 Caractérisation de l'injectivité par le noyau	103
13.4 Propriétés des projecteurs	104
13.5 Caractérisation d'un projecteur sur l'image parallèlement au noyau	105
13.6 À propos des hyperplans	106
13.7 "Interpolation linéaire"	107

13.8	Application linéaire, base et famille génératrice de son l'image	108
13.9	Famille libre et application linéaire injective	108
13.10	Caractérisation des bases en dimension finie	109
13.11	Dimension d'un produit cartésien	110
13.12	Caractérisation de l'isomorphisme par la dimension	111
13.13	Formule de Grassmann	111
13.14	Théorème du rang	112
13.15	Dimension d'un hyperplan	113
14	Espaces préhilbertiens réels	115
14.1	Produits scalaires usuels	115
14.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz	116
14.3	Composantes d'un vecteur dans une base orthonormale	117
14.4	Projection orthogonale dans un espace euclidien	119
14.5	Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel	120
14.6	Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien	120
14.7	Projection, symétrie orthogonale, distance et hyperplans	121
15	Séries	122
15.1	Condition nécessaire de convergence d'une série	122
15.2	Nature et somme des séries géométriques	122
15.3	Nature des séries de Riemann	123
15.4	Théorème des séries télescopiques	124
15.5	Critère spécial des séries alternées	125
15.6	Absolue convergence implique convergence	125
15.7	Limite du critère des équivalents	126
16	Matrices	128
16.1	Associativité du produit matriciel	128
16.2	Inversibilité d'une matrice	129
16.3	Formule fondamentale du calcul matriciel	130
16.4	Caractérisation de la bijectivité par la matrice associée	131
16.5	Formules de changement de base	132
16.6	Propriétés de la trace	133
16.7	Matrices semblables : relation d'équivalence, lien avec la trace	133
16.8	Rang et matrice équivalente	134
16.9	Caractérisation de l'équivalence par le rang	136
16.10	Rang et transposition	136
16.11	Inversion d'une matrice	137
17	Déterminants	138
17.1	Déterminant d'une famille de vecteurs	138
17.2	n -linéarité de l'application déterminant	138
17.3	Caractérisation d'une base par son déterminant	139
17.4	Déterminant et transposition	140
17.5	Formule de développement d'un déterminant	141

17.6	Déterminant de Vandermonde	142
17.6.1	Opérations élémentaires sur le déterminant	143
17.6.2	Polynôme	143
17.7	Déterminants triangulaires par blocs	144
18	Dénombrement sur les ensembles finis	146
18.1	Cardinal et inclusion	146
18.2	Cardinal d'une réunion d'ensembles	147
18.3	Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles	148
18.4	Cardinal de l'ensemble des p -arrangements d'un ensemble	148
18.5	Cardinal de l'ensemble des p -combinaisons d'un ensemble	149
18.6	Cardinal des parties d'un ensemble	150
18.7	Propriétés du coefficient du binôme démontrées par une approche de dénombrement	151
19	Probabilités	152
19.1	Formules de probabilité	152
19.1.1	Formule des probabilités composées	152
19.1.2	Formule des probabilités totales	152
19.1.3	Formule de Bayes	152
19.2	Événements indépendants	153
19.3	Approche de la loi binomiale	153
19.4	Lois de probabilité usuelles : définition, espérance et variance	154
19.5	Espérance mathématique : linéarité et croissance	156
19.6	Théorème de transfert	157
19.7	Inégalité de Markov	157
19.8	Inégalité de Bienaymé-Tchebichev	158
19.9	Espérance et variance de deux variables aléatoires indépendantes	158
19.10	Somme de deux variables aléatoires suivant deux lois binomiales	159
19.11	Variance de la somme de n variables mutuellement indépendantes	160
19.12	Espérance du produit de n variables mutuellement indépendantes	160
19.13	Somme de plusieurs variables aléatoires mutuellement indépen- dantes suivant une loi de Bernoulli	161

II Exercices-type	163
1 Complexes	164
1.1 Un module dans l'inégalité	164
1.2 Système d'équations complexes	165
1.3 Triangles équilatéraux complexes	165
2 Fonctions - Applications	167
2.1 Un prolongement par continuité (non dérivable)	167
2.2 $e^x = x + 2$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$	167
2.3 Preuve d'une induction de bijection	168
2.4 Équation fonctionnelle de arctan	168
2.5 Démonstration de la bijectivité d'une application donnée	169
2.6 Équation à 3 paramètres	169
2.7 Dérivées bornées	170
3 Sommes	171
3.1 Somme des $\cos(k\theta)$	171
3.2 Produit des entiers pairs / impairs	171
3.3 Imparité d'une expression	172
3.4 Formule des colonnes	172
3.5 Somme des $\binom{n}{k} \sin(kx)$	173
4 Intégration	174
4.1 Application d'une intégration par parties	174
4.2 Application d'un changement de variables	175
4.3 Intégrales avec des sin et cos	175
4.4 Intégrale d'une fonction symétrique	176
5 Équations différentielles	178
5.1 Une résolution d'équation différentielle avec le théorème de su- perposition	178
5.2 Équation fonctionnelle	179
5.3 Équation du deuxième ordre à coefficients non constants	180
6 Structures algébriques - Ensembles	181
6.1 $\sqrt{2}$ est irrationnel	181
6.2 Inclusion, intersection, union	181
6.3 Démonstration qu'une certaine application est une loi de com- position interne	182
6.4 Images directe et réciproque d'une réunion de deux ensembles .	183
6.5 Différence symétrique de deux ensembles	184
6.6 Groupe des éléments commutatifs	185

7 Limites et continuité	187
7.1 Convergence d'une intégrale	187
7.2 Minimum d'une fonction divergente	187
7.3 Températures terrestres	188
8 Suites	190
8.1 Théorème de Césaro	190
8.2 Simplification d'une expression par un équivalent	192
8.3 Étude de suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	193
9 Arithmétique	195
9.1 Infinitude de $4\mathbb{P} + 3$	195
9.2 PGCD de deux expressions	195
10 Développements limités	197
10.1 Développement limité de la bijection réciproque	197
10.2 Équivalent simple d'une expression	198
10.3 "Taux d'accroissement" pour la dérivée seconde	198
11 Polynômes et Fractions rationnelles	199
11.1 Coefficient d'une partie polaire d'un pôle simple dans le cas particulier $\frac{P}{Q'}$	199
11.2 Division euclidienne dépendant de n	199
11.3 Utilisation des relations coefficients-racines	200
11.4 Propriété de racines simples	200
12 Espaces vectoriels	201
12.1 Égalité de deux sous-espaces vectoriels engendrés	201
12.2 Noyau, image et composée nulle d'applications linéaires	201
12.3 Exemple d'endomorphisme surjectif non injectif et inversement	202
13 Espaces préhilbertiens réels	204
13.1 La trace forme un produit scalaire sur les matrices	204
13.2 Calcul de l'image d'une rotation	205
13.3 Caractérisation d'une rotation par sa matrice	205
13.4 Caractérisation d'une réflexion par sa matrice	206
13.5 Représentation des isométries vectorielles	206
14 Séries	208
14.1 Équivalent de la somme harmonique	208
14.2 Utilisation du critère de négligeabilité	209
14.3 Exponentielle et somme d'une série	210

15 Matrices	211
15.1 Diagonalisation d'une matrice	211
15.2 Calcul des puissances n -ièmes d'une matrice	212
15.3 Inversibilité des matrices à diagonale dominante	212
15.4 Décomposition d'une matrice en somme de matrices de rang 1	213
16 Déterminants	215
16.1 Calcul d'un déterminant par une relation de récurrence	215
16.2 Matrices à coefficients entiers	216
16.3 Matrice de ± 1	216
17 Dénombrement	218
17.1 Listes d'entiers naturels dont la somme vaut n	218
17.2 Formule de Vandermonde	219
17.3 Feuilles de match	219
17.4 Chemins sur une grille	220
18 Probabilités	221
18.1 Espérance d'un tirage simultané	221
18.2 Main d'un jeu de cartes	222
18.3 Pièce équilibrée ou non ?	222
18.4 Paradoxe des anniversaires	223
18.5 Fonction polynomiale associée à une variable aléatoire	223
18.6 Loi d'un couple de variables aléatoires	225

III	Méthodes	227
1	Polynômes	228
1.1	Arithmétique	228
1.1.1	Division euclidienne	228
1.1.2	PGCD	228
1.2	Décomposition en éléments simples	229
1.2.1	Racines d'un polynôme	229
	Relations coefficients-racines	229
	Ordre des racines	229
1.2.2	Pôles d'une fraction rationnelle	229
	Pôles de deuxième espèce	229
	Cas particuliers	230
1.2.3	La méthode	230
1.3	Autres	231
1.3.1	Montrer qu'un polynôme est nul	231
1.3.2	Factorisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	231
1.3.3	Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3	232
2	Espaces vectoriels	233
2.1	Bases	233
2.2	Dimension	233
2.3	Égalité	233
2.4	Somme directe	234
2.5	Détermination de $\text{Im}(\varphi)$	234
3	Fonctions - Applications	235
3.1	Équations différentielles	235
3.1.1	Solutions particulières pour le 1 ^{er} ordre	235
3.1.2	Solutions particulières pour le 2 ^e ordre	235
3.1.3	Recollement de solutions et problèmes de Cauchy	236
3.2	Étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	236
3.3	Divers	236
3.3.1	Égalité	236
3.3.2	Matrice	236
3.3.3	Prolongement (par continuité)	237
3.3.4	Justification rigoureuse de dérivabilité (ou de continuité)	237
3.3.5	Une fonction puissance une autre	238
3.4	Bijektivité d'une fonction ou d'une application	238
4	Complexes	240
4.1	Racines carrées en écriture algébrique	240
4.2	Factorisation par l'angle moitié (ou moyen)	240
4.3	Linéarisation et opération inverse pour $\cos^n$ ou $\sin^n$	241
4.4	Factorisation de $a \cos(x) + b \sin(x)$	241

5	Suites	242
5.1	Études de suites	242
5.1.1	Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	242
5.1.2	Suites arithmético-géométriques	242
5.2	À la limite	243
5.2.1	Être majorée ou minorée à partir d'un certain rang . . .	243
5.2.2	Montrer qu'une suite n'a pas de limite	243
6	Limites	244
6.1	Limites indéterminées	244
6.2	Plan d'étude des branches infinies	244
6.3	Limite de la dérivée	246
6.4	Autres	246
6.4.1	Pas de limite	246
6.4.2	Être majorée au voisinage d'un réel	246
6.4.3	Développements limités, équivalents et limites	246
7	Structures algébriques et ensembles	247
7.1	Ensembles	247
7.1.1	max et sup d'un ensemble	247
7.1.2	Égalité de deux ensembles finis	247
7.2	Groupe, anneaux, corps	248
7.2.1	Groupe	248
7.2.2	Anneau	248
7.2.3	Corps	248
8	Arithmétique	250
8.1	Équations diophantiennes	250
8.2	PGCD et PPCM	250
8.2.1	"Factorisation" d'un PGCD	250
8.2.2	Détermination du PGCD et du PPCM	251
8.3	Partie entière	251
9	Développements limités	252
9.1	DL de sommes, produits et composées	252
9.1.1	Combinaison linéaire	252
9.1.2	Produit	252
9.1.3	Composée et quotient	253
9.2	DL particuliers	253
9.3	Autres	255
9.3.1	DL et équivalents	255
9.3.2	DL ailleurs qu'en 0	255
9.3.3	DL asymptotiques	255
9.3.4	DL, graphe et tangente	256
9.3.5	Utilisation des DL	256

10 Séries	257
10.1 Études de séries	257
10.1.1 Séries à terme général de signe fixe à partir d'un certain rang	257
10.1.2 Séries alternées	257
10.1.3 Séries télescopiques	257
10.1.4 Somme d'une série	257
10.2 Plan d'étude	257
11 Intégrales	259
11.1 Intégrales de fractions rationnelles	259
11.2 Opérations spéciales sur les intégrales	261
11.2.1 Limite d'une intégrale dont la borne dépend d'une variable	261
11.2.2 Dérivation d'une intégrale composée	261
11.2.3 Intégrale d'une fonction non de classe C^1 sur une borne	262
11.2.4 Changement de variable	262
11.2.5 Calcul de primitive avec une intégrale	263
12 Matrices	264
12.1 Inversibilité	264
12.2 Puissance n -ième	264
13 Permutations	266
13.1 Signature	266
13.2 Décomposition en produit de transpositions de permutations de $[[1, n]]$	266
14 Déterminants	268
14.1 Déterminant d'un endomorphisme	268
14.2 Calcul d'un déterminant	268
15 Dénombrement	270
15.1 Dénombrement d'un ensemble	270
16 Probabilités	271
16.1 Modélisation des expériences aléatoires	271
16.2 Variance	271
16.3 Décomposition d'une variable aléatoire	271
17 Espaces préhilbertiens réels	272
17.1 Algorithme d'orthonormalisation de Schimdt	272
17.2 Montrer qu'une famille est une base orthonormale	272
17.3 Détermination du projecteur orthogonal	273
17.4 Détermination de la distance d'un vecteur à un sous-espace vec- toriel	273
17.5 Isométries vectorielles	273
17.6 Base orthonormale	274

17.7	Matrices orthogonales	274
17.8	Mesure de l'angle entre deux vecteurs	274
18	Divers	275
18.1	Rang et trace	275
18.2	Sommes	275
18.2.1	Séparation d'indices pairs et impairs	275
18.2.2	Permutations de sommes	276
18.3	Pivot de Gauss	277
18.4	Inégalités	277
18.4.1	Avec des intégrales	277
18.4.2	Inégalité d'une valeur absolue	278
18.5	Trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit .	278

Première partie

Démonstrations

Chapitre 1

Complexes

1.1 Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} & \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \\ & |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ & |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : z_1 = \lambda z_2 \\ \text{ou} \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : z_2 = \lambda z_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme : $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \leq |z|$

Soit $z \in \mathbb{C}$

Notons $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} & 0 \leq b^2 \quad (\text{car } b \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow & a^2 \leq a^2 + b^2 \\ \Rightarrow & \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+) \\ \Rightarrow & a \leq |a| \leq |z| \\ \Rightarrow & \boxed{\operatorname{Re}(z) \leq |z|} \end{aligned}$$

Preuve : Soient z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} - (|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \underbrace{z_2\overline{z_1}}_{=z_1\overline{z_2}} + z_2\overline{z_2} \\ &\quad - z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} - 2|z_1| \underbrace{|z_2|}_{|z_2|} \\ &= 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) - 2|z_1||z_2| \leq 0 \quad (\text{d'après le lemme}) \\ \Rightarrow & |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \sqrt{|z_1 + z_2|^2} \leq \sqrt{(|z_1| + |z_2|)^2} \\
&\quad \text{(par croissance de la fonction racine carrée)} \\
&\implies ||z_1 + z_2|| \leq ||z_1| + |z_2|| \\
&\implies \boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|} \text{ (car positifs)}
\end{aligned}$$

1.2 Formule de Moivre

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

→ Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$ car $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i\theta \times 0}$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

$$\begin{aligned}
(e^{i\theta})^{n+1} &= e^{i\theta} (e^{i\theta})^n \\
&= e^{i\theta} e^{in\theta} \quad (\mathcal{P}(n)) \\
&= e^{i(\theta+n\theta)} \\
&= e^{i(n+1)\theta} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}(n+1)}
\end{aligned}$$

→ Soit $n \in \mathbb{Z}^-$, donc $-n \in \mathbb{N}$ et d'après le point précédent :

$$(e^{i\theta})^{-n} = e^{-in\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = \frac{1}{e^{in\theta}} \Leftrightarrow \boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$$

(d'après le premier point puisque $-n \in \mathbb{N}$)

Remarque :

$$1 = \sqrt{1} = 1^{\frac{1}{2}} = (e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}} = e^{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot i\pi} = e^{i\pi} = -1$$

L'erreur : $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \dots$

Morale : attention aux hypothèses ! *

*. En khôlle comme en devoir, il convient toujours de bien énoncer le théorème et toutes ses hypothèses au moins une fois.

1.3 Formulaire de trigonométrie - principe des démonstrations

FORMULES D'EULER	
$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$	$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$
ADDITION	
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	
$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$	
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$	
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$	
DÉVELOPPEMENT	
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$	
$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(-\cos(a+b) + \cos(a-b))$	
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$	
FACTORISATION	
$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	
$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	
$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	
$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	
DUPLICATION	
$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1\end{aligned}$	
$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$	

Principe des démonstrations * : sur un exemple

$$\begin{aligned}
 \cos(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} \quad (\text{Formule d'Euler}) \\
 &= \frac{1}{4}(e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib} - e^{ia}e^{ib} \\
 &\quad - e^{-ia}e^{-ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib}) \\
 &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} - \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2} \\
 &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)
 \end{aligned}$$

*. Dans ce genre de démonstrations, où on cherche à démontrer une égalité donnée, on développe les deux membres jusqu'à pouvoir les rejoindre, par une simple vérification.

1.4 Formules trigonométriques avec $\tan(\frac{x}{2})$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Quand $x, y, x + y$ et $x - y$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π alors on a :

$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$	$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$
$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$	$\sin(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$
$\tan(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$	

Sous les hypothèses empêchant une division par 0 :

$$\begin{aligned} \tan(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \boxed{\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}} \end{aligned}$$

$$\tan(x - y) = \tan(x + (-y)) = \boxed{\frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}}$$

$$\cos(x) = \cos(2 \times \frac{x}{2}) = 2 \cos^2(\frac{x}{2}) - 1 = 2 \times \frac{1}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} - 1 = \boxed{\frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(2 \times \frac{x}{2}) = 2 \cos(\frac{x}{2}) \sin(\frac{x}{2}) = 2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \cos^2(\frac{x}{2}) \\ &= 2 \tan(\frac{x}{2}) \frac{1}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} = \boxed{\frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}} \end{aligned}$$

Pour $\tan(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$, 2 méthodes :

- Soit en remarquant que $\tan(x) = \tan(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$
 - Soit en remarquant que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
-

1.5 Racines n -ièmes de l'unité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité distinctes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est une racine n -ième de l'unité si, et seulement si :

$$\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : z = e^{ik \frac{2\pi}{n}}$$

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 2$.

Notons $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.

On a $0^n = 0 \neq 1$, car $n \neq 0$, donc 0 n'est pas racine n -ième de l'unité*.

Supposons ainsi $z \neq 0$; on a $\rho \neq 0$.

Alors :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\implies (\rho e^{i\theta})^n = 1 \\ &\implies \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} e^{n \ln(\rho)} = 1 & (\text{car } \rho > 0) \\ \theta \equiv 0 [\frac{2\pi}{n}] & (\text{car } n \neq 0) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} n \ln(\rho) = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = k \frac{2\pi}{n} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \ln(\rho) = 0, \text{ car } n \neq 0 \\ \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \theta = k \frac{2\pi}{n} & (\text{car } \theta \in [0; 2\pi[) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \theta = k \frac{2\pi}{n} \end{cases} \\ &\implies \boxed{\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : z = e^{ik \frac{2\pi}{n}}} \end{aligned}$$

Montrons qu'il y en a exactement n , i.e.

$$\forall (k_1, k_2) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2, e^{ik_1 \frac{2\pi}{n}} = e^{ik_2 \frac{2\pi}{n}} \implies k_1 = k_2$$

Soit $(k_1, k_2) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$, supposons $e^{ik_1 \frac{2\pi}{n}} = e^{ik_2 \frac{2\pi}{n}}$.

Alors :

$$\begin{aligned} k_1 \frac{2\pi}{n} &\equiv k_2 \frac{2\pi}{n} [2\pi] \implies k_1 \equiv k_2 [n] \\ &\implies \exists p \in \mathbb{Z} : k_1 = k_2 + p \times n \\ &\implies \exists p \in \mathbb{Z} : k_1 - k_2 = p \times n \end{aligned}$$

*, "z est une racine n -ième de l'unité" signifie que $z^n = 1$. Or, $\forall n \geq 2, n \neq 0$ donc $0^n = 0 \neq 1$. Par ailleurs, il est évident que l'on ne parle jamais de racine 0-ième ou 1-ième de l'unité...

Les racines 2-ièmes de l'unité sont les racines carrées.

Or :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 0 \leq k_1 \leq n-1 \\ 0 \leq k_2 \leq n-1 \end{cases} &\implies \begin{cases} 0 \leq k_1 < n \\ -n < -k_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{car il s'agit d'entiers}) \\
 &\implies -n < k_1 - k_2 < n \\
 &\implies -n < p \times n < n \\
 &\implies -1 < p < 1, \text{ car } n \neq 0 \\
 &\implies p = 0, \text{ car } p \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Donc $k_1 - k_2 = 0 \times n = 0$, d'où $\boxed{k_1 = k_2}$.

1.6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \geq 2$.

Il existe exactement n racines n -ièmes de a distinctes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est racine n -ième de a si, et seulement si :

$$\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i(k \frac{2\pi}{n} + \frac{\arg(a)}{n})}$$

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons alors $z_0 = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg(a)}{n}}$.

On a bien $z_0^n = |a| e^{i \arg(a)} = a$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 z^n = a &\implies \frac{z^n}{a} = 1 \quad (\text{car } a \neq 0) \\
 &\implies \left(\frac{z}{z_0} \right)^n = 1 \quad (*) \\
 &\implies \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : \frac{z}{z_0} = e^{ik \frac{2\pi}{n}} \\
 &\implies \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg(a)}{n}} \times e^{ik \frac{2\pi}{n}} \\
 &= \boxed{|a|^{\frac{1}{n}} e^{i(k \frac{2\pi}{n} + \frac{\arg(a)}{n})}}
 \end{aligned}$$

Montrons qu'il y en a exactement n , i.e.

$$\forall (k_1, k_2) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2, |a|^{\frac{1}{n}} e^{i(k_1 \frac{2\pi}{n} + \frac{\arg(a)}{n})} = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i(k_2 \frac{2\pi}{n} + \frac{\arg(a)}{n})} \implies k_1 = k_2$$

Soit $(k_1, k_2) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$, supposons $|a|^{\frac{1}{n}} e^{i(k_1 \frac{2\pi}{n} + \frac{\arg(a)}{n})} = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i(k_2 \frac{2\pi}{n} + \frac{\arg(a)}{n})}$.

Alors $e^{ik_1 \frac{2\pi}{n}} e^{i \frac{\arg(a)}{n}} = e^{ik_2 \frac{2\pi}{n}} e^{i \frac{\arg(a)}{n}}$ car $|a|^{\frac{1}{n}} \neq 0$ puisque $a \neq 0$.

Donc $e^{ik_1 \frac{2\pi}{n}} = e^{ik_2 \frac{2\pi}{n}}$ car $e^{i \frac{\arg(a)}{n}} \neq 0$.

D'où $\boxed{k_1 = k_2}$, par unicité des racines n -ièmes de l'unité.

*. Il est très courant de généraliser un problème en le ramenant à un cas particulier plus simple que l'on a traité avant.

1.7 Caractérisation des similitudes directes

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

1^{er} cas : si $a = 1$.

Notons $\vec{u}$ le vecteur d'affixe b .

f est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$.

2nd cas : si $a \neq 1$.

Notons C le point d'affixe $c = \frac{b}{1-a}$.

Montrons que nous avons la relation $f(z) = a(z - c) + c$ et que f est l'écriture complexe de la composée d'une rotation d'angle $\arg(a)$ et d'une homothétie de rapport $|a|$ de même centre C .

Posons $h : z \mapsto |a|(z - c) + c$ (homothétie de rapport $|a|$ et de centre C),
et $r : z \mapsto e^{i \arg(a)}(z - c) + c$ (rotation d'angle $\arg(a)$ et de centre C).

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On a :

$$\begin{aligned} (h \circ r)(z) &= h(r(z)) \\ &= h(e^{i \arg(a)}(z - c) + c) \\ &= |a|(e^{i \arg(a)}(z - c) + c - c) + c \\ &= |a|e^{i \arg(a)}(z - c) + c \\ &= a(z - c) + c \\ &= a \left(z - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \\ &= az + \frac{-ab + b}{1-a} \\ &= az + b \\ &= f(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r \circ h)(z) &= r(h(z)) \\ &= r(|a|(z - c) + c) \\ &= e^{i \arg(a)}(|a|(z - c) + c - c) + c \\ &= |a|e^{i \arg(a)}(z - c) + c \\ &= a(z - c) + c \\ &= f(z) \quad (*) \end{aligned}$$

(*) : cette égalité a été démontrée juste avant.

f est donc l'écriture complexe de la composée de la **rotation d'angle $\arg(a)$ par l'homothétie de rapport $|a|$, toutes deux de même centre C d'affixe $c = \frac{b}{1-a}$** (ou de la composée de l'homothétie par la rotation ; on a montré que **leur ordre d'application n'importe pas**).

"Pourquoi 0 n'est-il pas crédible ?
Parce qu'il n'a pas d'argument."

Chapitre 2

Fonctions et applications

2.1 Graphes de fonctions usuelles

Voici les graphes de fonctions usuelles à connaître ; ayant été tracés avec un logiciel de géométrie dynamique puis ayant été recadrées en suivant, les flèches des axes manquent, comme peut-être d'autres détails.

L'essentiel est de marquer (et de respecter !) les points particuliers, souvent $(1, 1)$ ou $(1, \frac{\pi}{4})$, ou d'autres, et de marquer également les tangentes remarquables (horizontales, verticales, et obliques selon $y = \pm x$) avec des flèches.

Pour les fonctions périodiques, représenter 2 périodes.

Leurs fonctions réciproques font l'étude d'une khôlle un peu plus loin.

Les fonctions hyperboliques sont également étudiées un peu plus loin.

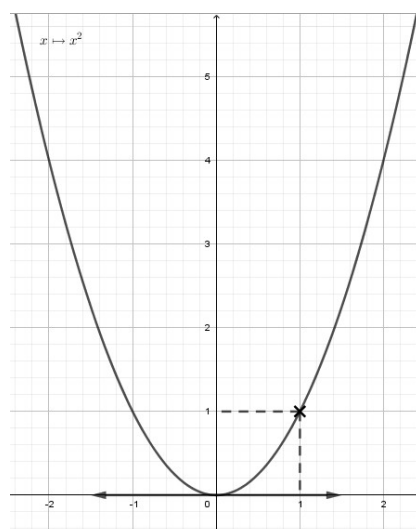


FIGURE 2.1 – Fonction carré

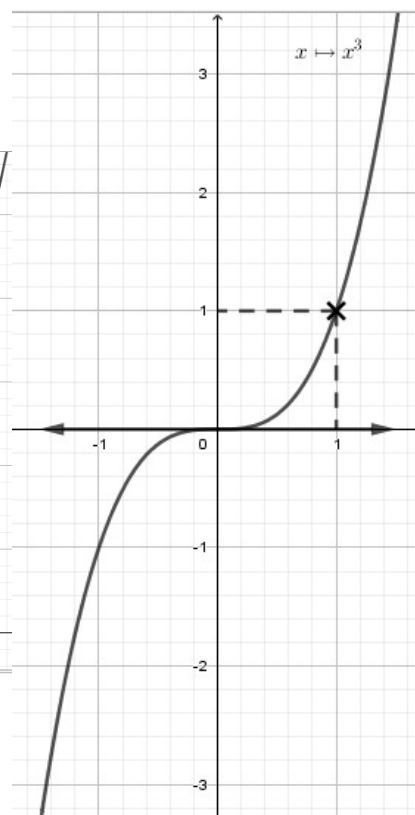


FIGURE 2.2 – Fonction cube

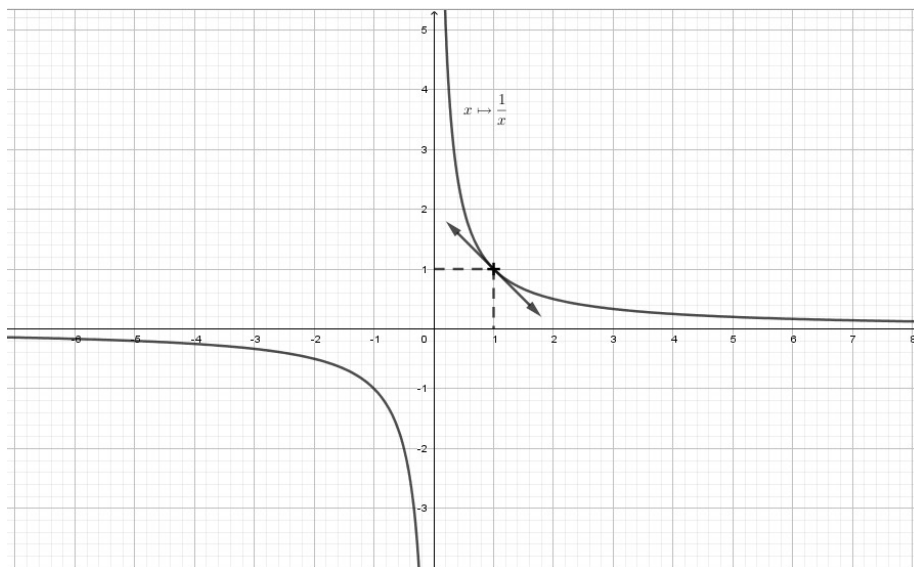


FIGURE 2.3 – Fonction inverse

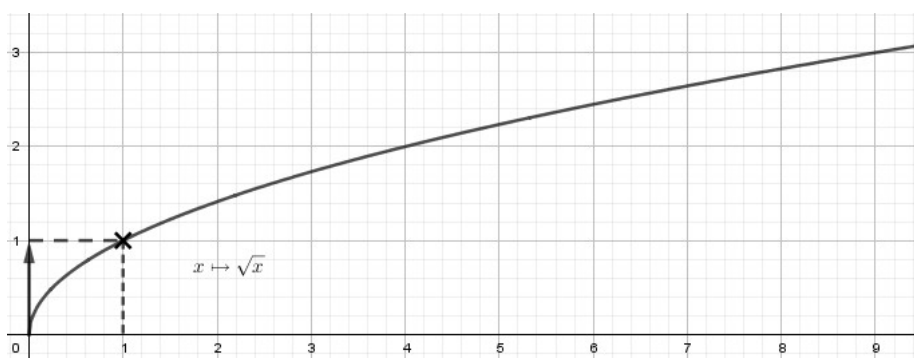


FIGURE 2.4 – Fonction racine carrée

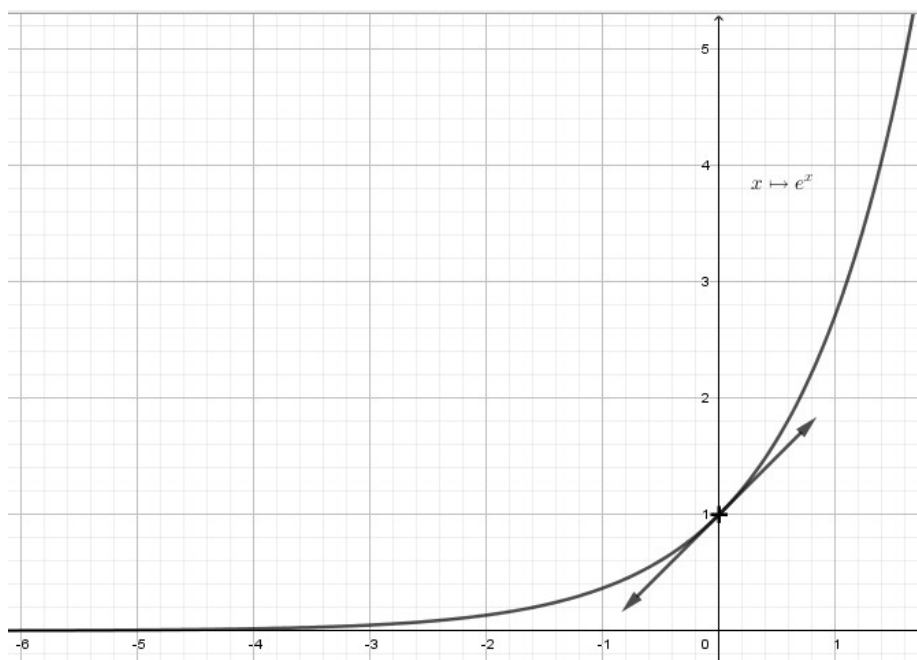


FIGURE 2.5 – Fonction exponentielle

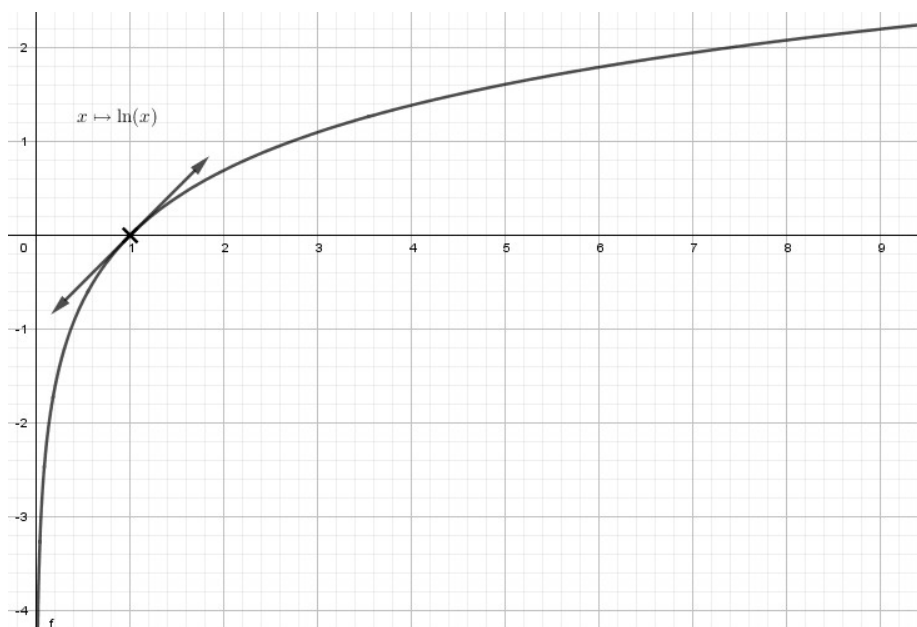


FIGURE 2.6 – Fonction logarithme népérien

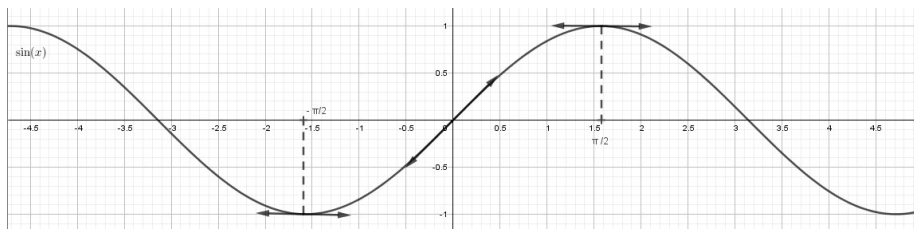


FIGURE 2.7 – Fonction sinus

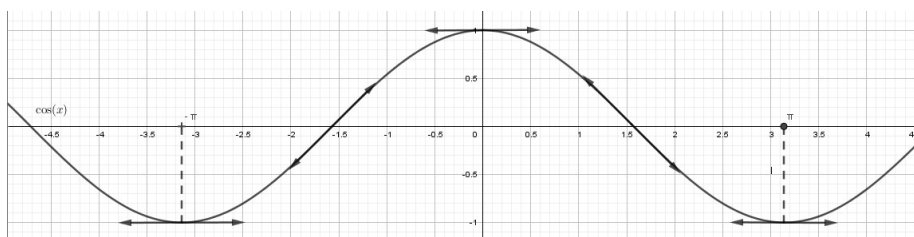


FIGURE 2.8 – Fonction cosinus

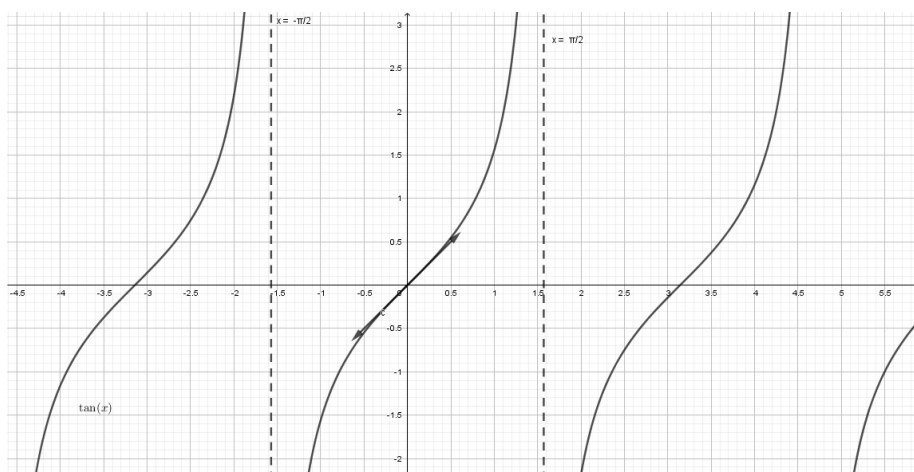


FIGURE 2.9 – Fonction tangente

2.2 Études des fonctions trigonométriques

SINUS HYPERBOLIQUE

On note $\text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\text{sh}(x)$

Donc sh est impair.

- sh est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (donc sur $\mathbb{R}$ par imparité) comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} (= \text{ch}(x)) \geq 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(x)}{x} = +\infty$: sh possède une branche parabolique en $+\infty$ et en $-\infty$ de direction $x = 0$.

COSINUS HYPERBOLIQUE

On note $\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \text{ch}(x)$

Donc ch est pair.

- ch est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (donc sur $\mathbb{R}$ par parité) comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} (= \text{sh}(x)) \geq 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}(x)}{x} = +\infty$: ch possède une branche parabolique en $+\infty$ et en $-\infty$ de direction $x = 0$.

TANGENTE HYPERBOLIQUE

On note $\text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = -\text{th}(x)$

Donc th est impair.

- th est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (donc sur $\mathbb{R}$ par imparité) comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x) > 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$: th possède en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 1$ et en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$

ARC-COSINUS

La fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$ donc d'après le théorème de bijection continue, $\cos$ induit une bijection sur $[\cos(\pi); \cos(0)] = [-1; 1]$. On note $\arccos$ sa bijection réciproque.

- $\arccos$ n'est ni paire ni impaire !
- Toujours d'après le théorème de la bijection continue, $\arccos$ est continue sur $[-1; 1]$.

- Dérivabilité de $\arccos$ sur $] -1; 1[$:

Soit $y \in] -1; 1[$. Posons $x = \arccos(y) \in]0; \pi[$.

Donc $\cos$ est dérivable en x avec $\cos'(x) = -\sin(x) \leq 0$

D'après le théorème de la bijection continue, $\arccos$ est dérivable en y avec :

$$\begin{aligned} \arccos'(y) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(y))} \\ &= \frac{-1}{|\sin(\arccos(y))|} \quad (*) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{(\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\cos(\arccos(y)))^2}} \\ &= \boxed{\frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}} \end{aligned}$$

$(*) : \arccos(y) \in [0; \pi] \implies \sin(\arccos(y)) \geq 0$

ARC-SINUS

La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ donc d'après le théorème de bijection continue, $\sin$ induit une bijection sur $[\sin(-\frac{\pi}{2}); \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1; 1]$. On note $\arcsin$ sa bijection réciproque.

- $\arcsin$ est impaire : $\forall x \in [-1; 1], -x \in [-1; 1]$ et $\forall x \in [-1; 1]$,

$$\begin{aligned} \arcsin(-x) &= \arcsin(-\sin(y)) \quad (\text{et notant } y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)) \\ &= \arcsin(\sin(-y)) \quad (\text{car } \sin \text{ est impaire}) \\ &= -y = \boxed{-\arcsin(x)} \end{aligned}$$

- Toujours d'après le théorème de la bijection continue, $\arcsin$ est continue sur $[-1; 1]$.

- Dérivabilité de $\arcsin$ sur $] -1; 1[$:

Soit $y \in] -1; 1[$. Posons $x = \arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Donc $\sin$ est dérivable en x avec $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$

D'après le théorème de la bijection continue, $\arcsin$ est dérivable en y avec :

$$\begin{aligned} \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \\ &= \frac{1}{|\cos(\arcsin(y))|} \quad (*) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\cos(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(y)))^2}} \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}} \end{aligned}$$

$(*) : \arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \implies \cos(\arcsin(y)) \geq 0$

ARC-TANGENTE

La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ donc d'après le théorème de bijection continue, $\tan$ induit une bijection sur $] \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$. On note $\arctan$ sa bijection réciproque.

- $\arctan$ est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \arctan(-x) &= \arctan(-\tan(y)) \quad (\text{en notant } y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)) \\ &= \arctan(\tan(-y)) \quad (\text{car } \tan \text{ est impaire}) \\ &= -y = \boxed{-\arctan(x)} \end{aligned}$$

- D'après le théorème de la bijection continue, $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Dérivabilité de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$:

Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \arctan(y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Donc $\tan$ est dérivable en x avec $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$

D'après le théorème de la bijection continue, $\arctan$ est dérivable en y avec :

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \boxed{\frac{1}{1 + y^2}}$$

GRAPHES

Sur les pages suivantes de trouvent les graphes des fonctions trigonométriques étudiées ci-dessus, terminant l'ensemble des graphes de fonctions usuelles à connaître.

Tracées à la main, on les appelle plutôt "allures de graphes", sur lesquelles il faut bien indiquer et légènder les points remarquables, les tangentes remarquables et les asymptotes s'il y en a.

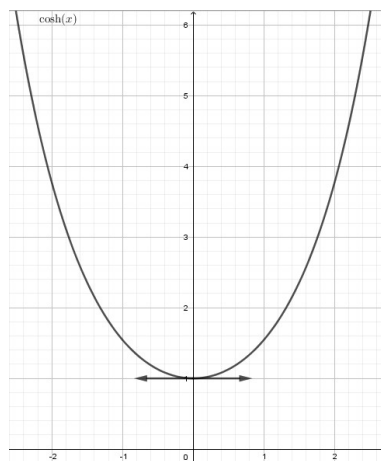


FIGURE 2.10 – Fonction cosinus hyperbolique

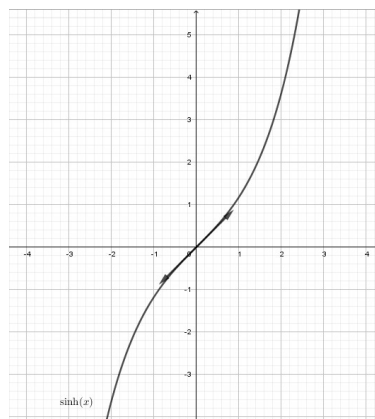


FIGURE 2.11 – Fonction sinus hyperbolique

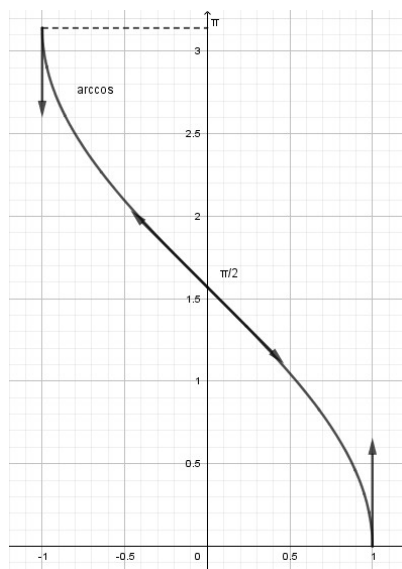


FIGURE 2.12 – Fonction arc-cosinus

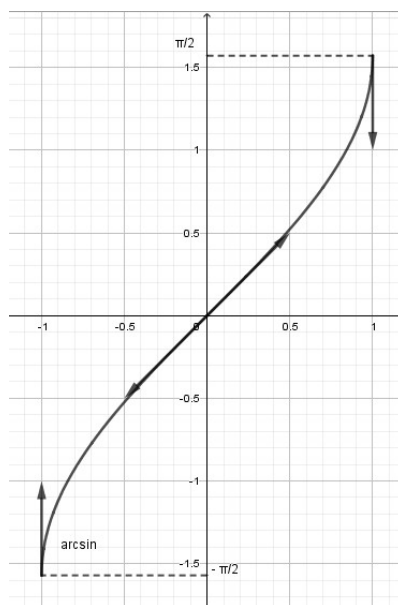


FIGURE 2.13 – Fonction arc-sinus

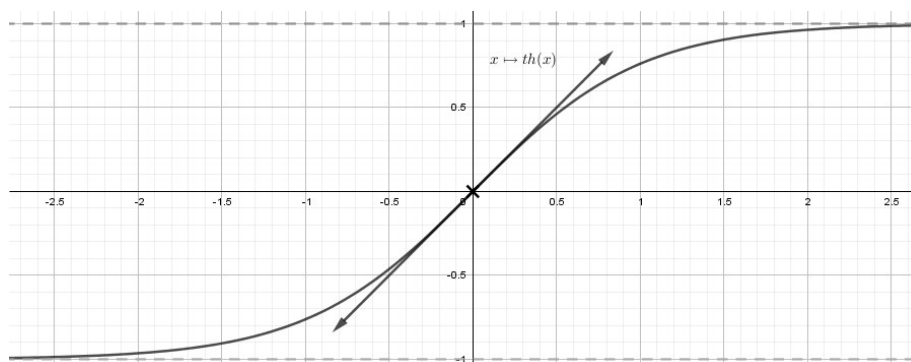


FIGURE 2.14 – Fonction tangente hyperbolique

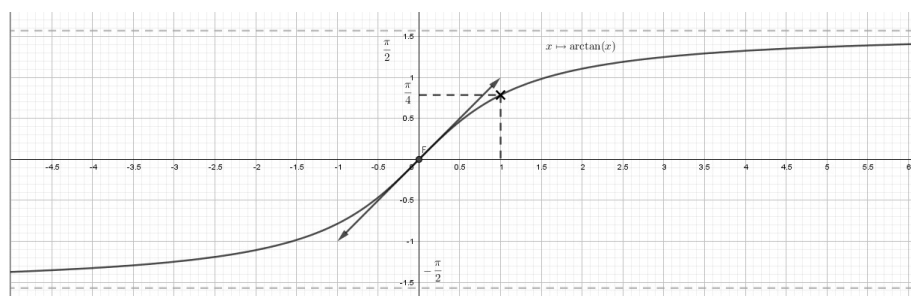


FIGURE 2.15 – Fonction arc-tangente

2.3 Définitions d'une puissance

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^0 = 1$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^n = \prod_{k=1}^n x$
3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
4. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $x^a = e^{a \ln(x)}$
5. Pour $x = 0$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $0^a = 0$

2.4 Théorème de la bijection continue

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$, alors :

1. f induit une bijection de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$;
2. sa réciproque f^{-1} est continue sur $[f(a); f(b)]$;
3. si f est dérivable en $x \in [a; b]$ avec $f'(x) \neq 0$, alors en posant $y = f(x)$, on a que f^{-1} est dérivable en y avec $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

De manière analogue, si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$, alors f induit une bijection de $[a; b]$ sur $[f(b); f(a)]$, ou bien si f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b[$, alors f induit une bijection de $[a; b[$ sur $[f(a); \lim_{t \rightarrow b} f(t)[$, et ainsi de suite, avec une monotonie et une forme d'intervalle bien choisie.

2.5 Extension de la dérivée d'une composé par exp dans $\mathbb{C}$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur D .

Notons $\varphi = \operatorname{Re}(f)$ et $\psi = \operatorname{Im}(f)$.

Posons $g = e^f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Donc $\forall x \in D, g(x) = e^{f(x)} = e^{\varphi(x)} \cos(\psi(x)) + i e^{\varphi(x)} \sin(\psi(x))$

Donc $\operatorname{Re}(g) : x \mapsto e^{\varphi(x)} \cos(\psi(x))$ et $\operatorname{Im}(g) : x \mapsto e^{\varphi(x)} \sin(\psi(x))$

Or f est dérivable sur D donc φ et ψ sont dérivables sur D donc $\operatorname{Re}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont dérivables sur D comme produits et composées de fonctions dérivables donc g est dérivable sur D .

Et on a $\forall x \in D$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left[e^{\varphi(x)} \cos(\psi(x)) \right] + i \frac{d}{dx} \left[e^{\varphi(x)} \sin(\psi(x)) \right] \\ &= \varphi'(x) e^{\varphi(x)} \cos(\psi(x)) - e^{\varphi(x)} \psi'(x) \sin(\psi(x)) + i(\varphi'(x) e^{\varphi(x)} \sin(\psi(x)) \\ &\quad + e^{\varphi(x)} \psi'(x) \cos(\psi(x))) \\ &= e^{\varphi(x)} [\varphi'(x) \cos(\psi(x)) - \psi'(x) \sin(\psi(x)) + i(\varphi'(x) \sin(\psi(x)) \\ &\quad + \psi'(x) \cos(\psi(x)))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \psi'(x) \cos(\psi(x)))] \\
& = [\varphi'(x) + i\psi'(x)]e^{\varphi(x)}[\cos(\psi(x)) + i\sin(\psi(x))] \\
& \boxed{= f'(x)e^{f(x)}}
\end{aligned}$$

2.6 Conservation de l'injectivité et de la surjectivité par composition

Soient E, F et G des ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrons que la composition de deux applications injectives est toujours injective, et que la composition de deux applications surjectives est toujours surjective.*

- Supposons f et g injectives.

Soient $(x_1, x_2) \in E^2$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) & \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\
& \implies f(x_1) = f(x_2) \\
& \implies \boxed{x_1 = x_2}
\end{aligned}$$

(par injectivité de g puis de f)

- Supposons f et g surjectives.

Soit $y \in G$

$g : F \rightarrow G$ est surjective et $y \in G$ donc $\exists z \in F : g(z) = y$

$f : E \rightarrow F$ est surjective et $z \in F$ donc $\exists x \in E : f(x) = z$

Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y$

On a montré que $\boxed{\forall y \in G, \exists x \in E : (g \circ f)(x) = y}$

2.7 Démonstration d'une méthode de détermination de la bijection réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$

Si il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $\begin{cases} g \circ f = id_E \\ f \circ g = id_F \end{cases}$, alors f est bijective avec $f^{-1} = g$.

Supposons $\exists g : F \rightarrow E : \begin{cases} g \circ f = id_E \\ f \circ g = id_F \end{cases}$, montrons que f est bijective.

→ Montrons que f est injective.

*. En mathématiques, les bijections conservent souvent les propriétés : on en a déjà un exemple ici !

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\implies id_E(x_1) = id_E(x_2) \\ &\implies \boxed{x_1 = x_2} \end{aligned}$$

→ Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$

Posons $x = g(y) \in E$

Alors $f(x) = (f \circ g)(y) = id_F(y) = y$

Donc $\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y}$

• Montrons que $f^{-1} = g$:

On a $f \circ g = id_F \implies f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_F \implies id_E \circ g = f^{-1} \implies \boxed{g = f^{-1}}$

2.8 Condition nécessaire d'extremum local (cas du maximum)

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset D_f$ tel que $a < b$.

Si f présente en $x_0 \in]a, b[$ un extremum local et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Supposons que la fonction f présente un maximum local et est dérivable en x_0 .

On a $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

On sait que $\exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} : \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta], f(x) \leq f(x_0)$.

Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f \cap]x_0, x_0 + \eta], \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (*) &\implies \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} 0 \\ &\implies f'(x_0) \geq 0 \end{aligned}$$

(*) car $f(x) \leq f(x_0)$ donc $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x_0 \leq x$ donc $x - x_0 \geq 0$.

De même :

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0[, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 &\implies \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} 0 \\ &\implies f'(x_0) \leq 0 \end{aligned}$$

Donc, par antisymétrie, $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

2.9 Théorème de Rolle

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset D_f$ tel que $a < b$.

$$\begin{cases} f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \implies \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

Supposons la fonction f continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$.

D'après le Théorème des Bornes Atteintes, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ et $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ existent.

Notons x_M un antécédent de M par f , et x_m de m par f .

— 1^{er} cas si $M = m$.

Alors $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M \implies f(x) = M = m$.

Prenons par exemple $c = \frac{a+b}{2} \in]a, b[$.

On a donc $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$. *

— 2nd cas : si $M \neq m$.

Alors $x_M \neq x_m$ (car un antécédent donné ne peut avoir plusieurs images par une même fonction).

Or, puisque $f(a) = f(b)$, on a $\dagger \begin{cases} x_M \notin \{a, b\} \\ \text{ou} \\ x_m \notin \{a, b\} \end{cases}$

Dans le cas où $x_M \notin \{a, b\}$ (le cas avec x_m est similaire), on a donc $x_M \in]a, b[$.

Prenons alors $c = x_M$.

Ainsi, f présente en c un maximum local (car global) et y est dérivable, donc d'après la condition nécessaire d'extremum local : $\boxed{f'(c) = 0}$.

2.10 Égalité des Accroissements Finis

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset D_f$ tel que $a < b$.

$$\begin{cases} f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{cases} \implies \exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Posons $g : x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

g est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues.

*. Puisque $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

†. Par l'absurde : supposons le cas $x_M = a$ et $x_m = b$ (idem pour le cas opposé, puisque $x_M \neq x_m$). Alors $f(x_M) = f(a) = M$ et $f(x_m) = f(b) = m$ d'après les définitions de x_M et x_m . Or $f(a) = f(b)$ donc $M = m$: exclu.

g est dérivable sur $]a, b[$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\text{En outre, on a } \begin{cases} g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a) \\ g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a) \end{cases}$$

Donc $g(a) = g(b)$.

D'où, d'après le Théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0$.

Or, $\forall x \in]a, b[, g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} g'(c) = 0 &\implies f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \\ &\implies f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &\implies \boxed{f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)} \end{aligned}$$

2.11 Inégalité des Accroissements Finis

CROISSANCE BORNÉE

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset D_f$ tel que $a < b$ et m et M deux réels.

$$\begin{cases} f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ \forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M \end{cases} \implies m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Supposons la fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$.

D'après l'Égalité des Accroissements Finis, on sait alors qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} m \leq f'(c) \leq M &\implies m(b-a) \leq f'(c)(b-a) \leq M(b-a) \quad (\text{car } b-a \geq 0) \\ &\implies \boxed{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)} \end{aligned}$$

FONCTION LIPSCHITZIENNE

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalle inclus dans D_f et λ un réel positif.

$$\begin{cases} f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq \lambda \end{cases} \implies f \text{ est } \lambda\text{-lipschitzienne}$$

Supposons la fonction f dérivable sur l'intervalle I telle que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \lambda$.

Soit $(x, y) \in I^2$.

Par symétrie des rôles de x et de y , supposons $x \leq y$.

— 1^{er} cas : si $x = y$.

$$\text{Alors } \begin{cases} |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0 \\ \lambda|y - x| = \lambda|x - x| = 0 \end{cases}$$

Donc $|f(y) - f(x)| \leq \lambda|y - x|$.

D'où f est λ -lipschitzienne.

— 2nd cas : si $x < y$.

Alors, I étant un intervalle, $[x, y] \subset I$ et f étant continue (car dérivable) sur I , f est continue sur $[x, y]$.

De même, f est dérivable sur $]x, y[$, et :

$$\forall t \in]x, y[, |f'(t)| \leq \lambda \implies -\lambda \leq f'(t) \leq \lambda$$

Ainsi, d'après l'Inégalité des Accroissements Finis :

$$\begin{aligned} -\lambda(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq \lambda(y - x) &\implies |f(y) - f(x)| \leq \lambda(y - x) \\ &\implies |f(y) - f(x)| \leq \lambda|y - x| \\ &\quad (\text{car } y - x \geq 0) \end{aligned}$$

Donc f est λ -lipschitzienne.

2.12 Théorème de Limite de la Dérivée

Soient a un réel de l'intervalle I , et f une fonction continue en a , et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

I est un intervalle, $a \in I$, f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Montrons d'abord que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Soit $x \in I \cap]a; +\infty[$

On a :

— f continue sur $[a; x]$ (*)

— f dérivable sur $]a; x[$ (idem)

Donc d'après l'Égalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} &\exists c_x^* \in]a; x[: f(x) - f(a) = f'(c_x^*)(x - a) \\ \implies &\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x^*) \quad (\text{car } x \neq a) \\ \implies &\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} f'(c_x^*) \\ \text{Or } &a \leq c_x \leq x \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow a^+} a \leq \lim_{x \rightarrow a^+} c_x \leq \lim_{x \rightarrow a^+} x$$

$\lim_{x \rightarrow a^+} a = \lim_{x \rightarrow a^+} x = a$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow a^+} c_x = a$
De plus $\lim_{t \rightarrow a^+} f'(t) = l$ (par hypothèse) donc par composition :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(c_x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

On montre de même que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Finalement on a montré que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

$$\implies \boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l}$$

(*) : f est continue sur I puisque dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et continue en a , et $(a, x) \in I^2$ donc $[a, x] \subset I$ puisque I est un intervalle

2.13 Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f, g sont des fonctions $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ toutes deux n fois dérivables sur $D \subset D_f$, alors $f \times g$ est aussi n fois dérivable sur D avec :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Par récurrence simple, montrons :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "si f et g sont n fois dérivables sur D alors $f \times g$ aussi avec :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} "$$

$\boxed{\mathcal{I}}$: $\mathcal{P}(0)$ car si f et g sont 0 fois dérivables sur D alors :

$$(f \times g)^{(0)} = (f \times g) = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$$

$\boxed{\mathcal{H}}$: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

Soient f et g $n+1$ fois dérivables sur D , alors elles sont n fois dérivables sur D

donc d'après $\mathcal{P}(n)$, $(f \times g)$ aussi avec $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Or f et g sont $n+1$ fois dérivables sur D donc $\forall k \in [0, n]$, $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables sur D ($n-k \in [0, n]$) donc $(f \times g)^{(n)}$ est dérivable sur D comme somme et produit de fonctions dérivables, et donc :

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

*. Attention ! c_x dépend de x , d'où la notation indicée par x !

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)}}_{l=k+1, \text{ puis } k=l} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad (\text{Formule de Pascal}) \\
&\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}
\end{aligned}$$

2.14 Le contre-exemple fondamental

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}^+$.

Prolongement en 0

f est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (comme produit et composée de fonctions continues)

et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0 \in \mathbb{R}$

(car $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\sin(\frac{1}{x})$ est bornée au voisinage de 0).

Donc f est prolongeable en 0 par continuité en posant $f(0) = 0$

Prolongement dérivable

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (comme produit et composé de fonctions dérivables).

Montrons que f convenablement prolongée en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$,

i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0 \in \mathbb{R}$

(car $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\sin(\frac{1}{x})$ est bornée au voisinage de 0).

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Prolongement non C^1

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ en montrant que sa dérivée n'est pas continue en 0, i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \neq f'(0)$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas*.

Par l'absurde : supposons $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Prenons $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

*. Si $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas, alors elle est différente de $f'(0)$!

On a $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = l$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = l$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = \frac{2}{n\pi} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} = (-1)^{n+1}$

Or, $(-1)^{n+1}$ n'a pas de limite, ce qui contredit $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Donc f' n'est pas continue en 0, donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

Contre-exemple : réciproque du théorème de limite de la dérivée

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \in \mathbb{R}$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas. (cf. précédemment)

Contre-exemple : non-dérivabilité d'un développement limité

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc $f(x) = o(x) = 0 + 0x + o(x) : DL_1(0)$ mais $f'(x)$ ne possède pas de $DL_0(0)$ car elle n'a pas de limite, ce qui est une condition nécessaire.

Contre-exemple : réciproque de la Formule de Taylor-Young

f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 mais n'est pas C^1 .

Toute fonction injective est bijective.

En effet, soit $f : E \rightarrow F$ une fonction injective.

Tout élément de F possède alors au plus un antécédent par f .

Or – c'est bien connu –, qui peut le plus peut le moins !

Tout élément de F possède alors au moins un antécédent par f .

Donc f est surjective, d'où elle est bijective.

Chapitre 3

Sommes

3.1 Somme des entiers de 1 à n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Avec un changement d'indice : $\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (n+1) - k = \sum_{k=1}^n n + 1 - \sum_{k=1}^n k$

$$\implies 2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \implies \boxed{\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

- Avec une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)^2 - k^2 &= \sum_{k=1}^n 2k + 1 = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ \implies \sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2 &= 2 \sum_{k=1}^n k + n \\ \implies 2 \sum_{k=1}^n k &= \sum_{k=2}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 - n \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 1 - \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + (n+1)^2 - n = n^2 + n \\ \implies \boxed{\sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

- Se démontre très bien par récurrence.

3.2 Formule des sommes géométriques

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n+1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Si $z = 1$: $\sum_{k=0}^n z^k = \sum_{k=0}^n 1^k = n - 0 + 1 = n + 1$

Simon, si $z \neq 1$:

- Avec une somme télescopique : $\sum_{k=0}^n z^k = \sum_{k=0}^n \frac{z^k - z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} \left(\sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=0}^n z^{k+1} \right)$
 $= \frac{1}{1-z} \left(\sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=1}^{n+1} z^k \right) = \frac{1}{1-z} \left(\sum_{k=0}^{n+1} z^k - z^{n+1} - \sum_{k=0}^{n+1} z^k + 1 \right) = \boxed{\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}}$

- Avec une astuce : notons $S = \sum_{k=0}^n z^k$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } zS &= \sum_{k=1}^{n+1} z^k = \sum_{k=0}^{n+1} z^k - 1 \\ \implies S - zS &= \sum_{k=0}^{n+1} z^k - z^{n+1} - \sum_{k=0}^{n+1} z^k + 1 \\ \implies (1-z)S &= 1 - z^{n+1} \implies \boxed{S = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}} \end{aligned}$$

• Se démontre très bien par récurrence.

3.3 À propos du coefficient du binôme

DÉFINITION

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

SYMÉTRIE

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Preuve :

1^{er} cas : Si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

2^e cas : Si $k < 0$ ou si $k > n$:

Par convention, $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{n-k}$

FORMULE DE PASCAL

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Preuve :1^{er} cas : Si $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \underbrace{(n-(k+1))!}_{=n-k-1}} \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} (k+1+n-k) \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \boxed{\binom{n+1}{k+1}} \end{aligned}$$

Autres cas 1 : Si $k = 0$ ou $k = n$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 1 = \binom{n+1}{k+1}$ Autres cas 2 : Si $k < 0$ ou $k > n$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 0 = \binom{n+1}{k+1}$

Remarque : On a ici fait le choix de ne pas détailler les cas rentrant dans les conventions, car cela alourdit considérablement les démonstrations. On a juste exhibé les conventions mises en question.

3.4 Formule du binôme

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Par récurrence simple :

$$\boxed{\mathcal{I}} \quad \mathcal{P}(0) \text{ car } (a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$$

 $\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{d'après } \mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} - \underbrace{\binom{n}{-1} a^0 b^{n+1-0}}_{=0} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} - \underbrace{\binom{n}{n+1} a^{n+1} b^0}_{=0} \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \quad (\text{formule de Pascal}) \\
&\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}
\end{aligned}$$

3.5 Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} &= a \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} - b \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^n a^k b^{n+1-k} \quad (a, b \text{ indépendants de } k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n+1-k} - \sum_{k=0}^n a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} - a^0 b^{n+1-0} + a^{n+1} b^0 - \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} \\
&= \boxed{a^{n+1} - b^{n+1}}
\end{aligned}$$

"Toi et moi, nous nous sommes mieux qu'une somme de Riemann."

Chapitre 4

Intégration

4.1 Théorèmes de calcul intégral

4.1.1 Calcul intégral avec une primitive

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in I^2$ et F une primitive de f sur I .

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

La fonction f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$ donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Soit F une autre primitive de f sur I .

F et F_a sont deux primitives de f sur I donc :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in I, F(x) = F_a(x) + \lambda$$

$$\text{Pour } x = a \in I : \underbrace{F_a(a)}_{=0} = F(a) + \lambda \implies \lambda = -F(a)$$

$$\text{Pour } x = b \in I : F_a(b) = F(b) + \lambda \implies \boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

4.1.2 Théorème d'intégration par parties

Soient u, v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Posons $f : t \mapsto u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$

u et v sont de classe C^1 sur I donc u, v, u', v' sont continues sur I donc f est continue (comme somme et produit de fonctions continues) sur I .

De plus $F : t \mapsto u(t)v(t)$ est une primitive de f sur I (car $F' = f$).

Comme I est un intervalle et $(a, b) \in I^2$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= [F(t)]_a^b \\ \implies \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt &= [u(t)v(t)]_a^b \\ \implies \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt &= [u(t)v(t)]_a^b \\ \implies \boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt} &= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt \end{aligned}$$

4.1.3 Théorème de changement de variable

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f étant de classe C^1 sur un intervalle I , g étant continue sur un intervalle J , et telles que $\forall x \in I, f(x) \in J$. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b f'(x)g(f(x))dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$$

La fonction g est continue sur l'intervalle J donc d'après théorème fondamental de l'intégration, g possède au moins une primitive G sur J .

Posons $\varphi : x \mapsto f'(x)g(f(x))$.

f est de classe C^1 sur I donc f' est continue sur I et g est continue donc φ est continue sur I comme produit et composée de fonctions continues.

Posons également $\phi : x \mapsto G(f(x))$ qui est une primitive de φ sur I (ϕ est dérivable sur I et $\phi' = \varphi$). Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x)dx &= [\phi(x)]_a^b \implies \int_a^b f'(x)g(f(x))dx = [G(f(x))]_a^b \\ &= G(f(b)) - G(f(a)) \end{aligned}$$

Or $\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du = [G(u)]_{f(a)}^{f(b)} = G(f(b)) - G(f(a))$ (car g est continue sur J et G en est une primitive). Ainsi :

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(f(x))dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du}$$

4.2 Intégrale et nullité

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ positive.

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \forall x \in [a, b], f(x) = 0 \implies \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0(b-a) = 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrons que $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.
Montrons que $\forall x \in]a, b[, f(x) = 0$.

$$\text{De là, par continuité de } f \text{ en } a \text{ et en } b, \text{ on aura } \begin{cases} f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 0 = 0 \\ f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} 0 = 0 \end{cases},$$

ce qui permettra de conclure la preuve.

Par l'absurde : supposons que $\exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) \neq 0$.

Donc $f(x_0) > 0$ car f est positive.

On a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ car f est continue en x_0 , donc d'après la définition appliquée à $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$:

$$\exists \eta > 0 : \forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\implies -(f(x) - f(x_0)) \leq \frac{f(x_0)}{2} \implies f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$$

Quitte à réduire $\eta > 0$, on peut supposer que $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset [a, b]$ car $x_0 \in]a, b[$.

$$\text{On a } \int_a^b f(x)dx = 0 \implies \underbrace{\int_a^{x_0-\eta} \underbrace{f(x)}_{\geq 0} dx}_{\geq 0 \text{ car } a \leq x_0 + \eta} + \underbrace{\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)dx}_{> 0, (*)} + \underbrace{\int_{x_0+\eta}^b \underbrace{f(x)}_{\geq 0} dx}_{\geq 0 \text{ car } x_0 - \eta \leq b} = 0$$

$$\begin{aligned} (*) : f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} &\implies \underbrace{\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)dx}_{x_0-\eta \leq x_0+\eta} \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{\text{indep. } x} dx \\ &\implies \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)dx \geq f(x_0)\eta > 0 \end{aligned}$$

Donc l'égalité est absurde.

4.3 Théorème Fondamental de l'Intégration *

Pour démontrer ce résultat dont découlent bien d'autres sur les intégrales, il nous est nécessaire d'admettre les 4 axiomes suivants :

1. Propriété de linéarité :

Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur un intervalle I , et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

2. Relation de Chasles :

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I , alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. Propriété de croissance :

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I , alors pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$:

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

4. Intégrale d'une fonction constante :

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à $\lambda \in \mathbb{R}$ sur un intervalle I , alors pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda(b - a)$$

Lemme : Inégalité triangulaire sur les intégrales.

Énoncé : Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I , alors pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Preuve :

On a, d'une part, $f(x) \leq |f(x)| \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ (car $a \leq b$)

*. Ce théorème ne figurait pas dans les programmes de khôlle, mais ceux-ci s'efforçant de contenir les théorèmes majeurs, nous avons ajouté le Théorème Fondamental de l'Intégration à ce recueil. Il est très long – deux fois plus à rédiger qu'à démontrer – et constitue donc un problème d'une demi-heure, voire plus s'il est demandé d'en démontrer le résultat sans aucune indication.

et d'après la propriété de croissance), et, d'autre part, $-f(x) \leq |f(x)| \implies \int_a^b -f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \implies -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (d'après la propriété de linéarité).

Ainsi, on a bien $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Théorème Fondamental de l'Intégration :

Énoncé : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I , et $a \in I$.

Alors $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Preuve :

→ Montrons d'abord que F_a est bien une primitive de f sur I , i.e. :

$$\forall x_0 \in I, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| \leq \eta \implies \left| \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

Soit $x_0 \in I$.

Calcul préliminaire : Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t)dt - (x - x_0)f(x_0) \right)^\dagger \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt \right)^\ddagger \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dt^\S \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

f étant continue en x_0 , on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, donc, d'après la définition de la limite appliquée à $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta > 0 : |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$, supposons $|x - x_0| \leq \eta$.

*. Les invocations des axiomes ont été mises en notes parce qu'elles ne rentraient pas dans la page... mais il faut les citer quand même dans la démonstration !

†. Relation de Chasles

‡. Intégrale d'une fonction constante

§. Propriété de linéarité

— 1^{er} cas : si $x > x_0$.

Alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(t) - f(x_0) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\text{car } x - x_0 \geq 0 \text{ et d'après l'inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Or, $\forall t \in [x_0, x], |t - x_0| \leq \eta$, en effet :

$$\begin{aligned} x_0 \leq t \leq x &\implies 0 \leq t - x_0 \leq x - x_0 = |x - x_0| \leq \eta, \text{ car } x - x_0 \geq 0 \\ &\implies |t - x_0| \leq \eta, \text{ car } t - x_0 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après (*) appliquée à t au lieu de x (on a bien $t \in I$, car $(x, x_0) \in I^2 \implies [x_0, x] \subset I$ et $t \in [x_0, x]$, et $|t - x_0| \leq \eta$) :

$$\begin{aligned} \forall t \in [x_0, x], |f(t) - f(x_0)| &\leq \varepsilon \\ \implies \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt &\leq \int_{x_0}^x \varepsilon dt, \text{ car } x_0 \leq x \P \\ \implies \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt &\leq \varepsilon, \text{ car } x - x_0 > 0 \ddagger \end{aligned}$$

D'où, par transitivité :

$$\boxed{\left| \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon}$$

— 2nd cas : si $x < x_0$.

Idem, les changements de signe dans les calculs lors des passages à la valeur absolue sont compensés par l'utilisation de la propriété de croissance.

→ Montrons maintenant que F_a s'annule en a , i.e. $F_a(a) = 0$.

$$F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt + \int_a^a f(t) dt \dagger$$

Donc $\boxed{F_a(a) = 0}$.

→ Montrons enfin que F_a est unique.

Soit G_a une primitive de f sur I qui s'annule en a .

†. Relation de Chasles

‡. Intégrale d'une fonction constante

¶. Propriété de croissance

Posons $\varphi = F_a - G_a$.

φ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \varphi'(x) &= F'_a(x) - G'_a(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Or, comme I est un intervalle, φ est constante sur I , et $\varphi(a) = F_a(a) - G_a(a) = 0 - 0 = 0$.

Donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \varphi(x) = 0 &\implies F_a(x) - G_a(x) = 0 \\ &\implies F_a(x) = G_a(x) \\ &\implies \boxed{F_a = G_a}\end{aligned}$$

Chapitre 5

Équations différentielles

5.1 Solutions d'une équation différentielle homogène linéaire du 1^{er} ordre

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

Notons A une primitive de a sur I .

L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $(H) : y' + a(x)y = 0$ est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

La fonction a est continue sur I donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, a possède au moins une primitive A sur I .

Soit y dérivable sur I .

Posons $z : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ qui est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions dérivables.

Donc $y(x) = z(x)e^{-A(x)}$

D'où $\forall x \in I, y'(x) = - \underbrace{A'(x)}_{=a(x)} z(x)e^{-A(x)} + z'(x)e^{-A(x)}$

Donc :

$$y \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, z'(x)e^{-A(x)} - a(x)z(x)e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, z'(x) \underbrace{e^{-A(x)}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall x \in I, z(x) = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-A(x)}}$$

5.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ continues sur I et :

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

Si y_0 est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)} + y_0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où A est une primitive de a sur I .

(Avec les notations ci-dessus)

Soit y une fonction dérivable sur I .

Posons $z : x \mapsto y(x) - y_0(x)$, qui est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables.

$$\text{Donc } \forall x \in I, y(x) = z(x) + y_0(x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in I, y'(x) = z'(x) + y_0'(x)$$

On a :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z'(x) + y_0'(x) + a(x)(z(x) + y_0(x)) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z'(x) + a(x)z(x) + \underbrace{y_0'(x) + a(x)y_0(x)}_{=b(x)} = b(x) \\ &\quad (\text{car } y_0 \text{ est une solution particulière de } (E)) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, z'(x) + a(x)z(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \text{ solution de } (H) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall x \in I, z(x) = \lambda e^{-A(x)} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall x \in I, y(x) - y_0(x) = \lambda e^{-A(x)} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : \forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-A(x)} + y_0(x) \end{aligned}$$

5.3 Méthode de variation de la constante

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ continues sur I et :

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

Si A désigne une primitive de a sur I , alors il existe une solution particulière de (E) s'écrivant sous la forme :

$$y_0 : x \mapsto z(x)e^{-A(x)}$$

où z désigne une fonction dérivable sur I .

Posons $y_0 : x \mapsto z(x)e^{-A(x)}$ où z est une fonction dérivable sur I .
Alors :

$$\begin{aligned} & y_0 \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, z'(x)e^{-A(x)} - a(x)z(x)e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, z'(x) = b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

Or $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ est continue sur I comme produit et composée de fonctions continues donc d'après le Théorème Fondamental de l'Intégration, z' possède au moins une primitive sur I^* .

5.4 Résolution des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants homogènes dans le cas complexe

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$ et :

$$(H) : ay'' + by' + cy = 0$$

et on note Δ le discriminant de son équation caractéristique (E_c) .

- 1^{er} cas : Si $\Delta \neq 0$, alors en notant r_1 et r_2 les racines distinctes (complexes) de (E_c) , alors l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

- 2nd cas : si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 la racine double (complexe) de (E_c) , alors l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{r_0 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

1^{er} cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$

On note r_1, r_2 les 2 racines complexes distinctes de $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$.

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fois dérivable..

$$\text{Posons } \left| \begin{array}{lcl} z : & I & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto & y(x)e^{-r_1 x} \end{array} \right.$$

z est deux fois dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } & \forall x \in I, y(x) = z(x)e^{r_1 x} \\ \implies & \forall x \in I, y'(x) = z'(x)e^{r_1 x} + r_1 z(x)e^{r_1 x} \\ \implies & \forall x \in I, y''(x) = z''(x)e^{r_1 x} + 2r_1 z'(x)e^{r_1 x} + r_1^2 z(x)e^{r_1 x} \end{aligned}$$

*. On a bien montré l'existence, grâce au Théorème Fondamental de l'Intégration.

D'où : y solution de (H)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \in I, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, a(z''(x)e^{r_1x} + 2r_1z'(x)e^{r_1x} + r_1^2z(x)e^{r_1x}) \\
&\quad + b(z'(x)e^{r_1x} + r_1z(x)e^{r_1x}) + cz(x)e^{r_1x} = 0 \quad (e^{r_1x} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, az''(x) + \underbrace{(2ar_1 + b)}_{=a(r_1-r_2) \text{ (*)}} z'(x) + \underbrace{(ar_1^2 + br_1 + c)}_{=0 \text{ car sol } (E_c)} z(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(x) + (r_1 - r_2)z'(x) = 0 \quad (\text{car } a \neq 0)
\end{aligned}$$

((*) : $2ar_1 + b = 2a(r_1 + \frac{b}{2a}) = 2a(r_1 - \frac{1}{2}(-\frac{b}{a})) = 2a(r_1 - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)) = a(r_1 - r_2)$
(en utilisant les relations coefficients-racines))

Ce qui est une équation différentielle du 1^{er} ordre en z' .

Or $x \mapsto r_1 - r_2$ a pour primitive sur I la fonction $x \mapsto (r_1 - r_2)x$

Donc : y solution de (H)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall x \in I, z'(x) = \lambda e^{-(r_1-r_2)x} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \forall x \in I, z(x) = \lambda \frac{e^{-(r_1-r_2)x}}{-(r_1-r_2)} + \mu \quad (\text{car } r_1 \neq r_2) \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \forall x \in I, \underbrace{z(x)e^{r_1x}}_{=y(x)} = e^{r_1x} \left(\frac{e^{-(r_1-r_2)x}}{-(r_1-r_2)} + \mu \right) \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \forall x \in I, y(x) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_2x} + \mu e^{r_1x}
\end{aligned}$$

Posons $\lambda_1 = \mu \in \mathbb{C}$ et $\lambda_2 = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} \in \mathbb{C}$

Donc $\boxed{\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \forall x \in I, y(x) = \lambda_1 e^{r_1x} + \lambda_2 e^{r_2x}}$

2nd cas : si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

On note r_0 la racine double complexe de (E_c) .

On procède de même en posant $z(x) = y(x)e^{-r_0x}$

Donc on a de même :

$$\begin{aligned}
&y \text{ solution de } (H) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, az''(x) + \underbrace{(2ar_0 - b)}_{=0 \text{ car } r_0 = \frac{-b}{2a}} z'(x) + \underbrace{(ar_0^2 + br_0 + c)}_{=0 \text{ car } r_0 \text{ racine de } (E_c)} z(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(x) = 0 \quad (\text{car } a \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : z(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 \\
&\Leftrightarrow \boxed{\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : y(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{r_0 x}}
\end{aligned}$$

5.5 Résolution des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants homogènes dans le cas réel *

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et :

$$(H) : ay'' + by' + cy = 0$$

et on note Δ le discriminant de son équation caractéristique (E_c) .

- 1^{er} cas : Si $\Delta > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les racines distinctes (réelles) de (E_c) , alors l'ensemble S_H des solutions de (H) est :

$$\{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- 2^e cas : si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 la racine double (réelle) de (E_c) , alors l'ensemble S_H des solutions de (H) est :

$$\{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{r_0 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- 3^e cas : Si $\Delta < 0$, en notant $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ les deux racines distinctes (complexes conjuguées) de (E_c) , l'ensemble S_H des solutions de (H) est :

$$\{x \mapsto e^{\alpha x} [\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)] \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

1^{er} cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes.

On veut montrer que $S_H = \{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$\supseteq$: Soit $y : x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

On a bien $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .

On a aussi $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ (car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Donc y est de la forme des solutions de (H) dans le cas complexe où $\Delta \neq 0$.

$\subseteq$: Soit y une solution de (H) ,

i.e. $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Comme $y : I \rightarrow \mathbb{C}$, on a d'après le théorème dans le cas complexe :

$$\exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^2 : y(x) = \mu_1 e^{r_1 x} + \mu_2 e^{r_2 x}$$

Or $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ donc $y(0) \in \mathbb{R}$ et $y'(0) \in \mathbb{R}$

*. Nous n'avions pas en khôlle à démontrer ce théorème, mais cette démonstration est simple (un peu moins pour le troisième cas, plus délicat).

Le but de chaque cas est de montrer l'égalité entre deux ensembles : l'ensemble des solutions et l'ensemble des fonctions ayant une certaine forme.

L'idée est la même pour chaque cas : l'inclusion réciproque est une simple vérification (en se servant de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), l'inclusion directe invoque le cas dans $\mathbb{C}$ puis montre qu'en fait tous les éléments sont réels.

$$\text{Soit donc : } \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 \in \mathbb{R} & (L_1) \\ r_1\mu_1 + r_2\mu_2 \in \mathbb{R} & (L_2) \end{cases}$$

Comme $r_1 \neq r_2$:

$$\frac{(L_2) - r_2(L_1)}{r_1 - r_2} \implies \mu_1 = \frac{y'(0) - r_2 y(0)}{r_1 - r_2} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(L_2) - r_1(L_1)}{r_2 - r_1} \implies \mu_2 = \frac{y'(0) - r_1 y(0)}{r_2 - r_1} \in \mathbb{R}$$

Posons $\lambda_1 = \mu_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \mu_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } \boxed{\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in I, y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$$

2e cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Même étude : notons r_0 la racine réelle double.

On veut montrer que $S_H = \{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{r_0 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$\supseteq$: Soit $y : x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{r_0 x}$

On a bien $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .

On a aussi $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ (car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Donc y est de la forme des solutions de (H) dans le cas complexe où $\Delta = 0$.

$\subseteq$: Soit y une solution de (H) ,

i.e. $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Comme $y : I \rightarrow \mathbb{C}$, on a d'après le théorème dans le cas complexe :

$$\exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^2 : y(x) = (\mu_1 x + \mu_2) e^{r_0 x}$$

Or $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ donc $y(0) \in \mathbb{R}$ et $y'(0) \in \mathbb{R}$

$$\text{Soit donc : } \begin{cases} \mu_2 \in \mathbb{R} & (L_1) \\ \mu_1 + r_0 \mu_2 \in \mathbb{R} & (L_2) \end{cases}$$

$$(L_1) \implies \mu_2 = y(0) \in \mathbb{R}$$

$$(L_2) \implies \mu_1 = y'(0) - r_0 \mu_2 \in \mathbb{R}$$

Posons $\lambda_1 = \mu_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \mu_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } \boxed{\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in I, y(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{r_0 x}}$$

3e cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Notons $\alpha \pm i\beta$ (α et β réels) les deux racines complexes conjuguées de (E_c) .

On veut montrer que $S_H = \{x \mapsto [\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)] e^{\alpha x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$\supseteq$: Soit $y : x \mapsto (\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$

On a bien $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .

On a aussi $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ (car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Et $\forall x \in I, y(x) = e^{\alpha x} (\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x))$

$$= e^{\alpha x} \left(\lambda_1 \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + \lambda_2 \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2i} \right)}_{=\mu_1 \in \mathbb{C}} e^{(\alpha + i\beta)x} + \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2i} \right)}_{=\mu_2 \in \mathbb{C}} e^{(\alpha - i\beta)x}$$

Donc y est de la forme des solutions de (H) dans le cas complexe où $\Delta \neq 0$.

$\subseteq$: Soit y une solution de (H) ,

i.e. $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Comme $y : I \rightarrow \mathbb{C}$, on a d'après le théorème dans le cas complexe :

$$\begin{aligned} \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^2 : y(x) &= \mu_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + \mu_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\mu_1 e^{i\beta x} + \mu_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x} [\underbrace{(\mu_1 + \mu_2)}_{=\lambda_1} \cos(\beta x) + i \underbrace{(\mu_1 - \mu_2)}_{=\lambda_2} \sin(\beta x)] \end{aligned}$$

Or $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ donc $y(0) \in \mathbb{R}$ et $y'(0) \in \mathbb{R}$

$$\text{Soit donc : } \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 \in \mathbb{R} & (L_1) \\ (\alpha + i\beta)\mu_1 + (\alpha - i\beta)\mu_2 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \in \mathbb{R} & (L_2) \end{cases}$$

$$\implies \lambda_2 = \frac{y'(0) - \alpha\lambda_1}{\beta} \in \mathbb{R} \quad (\beta \neq 0 \text{ car } \Delta < 0)$$

$$\text{Donc } \boxed{\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in I, y(x) = (\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x))e^{\alpha x}}$$

Pourquoi $x \mapsto e^x$ est plutôt banale ?
Parce qu'elle n'arrive pas à se différentier..

Chapitre 6

Structures algébriques et ensembles

6.1 La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre partielle

Réflexivité : Soit $p \in \mathbb{N}$. $p \mid p$ car $p = 1 \times p$

Antisymétrie :

Lemme : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, p \mid q \implies p \leq q$

Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, supposons $p \mid q$, i.e. $\exists k \in \mathbb{N}^* : q = pk$

($k \neq 0$ car $k = 0 \implies q = 0$: exclu, et tout est positif)

Donc $k \geq 1 \implies pk \geq p \implies \underline{p \leq q}$

Preuve : Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Supposons $p \mid q$ et $q \mid p$.

1^{er} cas : si $q = 0$, alors $q \mid p \implies \exists k \in \mathbb{Z} : \underbrace{qk}_{=0} = p \implies p = q = 0$

2^e cas : si $p = 0$, alors $p \mid q \implies \exists k \in \mathbb{Z} : \underbrace{pk}_{=0} = q \implies p = q = 0$

3^e cas : Si $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$

D'après le lemme : $\begin{cases} p \mid q \implies p \leq q \\ q \mid p \implies q \leq p \end{cases} \implies p = q$

(car $\leq$ est antisymétrique)

Transitivité : Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$.

$$\begin{cases} p \mid q \\ q \mid r \end{cases} \implies \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : q = pk \\ \exists k' \in \mathbb{Z} : r = qk' \end{cases} \implies r = qk' = p(kk') \implies \boxed{p \mid r}$$

Relation partielle : Contre-exemple* : ni $2 \mid 3$, ni $3 \mid 2$

*. On montre qu'elle n'est pas totale

6.2 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

$$v = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} v \text{ est un majorant de } A \\ \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = v \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Supposons que $v = \sup(A)$.

$\rightarrow v$ est le plus petit des majorants de A .

$\rightarrow$ Montrons que $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = v$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v - \frac{1}{n+1} < v$ donc ce n'est pas un majorant de A .

Donc $\exists u_n \in A : u_n > v - \frac{1}{n+1}$ *

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$, donc on peut construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$\forall n \in \mathbb{N}, v - \frac{1}{n+1} < u_n \leq v$, et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq v$ †

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v - \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v = v$

D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = v}$

$\Leftarrow$ Supposons $\begin{cases} v \text{ est un majorant de } A \\ \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = v \end{cases}$

Montrons que $v = \sup(A)$

$\rightarrow v$ majore A

$\rightarrow$ Montrons que v est le plus petit des majorants de A :

Soit M un majorant de A .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M \Rightarrow \boxed{v \leq M}$

6.3 Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée possède un maximum

Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée.

Comme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse,

*, Dans un contexte de borne supérieure (note : un maximum est une borne supérieure, note² : la réciproque est fausse), il est courant d'utiliser ce raisonnement :

Soit E un ensemble possédant une borne supérieure notée s .

On exhibe un réel strictement positif – notons-le pour ce exemple u (il dépend souvent d'un entier n , en vue de construire une suite, auquel cas on l'indice par ce n – voir démonstrations de ce chapitre), qui par sa stricte positivité permet d'écrire que $s - u < s$.

Or s est une borne supérieure donc c'est le plus petit des majorants (de E), donc $s - u$ ne peut pas être un majorant de E , donc il existe un $e \in E$ tel que $s - u < e \leq s$.

Ensuite, l'exploitation de ce résultat dépend de l'objectif à démontrer.

†. Pour rappel, attention à bien passer à des inégalités larges pour le théorème des gendarmes ! Quoi qu'il en soit, les inégalités strictes impliquent les larges, mais il faut tout de même le signaler.

$v = \sup(A)$ existe.
 $\rightarrow$ Montrons que $\max(A) = v$ en montrant que $v \in A$.
 v est le plus petit des majorants de A et $v - 1 < v$
Donc $v - 1$ n'est pas un majorant de A
Donc $\exists x \in A : x > v - 1$
D'autre part, v est un majorant de A donc $x \leq v$
On a donc $\exists x \in A : v - 1 < x \leq v$
 $\rightarrow$ Montrons que $x = v$
Par l'absurde : supposons $x \neq v$
Donc $v - 1 < x < v$
Comme v est le plus petit des majorants de A , x n'est pas un majorant de A
donc $\exists y \in A : y > x$
Donc $\exists y \in A : x < y \leq v$
Ainsi $\exists (x, y) \in A^2 : v - 1 < x < y \leq v \implies v - 1 - y < x - y < 0$
Or $y \leq v \implies v - y \geq 0 \implies v - 1 - y \geq -1$
Donc $-1 \leq v - 1 - y < x - y < 0$
Donc $-1 < x - y < 0$
Or $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ car $A \subset \mathbb{Z}$
Donc $\begin{cases} x - y \in \mathbb{Z} \\ -1 < x - y < 0 \end{cases}$, ce qui est absurde.

6.4 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$$A \text{ dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$$

$\Rightarrow$ Supposons A dense dans $\mathbb{R}$, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in A : |x - y| \leq \varepsilon$ (*)
Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'après (*) appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$ et à x :

$$\exists u_n \in A : |x - u_n| = |u_n - x| \leq \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x}$

$\Leftarrow$ Supposons $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ (*)

Montrons que A dense dans $\mathbb{R}$, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in A : |x - y| \leq \varepsilon$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a d'après (*) : $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$

D'après la définition de $u_n \rightarrow x$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - x| \leq \varepsilon$$

Posons $y = u_{n_0} \in A$

$$\text{On a donc } n_0 \geq n_0 \implies |u_{n_0} - x| \leq \varepsilon \implies \boxed{|y - x| = |x - y| \leq \varepsilon}$$

6.5 Densités de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Lemme : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Montrons-le par l'absurde :

Soit $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, supposons $x + y \in \mathbb{Q}$.

$$x \in \mathbb{Q} \implies -x \in \mathbb{Q}$$

Donc $\underbrace{x + y}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(-x)}_{\in \mathbb{Q}} = y \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

D'après le théorème de caractérisation séquentielle de la densité, montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ posons } u_n = \frac{\lfloor x \times 10^n \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

On sait que $|u_n - x| \leq 10^{-n}$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 10^{-n} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On sait que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ donc d'après la preuve précédente :

$$\exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x + \sqrt{2}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (d'après le lemme)

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \sqrt{2} = x + \sqrt{2} - \sqrt{2} = x$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$$

D'après le théorème de caractérisation séquentielle de la densité,

$\boxed{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$

6.6 Une condition suffisante pour être un sous-groupe

Soient $(G, \star)$ un groupe, et H une partie de G .

Montrons que si $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, x \star y^{-1} \in H \end{cases}$ alors $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$ (i.e. $H \subset G$, et $(H, \star)$ est un groupe).

Supposons $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, x \star y^{-1} \in H \end{cases}$.

On sait que $H \subset G$.

Montrons que $(H, \star)$ est un groupe.

$(G, \star)$ est un groupe, donc notons e son élément neutre.

→ Montrons que $\star$ est une loi de composition interne dans H

(i.e. $\forall (x, y) \in H^2, x \star y \in H$).

$H \neq \emptyset$, donc notons $x \in H$.

On a $x \star x^{-1} \in H \implies e \in H$, car $x \in G$, puisque $H \subset G$.

En outre, $e \star y^{-1} \in H \implies y^{-1} \in H$, car $e \in H$.

Enfin, si l'on note $y \in H$, on a $x \star (y^{-1})^{-1} \in H \implies x \star y \in H$, car $y^{-1} \in H$.

→ Montrons que $\star$ est associative sur H (i.e. $\forall (x, y, z) \in H^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$).

On sait $\star$ associative sur G .

Or, $H \subset G$.

Donc $\star$ est associative sur H .

→ Montrons que e est élément neutre de $(H, \star)$ $\left(\text{i.e. } \forall x \in H, \begin{cases} x \star e = x \\ e \star x = x \end{cases} \right)$.

Comme montré précédemment, $e \in H$.

Or, $H \subset G$.

Donc $\forall x \in H, \begin{cases} x \star e = x \\ e \star x = x \end{cases}$.

→ Montrons que tout élément de H est symétrisable par $\star$

$\left(\text{i.e. } \forall x \in H, \exists y \in H : \begin{cases} x \star y = e \\ y \star x = e \end{cases} \right)$.

Soit $x \in H$.

On a $x \in G$.

Donc x est symétrisable dans G .

Posons ainsi $y = x^{-1} \in H$ (comme montré précédemment).

On a bien alors $\begin{cases} x \star y = e \\ y \star x = e \end{cases}$.

6.7 Formule du binôme dans un anneau

Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(x, y) \in A^2$, et $n \in \mathbb{N}$.

Si x et y commutent alors on a :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Soient x et y dans A qui commutent.

Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}"$

$\boxed{\mathcal{I}} \mathcal{P}(0) : (x + y)^0 = 1_A = 1 \times 1_A \times 1_A = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k}$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{d'après } \mathcal{P}(n)) \\
&= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{distributivité}) \\
&= \sum_{k=0}^n x \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^n y \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x \times x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y \times x^k y^{n-k} \quad (\text{car } \binom{n}{k} \in \mathbb{N}) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y \times y^{n-k} \\
&\quad (x \text{ et } y \text{ commutent donc } x^k \text{ et } y \text{ aussi}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&\quad - \underbrace{\binom{n}{-1} x^0 y^{n+1}}_{=0} - \underbrace{\binom{n}{n+1} x^{n+1} y^0}_{=0} \quad (\text{changement d'indice}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (\text{Formule de Pascal}) \\
&\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}
\end{aligned}$$

6.8 Propriétés d'anneaux et de corps

6.8.1 Les éléments inversibles d'un anneau forment un groupe par $\times$

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $\mathcal{U}_A$ l'ensemble de ses éléments inversibles. Montrons que $(\mathcal{U}_A, \times)$ est un groupe.

$\rightarrow$ $\times$ est une l.c.i. sur $\mathcal{U}_A$ car $\forall (x, y) \in \mathcal{U}_A^2, x \times y \in \mathcal{U}_A$ puisque si x, y sont inversibles, i.e. symétrisables pour $\times$, alors $x \times y$ aussi.

$\rightarrow$ $\times$ est associative sur $\mathcal{U}_A$ car $\mathcal{U}_A \subset A$ et "qui peut le plus peut le moins".

$\rightarrow$ 1_A est élément neutre de $\times$ sur $\mathcal{U}_A$ car $1_A \in \mathcal{U}_A$ puisqu'inversible et $\forall x \in \mathcal{U}_A, x \in A \Rightarrow x \times 1_A = 1_A \times x = x$.

→ Tous les éléments de $\mathcal{U}_A$ sont symétrisables pour $\times$ dans $\mathcal{U}_A$ par définition,
 et $\forall x \in A, x^{-1}$ inversible $\Rightarrow x^{-1} \in \mathcal{U}_A$.

6.8.2 Tout corps est un anneau intègre

Considérons un corps $(A, +, \times)$

- Donc $(A, +, \times)$ est non nul
- $\times$ est commutative ;

- Montrons que $\forall (x, y) \in A^2, x \times y = 0_A \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0_A \\ \text{ou} \\ y = 0_A \end{cases}$

$\Leftarrow$ La réciproque est vraie dans tout anneau.

$\Rightarrow$ Supposons $x \times y = 0_A$

Par l'absurde : supposons $\begin{cases} x \neq 0_A \\ y \neq 0_A \end{cases}$.

On a :

$$x \times y = 0_A$$

$$\Rightarrow x^{-1} \times x \times y = x^{-1} \times 0_A (*)$$

$$\Rightarrow y = 0_A \text{ ce qui contredit l'hypothèse.}$$

(*) x^{-1} existe car $x^{-1} \neq 0_A$ et $(A, +, \times)$ est un corps.

"Et si on engendrait un groupe libre ?"

Chapitre 7

Limites

7.1 Unicité de la limite

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} x_n \rightarrow l \\ x_n \rightarrow l' \end{cases}$

Montrons que $l = l'$

Par l'absurde, supposons $l \neq l'$

Comme les rôles de l et l' sont symétriques, supposons $l < l'$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l'$

Donc d'après les définitions appliquées à $\varepsilon = \frac{l' - l}{3} > 0$:

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |x_n - l| \leq \frac{l' - l}{3} \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |x_n - l'| \leq \frac{l' - l}{3} \end{cases}$$

Posons $n = \max\{n_0, n_1\}$

$$\begin{cases} n \geq n_0 \\ n \geq n_1 \end{cases} \implies \begin{cases} |x_n - l| \leq \frac{l' - l}{3} \\ |x_n - l'| \leq \frac{l' - l}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x_n - l \leq \frac{l' - l}{3} & (L_1) \\ -(x_n - l') \leq \frac{l' - l}{3} & (L_2) \end{cases}$$

$$(L_1) \implies \frac{2l' - l}{3} \leq x_n$$

$$(L_2) \implies \frac{2l - l'}{3} \geq x_n$$

$$\text{Par transitivité : } \frac{2l' - l}{3} \leq \frac{2l - l'}{3} \implies 2l' - l \leq 2l - l' \implies l' \leq l$$

Ce qui contredit l'hypothèse.

7.2 Limite d'une somme

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant respectivement vers l et l' (nous traitons le cas où les limites sont réelles).

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + y_n = l + l'$,

$$\text{i.e. } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |(x_n + y_n) - (l + l')| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après la définition de $x_n \rightarrow l$ appliquée à $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après la définition de $y_n \rightarrow l$ appliquée à $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |y_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $n_0 = \max\{n_1; n_2\} \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\implies \begin{cases} n \geq n_1 \\ n \geq n_2 \end{cases} \implies \begin{cases} |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \\ &\implies |(x_n + y_n) - (l + l')| \leq |x_n - l| + |y_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\implies \boxed{|(x_n + y_n) - (l + l')| \leq \varepsilon} \end{aligned}$$

7.3 Composition de la limite d'une suite par une fonction

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D_f^{\mathbb{N}}$ et $(a, l) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

On distingue 4 cas, selon si $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ a = +\infty \end{cases}$ et si $\begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ l = +\infty \end{cases}$ (les cas en $-\infty$

sont immédiats par ceux en $+\infty$) mais leurs démonstrations sont pratiquement identiques. On ne traite ici que le cas où $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{R}$.

Supposons $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}$

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$, i.e. :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |f(x_n) - l| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

D'après la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ appliquée à $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} : \forall x \in D_f, x \geq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Or, d'après la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ appliquée à $A = \eta \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 &\implies x_n \geq \eta \\ &\implies \boxed{|f(x_n) - l| \leq \varepsilon} \\ (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in D_f) \end{aligned}$$

7.4 Théorème des Limites Monotones

- Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$ et $]a, b[\subset D_f$.
Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Supposons f croissante et majorée sur $]a, b[$.
Montrons que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

Posons $A = f(]a, b[)$.

- $A \neq \emptyset$, car $f(\frac{a+b}{2}) \in A$, puisque $a < b$;
- $A \subset \mathbb{R}$, car $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- A est majoré, car f est majorée sur $]a, b[$.

Donc, d'après le Théorème Fondamental de l'Analyse, $l = \sup(A) \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l$, i.e. :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} : \forall x \in]a, b[, |x - b| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

$l - \varepsilon < l$, donc $l - \varepsilon$ ne majore pas A , d'où $\exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) > l - \varepsilon$.

Posons $\eta = b - x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ (car $b > x_0$).

Soit $x \in]a, b[$, supposons $|x - b| \leq \eta$.

Alors :

$$\begin{aligned} |x - b| \leq b - x_0 &\implies -(x - b) \leq b - x_0 \\ &\implies x \geq x_0 \\ &\implies f(x) \geq f(x_0) \quad (\text{car } f \text{ est croissante sur }]a, b[) \\ &\implies l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad (\text{par transitivité}) \\ &\implies \boxed{|f(x) - l| \leq \varepsilon} \end{aligned}$$

"Tu es l'asymptote de mon cœur, j'aimerais me rapprocher de toi indéfiniment."

Bonus : "Je te pousserai jusqu'à la limite du possible si tu me montres ton comportement asymptotique."

Chapitre 8

Suites

8.1 Une suite convergente est bornée

Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, i.e. $\exists l \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, i.e. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

D'après la définition de $u_n \rightarrow l$ appliquée à $\varepsilon = 1 > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq 1 \quad (*)$$

Posons $M = \max\{|u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|, |l| + 1\} \in \mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1^{er} cas : si $n \geq n_0$

Alors d'après $(*)$:

$$|u_n - l| \leq 1 \implies |u_n| - |l| \leq ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| \leq 1 \text{ (inégalités triangulaires)}$$

$$\implies |u_n| \leq |l| + 1 \leq M \text{ (car } M \text{ est le max d'un ensemble contenant } |l| + 1)$$

$$\implies |u_n| \leq M$$

2nd cas : Si $n < n_0$, alors $n \leq n_0 - 1$

Alors $|u_n| \in \{|u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|, |l| + 1\}$

Donc $|u_n| \leq M$

Dans tous les cas $\boxed{|u_n| \leq M}$

8.2 Théorème des suites extraites (cas de la limite finie)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $l \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = l$$

Lemme : Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "$ $\varphi(n) \geq n$ $"$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$ car $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.
 $n + 1 > n \implies \varphi(n + 1) > \varphi(n)$ (car φ est strictement croissante)
 $\implies \varphi(n + 1) > \varphi(n) \geq n$ (d'après $\mathcal{P}(n)$)
 $\implies \varphi(n + 1) > n \implies \varphi(n + 1) \geq n + 1 \implies \boxed{\mathcal{P}(n + 1)}$

Preuve : Supposons $u_n \rightarrow l$

Montrons que $u_{\varphi(n)} \rightarrow l$,

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

D'après la définition de $u_n \rightarrow l$ appliquée à $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon \quad (*)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \implies \varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0 \implies \varphi(n) \geq n_0$$

(car φ est croissante, et d'après le lemme)

Et donc d'après (*) appliquée à $\varphi(n)$ au lieu de n : $\boxed{|u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon}$

8.3 Théorème de limite monotone

- Une suite de réels croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge.
- Une suite de réels croissante (respectivement décroissante) et non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Convergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et majorée.

Posons $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$

A est une partie de $\mathbb{R}$ (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) non vide (car $u_0 \in A$) et majorée (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est).

Donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, $l = \sup(A)$ existe.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$,

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

$l - \varepsilon < l$ donc ce n'est pas un majorant de A , donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} \geq l - \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$n \geq n_0 \implies u_n \geq u_{n_0}$ (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante)

$\implies l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq l \leq l + \varepsilon$

$\implies -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$

$\implies \boxed{|u_n - l| \leq \varepsilon}$

Divergence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et non majorée.

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,

i.e. $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \geq A$

Soit $A > 0$.

A n'est pas un majorant de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (car elle n'est pas majorée)

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} \geq A$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$n \geq n_0 \implies u_n \geq u_{n_0} \geq A$ (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante)

Donc $\boxed{u_n \geq A}$

8.4 Théorème des suites adjacentes

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes (i.e. $\begin{cases} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ croissante} \\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n - x_n = 0 \end{cases}$), alors :

- elles convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, l \in [x_n, y_n]$

Soit $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$.

Supposons $\begin{cases} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ croissante} \\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n - x_n = 0 \end{cases}$

Lemme : montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n$ par l'absurde.

Supposons que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} > y_{n_0}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = y_n - x_n$.

Alors $u_{n+1} - u_n = y_{n+1} - x_{n+1} - y_n + x_n = (y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n) \leq 0$

car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

D'où :

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n_0} &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n_0} \\ &\implies 0 \leq u_{n_0} \\ &\implies 0 \leq y_{n_0} - x_{n_0} \\ &\implies x_{n_0} \leq y_{n_0}, \quad \text{ce qui contredit l'hypothèse.} \end{aligned}$$

Preuve : On a $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n \leq y_0$, car $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et d'après le lemme.

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

D'où, d'après le Théorème des Limites Monotones, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notons l sa limite.

De même, on a $\forall n \in \mathbb{N}, x_0 \leq x_n \leq y_n$, car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et d'après le lemme.

Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

D'où, d'après le Théorème des Limites Monotones, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notons l' sa limite.

Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n - x_n = 0 &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \\ &\implies l' - l = 0 \\ &\implies \boxed{l = l'} \end{aligned}$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, l \in [x_n, y_n]$:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, p \geq n &\implies x_n \leq x_p \leq y_p \leq y_n \quad (\text{cf. ci-dessus}) \\ &\implies \lim_{p \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} x_p \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} y_p \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} y_n \\ &\implies x_n \leq l \leq y_n \quad (x_n \text{ et } y_n \text{ sont indépendants de } p) \\ &\implies \boxed{l \in [x_n, y_n]} \end{aligned}$$

8.5 Explicitation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, az_{n+2} + bz_{n+1} + cz_n = 0$$

et d'équation caractéristique $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$, de discriminant Δ .

CAS COMPLEXE

Si $\Delta \neq 0$: On note r_1, r_2 les racines distinctes de (E_c) et on a :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, z_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Si $\Delta = 0$: On note r_0 la racine double de (E_c) et on a :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, z_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$$

CAS RÉEL

Si $\Delta > 0$: On note r_1, r_2 les racines distinctes de (E_c) et on a :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, z_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Si $\Delta = 0$: On note r_0 la racine double de (E_c) et on a :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, z_n = (\lambda n + \mu)r_0^n$$

Si $\Delta < 0$: On note $\rho e^{\pm i\theta}$ les racines complexes conjuguées de (E_c) et on a :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, z_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))\rho^n$$

8.6 Équivalents usuels

Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, et $p \in \mathbb{R}^+$.

$\sin(x_n) \sim x_n$	$\operatorname{sh}(x_n) \sim x_n$	$\arcsin(x_n) \sim x_n$
$\tan(x_n) \sim x_n$	$\operatorname{th}(x_n) \sim x_n$	$\arctan(x_n) \sim x_n$
$\cos(x_n) - 1 \sim -\frac{x_n^2}{2}$	$\operatorname{ch}(x_n) - 1 \sim \frac{x_n^2}{2}$	$\arccos(x_n) - \frac{\pi}{2} \sim -x_n$
$e^{x_n} - 1 \sim x_n$	$\ln(x_n + 1) \sim x_n$	$(x_n + 1)^p - 1 \sim px_n$

Preuve pour l'exponentielle :

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est définie et dérivable en 0, et on a $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = 1$.

Ainsi, $\exp(x_n) - \exp(0) \sim \exp'(0)x_n \implies e^{x_n} - 1 \sim x_n$.

Preuve pour le cosinus :

On a $\cos(x_n) - 1 = \cos(2 \times \frac{x_n}{2}) - 1 = -2 \sin^2(\frac{x_n}{2})$

Or :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x_n}{2}\right) &\sim \frac{1}{2}x_n, \text{ car } \frac{x_n}{2} \rightarrow 0 \implies \sin^2\left(\frac{x_n}{2}\right) \sim \frac{1}{4}x_n^2 \\ &\implies -2 \sin^2\left(\frac{x_n}{2}\right) \sim -\frac{1}{2}x_n^2 \\ &\implies \cos(x_n) - 1 \sim -\frac{1}{2}x_n^2 \end{aligned}$$

8.7 Prépondérance de la factorielle sur la fonction puissance

$$\forall a > 1, a^n = o(n!)$$

Pour le démontrer, il nous faut prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

• Pour cela, posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 1$ étant un réel.
Montrons que sa limite vaut 0.

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$

D'après la définition appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 &\implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - 0 \right| \leq \frac{1}{2} \\ &\implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \\ &\implies u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \quad (*) \\ &\quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0) \end{aligned}$$

• Montrons par récurrence simple $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) : "u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}"$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(n_0)$ car $u_{n_0} \leq \frac{1}{2^0} u_{n_0}$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \geq n_0$, supposons $\mathcal{P}(n)$

$n \geq n_0$ donc d'après (*) : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

Or $\mathcal{P}(n) \implies u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0} \implies u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2^{n+1-n_0}} u_{n_0}$ (car $\frac{1}{2} \geq 0$)

Donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1-n_0}} u_{n_0} \implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}$

• On a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0} = 0$ (car u_{n_0} est indépendant de n)

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

Pourquoi les suites ne font-elles pas de bruit ?
Parce qu'elles sont discrètes.

Chapitre 9

Arithmétique

9.1 Unicité d'une congruence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{Z}, \exists ! b \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket : a \equiv b[n]$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$.

EXISTENCE

Posons $k = \lfloor \frac{a}{n} \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $b = a - kn \in \mathbb{Z}$

On a :

$$b = a - kn \implies a = b + kn \implies \boxed{a \equiv b[n]}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} - 1 < \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \leq \frac{a}{n} &\implies -a + n > -kn \geq -a \quad (\text{car } -n < 0) \\ &\implies n > b \geq 0 \\ &\implies \boxed{b \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \end{aligned}$$

UNICITÉ

Soient b_1, b_2 tels que $\begin{cases} a \equiv b_1[n] \\ 0 \leq b_1 \leq n-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} a \equiv b_2[n] \\ 0 \leq b_2 \leq n-1 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{Z} : a = b_1 + k_1 n & (L_1) \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z} : a = b_2 + k_2 n & (L_2) \end{cases}$

$$(L_2) - (L_1) \implies b_2 - b_1 = (k_1 - k_2)n \quad (L_3)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} 0 \leq b_1 < n \implies -n < -b_1 \leq 0 & (-1 < 0) \\ 0 \leq b_2 < n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\implies -n < b_2 - b_1 < n \\
&\implies -n < n(k_1 - k_2) < n \\
&\implies -1 < k_1 - k_2 < 1 \quad (n \neq 0) \\
&\implies k_1 - k_2 = 0 \quad (k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}) \\
(L_3) \implies b_2 - b_1 &= 0 \\
&\implies \boxed{b_1 = b_2}
\end{aligned}$$

9.2 Propriété fondamentale du PGCD

Montrons par récurrence avec prédécesseurs :

$$\forall b \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(b) : " \forall a \in \mathbb{Z}, \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : a \wedge b = au + bv "$$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$ car :

Soit $a \in \mathbb{Z}$

$$\text{Posons } u = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \in \mathbb{Z} \text{ et } v = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{On a } a \wedge 0 = |a| = au + bv$$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $b \in \mathbb{N}$, supposons $\forall k \in \llbracket 0; b \rrbracket, \mathcal{P}(k)$

Montrons $\mathcal{P}(b+1)$, i.e. $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : a \wedge (b+1) = au + (b+1)v$

Soit $a \in \mathbb{Z}$

$b+1 \neq 0$ donc notons q et r les quotient et reste de la division euclidienne de a par $b+1$

$$\text{Alors } \begin{cases} a = (b+1)q + r \\ 0 \leq r < |b+1| = b+1 \end{cases} \implies 0 \leq r \leq b$$

D'après $\mathcal{P}(r)$ avec $b+1$ au lieu de a : $\exists (u', v') \in \mathbb{Z}^2 : (b+1) \wedge r = (b+1)u' + rv'$

$$\text{Posons } \begin{cases} u = v' \in \mathbb{Z} \\ v = u' - qv' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Alors on a : } a \wedge (b+1) = (b+1) \wedge r = (b+1)u' + rv' = (b+1)u' + v'(a - (b+1)q) = v'a + (b+1)(u' - qv') = au + (b+1)v \implies \boxed{\mathcal{P}(b+1)}$$

Montrons que $\forall b \in \mathbb{Z}^-, \forall a \in \mathbb{Z}, \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : a \wedge b = au + bv$

Soient $b \in \mathbb{Z}^-$ et $a \in \mathbb{Z}$, posons $b' = -b \in \mathbb{N}$.

On a donc $\exists (u', v') \in \mathbb{Z}^2 : a \wedge b' = au' + b'v'$

Or $b' = -b$ donc $a \wedge b' = a \wedge b$

$$\text{Posons } \begin{cases} u = u' \in \mathbb{Z} \\ v = -v' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{On a } a \wedge b = a \wedge b' = au' + b'v' = au + (-b)(-v) = \boxed{au + bv}$$

9.3 Théorème de Bézout et corollaires

THÉORÈME DE BÉZOUT

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$$

$\Rightarrow$ immédiat *

$\Leftarrow$ Supposons $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$

Montrons que $a \wedge b = 1$:

— $1 \in \mathbb{N}$

— $1 \mid a$ et $1 \mid b$

— $\forall k \in \mathbb{Z}, [k \mid a \text{ et } k \mid b] \implies k \mid 1$

En effet, si $k \mid a$ et $k \mid b$ alors $k \mid au + bv = 1$

THÉORÈME DE GAUSS

$$\begin{cases} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies a \mid c$$

Supposons $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$

Alors d'après le théorème de Bézout : $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$

Donc $auc + bcv = c$

Or $a \mid a$ donc $a \mid auc$ et $a \mid bc$ donc $a \mid bcv$

Donc $a \mid auc + bcv$

Donc $\boxed{a \mid c}$

COROLLAIRE

$$\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies ab \mid c^\dagger$$

Sous les hypothèses :

D'après le théorème de Bézout : $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$

Donc $auc + bcv = c$

$$\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases} \implies \begin{cases} ab \mid bc \\ ab \mid ac \end{cases} \implies ab \mid acu + bcv \implies \boxed{ab \mid c}$$

*. D'après le théorème précédent.

†. Cette propriété est parfois écrite :

$$\begin{cases} c \equiv 0 [a] \\ c \equiv 0 [b] \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies c \equiv 0 [ab]$$

COROLLAIRE

$$\begin{cases} a \wedge c = 1 \\ b \wedge c = 1 \end{cases} \implies ab \wedge c = 1$$

Sous les hypothèses :

D'après le théorème de Bézout :

$$\begin{cases} a \wedge c = 1 \implies \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : au + cv = 1 \\ b \wedge c = 1 \implies \exists (u', v') \in \mathbb{Z} : bu' + cv' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (au + cv)(bu' + cv') &= 1 \implies abuu' + aucv' + bcvu' + c^2vv' = 1 \\ &\implies ab(uu') + c(auv' + bvu' + cvv') = 1 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Bézout : $\boxed{ab \wedge c = 1}$

9.4 Infinitude des nombres premiers

Par l'absurde : supposons $\text{card}(\mathbb{P}) \in \mathbb{R}$

Notons $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

Considérons $N = p_1 \times \dots \times p_n + 1$

$N \geq 2$ donc N possède un diviseur premier que nous notons p_i

$$\begin{aligned} \text{On a } \begin{cases} p_i \mid p_1 \times \dots \times p_n \\ p_i \mid N \end{cases} \\ \implies p_i \mid N - (p_1 \times \dots \times p_n) \\ \implies p_i \mid 1 \\ \implies |p_i| \leq |1| = 1 \end{aligned}$$

Ce qui contredit $p_i \in \mathbb{P}$

9.5 Petit théorème de Fermat

Lemme 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
 $\rightarrow k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$

Lemme 2 : $\forall p \in \mathbb{P}, \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, p \mid \binom{p}{k}$
 $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1} \implies p \mid k \binom{p}{k} \implies p \mid \binom{p}{k}$
 (théorème de Gauss : $p \wedge k = 1$ puisque $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$)

Preuve du théorème

Soit $p \in \mathbb{P}$

Montrons par récurrence simple $\forall a \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(a) : "a^p \equiv a[p]"$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$ car $0^p \equiv 0[p]$ car $p \geq 2$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $a \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(a)$

Formule du Binôme : $(a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k 1^{p-k}$

Or d'après lemme 2 : $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, p \mid \binom{p}{k} \implies \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, \binom{p}{k} \equiv 0[p]$

$\implies (a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k \equiv \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p \equiv a^p + 1 \equiv a+1[p]$ d'après $\mathcal{P}(a)$

$(a+1)^p \equiv a+1[p] \implies \boxed{\mathcal{P}(a+1)}$

Si $a \in \mathbb{Z}^-$: posons $a' = -a \in \mathbb{N}$

Donc $a'^p \equiv a'[p] \implies (-a)^p \equiv -a[p] \implies (-1)^p a^p \equiv -a[p]$

• Si p est impair, alors $(-1)^p = -1 \implies a^p \equiv a[p]$

• Si p est pair, alors $p = 2$ car $p \in \mathbb{P}$

Donc $a^2 \equiv -a[2]$

Or $-1 \equiv 1[2]$

Donc $a \equiv -a \equiv a^2[2]$

• Dans tous les cas, $\boxed{a^p \equiv a[p]}$

9.6 Décomposition en produit de facteurs premiers

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} : n = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k}$$

où p_k représente le k^{e} nombre premier.

UNICITÉ

Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ et $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ telles que $n = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k} = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{y_k}$

$$\text{On a } \begin{cases} \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k} \mid \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{y_k} \implies \forall k \in \mathbb{N}, x_k \leq y_k \\ \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{y_k} \mid \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k} \implies \forall k \in \mathbb{N}, y_k \leq x_k \end{cases}$$

$$\implies \forall k \in \mathbb{N}, x_k = y_k \implies \boxed{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}}$$

EXISTENCE

Montrons par récurrence avec prédécesseurs :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) : " \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} : n = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k} "$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(1)$: car $1 = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k}$ où $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est définie par $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = 0$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\forall m \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathcal{P}(m)$

Montrons $\mathcal{P}(n+1)$

1^{er} cas : si $n+1$ est premier.

Notons i l'entier tel que $n+1 = p_i$

Alors $n+1 = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k}$ où $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est définie par $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \delta_{i,k}$.

2nd cas : si $n+1$ n'est pas premier.

Donc $\exists m \in \llbracket 2; n \rrbracket : m \mid n+1$.

Donc d'après $\mathcal{P}(m) : \exists (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} : m = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{y_k}$

Or $m \mid n+1 \implies \exists q \in \mathbb{Z} : n+1 = qm$

On a $q \in \llbracket 1; n \rrbracket$ (car $n+1 > 0$ et $q = n+1 \implies m = 1$: exclu)

D'après $\mathcal{P}(q) : \exists (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} : q = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{z_k}$

Posons $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = y_k + z_k$

On a bien $n+1 = mq = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{y_k} \times \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{z_k} = \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{x_k} \implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}$

Carl-Friedrich Gauss : "La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques."

Chapitre 10

Continuité

10.1 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$ et $[a, b] \subset D_f$.

$$\begin{cases} f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ f(a) \times f(b) \leq 0 \end{cases} \implies \exists c \in [a, b] : f(c) = 0$$

Supposons la fonction f continue sur le segment $[a, b]$, telle que $f(a) \times f(b) \leq 0$.

Construisons les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par dichotomie, de la manière suivante :

- posons $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}$
On a $f(x_0) \times f(y_0) = f(a) \times f(b) \leq 0$, par hypothèse.
- soit $n \in \mathbb{N}$, supposons x_n et y_n déjà construits, tels que $f(x_n) \times f(y_n) \leq 0$.
On construit x_{n+1} et y_{n+1} comme suit :
 - 1^{er} cas : si $f(x_n) \times f(\frac{x_n+y_n}{2}) \leq 0$
Alors $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \end{cases}$
On a $f(x_{n+1}) \times f(y_{n+1}) = f(x_n) \times f(\frac{x_n+y_n}{2}) \leq 0$ *
 - 2nd cas : si $f(x_n) \times f(\frac{x_n+y_n}{2}) > 0$
Alors $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}$
On a $f(x_{n+1}) \times f(y_{n+1}) = f(\frac{x_n+y_n}{2}) \times f(y_n) = f(x_n) \times f(\frac{x_n+y_n}{2}) \times \frac{f(x_n) \times f(y_n)}{f(x_n)^2} \leq 0$, par hypothèse.

*. Puisque c'est le cas dans lequel on vient de se placer !

On sait $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adjacentes par construction, donc d'après le théorème des suites adjacentes, elles ont une même limite finie, que l'on note c .

Ce théorème affirme également que $\forall n \in \mathbb{N}, c \in [x_n, y_n]$, donc, pour $n = 0 \in \mathbb{N}, c \in [x_0, y_0] = [a, b]$.

Enfin, on a montré par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \times f(y_n) \leq 0$.

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \times f(y_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \implies f(c)^2 \leq 0 \implies \boxed{f(c) = 0}$$

(par composition de limites, et f est continue en c)

10.2 Théorème des Bornes Atteintes

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$.

f est bornée sur $[a, b]$

(On n'étudie ici que le cas de la majoration de la fonction étudiée, l'extension se faisant sur un même procédé.)

Supposons la fonction f continue sur le segment $[a, b]$.

Montrons que f est majorée sur $[a, b]$, i.e. :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b], f(x) \leq M$$

Par l'absurde, supposons :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b] : f(x) > M$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après l'hypothèse appliquée à $M = n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Or, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notons l sa limite ; $l \in [a, b]$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$ (immédiat par récurrence simple[†]).

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = l \\ \lim_{x \rightarrow l} f(x) = f(l) \end{cases} \quad (\text{car } f \text{ est continue en } c \text{ puisque } c \in [a, b])$$

Donc, par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l) \in \mathbb{R}$.

Par unicité de la limite, $\{+\infty\} \subset \mathbb{R} : c'est \text{ absurde.}$

*. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a, b] \implies a \leq x_n \leq b$

†. cf. lemme de la preuve 8.2

10.3 Exemple de fonction continue sur un domaine, mais pas uniformément

Notons $f : x \mapsto x^2$, que l'on sait continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction usuelle.
Montrons que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, i.e. :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} : \forall \eta \in \mathbb{R}^{+*}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} |x - y| \leq \eta \\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon \end{cases}$$

Par l'absurde, supposons-la uniformément continue, i.e. :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Prenons alors $\varepsilon = 1 \in \mathbb{R}^{+*}$, $x \in \mathbb{R}$ et $y = x - \eta \in \mathbb{R}$.

On a $|x - y| = |\eta| = \eta$, car $\eta \geq 0$.

Alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| \leq 1 &\implies |x^2 - y^2| \leq 1 \\ &\implies |2\eta x - \eta^2| \leq 1 \\ &\implies 2\eta x - \eta^2 \leq 1 \\ &\implies x \leq \frac{1 + \eta^2}{2\eta} \quad (\text{car } 2\eta > 0) \end{aligned}$$

Or, pour $x = \frac{1 + \eta^2}{2\eta} + 1 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + \eta^2}{2\eta} + 1 \leq \frac{1 + \eta^2}{2\eta} \implies 1 \leq 0 : \boxed{\text{absurde}}$$

10.4 Théorème de Heine

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I un segment tel que $I \subset D_f$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Si f est continue sur le segment I alors elle est uniformément continue sur I .

Supposons la fonction f continue sur le segment $[a, b]$.

Montrons que f est uniformément continue sur $[a, b]$, i.e. :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*} : \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Par l'absurde, supposons :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} : \forall \eta \in \mathbb{R}^{+*}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} |x - y| \leq \eta \\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Prenons $\eta = \frac{1}{n+1}$.

Alors $\exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2 : \begin{cases} |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1} \\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon \end{cases}$

Or, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notons l sa limite ; $l \in [a, b]$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)+1} \leq \frac{1}{n+1}$ (immédiat par récurrence simple †).

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

D'où, par somme des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = l$. ‡

Et, par composition, $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(l) \end{cases}$ (car f est continue en $l \in [a, b]$)

Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \\ &\implies 0 \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui contredit l'hypothèse.

*. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a, b] \implies a \leq x_n \leq b$

†. cf. lemme de la preuve 8.2

‡. $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}) + x_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} + \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = l$

Que dit une fonction continue quand elle se présente ? "Bonjour, j'esuis f, enchantée..."

Chapitre 11

Développements limités

11.1 Primitivation des développements limités

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

Si f' admet au voisinage de a le développement limité à l'ordre n $f'(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors f admet au voisinage de a le développement limité à l'ordre $n+1$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n u_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Lemme : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I , $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.
Au voisinage de a , on a :

$$f'(x) = o((x-a)^n) \implies f(x) = f(a) + o((x-a)^{n+1})$$

Soit f dérivable sur I et soit $a \in I$

Supposons $f'(x) = o((x-a)^n)$, i.e. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Soit $x \in I \cap]a; +\infty[$

Posons $\varphi : t \mapsto f(t) - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}(t-a)^{n+1}$

On a :

- φ continue sur $[a; x]$ (*)
- φ dérivable sur $]a; x[$ (idem)
- $\varphi(a) = \varphi(x)$
(En effet : $\varphi(a) = f(a) - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}(a-a)^{n+1} = f(a)$ (car $n+1 \geq 1$)
et $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1} = f(a)$)

(* : f est continue sur I puisque dérivable et $t \mapsto (t-a)^{n+1}$ aussi donc φ est continue sur I comme somme et produit de fonctions dérivables, et $(a, x) \in I^2$

donc $[a, x] \subset I$ puisque I est un intervalle)
Donc d'après le théorème de Rolle :

$$\begin{aligned} & \exists c_x \in]a; x[: \varphi'(c_x) = 0 \\ \implies & f'(c_x) - \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{n+1}} (n + 1)(c_x - a)^n = 0 \\ \implies & \frac{f'(c_x)}{(c_x - a)^n} \times \frac{1}{n + 1} = \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{n+1}} \\ \implies & \frac{1}{n + 1} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c_x)}{(c_x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{n+1}} \end{aligned}$$

Or $a \leq c_x \leq x \implies \lim_{x \rightarrow a^+} a \leq \lim_{x \rightarrow a^+} c_x \leq \lim_{x \rightarrow a^+} x$

$\lim_{x \rightarrow a^+} a = \lim_{x \rightarrow a^+} x = a$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow a^+} c_x = a$

De plus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x - a)^n} = 0$ (hypothèse) donc par composition : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c_x)}{(c_x - a)^n} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{n+1}} = 0$

On montre de même que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{n+1}} = 0$

Finalement, on a montré que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{n+1}} = 0 & \implies f(x) - f(a) = o((x - a)^{n+1}) \\ & \implies \boxed{f(x) = f(a) + o((x - a)^{n+1})} \end{aligned}$$

Preuve : Supposons f dérivable sur un intervalle I , $a \in I$ et $f'(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x - a)^k + o((x - a)^n)$.

Posons $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n u_k \frac{(x - a)^{k+1}}{k + 1}$

g est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, $a \in I$ et $g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x - a)^k = o((x - a)^n)$ (par hypothèse).

D'après le lemme : $g(x) = g(a) + o((x - a)^{n+1})$

Or $g(a) = f(a) - \sum_{k=0}^n u_k \frac{(a - a)^{k+1}}{k + 1} = f(a)$ (car $k + 1 \geq 1$)

Ainsi $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n u_k \frac{(x - a)^{k+1}}{k + 1} = f(a) + o((x - a)^{n+1})$

$$\implies \boxed{f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n u_k \frac{(x - a)^{k+1}}{k + 1} + o((x - a)^{n+1})}$$

11.2 Formule de Taylor-Young

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^n sur un intervalle I et $a \in I$.

Alors f admet au voisinage de a le développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Soit I un intervalle et $a \in I$.

Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$:

"Si f est de classe C^n sur I alors $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$ "

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$ car :

Si f est de classe C^0 sur I (i.e. est continue) alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) &\implies f(x) = f(a) + o(1) \\ &\implies f(x) = \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^0) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I . Donc f' est de classe C^n sur I et d'après $\mathcal{P}(n)$ appliquée à f' :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\overbrace{f^{(k+1)}(a)}^{f^{(k)}(a)}}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Or f est dérivable sur l'intervalle I (car de classe C^{n+1} avec $n+1 \geq 1$) et $a \in I$ donc d'après le théorème de primitivation des développements limités :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \quad (\text{en posant } l = k+1) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \\ &\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)} \end{aligned}$$

11.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I .

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

Par récurrence simple : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "si f est de classe C^{n+1} sur I alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt"$$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$ car : si f est de classe C^1 alors :

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t) dt &= [f(t)]_a^x = f(x) - f(a) \\ \implies f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f^{(0)}(a)(x-a)^0 + \int_a^x f'(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(0+1)}(t)}{0!} (x-t)^0 dt \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

Soit f de classe C^{n+2} sur I .

Alors f est de classe C^{n+1} sur I et d'après $\mathcal{P}(n)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

Intégrons par parties $J = \int_a^x \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}}_{u(t)} \underbrace{(x-t)^n}_{v'(t)} dt$ avec $\begin{cases} u : t \mapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \\ v : t \mapsto \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ de

classe C^1 sur $[a; x] \subset I$ (f est de classe C^{n+2} sur I).

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{-f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}}{n!(n+1)} \right]_a^x - \int_a^x \underbrace{\frac{f^{(n+2)}(t)}{n!}}_{u'(t)} \underbrace{(-1) \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}}_{v(t)} dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt \\
 &\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}(n+1)}
 \end{aligned}$$

11.4 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I .

$$\text{On note } M_{n+1} = \begin{cases} \max_{t \in [a; x]} |f^{(n+1)}(t)| & \text{si } x \geq a \\ \max_{t \in [x; a]} |f^{(n+1)}(t)| & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

$$\forall x \in I, |f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

1^{er} cas : si $x \geq a$ (le 2nd cas se traite de manière similaire)

$M_{n+1} = \max_{t \in [a; x]} |f^{(n+1)}(t)|$ existe selon le théorème des bornes atteintes car

$|f^{(n+1)}|$ est continue sur I donc sur $[a; x] \subset I$ comme composée de fonctions continues (car f est de classe C_{n+1}).

On a alors $\forall t \in [a; x], |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}$

Les hypothèses de la formule de Taylor avec reste intégral sont vérifiées donc :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\
 \Rightarrow |f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k| &= \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\
 &\leq \int_a^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right| dt \quad (\text{d'après l'inégalité triangulaire})
 \end{aligned}$$

Or : $\forall t \in [a; x], |f^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |f^{(n+1)}(t)| \times \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| &\leq M_{n+1} \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| \quad (\text{car } \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| \geq 0) \\
 \Rightarrow \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right| &\leq M_{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} \quad (\text{car } x \geq t) \\
 \Rightarrow \int_a^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \right| dt &\leq \int_a^x M_{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} dt \quad (\text{car } a \leq x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| &\leq \frac{M_{n+1}}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \\ &\quad \left(\text{car } \frac{M_{n+1}}{n!} \text{ est indépendant de } t, \text{ et transitivité} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_a^x (x-t)^n dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x = \underbrace{\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}}_{n+1>0} = \underbrace{\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}}_{x \geq a}$$

$$\text{Donc } \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

11.5 Formules de développements limités usuels en 0

$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha-i)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \text{sh}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \arctan(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$

Chapitre 12

Polynômes et fractions rationnelles

12.1 Résolution des équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes

Soit l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, et δ une racine carrée de Δ .

Montrons que $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ sont les deux solutions de (E) .

$$\begin{aligned} \text{On a : } az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \quad (\text{car } a \neq 0) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \\ &= a(z - z_1)(z - z_2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - z_1 = 0 \\ \text{ou} \\ z - z_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{car } a \neq 0) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z = z_1 \\ \text{ou} \\ z = z_2 \end{cases}}$$

12.2 Formule de Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

1^{er} cas : Si $P = 0$

La formule devient : $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \Leftrightarrow 0 = 0$: vrai

2nd cas : Si $P \neq 0$

Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$:

$$"n = \deg(P) \implies P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k"$$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$ car :

Si $\deg(P) = 0$ alors P est constant non nul, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : P = \lambda$

Alors $\forall k \geq 1, P^{(k)} = 0 \implies P^{(k)}(a) = 0$ et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = \frac{P^{(0)}(a)}{0!} (X-a)^0 = P(a) = \lambda = P$$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$

Soit P de degré $n+1$, donc $\deg(P') = n$, et d'après $\mathcal{P}(n)$ appliquée à P' :

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\overbrace{P^{(k)}(a)}^{=P^{(k+1)}(a)}}{k!} (X-a)^k = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(X-a)^{k+1}}{k+1} \right]' \\ &\implies \exists \lambda \in \mathbb{K} : P = \underbrace{\lambda}_{=P(a) (*)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \\ &\implies P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \\ &\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) : P &= \lambda + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \\ &\implies P(a) = \lambda + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \underbrace{(a-a)^k}_{=0 \text{ car } k \geq 1} \\ &\implies \lambda = P(a) \end{aligned}$$

12.3 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2 \ (B \neq 0), \exists ! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 : \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

UNICITÉ

Soient (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) dans $\mathbb{K}[X]^2$ tels que :

$$\begin{cases} A = Q_1B + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B) \\ A = Q_2B + R_2 \\ \deg(R_2) < \deg(B) \end{cases}$$

Montrons que $R_1 = R_2$

Par l'absurde : supposons $R_1 \neq R_2$ On a :

$$\begin{aligned} BQ_1 + R_1 &= BQ_2 + R_2 \implies B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1 \quad (*) \\ &\implies B \mid (R_2 - R_1), \text{ or } R_2 - R_1 \neq 0 \\ &\implies \deg(B) \leq \deg(R_2 - R_1) = \max\{\deg(R_2); \deg(R_1)\} < \deg(B) \\ &\implies \deg(B) < \deg(B) : \text{absurde} \end{aligned}$$

Donc $R_1 = R_2$, et dans $(*)$:

$$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1 = 0 \implies Q_1 - Q_2 = 0 \ (\text{car } B \neq 0) \implies Q_1 = Q_2$$

On a montré que $(Q_1, R_1) = (Q_2, R_2)$

D'où l'unicité.

EXISTENCE

Notons $p = \deg(B) \in \mathbb{N}$ (car $B \neq 0$)

1^{er} cas : si $\deg(A) < p$

Alors posons $\begin{cases} Q = 0 \in \mathbb{K}[X] \\ R = A \in \mathbb{K}[X] \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$

2nd cas : sinon :

Par récurrence avec prédécesseurs : $\forall n \geq p - 1$,

$$\mathcal{P}(n) : \text{"si } n = \deg(A), \text{ alors } \exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \quad "$$

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(p - 1)$ montré en 1^{er} cas.

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \geq p - 1$, supposons $\forall i \in \llbracket p - 1, n \rrbracket, \mathcal{P}(i)$

On a vu en 1^{er} cas que $\mathcal{P}(i)$ est vraie pour $i < p$, on a donc $\forall i \leq n, \mathcal{P}(i)$.

Si $\deg(A) = n + 1$, notons $A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$ et $a_{n+1} \neq 0$

Comme $\deg(B) = p$, notons $B = \sum_{k=0}^p b_k X^k$ et $b_k \neq 0$

Posons :

$$\begin{aligned}
 C &= A - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B \quad (\text{car } b_p \neq 0) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} \sum_{k=0}^p b_k X^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - \sum_{k=0}^p b_k \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p+k} \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k X^k + \cancel{a_{n+1} X^{n+1}} - \sum_{k=0}^{p-1} b_k \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p+k} - \cancel{\frac{a_{n+1}}{b_p} b_p X^{n+1}} \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=0}^{p-1} b_k \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p+k}
 \end{aligned}$$

Ce qui est une expression de degré au plus n .

Notons $i = \deg(C)$

D'après $\mathcal{P}(i)$ appliquée à C au lieu de A :

$$\exists (Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2 : \begin{cases} C = BQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } C &= A - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B = BQ_1 + R_1 \\
 \implies A &= B(Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}) + R_1
 \end{aligned}$$

$$\text{En posant } \begin{cases} Q = Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} \in \mathbb{K}[X] \\ R = R_1 \in \mathbb{K}[X] \end{cases}, \text{ on a } \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \\ = \deg(R_1) \end{cases}$$

$$\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}$$

12.4 Caractérisation de l'ordre de multiplicité

12.4.1 Existence d'un polynôme non annulé

Soient P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$.

$$\alpha \text{ d'ordre } r \text{ dans } P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} P = (X - \alpha)^r Q \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow} \text{ Supposons } \alpha \text{ d'ordre } r \text{ dans } P, \text{ i.e. } \begin{cases} (X - \alpha)^r \mid P & (1) \\ (X - \alpha)^{r+1} \nmid P & (2) \end{cases}$$

$$(1) \implies \exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)^r Q$$

Montrons que $Q(\alpha) \neq 0$ par l'absurde : supposons $Q(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Alors } (X - \alpha) \mid Q &\implies (X - \alpha)(X - \alpha)^r \mid Q(X - \alpha)^r \\ &\implies (X - \alpha)^{r+1} \mid P, \text{ ce qui contredit (2)} \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : (X - \alpha)^r Q = P$ et $Q(\alpha) \neq 0$

Alors $(X - \alpha)^r \mid P$

Montrons que $(X - \alpha)^{r+1} \nmid P$

Par l'absurde : supposons $(X - \alpha)^{r+1} \mid P$, i.e. :

$$\begin{aligned} \exists R \in \mathbb{K}[X] : (X - \alpha)^{r+1} R = P &\implies (X - \alpha)^r Q = (X - \alpha)^r (X - \alpha) R \\ &\implies Q = (X - \alpha) R \quad (\text{car } (X - \alpha)^r \neq 0) \\ &\implies Q(\alpha) = (\alpha - \alpha) R(\alpha) \\ &\implies Q(\alpha) = 0, \text{ ce qui contredit l'hypothèse.} \end{aligned}$$

12.4.2 Annulation des dérivées

Soient P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$.

$$\alpha \text{ d'ordre } r \text{ dans } P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons α d'ordre r dans P .

Donc $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = Q(X - \alpha)^r$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

$$\text{Montrons que } \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 & (1) \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 & (2) \end{cases}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$P^{(k)} = [Q(X - \alpha)^r]^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q^{(k-i)} [(X - \alpha)^r]^{(i)} \quad (\text{Formule de Leibniz})$$

$$\text{Or } [(X - \alpha)^r]^{(i)} = \begin{cases} \frac{r!}{(r-i)!} (X - \alpha)^{r-i} & \text{si } r \leq i \\ 0 & \text{sinon } (i > r) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Montrons (1)

Supposons $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, donc $k < r$.

$$\text{Alors } P^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q^{(k-i)} \frac{r!}{(r-i)!} (X - \alpha)^{r-i} \quad (\text{car } i \leq k \leq r \Rightarrow i \leq r)$$

$$\implies P^{(k)}(\alpha) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q^{(k-i)} \frac{r!}{(r-i)!} \underbrace{(\alpha - \alpha)^{r-i}}_{=0 \Leftarrow (*)} \quad ((*) \text{ car } i \leq k < r \Rightarrow r - i > 0)$$

$$\implies \boxed{P^{(k)}(\alpha) = 0}$$

$\rightarrow$ Montrons (2)

Supposons $k = r$.

$$\text{Alors } P^{(r)} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} Q^{(r-i)} \frac{r!}{(r-i)!} (X - \alpha)^{r-i}$$

$$\implies P^{(r)}(\alpha) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} Q^{(r-i)}(\alpha) \underbrace{\frac{r!}{(r-i)!} (\alpha - \alpha)^{r-i}}_{\substack{=0 \text{ si } i < r \\ =1 \text{ si } i=r}} = \binom{r}{r} \frac{r!}{(r-r)!} Q^{(r-r)}(\alpha)$$

$$\implies P^{(r)}(\alpha) = r!Q(\alpha) \neq 0 \implies \boxed{P^{(r)}(\alpha) \neq 0}$$

$$\boxed{\Leftarrow} \text{ Supposons } \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 & (1) \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 & (2) \end{cases}$$

Montrons que α est d'ordre r dans P .

Pour cela montrons que $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = Q(X - \alpha)^r$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

D'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \\ &= \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \quad (\text{d'après (1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!} \underbrace{(X - \alpha)^{k+r}}_{=(X-\alpha)^k (X-\alpha)^r} \\ &= (X - \alpha)^r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!} (X - \alpha)^k \end{aligned}$$

$$\text{Posons } Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!} (X - \alpha)^k \in \mathbb{K}[X]$$

$$Q(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!} \underbrace{(\alpha - \alpha)^k}_{\substack{=0 \text{ si } k > 0 \\ =1 \text{ si } k=0}} = \frac{P^{(r)}(\alpha)}{r!} \neq 0 \quad (\text{d'après (2)})$$

Donc $\boxed{\alpha \text{ est d'ordre } r \text{ dans } P}$

12.5 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \neq 0$ dans $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.

- P possède exactement n racines comptées avec leurs ordres dans $\mathbb{C}$
- Si on note $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ les racines distinctes et $r_1, \dots, r_q$ leurs ordres respectifs alors on dispose de la factorisation :

$$P = \text{dom}(P) \prod_{i=1}^q (X - \alpha_i)^{r_i}$$

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ les racines de P et $r_1, \dots, r_q$ leurs ordres respectifs.

$P \neq 0$ donc $\exists Q \in \mathbb{C}[X] : P = Q \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)^{r_k}$ et $\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, Q(\alpha_k) \neq 0$

Donc $dom(Q) = Q$

$$\begin{aligned}
\text{Alors } P &= \text{dom}(Q) \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)^{r_k} \\
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\deg(P)}_{=n} = \underbrace{\deg(\text{dom}(Q))}_{=0} + \underbrace{\deg(\prod_{i=1}^q (X - \alpha_k)^{r_k})}_{=r_1 + \dots + r_q} \\ \text{dom}(P) = \underbrace{\text{dom}(\text{dom}(Q))}_{=\text{dom}(Q)} \times \underbrace{\text{dom}(\prod_{i=1}^q (X - \alpha_k)^{r_k})}_{\text{dom}(X - \alpha_k)^{r_k} = 1} \end{array} \right. \\
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{r_1 + \dots + r_q = n} \\ \text{dom}(P) = \text{dom}(Q) \end{array} \right. \\
\Rightarrow \boxed{P = \text{dom}(P) \prod_{i=1}^q (X - \alpha_k)^{r_k}}
\end{aligned}$$

96

→ Pour un polynôme de degré 3 de racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{aligned} - k = 1 : \sigma_1 &= \sum_{1 \leq i_1 \leq 3} \alpha_{i_1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ - k = 2 : \sigma_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 \\ - k = 3 : \sigma_3 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \alpha_{i_3} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \end{aligned}$$

12.7 Interpolation polynomiale

On note $x_0, \dots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ distincts 2 à 2 et $y_0, \dots, y_n$ dans $\mathbb{K}$.

Montrons que

$$\exists ! P \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} \deg(P) \leq n \\ \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = y_i \end{cases}$$

On rappelle que les polynômes de Lagrange sont :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

EXISTENCE

Posons $P = \sum_{k=0}^n y_k L_k \in \mathbb{K}[X]$

$$\rightarrow \deg(P) \leq \max \{ \deg(y_k L_k) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \} \leq n$$

= (*)

$$(*) : \begin{cases} \deg(L_k) = n \text{ si } y_k \neq 0 \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

→ Montrons que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_i) = y_i \quad (**) = y_k \delta_{k,i} \begin{cases} y_i \text{ si } k = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

= (**)

UNICITÉ

Soient P_1 et P_2 deux solutions.

Notons $Q = P_1 - P_2$

$$\text{On a } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(x_i) = \underbrace{P_1(x_i)}_{=y_i} - \underbrace{P_2(x_i)}_{=y_i} = 0$$

On a donc trouvé $n + 1$ racines de Q distinctes 2 à 2.

$$\text{Or } \deg(Q) \leq \max \{ \deg(P_1), \deg(P_2) \} \leq n$$

$\leq n \quad \leq n$

Donc $Q = 0$

Donc $\boxed{P_1 = P_2}$

12.8 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Remarque : dans $\mathbb{R}$, les polynômes irréductibles sont exactement ceux de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Dans $\mathbb{C}$, ce sont exactement ceux de degré 1 ; montrons-le :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

$\Rightarrow$ Supposons P irréductible.

Montrons que $\deg(P) = 1$

Par l'absurde : supposons $\deg(P) \geq 2$ (P est irréductible donc non constant)

D'après le théorème fondamental de l'algèbre, P possède une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.

Donc :

$$\begin{aligned} \exists Q \in \mathbb{C}[X] : P &= (X - \alpha)Q \\ \Rightarrow \deg(P) &= \deg(X - \alpha) + \deg(Q) \\ \Rightarrow \deg(Q) &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P = \underbrace{(X - \alpha)}_{\deg \geq 1} \underbrace{Q}_{\deg \geq 1}$$

Ce qui contredit P irréductible.

$\Leftarrow$ Supposons que $\deg(P) = 1$

Montrons que P est irréductible dans $\mathbb{C}$.

Par l'absurde : supposons P non irréductible.

$$\text{Alors } \exists (P_1, P_2) \in \mathbb{C}[X]^2 : \begin{cases} P = P_1 P_2 \\ \deg(P_1) \geq 1 \\ \deg(P_2) \geq 1 \end{cases}$$

Donc $\deg(P) \geq 2$

Ce qui contredit $\deg(P) = 1$.

12.9 Forme et unicité d'une fraction rationnelle irréductible

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists !(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} : \begin{cases} F = \frac{P}{Q} \\ P \wedge Q = 1 \\ Q \text{ unitaire} \end{cases}$$

EXISTENCE

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Alors $\exists (P_1, Q_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} : F = \frac{P_1}{Q_1}$

Notons $D = P_1 \wedge Q_1 \neq 0$ (car $Q_1 \neq 0$)

On a $\begin{cases} D \mid P_1 \implies \exists P_2 \in \mathbb{K}[X] : P_1 = P_2 D \\ D \mid Q_1 \implies \exists Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} : Q_1 = Q_2 D \quad (Q_1 \neq 0) \end{cases}$

On sait que $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2 : D = UP_1 + VQ_1 = DUP_2 + DVQ_2$

$$\implies 1 = \frac{P_2}{\text{dom}(Q_2)} \underbrace{\text{dom}(Q_2)U}_{\in \mathbb{K}[X]} + \frac{Q_2}{\text{dom}(Q_2)} \underbrace{\text{dom}(Q_2)V}_{\in \mathbb{K}[X]}$$

Posons $\begin{cases} P = \frac{P_2}{\text{dom}(Q_2)} \in \mathbb{K}[X] \\ Q = \frac{Q_2}{\text{dom}(Q_2)} \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \text{ unitaire} \end{cases}$

D'après le théorème de Bézout, $\boxed{P \wedge Q = 1}$

$$\text{et : } \frac{P}{Q} = \frac{\frac{P_2}{\text{dom}(Q_2)}}{\frac{Q_2}{\text{dom}(Q_2)}} = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{DP_2}{DQ_2} = \frac{P_1}{Q_1} = \boxed{F}$$

UNICITÉ

Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$ tels que $F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ et Q_1 et Q_2 soient unitaires et $P_1 \wedge Q_1 = P_2 \wedge Q_2 = 1$

On a alors $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$ (*)

$\implies Q_2 \mid Q_1 P_2 \implies Q_2 \mid Q_1$ (théorème de Gauss)

De même $Q_1 \mid Q_2$ donc Q_1 et Q_2 sont associés.

Or Q_1 et Q_2 sont unitaires donc $\boxed{Q_1 = Q_2}$

Et donc (*) $\implies \boxed{P_1 = P_2}$ (car Q_1 et Q_2 sont non nuls)

12.10 Parties entière et fractionnaire d'une fraction rationnelle

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists !(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X) : \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

E est la partie entière de F , et G sa partie fractionnaire notée $[F]$.

EXISTENCE

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

Notons $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ les quotient et reste de la division euclidienne de P par

Q (car $Q \neq 0$) : $\begin{cases} P = EQ + R \\ \deg(R) < \deg(Q) \end{cases}$

$$\text{Alors } F = \frac{EQ+R}{Q} = E + \underbrace{\frac{R}{Q}}_{=G \in \mathbb{K}(X)} \quad \text{et } \deg(G) = \deg(R) - \deg(Q) < 0$$

UNICITÉ

Soient $(E_1, E_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(G_1, G_2) \in \mathbb{K}(X)^2$ tels que $F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2$ avec $\deg(G_1) < 0$ et $\deg(G_2) < 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 E_1 + G_1 = E_2 + G_2 &\implies E_1 - E_2 = G_2 - G_1 \quad (*) \\
 &\implies \deg(\overbrace{E_1 - E_2}^{\in \mathbb{K}[X]}) = \deg(G_2 - G_1) \\
 &\leq \max\{\underbrace{\deg(G_2)}_{<0}; \underbrace{\deg(-G_1)}_{<0}\} < 0 \\
 &\implies \deg(E_1 - E_2) = -\infty \\
 &\implies E_1 - E_2 = 0 \\
 &\implies \boxed{E_1 = E_2} \\
 (*) &\implies \boxed{G_1 = G_2}
 \end{aligned}$$

12.11 Coefficient d'une partie polaire d'un pôle simple

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

Montrons que si x_i est un pôle simple de F , sa partie polaire associée dans la décomposition en éléments simples de F est $\frac{\alpha_i}{X - x_i}$ où $\alpha_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}$.

Pour trouver α_i , on effectue $X \leftarrow x_i$ dans $(X - x_i)F = (X - x_i)\frac{P}{Q}$ (*)

Comme x_i est une racine simple de Q , on a :

$$\begin{aligned}
 \exists R \in \mathbb{K}[X] : Q &= (X - x_i)R \quad \text{avec } R(x_i) \neq 0 \\
 \implies Q' &= R + (X - x_i)R' \\
 \implies Q'(x_i) &= R(x_i)
 \end{aligned}$$

$$\text{Alors } (X - x_i)F = \frac{(X - x_i)P}{Q} = \frac{(X - x_i)P}{(X - x_i)R} = \frac{P}{R}$$

$$\text{Et donc } (*) \text{ donne : } \frac{P(x_i)}{R(x_i)} = \boxed{\frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} = \alpha_i}$$

12.12 Formule donnant la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

Résultat admis : $(P_1 \times \dots \times P_n)' = \sum_{k=1}^n P_k' \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n P_i$

Preuve :

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss :

$$\begin{aligned}
 P &= \underbrace{\lambda}_{=dom(P)} \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{r_k} \\
 \implies P' &= \lambda \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (X - x_i)^{r_i} (X - x_k)^{r_k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (X - x_i)^{r_i} (X - x_k)^{r_k} \frac{r_k}{X - x_k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda \underbrace{\prod_{i=1}^n (X - x_i)^{r_i}}_{=P} \frac{r_k}{X - x_k} \\
 \implies P' &= P \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{X - x_k} \\
 \implies \boxed{\frac{P'}{P} &= \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{X - x_k}}
 \end{aligned}$$

"Qu'offre un mathématicien à sa fiancée quand il la demande en mariage ? – Un anneau polynomial."

Bonus : "Quelles sont les fonctions les moins sérieuses des mathématiques ? – Les polynômes du second degré."

Chapitre 13

Espaces vectoriels

13.1 Sous-espaces vectoriels engendrés

Soient E un espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$\text{vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \dots, x_n$.

Notons $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$.

• Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

— $F \subset E$ car si $x \in F$, alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \in E$

(car $\cdot$ est une l.c.e. et $+$ une l.c.i. sur E)

— $F \neq \emptyset$ car $0_E \in F$ puisque $0_E = \sum_{k=1}^n 0_E \cdot x_k \in F$

— $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

$$x \in F \implies \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k$$

$$y \in F \implies \exists (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n : y = \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot x_k$$

$$\implies \lambda x + \mu y = \lambda \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k + \mu \sum_{k=1}^n \mu_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^n (\lambda \lambda_k + \mu \mu_k) \cdot x_k$$

$$\implies \lambda x + \mu y \in F$$

• $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} \cdot x_k \in F$

• Montrons que F est le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant $x_1, \dots, x_n$

Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \dots, x_n$

Soit $x \in F$

$$\text{Donc } \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k$$

Or $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in G$ et G est un sous-espace vectoriel de E

Donc $x \in G$

Donc $F \subset G$

13.2 Sous-espaces vectoriels et images directes ou réciproques

Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient U un sous-espace vectoriel de E et V un sous-espace vectoriel de F .

- Montrons que $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F .
 - $f(U) \subset F$ par définition
 - $f(U) \neq \emptyset$ car $0_F = f(\underbrace{0_E}_{\in U}) \in f(U)$
 (puisque U est un sous-espace vectoriel de E et f est linéaire.)
 - $\forall (x, y) \in f(U)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$
 $x \in f(U) \implies \exists x' \in U : f(x') = x$
 $y \in f(U) \implies \exists y' \in U : f(y') = y$
 $\implies \lambda x + \mu y = \lambda f(x') + \mu f(y') = f(\underbrace{\lambda x' + \mu y'}_{\in U})$
 (car f est linéaire et U est un espace vectoriel)
 $\implies \lambda x + \mu y \in f(U)$
- Montrons que $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E .
 - $f^{-1}(V) \subset E$ par définition
 - $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ car $0_E \in f^{-1}(V)$
 (puisque $0_F = f(0_E)$ et V est un sous-espace vectoriel de F)
 - $\forall (x, y) \in (f^{-1}(V))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$
 $f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in V} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in V} \in V$
 (car f est linéaire et V est un sous-espace vectoriel de F)
 $\implies \lambda x + \mu y \in f^{-1}(V)$

13.3 Caractérisation de l'injectivité par le noyau

Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

$\Rightarrow$ Supposons f injective.

$\supseteq$: car $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in \text{Ker}(f)$

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Ker}(f)$

Donc $f(x) = 0_F$

Donc $f(x) = f(0_E)$ car f est linéaire

Donc $\boxed{x = 0_E}$ car f est injective

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$

Montrons que f est injective :

$$\begin{aligned}
 \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) &\implies f(x_1) - f(x_2) = 0_F \\
 &\implies f(x_1 - x_2) = 0_F \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\
 &\implies x_1 - x_2 \in \text{Ker}(f) = \{0_E\} \\
 &\implies x_1 - x_2 = 0_E \\
 &\implies \boxed{x_1 = x_2}
 \end{aligned}$$

13.4 Propriétés des projecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E (donc $E = F_1 \oplus F_2$)

Alors tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$.

On appelle projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p_1 définie par :

$$\left| \begin{array}{l} p_1 : E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ Montrons que $p_1 \in \mathcal{L}(E)$

$\rightarrow p_1 : E \rightarrow E$

$\rightarrow$ Montrons que p_1 est linéaire

$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ comme $E = F_1 \oplus F_2$

$\exists ! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x = x_1 + x_2$

$\exists ! (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2 : y = y_1 + y_2$

Donc $p_1(\lambda x + \mu y) = p_1(\underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in F_1 \text{ (s-e.v.)}} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in F_1 \text{ (s-e.v.)}})$

$= \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda p_1(x) + \mu p_1(y)$

$\rightarrow$ Montrons que $p_1^2 = p_1$

$\forall x \in E, \exists ! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x = x_1 + x_2$

Et $x_1 = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2}$ (car F_2 est un sous-espace vectoriel de E)

Donc $p_1^2(x) = p_1(p_1(x)) = p_1(x_1) = x_1 = p_1(x)$

$\rightarrow$ Montrons que $\text{Ker}(p_1) = F_2$

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Ker}(p_1)$

Donc $p_1(x) = 0_E$

On sait que $\exists ! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x = x_1 + x_2$

Donc $x_1 = p_1(x) = 0_E$

Donc $x = x_2 \in F_2$

Donc $\boxed{x \in F_2}$

$\supseteq$: Soit $x \in F_2$

Donc $x = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{x}_{\in F_2}$ (car F_1 est un sous-espace vectoriel de E)

Donc $p_1(x) = 0_E$

Donc $\boxed{x \in \text{Ker}(p_1)}$

$\rightarrow$ Montrons que $\text{Im}(p_1) = F_1 = \text{Ker}(p_1 - \text{id}_E)$

• $\text{Im}(p_1) = F_1$

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Im}(p_1)$

Donc $\exists y \in E : p_1(y) = x$

Or $\exists !(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2 : y = y_1 + y_2$

$\implies p_1(y) = x = y_1 \in F_1$

$\implies \boxed{x \in F_1}$

$\supseteq$: Soit $x \in F_1$

Donc $x = \underbrace{x}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2}$ (car F_2 s-e.v. de E)

Donc $p_1(x) = x$

Donc $\boxed{x \in \text{Im}(p_1)}$

• $\text{Ker}(p_1 - \text{id}_E) = F_1$

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Ker}(p_1 - \text{id}_E)$

Donc $(p_1 - \text{id}_E)(x) = p_1(x) - x = 0_E$

Donc $p_1(x) = x$

Donc $\boxed{x \in \text{Im}(p_1)}$

$\supseteq$: Soit $x \in F_1$

Donc $x = \underbrace{x}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2}$ (car F_2 est un sous-espace vectoriel de E)

Donc $p_1(x) = x$

Donc $\boxed{x \in \text{Ker}(p_1 - \text{id}_E)}$

13.5 Caractérisation d'un projecteur sur l'image parallèlement au noyau

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f$ (i.e. $f \circ f = f$)

$\rightarrow$ Montrons que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

$\rightarrow$ ce sont des sous-espaces vectoriels de E

$\rightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$

$\supseteq$: car $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$

Donc $x \in \text{Im}(f)$ et $x \in \text{Ker}(f)$

Donc $\exists y \in E : f(y) = x$ et $f(x) = 0_E$
 Donc $f(f(y)) = f^2(y) = f(x) = 0_E$
 Donc $y \in \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ (hypothèse $f^2 = f$)
 Donc $f(y) = x = 0_E$
 Donc $\boxed{x = 0_E}$
 $\rightarrow E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$
 $\supseteq$: car $\text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
 $\subseteq$: Soit $x \in E$
 Prenons $\begin{cases} x_1 = f(x) \in \text{Im}(f) \\ x_2 = x - f(x) \in \text{Ker}(f) \end{cases} \quad (*)$
 $(*) : f(x_2) = f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = f(x) - f(x) = 0_E$ car $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 = f$
 Donc $x = x_1 + x_2$
 On a montré que $\exists (x_1, x_2) \in \text{Im}(f) \times \text{Ker}(f) : x = x_1 + x_2$
 Donc $\boxed{x \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)}$

$\rightarrow$ Montrons que f est le projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$

Notons p le projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$

(car $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$)

$\forall x \in E, x = \underbrace{x - f(x)}_{\in \text{Ker}(f)} + \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im}(f)}$ (cf. point précédent)

Donc $p(x) = f(x)$, donc $\boxed{f = p}$

13.6 À propos des hyperplans

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $a \in E \setminus F$.

Supposons que F est un hyperplan de E ,

i.e. $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})} : \text{Ker}(\varphi) = F$

$$E = F \oplus \text{vect}(a)$$

$\rightarrow F \cap \text{vect}(a) = \{0_E\}$

$\supseteq$: car F et $\text{vect}(a)$ sont tous deux des sous-espaces vectoriels de E

$\subseteq$: Soit $x \in F \cap \text{vect}(a)$

Donc $x \in F = \text{Ker}(\varphi)$ et $x \in \text{vect}(a)$

Donc $\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K} : x = \lambda a$

Donc $\varphi(x) = \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a) = 0$ (car φ est linéaire)

Or $a \notin F = \text{Ker}(\varphi) \implies \varphi(a) \neq 0$

Donc $\lambda = 0$

Donc $\boxed{x = 0_E}$

$\rightarrow E = F + \text{vect}(a)$

$\supseteq$: car $F + \text{vect}(a)$ est un sous-espace vectoriel de E

$\subseteq$: Soit $x \in E$

$$\text{Posons } \begin{cases} x_1 = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a \in F & (*) \\ x_2 = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a \in \text{vect}(a) \end{cases}$$

$(*)$ $\varphi(x_1) = \varphi(x) - \varphi(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0$ car φ est linéaire.

Donc $\exists (x_1, x_2) \in F \times \text{vect}(a) : x = x_1 + x_2$

Donc $\boxed{x \in F + \text{vect}(a)}$

13.7 "Interpolation linéaire"

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in F^n, \exists ! \varphi \in \mathcal{L}(E, F) : \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(e_k) = f_k$$

EXISTENCE

On sait que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E donc ;

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

$$\text{Posons } \left| \begin{array}{ccc} \varphi : & E & \rightarrow F \\ & x & \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k \end{array} \right.$$

• φ est linéaire car $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

$$\exists ! (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n : y = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k$$

$$\implies \varphi(\alpha x + \beta y) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) e_k\right) = \sum_{k=1}^n (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) f_k$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k + \beta \sum_{k=1}^n \mu_k f_k = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

$$\bullet \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_k = \sum_{i=1}^n \delta_{k,i} e_i \implies \varphi(e_k) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \delta_{k,i} e_i\right) = \sum_{i=1}^n \delta_{k,i} f_i = f_k$$

UNICITÉ

Soient φ et ψ dans $\mathcal{L}(E, F)$ telles que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(e_k) = \psi(e_k) = f_k$

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \text{ car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E$$

Comme φ et ψ sont linéaires, on a $\forall x \in E$,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \psi(e_k) = \psi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \psi(x)$$

Donc $\boxed{\varphi = \psi}$

13.8 Application linéaire, base et famille génératrice de son l'image

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

$$Im(\varphi) = vect(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

$\subseteq$: Soit $x \in Im(\varphi)$

Donc $\exists y \in E : \varphi(y) = x$

Donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$

Donc $x = \varphi(y) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(e_k)$ (car φ est linéaire)

Donc $\boxed{x \in vect(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))}$

$\supseteq$: Soit $x \in vect(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

Donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(e_k)$

Donc $x = \varphi\left(\underbrace{\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k}_{\in E}\right)$ car φ est linéaire et E est un espace vectoriel.

Donc $\exists y \in E : \varphi(y) = x$

Donc $\boxed{x \in Im(\varphi)}$

φ est surjective

$$\Leftrightarrow Im(\varphi) = F$$

$$\Leftrightarrow vect(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = F$$

$$\Leftrightarrow (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \text{ génératrice de } F$$

13.9 Famille libre et application linéaire injective

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\varphi \text{ injective} \Leftrightarrow (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \text{ libre}$$

$\Rightarrow$ Supposons φ injective, donc $Ker(\varphi) = \{0_E\}$

Montrons que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

Supposons $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(e_k) = 0_F$

Donc $\varphi(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k) = 0_F$ car φ est linéaire

Donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in \text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ (hypothèse)

Donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$

Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est libre puisque base

Donc $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est libre

$\Leftarrow$ Supposons $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ libre

Montrons que φ est injective en montrant que $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$

$\supseteq$: car $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$

Donc $\varphi(x) = 0_F$

Or $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $x \in E$

Donc $\exists !(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$

Alors : $\varphi(x) = 0_F$

$$\implies \varphi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = 0_F$$

$$\implies \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(e_k) = 0_F \quad (\text{car } \varphi \text{ est linéaire})$$

$$\implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0 \quad (\text{car } (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \text{ est libre (hypothèse)})$$

$$\implies \boxed{x = 0_E}$$

13.10 Caractérisation des bases en dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E .

- Si $\mathcal{F}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E .

- Supposons $\mathcal{F}$ libre et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

D'après le théorème de la base incomplète, il existe une sur-famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ qui est une base de E .

Alors d'après le théorème de la dimension, $\text{card}(\mathcal{F}') = \dim(E) = \text{card}(\mathcal{F})$

Or $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ (et ce sont des ensembles finis)

Donc $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$

Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } E}$.

• Supposons $\mathcal{F}$ génératrice de E et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

D'après le théorème de la base extraite, il existe une sous-famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ qui est une base de E .

Alors d'après le théorème de la dimension, $\text{card}(\mathcal{F}') = \dim(E) = \text{card}(\mathcal{F})$

Or $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ (et ce sont des ensembles finis)

Donc $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$

Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } E}$.

13.11 Dimension d'un produit cartésien de deux espaces vectoriels

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Notons respectivement n et m leurs dimensions et $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$ leurs bases.

Posons $\mathcal{B} = ((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_m))$.

→ Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $E \times F$

• $\mathcal{B}$ est libre

En effet : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{K}^{n+m}$

$$\begin{aligned} \text{Supposons } \underbrace{\sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k, 0_F)}_{=(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, 0_F)} + \underbrace{\sum_{k=1}^m \mu_k (0_E, f_k)}_{=(0_E, \sum_{k=1}^m \mu_k f_k)} &= \underbrace{0_{E \times F}}_{=(0_E, 0_F)} \\ &= (\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, 0_F) = (0_E, \sum_{k=1}^m \mu_k f_k) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \sum_{k=1}^m \mu_k f_k) = (0_E, 0_F)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E \\ \sum_{k=1}^m \mu_k f_k = 0_F \end{cases} \implies \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = 0 \\ \forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, \mu_k = 0 \end{cases}$$

(car $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$ sont des bases donc sont libres)

• $\mathcal{B}$ est génératrice de $E \times F$, i.e. $\text{vect}(\mathcal{B}) = E \times F$

$\subseteq$: car $\text{vect}(\mathcal{B})$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$

$\supseteq$: Soit $(x, y) \in E \times F$

Donc $x \in E$ et $y \in F$

$$\text{Donc } \begin{cases} \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \\ \exists ! (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{K}^m : y = \sum_{k=1}^m \mu_k f_k \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(car } (e_1, \dots, e_n) \text{ et } (f_1, \dots, f_m) \\ \text{sont des bases de } E \text{ et de } F) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } (x, y) &= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \sum_{k=1}^n \mu_k f_k \right) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, 0_F \right) + \left(0_E, \sum_{k=1}^n \mu_k f_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k, 0_F) + \sum_{k=1}^n \mu_k (0_E, f_k) \\
\text{Donc } \boxed{(x, y) \in \text{vect}(\mathcal{B})}
\end{aligned}$$

→ Montrons que $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

Comme $\mathcal{B}$ est une base de $E \times F$, on a :

$$\dim(E \times F) = \text{card}(\mathcal{B}) = n + m = \boxed{\text{card}(E) + \text{card}(F)}$$

13.12 Caractérisation de l'isomorphisme par la dimension

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E étant de dimension finie.

E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

$\Rightarrow$ Supposons E et F isomorphes.

Alors il existe un isomorphisme $\varphi : E \rightarrow F$

Comme E est de dimension finie, il possède une base $(e_1, \dots, e_n)$

φ est un isomorphisme donc φ est linéaire et bijective donc $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F .

Donc $\dim(F) = \text{card}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \text{card}(e_1, \dots, e_n) = \dim(E)$

Donc $\boxed{\dim(E) = \dim(F)}$

$\Leftarrow$ Supposons $\dim(E) = \dim(F) = n$

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Posons $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \varphi(e_k) = f_k$.

φ envoie une base sur une base, donc φ est bijective.

Donc φ est un isomorphisme de E dans F .

Donc $\boxed{E \text{ et } F \text{ sont isomorphes.}}$

13.13 Formule de Grassmann

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

$\rightarrow F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F
 Or F est de dimension finie (car c'est un sous-espace vectoriel de E qui l'est)
 Donc il existe un sous-espace vectoriel H de F tel que $F = (F \cap G) \oplus H$
 Donc $\dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(H)$ (*)
 $\rightarrow$ Montrons que $F + G = G \oplus H$
 $\rightarrow G \cap H = \{0_{F+G}\} = \{0_E\}$
 $\supseteq$: car G et H sont des sous-espace vectoriels de E donc $G \cap H$ aussi
 $\subseteq$: Soit $x \in G \cap H$
 Donc $x \in G$ et $x \in H$
 Donc $x \in F$ (car $H \subset F$ puisque c'en est un sous-espace vectoriel)
 Donc $x \in F \cap G \cap H = (F \cap G) \cap H = \{0_E\}$ (car $F = (F \cap G) \oplus H$)
 Donc $x = 0_E$
 $\rightarrow F + G = \overline{G + H}$
 $\supseteq$: H est un sous-espace vectoriel de F , lui-même sous-espace vectoriel de $F + G$; G et H sont donc des sous-espaces vectoriels de $F + G$ donc $G + H$ aussi.
 $\subseteq$: Soit $x \in F + G$
 Donc $\exists (y, z) \in F \times G : x = y + z$
 Or $y \in F$ et $F = (F \cap G) + H$ (car $F = (F \cap G) \oplus H$)
 Donc $\exists (y_1, y_2) \in (F \cap G) \times H : y = y_1 + y_2$
 Donc $x = \underbrace{z + y_1}_{\in G} + \underbrace{y_2}_{\in H}$
 $(y_1 \in F \cap G \Rightarrow y_1 \in G, \text{ et } z \in G \Rightarrow z + y_1 \in G \text{ car c'est un espace vectoriel})$
 Donc $x \in G + H$
 $\rightarrow$ Finalement :
 $\rightarrow F + G = G \oplus H \Rightarrow \dim(F + G) = \dim(G) + \dim(H)$
 $\rightarrow (*) \Rightarrow \dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(H)$
 Donc $\boxed{\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$

13.14 Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi))$$

$\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E donc il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus H$

Donc $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(H)$

$\boxed{\text{Montrons que } \dim(H) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = \text{rg}(\varphi)}$

Pour cela construisons un isomorphisme entre H et $\text{Im}(\varphi)$.

On saura alors que $\dim(H) = \dim(\text{Im}(\varphi))$

Posons $\left| \begin{array}{l} u : H \rightarrow \text{Im}(\varphi) \\ x \mapsto \varphi(x) \end{array} \right.$

(cette application existe car $\forall x \in H, u(x) = \varphi(x) \in \text{Im}(\varphi)$ puisque $x \in E$ car H en est un sous-espace vectoriel)

→ Montrons que u est un isomorphisme de H dans $\text{Im}(\varphi)$

→ u est linéaire

$\forall (x, y) \in H^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, u(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$ (car H est un espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire donc $\lambda x + \mu y \in H$, et φ est linéaire ;

→ u est bijective

→ u est injective, i.e. $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$

$\supseteq$: car $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Ker}(u)$

Donc $u(x) = 0_{\text{Im}(\varphi)} = 0_F$ (car $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de F)

Or $x \in H$

(car $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de H)

Donc $u(x) = \varphi(x) = 0_F$

Donc $x \in H \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ (car $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus H$)

Donc $x = 0_E$

→ u est surjective, i.e. $\text{Im}(u) = \text{Im}(\varphi)$

$\subseteq$: car $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Im}(\varphi)$

$\supseteq$: Soit $y \in \text{Im}(\varphi)$

Donc $\exists x \in E : \varphi(x) = y$

$x \in E$ et $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus H$

Donc $\exists ! (x_1, x_2) \in \text{Ker}(\varphi) \times H : x = x_1 + x_2$

Donc $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = 0_E + \varphi(x_2)$

(car φ est linéaire et $x_1 \in \text{Ker}(\varphi)$)

Donc $x = \varphi(x_2) = u(x_2)$ (car $x_2 \in H$)

Donc $x \in \text{Im}(u)$

13.15 Dimension d'un hyperplan

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de E .

$$H \text{ hyperplan} \Leftrightarrow \dim(H) = \dim(E) - 1$$

Supposons E de dimension finie.

Soit H un sous-espace vectoriel de E .

$\Rightarrow$ Supposons que H est un hyperplan.

Donc $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}\} : \text{Ker}(\varphi) = H$

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Donc d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi) = \dim(H) + \dim(\text{Im}(\varphi))$$

Or φ est une forme linéaire non nulle

$$\text{Donc } \text{Im}(\varphi) = \mathbb{K} \text{ donc } \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{K}) = 1$$

$$\text{Donc } \boxed{\dim(H) = \dim(E) - 1}$$

$\Leftarrow$ Supposons $\dim(H) = \dim(E) - 1$

Montrons que H est un hyperplan,

i.e. $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}\} : \text{Ker}(\varphi) = H$

Notons $n = \dim(E)$ et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H .

Donc c'est une famille libre de H , donc de E .

D'après le théorème de la base incomplète, on peut ajouter des vecteurs à $(e_1, \dots, e_{n-1})$ pour former une base de E .

De plus $\dim(E) = n$ donc il ne faut ajouter qu'un vecteur noté e_n .

Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Montrons que $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}\} : \text{Ker}(\varphi) = H$.

Posons $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ définie par
$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \varphi(e_k) = 0 \\ \varphi(e_n) = 1 \end{cases}$$

— φ est non nulle

— $\text{Ker}(\varphi) = H$

$\subseteq$: Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$

$$\text{Donc } \varphi(x) = 0$$

Or $x \in E$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

$$\text{donc } \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

$$\text{Donc } \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(e_k) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \delta_{k,n} = \lambda_n = 0$$

(car φ est linéaire)

$$\text{Donc } \lambda_n = 0$$

$$\text{Donc } x = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k$$

$$\text{Donc } \boxed{x \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H}$$

(car $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H donc génératrice de H .)

$\supseteq$: Soit $x \in H$.

$$\text{Donc } \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1} : x = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k$$

(car $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H)

$$\text{Donc } \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k 0 = 0$$

(car φ est linéaire)

$$\text{Donc } \boxed{x \in \text{Ker}(\varphi)}$$

"Ta beauté ne peut pas être décrite par une base finie de vecteurs."

Chapitre 14

Espaces préhilbertiens réels

14.1 Produits scalaires usuels

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$:

Pour tout n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on définit le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$\text{Posons} \left\{ \begin{array}{lcl} S : (\mathbb{R}^n)^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{array} \right.$$

Montrons que S est un produit scalaire.

Forme : par définition

Symétrie : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, S(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n y_k x_k = S(y, x)$

Linéarité à gauche : $\forall (x, x', y) \in (\mathbb{R}^n)^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned} S(\lambda x + \lambda' x', y) &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \lambda' x'_k) y_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k y_k + \lambda' \sum_{k=1}^n x'_k y_k \\ &= \lambda S(x, y) + \lambda' S(x', y) \end{aligned}$$

Linéarité à droite : par symétrie et linéarité à gauche

Positivité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, S(x, x) = \sum_{k=1}^n x_k x_k = \sum_{k=1}^n \underbrace{x_k^2}_{\geq 0 \text{ car } x_k \in \mathbb{R}} \geq 0$

$$\begin{aligned} \textbf{Définition : } \forall x \in \mathbb{R}^n, S(x, x) = 0 &\implies \sum_{k=1}^n \underbrace{x_k^2}_{\geq 0} = 0 \\ \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k^2 = 0 &\implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \implies x = 0_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C^0([a, b], \mathbb{R})$:

On définit pour toutes fonctions f et g le produit scalaire canonique sur l'ensemble des fonctions continues $C^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Posons $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$

$$\text{Posons } \left| \begin{array}{lcl} S : & E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \int_a^b f(t)g(t)dt \end{array} \right.$$

Montrons que S est un produit scalaire.

Forme : par définition

Symétrie : $\forall (f, g) \in E^2$,

$$S(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = S(g, f)$$

Linéarité à gauche : $\forall (f_1, f_2, g) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} S(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) &= \int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))g(t)dt \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(t)g(t)dt + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)g(t)dt = \lambda_1 S(f_1, g) + \lambda_2 S(f_2, g) \end{aligned}$$

Linéarité à droite : par symétrie et linéarité à gauche

$$\textbf{Positivité : } \forall f \in E, S(f, f) = \int_a^b f(t)f(t)dt = \int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\geq 0 \text{ car } \in \mathbb{R}} dt \geq 0$$

$$\textbf{Définition : } \forall f \in E, S(f, f) = 0 \implies \int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\geq 0} dt = 0$$

$$\implies \forall t \in \llbracket a, b \rrbracket, f(t)^2 = 0 \implies \forall t \in \llbracket a, b \rrbracket, f(t) = 0 \implies f = 0_E$$

14.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel.

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|y)^2 = (x|x)(y|y) \Leftrightarrow (x, y) \text{ liée}$$

Soit $(x, y) \in E^2$.

1^{er} cas : si $y = 0_E$.

$$\bullet \underbrace{(x|y)^2}_{=0} \leq \underbrace{(x|x)}_{=0} \underbrace{(y|y)}_{=0}$$

$$\bullet \underbrace{(x|y)^2 = (x|x)(y|y)}_{\text{vrai}} \Leftrightarrow \underbrace{(x, y) \text{ liée}}_{\text{vrai}} : \text{vrai}$$

2nd cas : si $y \neq 0_E$

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y) = (x|x) + \lambda \times 2(x|y) + \lambda^2(y|y)$

D'après la propriété de définition : $y \neq 0_E \Rightarrow (y|y) \neq 0$

Donc P est une fonction polynomiale de degré 2.

Or d'après la propriété de positivité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y) \geq 0$

Ainsi, le discriminant $\Delta = (2(x|y))^2 - 4(x|x)(y|y)$ est négatif, donc $\Delta = 4((x|y)^2 - (x|x)(y|y)) \leq 0$

$$\text{Donc } \boxed{(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} (x|y)^2 = (x|x)(y|y) &\Leftrightarrow \Delta = 0 \\ &\Leftrightarrow P \text{ possède au moins une racine réelle } \lambda_0 \\ &\quad (\rightarrow \Delta \geq 0, \Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : P(\lambda_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : (x + \lambda_0 y | x + \lambda_0 y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : x + \lambda_0 y = 0_E \\ &\Leftrightarrow \boxed{(x, y) \text{ liée}} \quad ((1, \lambda_0) \neq (0, 0) \text{ et } (*)) \end{aligned}$$

$(*) : (x, y) \text{ liée} \Rightarrow \exists (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = 0_E$

Or $\alpha \neq 0$ (par l'absurde : $\alpha = 0 \Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow \beta y = 0_E \Rightarrow y = 0_E$: exclu)

Donc $x + \frac{\beta}{\alpha} y = 0_E$

Et on pose $\lambda_0 = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$

14.3 Composantes d'un vecteur dans une base orthonormale

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , x et y deux vecteurs de E , et $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ leurs composantes respectives dans $\mathcal{B}$.

On a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = (x|e_i) \quad (1)$$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad (2)$$

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad (3)$$

Et, si l'on note $X = \text{Comp}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Comp}_{\mathcal{B}}(y)$:

$$(x|y) = {}^tX \times Y \text{ et } ||x|| = \sqrt{{}^tX \times X} \quad (4)$$

Montrons (1) : Soit $i \in [1, n]$.

On a :

$$\begin{aligned} (x|e_i) &= \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \left| e_i \right. \right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k (e_k | e_i) \quad \text{par linéarité à gauche du produit scalaire} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \delta_{k,i} \quad \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est orthonormale} \\ &= \boxed{x_i} \end{aligned}$$

Montrons (2) :

On a :

$$\begin{aligned} (x|y) &= \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \left| \sum_{l=1}^n y_l e_l \right. \right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{l=1}^n y_l (e_k | e_l) \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{l=1}^n y_l \delta_{k,l} \quad \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est orthonormale} \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^n x_k y_k} \end{aligned}$$

Montrons (3) :

$$||x|| = \sqrt{(x|x)} = \boxed{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \quad \text{d'après (2)}$$

Montrons (4) :

On a :

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{d'après (2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) \quad \text{en assimilant un réel à une matrice } 1 \times 1 \\
&= (x_1 \quad \cdots \quad x_n) \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \boxed{{}^t \text{Comp}_{\mathcal{B}}(x) \times \text{Comp}_{\mathcal{B}}(y)}
\end{aligned}$$

Et :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \boxed{\sqrt{{}^t \text{Comp}_{\mathcal{B}}(x) \times \text{Comp}_{\mathcal{B}}(y)}}$$

14.4 Projection orthogonale dans un espace euclidien

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E , et x un vecteur de E .

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , alors :

$$p_F^\perp(x) = \sum_{k=1}^p (x|e_k) e_k$$

Soient $x \in E$, et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F .

Comme $E = F \oplus F^\perp$, on sait que $\exists! (x_F, x_F^\perp) \in F \times F^\perp : x = x_F + x_F^\perp$.

On a $x_F \in F$, et $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , donc

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : x_F = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k$$

Or :

$$\begin{aligned}
x_F^\perp \in F^\perp &\implies \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x_F^\perp | e_j) = 0 \\
&\implies \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x - x_F | e_j) = 0 \\
&\implies \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x | e_j) - \sum_{k=1}^p \lambda_k \underbrace{(e_k | e_j)}_{=\delta_{k,j}} = 0 \\
&\implies \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_j = (x | e_j)
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } x_F = \sum_{k=1}^p (x | e_k) e_k \implies \boxed{p_F^\perp(x) = \sum_{k=1}^p (x | e_k) e_k}.$$

14.5 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$.

On appelle distance de x à F , et on note $d(x, F)$, le réel positif défini par $d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\|$, qui de plus est atteint pour $y = p_F^\perp(x)$.

• Soit $y \in F$.

$$\|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{x - p_F^\perp(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F^\perp(x) - y}_{\in F \text{ e.v.}} \right\|^2 = \|x - p_F^\perp(x)\|^2 + \underbrace{\|p_F^\perp(x) - y\|^2}_{\geq 0}$$

(Théorème de Pythagore car les vecteurs sont orthogonaux puisque respectivement dans $F^\perp$ et F .)

$$\text{Donc } \|x - y\|^2 \geq \|x - p_F^\perp(x)\|^2$$

$$\text{Donc } \boxed{\|x - y\| \geq \|x - p_F^\perp(x)\|}$$

(car $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et ce sont des réels positifs.)

$$\bullet \|x - y\| = \|x - p_F^\perp(x)\| \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = \|x - p_F^\perp(x)\|^2 \text{ (car ils sont positifs)}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\|x - p_F^\perp(x)\|^2} + \|p_F^\perp(x) - y\|^2 = \cancel{\|x - p_F^\perp(x)\|^2} \text{ (cf. ci-dessus)}$$

$$\Leftrightarrow \|p_F^\perp(x) - y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|p_F^\perp(x) - y\| = 0 \Leftrightarrow p_F^\perp(x) - y = 0_E \Leftrightarrow \boxed{y = p_F^\perp(x)}$$

14.6 Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien.

Pour tout vecteur $a \in E$, on pose :

$$\left| \begin{array}{lll} \varphi_a & : & E \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto (x|a) \end{array} \right.$$

1. φ_a est une forme linéaire sur E .
2. Réciproquement, si f est une forme linéaire sur E , alors $\exists! a \in E : f = \varphi_a$.

Montrons 1. : Soit $a \in E$.

— φ_a est une forme, car $\forall x \in E, \varphi_a(x) = (x|a) \in \mathbb{R}$.

— φ_a est linéaire, en effet :

Soient $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_a(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x + \mu y|a) \\ &= \lambda(x|a) + \mu(y|a), \text{ par linéarité à gauche} \\ &= \lambda\varphi_a(x) + \mu\varphi_a(y) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\varphi_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})}.$$

Montrons 2. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Posons $\left| \begin{array}{lcl} u & : & E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ & a & \mapsto \varphi_a \end{array} \right.$.

Montrons que u est bijective ; on aura alors bien

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists ! a \in E : u(a) = f \implies \varphi_a = f}.$$

— u est linéaire, en effet :

Soient $(a, b) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda a + \mu b) &= \varphi_{\lambda a + \mu b} \\ &= \lambda \varphi_a + \mu \varphi_b \quad (\text{immédiat par linéarité à droite}) \\ &= \lambda u(a) + \mu u(b) \end{aligned}$$

— $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(E)$.

— u est injective, car $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, en effet :

— $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u)$, car $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E .

— $\text{Ker}(u) \subset \{0_E\}$, en effet :

Soit $a \in \text{Ker}(u)$, on a :

$$\begin{aligned} u(a) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} &\implies \varphi_a = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \\ &\implies \forall x \in E, \varphi_a(x) = 0 \\ &\implies \forall x \in E, (x|a) = 0 \end{aligned}$$

Et, en particulier pour $x = a \in E : (a|a) = 0 \implies a = 0_E$, d'après la propriété de définition du produit scalaire.

Ainsi, $\boxed{u \text{ est bijective.}}$

14.7 Projection, symétrie orthogonale, distance et hyperplans

Soient $(E, (.,.))$ un espace euclidien, H un hyperplan de E , $x \in E$, et a un vecteur unitaire orthogonal à H .

$$p_H^\perp(x) = x - (x|a)a$$

On sait que $\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H) = \dim(E) - (\dim(E) - 1) = 1$, donc (a) est une base orthonormale de $H^\perp$ (car $\text{card}((a)) = 1 = \dim(H^\perp)$ et $((a))$ est libre puisque $a \neq 0_E$ car $\|a\| = 1$).

Donc $p_{H^\perp}^\perp(x) = (x|a)a$.

Or $p_H^\perp(x) = x - p_{H^\perp}^\perp(x)$

Donc $\boxed{p_H^\perp(x) = x - (x|a)a}$

$$\bullet s_H^\perp(x) = 2p_H^\perp(x) - x = 2x - 2(x|a)a - x \implies \boxed{s_H^\perp(x) = x - 2(x|a)a}$$

$$\bullet d(x, H) = \|x - p_H^\perp(x)\| = \|\cancel{x} - \cancel{x} + (x|a)a\| = |(x|a)| \underbrace{\|a\|}_{=1} = \boxed{|(x|a)|}$$

Chapitre 15

Séries

15.1 Condition nécessaire de convergence d'une série

Soit la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de somme partielle $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

Montrons que si la série converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Supposons que la série converge, i.e. $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge.

Notons l sa limite.

On a $\forall n \geq n_0 + 1, u_n = \sum_{k=n_0}^n u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1}$

Or $S_n \rightarrow l$ et d'après le théorème des suites extraites, $S_{n-1} \rightarrow l$

Donc par somme : $\boxed{u_n \rightarrow l - l = 0}$

La réciproque de ce théorème est fausse.

Contre-exemple : la série harmonique : $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ mais $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

15.2 Nature et somme des séries géométriques

On appelle série géométrique une série de la forme $\sum_{n \geq n_0} z^n$ où $z \in \mathbb{C}$.

Montrons que cette série converge si, et seulement si, $|z| < 1$

• Si $|z| \geq 1$

Alors $|z|^n$ ne tend pas vers 0, donc $\boxed{\text{la série diverge grossièrement}}.$

• Si $|z| < 1$

$$\sum_{k=n_0}^n z^k = \sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1 - z^{n_0}}{1 - z} = \frac{z^{n_0} - z^{n+1}}{1 - z}$$

(formule des sommes géométriques car $z \neq 1$)

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^{n+1} = 0$ (car $|z| < 1$)

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z^{n_0} - z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n_0}}{1-z} \in \mathbb{C}$

Donc la série converge et sa somme vaut $\sum_{k=n_0}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n_0}}{1-z}$

15.3 Nature des séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrons que cette série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

• Soit $\alpha > 1$.

Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, notons son terme général $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$

On pose $\left| \begin{array}{ll} f : [1; +\infty[& \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \end{array} \right|$ décroissante car $\alpha > 1$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1]$,

$k \leq x \leq k+1 \implies f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ (car f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\implies \int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$ (car $k+1 \geq k$)

$\implies \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$ (car $f(k+1)$ et $f(k)$ sont indép. de x)

En sommant la première inégalité pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$:

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx$

$\implies S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$ (relation de Chasles)

$\implies S_n \leq 1 + \left[\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right]_1^n$

$\implies S_n \leq 1 + \frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ (car $\frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} < 0$ puisque $\alpha > 1$)

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ qui est indépendant de n .

Or $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$ donc $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée.

Donc d'après le théorème de la limite monotone, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

• Si $\alpha = 1$

La série devient la série harmonique, et on sait que celle-ci diverge.

(cf. exercice-type 14.1)

• Soit $\alpha < 1$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}_{\rightarrow +\infty}$

D'après le théorème des gendarmes, la série diverge.

15.4 Théorème des séries télescopiques

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

La série $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$ converge si, et seulement si, la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ converge.

Dans ce cas $\sum_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_{n_0}$

On a : $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_{n_0}$

Ainsi $\sum_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k)$ converge

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n (v_{k+1} - v_k) \in \mathbb{K}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_{n_0} \in \mathbb{K}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} \in \mathbb{K}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \in \mathbb{K} \quad (\text{théorème des suites extraites})$$

Et donc : $\sum_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n (v_{k+1} - v_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_{n_0} =$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_{n_0}}$$

(d'après le théorème des suites extraites)

Exemple : Montrons que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculons sa somme.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right)$$

On prend ici $\forall n \geq 1, v_n = -\frac{1}{n}$ (on veut $u_n = v_{n+1} - v_n$)

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

D'après le théorème des séries télescopiques, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$$

15.5 Critère spécial des séries alternées

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante qui converge vers 0.

Montrons que la série $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n u_n$ converge.

Notons $S_n = \sum_{k=n_0}^n (-1)^k u_k$.

Montrons que $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge pour montrer que la série converge.

Pour cela montrons que $(S_{2n})_{n \geq n_0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq n_0}$ sont adjacentes.

$$\begin{aligned} \rightarrow S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=n_0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \text{ (car } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est décroissante).} \end{aligned}$$

Donc $(S_{2n})_{n \geq n_0}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} \rightarrow S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=n_0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0 \text{ (car } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est décroissante).} \end{aligned}$$

Donc $(S_{2n+1})_{n \geq n_0}$ est croissante.

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_{2n+1} \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ (théorème des suites extraites).} \end{aligned}$$

On a donc montré que $(S_{2n})_{n \geq n_0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq n_0}$ sont adjacentes, et donc d'après le théorème des suites adjacentes, $(S_{2n})_{n \geq n_0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq n_0}$ convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$.

On a alors $\begin{cases} S_{2n} \rightarrow l \\ S_{2n+1} \rightarrow l \end{cases}$ donc d'après le théorème des indices pairs et impairs,

$(S_n)_{n \geq n_0}$ converge vers l .

Remarque : ce critère nous assure aussi que, si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ le reste d'ordre n , alors on a : $\forall n \geq n_0, |R_n| \leq u_{n+1}$.

15.6 Absolue convergence implique convergence

Soit $(u_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Montrons que si $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge, alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ aussi.

Lemme : $\forall n \geq n_0$, notons $u_n^+ = \max\{0, u_n\}$ et $u_n^- = \max\{0, -u_n\}$.

Montrons que $0 \leq u_n^\pm \leq |u_n|$.

Soit $n \geq n_0$.

— 1^{er} cas : si $u_n \geq 0$.

$$\text{Alors } \begin{cases} u_n^+ = \max\{0, u_n\} = u_n \leq |u_n| \\ u_n^- = \max\{0, -u_n\} = 0 \leq |u_n| \end{cases}$$

— 2nd cas : si $u_n \leq 0$.

$$\text{Alors } \begin{cases} u_n^+ = \max\{0, u_n\} = 0 \leq |u_n| \\ u_n^- = \max\{0, -u_n\} = -u_n \leq |u_n| \end{cases}$$

Preuve : Supposons que $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge.

Soit $n \geq n_0$.

— 1^{er} cas : si $u_n \geq 0$.

$$\text{Alors } u_n^+ - u_n^- = u_n - 0 = u_n.$$

— 2nd cas : si $u_n \leq 0$.

$$\text{Alors } u_n^+ - u_n^- = 0 - (-u_n) = u_n.$$

Or, d'après le lemme, on a $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$, et, puisque $\sum_{n \geq n_0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ sont des séries à terme général positif, et que $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge, $\sum_{n \geq n_0} u_n^+$ aussi, selon le critère de majoration.

De même, $\sum_{n \geq n_0} u_n^-$ converge, d'où $\sum_{n \geq n_0} -u_n^-$ aussi, car -1 est indépendant de n .

$$\text{Ainsi, } \sum_{n \geq n_0} u_n^+ + (-u_n^-) = \boxed{\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ converge.}}$$

15.7 Limite du critère des équivalents

Soit la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$; déterminons sa nature.

Si l'on pouvait appliquer le critère des équivalents aux séries à terme non de signe fixe à partir d'un certain rang telles que celle-ci, alors on pourrait écrire $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, car $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, puis, comme $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, on

pourrait conclure que $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ converge elle aussi.

Montrons que cela est faux.

Un $DL_2(0)$ du terme général de notre série donne :

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} + o \left(\frac{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} \right), \quad \text{car } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Notons alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et $b_n = -\frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{2n} \right)$.

$\sum_{n \geq 2} a_n$ converge, d'après le critère spécial des séries alternées, puisque $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 2}$ est décroissante et converge vers 0.

Cependant, $\sum_{n \geq 2} b_n$ diverge, en effet :

On a $b_n \sim -\frac{1}{2n}$.

Or, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{2n} \leq 0$, on a aussi $b_n \leq 0$, d'où $\sum_{n \geq 2} -\frac{1}{2n}$ et $\sum_{n \geq 2} b_n$ sont des séries à terme général négatif.

Et $\sum_{n \geq 2} -\frac{1}{2n}$ diverge, car $-\frac{1}{2} \neq 0$ est indépendant de n et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge puisque $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ aussi comme série de Riemann, avec $\alpha = 1 \leq 1$.

Donc, d'après le critère des équivalents (que l'on a cette fois bien le droit d'utiliser), $\sum_{n \geq 2} b_n$ diverge.

Finalement : $\begin{cases} \sum_{n \geq 2} a_n \text{ converge} \\ \sum_{n \geq 2} b_n \text{ diverge} \end{cases}$ donc $\sum_{n \geq 2} a_n + b_n = \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ diverge.

Cela nous prouve bien que le critère des équivalents ne peut être généralisé aux séries à terme non de signe fixe à partir d'un certain rang.

"-Es-tu sûr que cette série converge ?
-Absolument !"

Chapitre 16

Matrices

16.1 Associativité du produit matriciel

Notons : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ; B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}} ; C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$.

On peut alors écrire :

$$A \times B = (d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}, \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, d_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} ;$$

$$B \times C = (e_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq s}}, \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket, e_{i,j} = \sum_{k=1}^r b_{i,k} c_{k,j}.$$

Puis :

$$(A \times B) \times C = (f_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s}}, \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket, f_{i,j} = \sum_{k=1}^r d_{i,k} c_{k,j} ;$$

$$A \times (B \times C) = (g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq s}}, \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket, g_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} e_{k,j}. \text{ Or,}$$

on a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket$:

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= \sum_{k=1}^r d_{i,k} c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{l=1}^p a_{i,l} b_{l,k} \right) c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^p a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j} \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^r a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j} \quad \text{par permutation de sommes} \\ &= \sum_{l=1}^p a_{i,l} \left(\sum_{k=1}^r b_{l,k} c_{k,j} \right) \quad \text{car } a_{i,l} \text{ est indépendant de } k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^p a_{i,l} f_{l,j} \\
&= g_{i,j}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(A \times B) \times C = A \times (B \times C)}$: le produit matriciel est associatif.

16.2 Inversibilité d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n) \implies A \text{ est inversible et } A^{-1} = B$$

(la démonstration du même résultat avec $B \times A$ en lieu et place de $A \times B$ se fait exactement selon le même principe).

On admet le lemme $(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \times X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}) \implies A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$
(démonstration rapide mais volumineuse).

Supposons que $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \times B = I_n$.

Posons $\left| \begin{array}{ccc} f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & A \times X \end{array} \right.$

Montrons que $f_A \in GL(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.

— $f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

— f_A est linéaire, en effet :

Soient $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}
f_A(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) \\
&= \lambda AX + \mu AY \\
&= \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)
\end{aligned}$$

— f_A est bijective, en effet :

Posons $\left| \begin{array}{ccc} g : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & B \times X \end{array} \right.$

$g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ (voir les deux points ci-dessus, avec g à la place de f_A , et B à la place de A).

Or, on a :

$$\begin{aligned}
\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), (f_A \circ g)(X) &= f_A(g(X)) \\
&= f_A(BX) \\
&= A(BX) \\
&= (AB)X \quad \text{car } \times \text{ est associative} \\
&= I_n X \\
&= X \\
&= id_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}(X)
\end{aligned}$$

Et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

Ainsi, f_A est bijective, et $f_A^{-1} = g$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 g \circ f_A = id_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} &\implies \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), (g \circ f_A)(X) = id_{\mathcal{M}_{n,1}}(X) \\
 &\implies B(AX) = X \\
 &\implies (BA)X - X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \quad \text{car } \times \text{ est associative} \\
 &\implies (BA - I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \\
 &\implies BA - I_n = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \quad \text{d'après le lemme} \\
 &\implies BA = I_n
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible, et } A^{-1} = B}$.

16.3 Formule fondamentale du calcul matriciel

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F .

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in E, \text{Comp}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \times \text{Comp}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Notons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $\mathcal{B}_E = (e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, $\mathcal{B}_F = (f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$,
et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Soit $x \in E$. On sait que $\exists (x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} : x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$

$$\implies \text{Comp}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \times \text{Comp}_{\mathcal{B}_E}(x) &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{n,k} x_k \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Et, d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^p x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^p x_k \varphi(e_k) \quad \text{car } \varphi \text{ est linéaire} \\
 &= \sum_{k=1}^p x_k \sum_{l=1}^n a_{l,k} f_l \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p a_{l,k} x_k f_l \quad \text{par permutation de sommes} \\
 &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^p a_{l,k} x_k\right) f_l \quad \text{car } f_l \text{ est indépendant de } k \\
 &\implies \text{Comp}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{n,k} x_k \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Comp}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \times \text{Comp}_{\mathcal{B}_E}(x)}$.

16.4 Caractérisation de la bijectivité par la matrice associée

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F , et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

φ est un isomorphisme si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$ est inversible, et qu'on a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi))^{-1}$.

Notons $n = \dim(E) = \dim(F)$.

$\boxed{\implies}$ Supposons φ bijective.

Alors, $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$, et :

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi^{-1}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1} \circ \varphi) \\
 &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{id}_E) \\
 &= I_n
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \text{ est inversible}}$ et $\boxed{(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi^{-1})}$.

$\boxed{\impliedby}$ Supposons $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi)$ inversible.

Alors $(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi))^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Or, $\dim(E) = \dim(F) = n$ et $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F , donc $\exists \psi \in \mathcal{L}(F, E) : \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\psi) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi))^{-1}$, et on a :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\psi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \\ &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi))^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \\ &= I_n \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{id}_E) \\ &\implies \psi \circ \varphi = \text{id}_E \end{aligned}$$

Ainsi, et car $\dim(E) = \dim(F)$, $\boxed{\varphi \text{ est bijective}}$.

16.5 Formules de changement de base

Démontrons les formules de changement de base...

...pour les composantes d'un vecteur : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

$$\forall x \in E, \text{Comp}_{\mathcal{B}'}(x) = \text{Pass}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \times \text{Comp}_{\mathcal{B}}(x)$$

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \text{Pass}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \times \text{Comp}_{\mathcal{B}}(x) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E) \times \text{Comp}_{\mathcal{B}}(x) \\ &= \text{Comp}_{\mathcal{B}'}(\text{id}_E(x)) \\ &= \boxed{\text{Comp}_{\mathcal{B}'}(x)} \end{aligned}$$

...pour la matrice d'une application linéaire : Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E , et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F .

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, F), \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(\varphi) = \text{Pass}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \times \text{Pass}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} &\text{Pass}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \times \text{Pass}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F}(\text{id}_F) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(\text{id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(\text{id}_F \circ \varphi \circ \text{id}_E) \\ &= \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(\varphi)} \end{aligned}$$

...pour la matrice d'un endomorphisme : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E), \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (\text{Pass}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \times \text{Pass}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

Immédiat par la formule de changement de base pour la matrice d'une application linéaire, avec $F = E$, $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}$, et $\mathcal{B}'_F = \mathcal{B}'_E = \mathcal{B}'$.

16.6 Propriétés de la trace

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle trace de A et on note $tr(A)$ le scalaire défini par : $tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$.

L'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, tr(A \times B) = tr(B \times A)$$

→ Montrons que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ par définition

- tr est linéaire

En effet : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

On a donc $\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\implies tr(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^n \lambda a_{k,k} + \mu b_{k,k} = \lambda \sum_{k=1}^n a_{k,k} + \mu \sum_{k=1}^n b_{k,k}$$

$$\boxed{= \lambda tr(A) + \mu tr(B)}$$

→ Montrons que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, tr(A \times B) = tr(B \times A)$

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Alors $A \times B = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$

$$\text{Donc } tr(A \times B) = \sum_{k=1}^n c_{k,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l} b_{l,k}$$

Et $B \times A = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$

$$\text{Donc } tr(B \times A) = \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{k,l} a_{l,k} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,l} a_{l,k} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{l,k} b_{k,l}$$

$$\boxed{= tr(A \times B)}$$

→ $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ on n'a pas forcément $tr(A \times B) = tr(A) \times tr(B)$

Contre-exemple : prenons $A = B = I_2 = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$tr(A) \times tr(B) = 2 \times 2 = 4$ mais $tr(A \times B) = tr(I_2) = 2 \neq 4$

Donc $\boxed{tr(A \times B) \neq tr(A) \times tr(B)}$

16.7 Matrices semblables : relation d'équivalence, lien avec la trace

Notons la relation binaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, A \mathcal{R} B : "A \text{ est semblable à } B"$$

Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

Réflexivité : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A\mathcal{R}A$ car $A = (I_n)^{-1}AI_n$ où $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

Symétrie : Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, supposons $A\mathcal{R}B$

Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = P^{-1}BP$

$\implies PAP^{-1} = B \implies (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$ où $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$

Donc $B\mathcal{R}A$

Transitivité : Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$ supposons $\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ B\mathcal{R}C \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \exists P_1 \in GL_n(\mathbb{K}) : A = P_1^{-1}BP_1 \\ \exists P_2 \in GL_n(\mathbb{K}) : B = P_2^{-1}CP_2 \end{cases}$

Donc $A = P_1^{-1}BP_1 = P_1^{-1}P_2^{-1}CP_2P_1 = (P_2P_1)^{-1}C(P_2P_1)$

où $P_2P_1 \in GL_n(\mathbb{K})$, donc $A\mathcal{R}C$

Montrons que deux matrices semblables ont la même trace

Supposons $A\mathcal{R}B$.

Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : A = P^{-1}BP$

Donc $tr(A) = tr(P^{-1}BP) = tr(PP^{-1}B) = tr(I_n B) = tr(B)$

Attention! Il ne faut surtout pas écrire $tr(P^{-1}PB)$! L'échange d'un produit dans le tr ne fonctionne qu'avec une unique multiplication, le produit matriciel n'étant pas commutatif. Ce sont donc bien les 2 blocs $P^{-1}B$ et P que l'on échange.

Montrons que la réciproque est fausse

Contre-exemple : Prenons $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc $tr(A) = 0$

Et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $tr(B) = 0$

Mais A n'est pas semblable à B .

Montrons-le par l'absurde : supposons le contraire.

Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : B = P^{-1}AP = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$: absurde

16.8 Rang et matrice équivalente

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r alors elle est équivalente à $J_{n,p,r}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons f son application linéaire canoniquement associée.
Alors $A = Mat_{\mathcal{B}_{c,1}, \mathcal{B}_{c,2}}(f)$ où $\mathcal{B}_{c,1}$ et $\mathcal{B}_{c,2}$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

On a alors que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^p$ qui sont de dimension finie,

Donc il existe un sous-espace vectoriel H de $\mathbb{K}^p$ tel que $\mathbb{K}^p = H \oplus \text{Ker}(f)$.

Comme $\mathbb{K}^p$ est de dimension finie, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{K}^p) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$$

De plus $\mathbb{K}^p = H \oplus \text{Ker}(f) \implies \dim(\mathbb{K}^p) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(H) \quad (*)$

Donc par soustraction : $\dim(H) = \text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_{c,1}, \mathcal{B}_{c,2}}(f)) = \text{rg}(A) = r$.

Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H .

D'après $(*)$, $\dim(\text{Ker}(f)) = p - r$ donc notons $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\text{Ker}(f)$.

Comme $\mathbb{K}^p = H \oplus \text{Ker}(f)$, on sait que $(e_1, \dots, e_p) = \mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{K}^p$.

Posons $(g_1, \dots, g_r) = (f(e_1), \dots, f(e_r))$, montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$, supposons que $\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Donc $\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k\right) = 0_{\mathbb{K}^n}$ car f est linéaire.

Donc $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k \in \text{Ker}(f)$

Or $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de H donc $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k \in H$.

Donc $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k \in H \cap \text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$ car $\mathbb{K}^p = H \oplus \text{Ker}(f)$.

Or $(e_1, \dots, e_r)$ est libre puisque c'est une base donc $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$

On a donc montré que $(g_1, \dots, g_r)$ est libre.

Donc d'après le théorème de la base incomplète, on peut lui ajouter des vecteurs pour obtenir une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{K}^n$.

Or $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ donc on y ajoute $n - r$ vecteurs et $\mathcal{B}_2 = (g_1, \dots, g_r, g_{r+1}, \dots, g_n)$.

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) =$

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & \cdots & f(e_r) & f(e_{r+1}) & \cdots & \cdots & f(e_p) \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_r \\ g_{r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_p \end{array} \end{pmatrix}$$

$= J_{n,p,r}$

Donc A est équivalente à $J_{n,p,r}$.

Justifications pour la matrice :

- Colonnes 1 à r : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, g_j = f(e_j)$
- Colonnes $r + 1$ à p : $\forall j \in \llbracket r + 1, p \rrbracket, e_j \in \text{Ker}(f) \implies f(e_j) = 0_{\mathbb{K}^n}$

16.9 Caractérisation de l'équivalence par le rang

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

A et B sont équivalentes si, et seulement si, $rg(A) = rg(B)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $rg(A) = rg(B) = r$.

Donc A et B sont équivalentes à $J_{n,p,r}$.

Donc par transitivité $\boxed{A \text{ est équivalente à } B}$.

$\Rightarrow$ Supposons que A et B sont équivalentes.

Notons f l'application linéaire canoniquement associée à A .

Donc $Mat_{\mathcal{B}_{c,1}, \mathcal{B}_{c,2}}(f) = A$ où $\mathcal{B}_{c,1}$ et $\mathcal{B}_{c,2}$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Or A est équivalente à B

Donc il existe des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ telles que $Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = B$.

Or $rg(f) = rg(\underbrace{Mat_{\mathcal{B}_{c,1}, \mathcal{B}_{c,2}}(f)}_{=A}) = rg(\underbrace{Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)}_{=B})$

Donc $\boxed{rg(A) = rg(B)}$

16.10 Rang et transposition

Montrons que le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $r = rg(A)$

Alors :

$$\begin{aligned}
 & A \text{ est équivalente à } J_{n,p,r} \\
 \implies & \exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) : A = P^{-1} J_{n,p,r} Q \\
 \implies & {}^t A = {}^t (P^{-1} J_{n,p,r} Q) = {}^t Q {}^t J_{n,p,r} {}^t (P^{-1}) = {}^t Q J_{p,n,r} {}^t (P^{-1}) \\
 \implies & {}^t A = (({}^t Q)^{-1})^{-1} J_{p,n,r} {}^t (P^{-1}) \\
 & \quad \text{où } ({}^t Q)^{-1} \in GL_p(\mathbb{K}) \text{ et } {}^t (P^{-1}) \in GL_n(\mathbb{K}) \\
 \implies & {}^t A \text{ est équivalente à } J_{p,n,r} \\
 \implies & rg({}^t A) = rg(J_{p,n,r}) = r = rg(A) \\
 \implies & \boxed{rg(A) = rg({}^t A)}
 \end{aligned}$$

16.11 Inversion d'une matrice

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Montrons que ${}^t Com(A) \times A = \det(A) I_n$ (idem pour l'autre sens).

Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{K})$, i.e. A est inversible, on aura alors $\det(A) \neq 0$ et par extension la propriété qu'on cherche à montrer.

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et ${}^t Com(A) = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{j+i} \Delta_{j,i}^*$

Donc ${}^t Com(A) \times A = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \Delta_{k,i} a_{k,j}$

Ce qui est un développement par rapport à C_i de la matrice

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & \cdots & C_{i-1} & C_i & C_{i+1} & \cdots & C_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i,j} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,j} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix} & \leftarrow L_k \end{matrix}$$

$C_1 \text{ de } A \quad \cdots \quad C_{i-1} \text{ de } A \quad C_i \text{ de } A \quad C_{i+1} \text{ de } A \quad \cdots \quad C_n \text{ de } A$

$$\text{Et donc } c_{i,j} = \det(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \text{ (2 colonnes égales)} \\ \det(A) & \text{si } j = i \text{ (} B = A \text{)} \end{cases}$$

$$\implies c_{i,j} = \delta_{i,j} \det(A)$$

$$\implies {}^t Com(A) \times A = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \det(A) (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \boxed{\det(A) I_n}$$

*. $\Delta_{j,i}$ est non $\Delta_{i,j}$ c'est c'est la transposée de la comatrice.

Une matrice à sa consœur inversible :

"-Resterez-vous avec nous ce soir ?

-Désolé, je ne suis que de passage..."

Chapitre 17

Déterminants

17.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, et on note $\det_{\mathcal{B}}$, l'application définie par :

$$\left| \begin{array}{ccc} \det_{\mathcal{B}} : & E^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \end{array} \right.$$

Cas particuliers

• Pour $n = 2$, on a $\mathcal{S}_2 = \{e, \tau\}$ donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = \varepsilon(e) a_{e(1),1} a_{e(2),2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} = \boxed{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}}$$

• Pour $n = 3$, on a $\mathcal{S}_3 = \{e, \underbrace{(1,2)_3}_{=\tau_1}, \underbrace{(2,3)_3}_{=\tau_2}, \underbrace{(1,3)_3}_{=\tau_3}, \underbrace{(1,2,3)_3}_{=c_1}, \underbrace{(3,2,1)_3}_{=c_2}\}$ donc :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon(e) a_{e(1),1} a_{e(2),2} a_{e(3),3} + \varepsilon(\tau_1) a_{\tau_1(1),1} a_{\tau_1(2),2} a_{\tau_1(3),3} \\ &\quad + \varepsilon(\tau_2) a_{\tau_2(1),1} a_{\tau_2(2),2} a_{\tau_2(3),3} + \varepsilon(\tau_3) a_{\tau_3(1),1} a_{\tau_3(2),2} a_{\tau_3(3),3} \\ &\quad + \varepsilon(c_1) a_{c_1(1),1} a_{c_1(2),2} a_{c_1(3),3} + \varepsilon(c_2) a_{c_2(1),1} a_{c_2(2),2} a_{c_2(3),3} \\ &= \boxed{a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} \\ &\quad - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}} \end{aligned}$$

17.2 n -linéarité de l'application déterminant

Montrons que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée.

Forme... : Par définition

... n -linéaire... : Par exemple pour la première position :
(idem pour les autres)

$$\begin{aligned}
& \forall (x_1, x'_1, x_2, \dots, x_n) \in E^{n+1}, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \\
& \text{avec les notations évidentes pour les coefficients :} \\
& \det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1 + \mu x'_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (\lambda a_{\sigma(1),1} + \mu a'_{\sigma(1),1}) a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} + \mu \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \\
&= \boxed{\lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x'_1, x_2, \dots, x_n)}
\end{aligned}$$

...alternée : Pour simplifier les notations, supposons $x_1 = x_2$ (idem pour les autres cas).

$$\text{Alors } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,1} = a_{i,2} \quad (*)$$

$$\text{Et } \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Posons le changement d'indice $\sigma' = \sigma\tau$ où $\tau = (1, 2)_n$

$$\text{L'application } \left| \begin{array}{ccc} f: \mathcal{S}_n & \rightarrow & \mathcal{S}_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma' = \sigma\tau \end{array} \right. \text{ est bijective car } f \circ f = id_{\mathcal{S}_n},$$

puisque $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, f^2(\sigma) = f(\sigma\tau) = \sigma\tau\tau = \sigma$ et $\mathcal{S}_n$ est de dimension finie.

$$\text{Alors } \sigma' = \sigma\tau \implies \sigma'\tau = \sigma\tau\tau = \sigma$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma'\tau) a_{\sigma'\tau(1),1} a_{\sigma'\tau(2),2} a_{\sigma'\tau(3),3} \dots a_{\sigma'\tau(n),n} \\
&= - \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(2),1} a_{\sigma'(1),2} a_{\sigma'(3),3} \dots a_{\sigma'(n),n} \\
&= - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(1),1}}_{\text{d'après } (*)} a_{\sigma(3),3} \dots a_{\sigma(n),n} \text{ (changement de nom)} \\
&= - \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0}$$

17.3 Caractérisation d'une base par son déterminant

Une famille de vecteurs est une base si, et seulement si, son déterminant est non nul.

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E .

$$\text{Donc } \det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \det_{\mathcal{F}}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})}_{=1 \neq 0} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$$

$$\text{Donc } \boxed{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0}$$

$\Leftarrow$ Supposons $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$

Montrons que $\mathcal{F}$ est une base de E :

- $\text{card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$
- Montrons que $\mathcal{F}$ est libre par l'absurde : supposons-la liée.
Donc un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres.
Supposons que ce soit x_1 (idem pour les autres cas).

Alors $\exists (\lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1} : x_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k x_k$

Or $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\underbrace{x_1 + \sum_{k=2}^n -\lambda_k x_k, x_2, \dots, x_n}_{=0_E}) = 0 : \text{absurde}$

17.4 Déterminant et transposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\det(A) = \det({}^t A)$$

Lemme : Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Montrons que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

$$\begin{aligned} \sigma \circ \sigma^{-1} = e &\implies \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(e) \\ &\implies \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma^{-1}) = 1 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma^{-1})$ sont de même signe.

Or, $\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1; 1\}$.

Donc on a soit $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$, soit $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = -1$.

Dans les deux cas, on a bien $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et ${}^t A = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, b_{i,j} = a_{j,i}$.
On a :

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n b_{\sigma(k), k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} \end{aligned}$$

Dans le produit, posons $k' = \sigma(k)$. k' parcourt bien $\llbracket 1, n \rrbracket$ quand k parcourt $\llbracket 1, n \rrbracket$, car $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ est bijective.

On a $k = \sigma^{-1}(k')$.

$$\text{Ainsi, } \det({}^t A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k'=1}^n a_{\sigma^{-1}(k'), k'}.$$

Posons maintenant dans la somme : $\sigma' = \sigma^{-1}$. ($\star$)

D'après le lemme, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')$.
Ainsi, on a bien :

$$\begin{aligned}\det({}^t A) &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{k'=1}^n a_{\sigma'(k'), k'} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{\sigma(k), k} \\ &= \boxed{\det(A)}\end{aligned}$$

(*) : Montrons que $\left| \begin{array}{ccc} f : \mathcal{S}_n & \rightarrow & \mathcal{S}_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma^{-1} \end{array} \right|$ est bijective.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
On a :

$$\begin{aligned}(f \circ f)(\sigma) &= f(f(\sigma)) \\ &= f(\sigma^{-1}) \\ &= (\sigma^{-1})^{-1} \\ &= \sigma \\ &= id_{\mathcal{S}_n}(\sigma)\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien bijective (et $f^{-1} = f$).

17.5 Formule de développement d'un déterminant

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

$$\text{On a } C_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ .}$$

Ainsi :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} (\text{lin}/C_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-j} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \end{vmatrix}$$

$C_j \leftrightarrow C_{j+1}$ puis $C_{j+1} \leftrightarrow C_{j+2}$ puis $\cdots$ puis $C_{n-1} \leftrightarrow C_n$ ($n-j$ opérations)

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-j} (-1)^{n-i} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{1,n} & \emptyset \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & \emptyset \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & \emptyset \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & \emptyset \\ \cancel{a_{i,1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,j-1}} & \cancel{a_{i,j+1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{i,n}} & \cancel{\emptyset} \end{vmatrix}$$

$L_i \leftrightarrow L_{i+1}$ puis $L_{i+1} \leftrightarrow L_{i+2}$ puis $\cdots$ puis $L_{n-1} \leftrightarrow L_n$ ($n-i$ opérations)

$$\text{Or, } (-1)^{n-j} (-1)^{n-i} = (-1)^{2n-(i+j)} = \frac{(-1)^{2n}}{((-1)^{i+j})^2} (-1)^{i+j} = (-1)^{i+j}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}}.$$

17.6 Déterminant de Vandermonde

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Montrons par récurrence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : "V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)"$$

$$\boxed{\mathcal{I}} \quad \mathcal{P}(1) \text{ car } V(x_1) = |1| = 1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 1} (x_j - x_i)$$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$ par deux méthodes :

17.6.1 Opérations élémentaires sur le déterminant

$$\begin{aligned}
V(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_{n+1} & \cdots & x_1^{n-2}(x_1 - x_{n+1}) & x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) \\ 1 & x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_{n+1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_{n+1}) & x_{n-1}^{n-1}(x_{n-1} - x_{n+1}) \\ 1 & x_n - x_{n+1} & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_{n+1}) & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad \begin{array}{l} C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - x_{n+1}C_n \\ \text{puis } C_n \leftarrow C_n - x_{n+1}C_{n-1} \\ \text{puis } \cdots \\ \text{puis } C_2 \leftarrow C_2 - x_{n+1}C_1 \end{array} \\
&= (-1)^{n+1+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_{n+1} & x_1(x_1 - x_{n+1}) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_{n+1} & x_n(x_n - x_{n+1}) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(développement par rapport à } L_{n+1}) \\
&= (-1)^n \prod_{i=1}^n (x_i - x_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\quad \text{(linéarité par rapport à chaque ligne)} \\
&= \prod_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i), \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}
\end{aligned}$$

17.6.2 Polynôme

1^{er} cas : Si $x_1, \dots, x_{n+1}$ ne sont pas distincts 2 à 2, $V(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$ car au moins 2 lignes sont égales.

De plus $\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) = 0$ car 2 éléments sont égaux.

$$\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}$$

2nd cas : Si $x_1, \dots, x_{n+1}$ sont distincts 2 à 2

$$\text{Posons } P(X) = V(x_1, \dots, x_n, X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} X^{j-1} \Delta_{n+1,j} \quad (\text{développement par rapport à } L_{n+1})$$

Le coefficient de X^n est (pour $j = n+1$) : $\underbrace{(-1)^{n+1+n+1}}_{=1} \underbrace{\Delta_{n+1,n+1}}_{=V(x_1, \dots, x_n)}$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0 \quad (\text{d'après } \mathcal{P}(n)) \quad (\text{car les } x_i \text{ sont distincts 2 à 2})$$

Donc $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\begin{cases} \deg(P) = n \\ \text{dom}(P) = V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{cases}$

Or $x_1, \dots, x_n$ sont racines P (car $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i)$ donne $L_i = L_{n+1}$ dans le déterminant).

On a trouvé n racines distinctes (2 à 2) et P est de degré n donc d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, chaque racine est simple et :

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } V(x_1, \dots, x_{n+1}) &= P(x_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \\ &\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)} \end{aligned}$$

17.7 Déterminants triangulaires par blocs

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}}_{(A,D) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}} \implies \det(M) = \det(A) \times \det(D)$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons-la par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Supposons A et D carrées, et $B = 0_{\mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbb{K})}$.

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix}_n = +1 \begin{vmatrix} A & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & 0 & & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \quad (\text{dév p/r } C_n) \\
&= \dots = (+1)^{n+m} |A| = \det(A) \\
\text{De même } \begin{vmatrix} I_m & 0 \\ C & D \end{vmatrix} &= |D| = \det(D), \text{ donc } \boxed{\det(M) = \det(A) \times \det(D)}
\end{aligned}$$

On montre le même résultat pour une matrice triangulaire supérieure par blocs de la même manière.

Chapitre 18

Dénombrement sur les ensembles finis

18.1 Cardinal et inclusion

Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$:

"si E est un ensemble fini de cardinal n , si $F \subset E$, alors :

- (a) F est fini avec $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$
- (b) $\text{card}(F) = \text{card}(E) \Leftrightarrow F = E$."

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$: soit E un ensemble fini de cardinal 0 (donc $E = \emptyset$), soit $F \subset E$ (donc $F = \emptyset$)

(a) : F est fini et $\underbrace{\text{card}(F)}_{=0} \leq \underbrace{\text{card}(E)}_{=0}$

(b) : $\underbrace{\text{card}(F) = \text{card}(E)}_{\text{vrai}} \Leftrightarrow \underbrace{F = E}_{\text{vrai}} : \text{vrai}$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n + 1$, soit $F \subset E$.

1^{er} cas : Si $F = E$

La propriété au rang $n + 1$ est évidemment vérifiée : $\boxed{\mathcal{P}(n + 1)}$

2nd cas : Si $F \neq E$

Comme $F \subset E, \exists e \in E : e \notin F$.

Posons $E' = E \setminus \{e\}$, alors $\text{card}(E') = \text{card}(E) - 1 = n$

Or $F \subset E$ et $e \notin F$ donc $F \subset E'$.

D'après $\mathcal{P}(n)$, F est fini et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E') = n \leq n + 1 = \text{card}(E)$

Donc (a) : $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$

Et (b) : $\underbrace{\text{card}(F) = \text{card}(E)}_{\substack{\leq n \\ = n+1}} \Leftrightarrow \underbrace{F = E}_{\text{Faux}} : \text{vrai}$

Donc $\boxed{\mathcal{P}(n + 1)}$

18.2 Cardinal d'une réunion d'ensembles

Soient A et B deux ensembles finis.
S'ils sont disjoints :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Dans le cas général :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Ensembles disjoints : Soient E un ensemble fini, $A \subset E$, $B \subset E$, supposons $A \cap B = \emptyset$, i.e. A et B sont disjoints.

Donc A et B sont finis, notons respectivement n et m leurs cardinaux.

Montrons $A \cup B$ est équipotent à $\llbracket 1; n+m \rrbracket$.

On aura alors démontré que $A \cup B$ est fini et que $\text{card}(A \cup B) = n + m = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Comme A est équipotent à $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\exists \varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow A$ bijective.

Comme B est équipotent à $\llbracket 1; m \rrbracket$, $\exists \psi : \llbracket 1; m \rrbracket \rightarrow B$ bijective.

Montrons que $\left| \begin{array}{ll} \theta : \llbracket 1; m+n \rrbracket & \rightarrow A \cup B \\ k & \mapsto \begin{cases} \varphi(k) \text{ si } k \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ \psi(k-n) \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. \text{ est bijective.}$

• θ est injective : $\forall (k, k') \in \llbracket 1, n+m \rrbracket^2$,

1^{er} cas : si $(k, k') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$\theta(k) = \theta(k') \implies \varphi(k) = \varphi(k') \implies k = k'$ (car φ est injective).

2^e cas : si $(k, k') \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket^2$,

$\theta(k) = \theta(k') \implies \psi(k) = \psi(k') \implies k = k'$ (car ψ est injective).

3^e cas : si $(k, k') \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket n+1, n+m \rrbracket$, $\theta(k) = \theta(k') \implies \underbrace{\varphi(k)}_{\in A} = \underbrace{\psi(k')}_{\in B}$

Or $A \cap B = \emptyset$ donc ce cas est impossible.

4^e cas : si $(k, k') \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, $\theta(k) = \theta(k') \implies \underbrace{\psi(k)}_{\in B} = \underbrace{\varphi(k')}_{\in A}$

Or $A \cap B = \emptyset$ donc ce cas est impossible.

• θ est surjective.

Soit $e \in A \cup B$.

1^{er} cas : Si $e \in A$, $\exists k \in \underbrace{\llbracket 1, n \rrbracket}_{\subset \llbracket 1, n+m \rrbracket} : \underbrace{\varphi(k)}_{=\theta(k)} = e$ car φ est surjective

Donc $\exists k \in \llbracket 1, n+m \rrbracket : \theta(k) = e$

2nd cas : Si $e \in B$, $\exists k' \in \llbracket 1, m \rrbracket : \psi(k') = e$

$1 \leq k' \leq m \implies n+1 \leq k' + n \leq n+m$

Posons $k = k' + n \in \llbracket n+1, n+m \rrbracket$

Alors $\exists k \in \underbrace{\llbracket n+1, n+m \rrbracket}_{\subset \llbracket 1, n+m \rrbracket} : \underbrace{\psi(k-n)}_{=\theta(k)} = e$

Donc $\exists k \in \llbracket 1, n+m \rrbracket : \theta(k) = e$

Finalement θ est surjective.

Et donc θ est bijective

Cas général : On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Donc $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A)$

Or $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$

Donc $\text{card}(B) = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$

Par somme : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

18.3 Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles

Soient E et F deux ensembles finis.

$$E \times F \text{ est fini et } \text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

1^{re} version : "rigoureuse"

Notons $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ avec $e_1, \dots, e_n$ distincts 2 à 2 (donc $\text{card}(E) = n$).

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons $A_k = \{(e, f) \in E \times F \mid e = e_k\}$

$(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de $E \times F$.

Or $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, A_k est équipotent à F car $\left| \begin{array}{ccc} \varphi : & A_k & \rightarrow F \\ & (e_k, f) & \mapsto f \end{array} \right.$ est bijective.

Donc $\text{card}(A_k) = \text{card}(F)$ (indépendant de k).

$$\text{Donc } \text{card}(E \times F) = \sum_{k=1}^n \text{card}(F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

2nd version : "protocole de dénombrement"

Pour construire exactement 1 fois tous les éléments de $E \times F$, on peut :

— choisir e dans E : $\text{card}(E)$ choix

— puis pour chaque e choisir f (indépendant de e) dans F : $\text{card}(F)$ choix

D'où $\text{card}(E) \times \text{card}(F)$ choix, donc $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

18.4 Cardinal de l'ensemble des p -arrangements d'un ensemble

1^{re} version : "rigoureuse"

Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$: "si E est un ensemble fini de

cardinal n , si $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, alors $\text{card}(\mathcal{A}_{E,p}) = \frac{n!}{(n-p)!}$ "

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(0)$: soient E de cardinal 0 (donc $E = \emptyset$) et $p \in \llbracket 0; 0 \rrbracket$ (donc $p = 0$).

Alors $\mathcal{A}_{E,p} = \{()\}$ donc $\text{card}(\mathcal{A}_{E,p}) = 1 = \frac{0!}{(0-p)!}$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

Soient E de cardinal $n + 1$ et $p \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$.

Notons $E = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$

$\forall k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, notons $B_k = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{A}_{E,p} \mid x_1 = e_k\}$

$(B_1, \dots, B_{n+1})$ est une partition de $\mathcal{A}_{E,p}$.

1^{er} cas : Si $p = 0$

$$\mathcal{A}_{E,0} = \{()\} \implies \text{card}(\mathcal{A}_{E,p}) = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1-0)!} \implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}$$

2nd cas : Si $p \neq 0$

B_k est équipotent à $\mathcal{A}_{E \setminus \{e_k\}, p-1}$

En effet $\left| \begin{array}{ccc} \varphi : & B_k & \rightarrow \mathcal{A}_{E \setminus \{e_k\}, p-1} \\ & (e_k, x_2, \dots, x_p) & \mapsto (x_2, \dots, x_p) \end{array} \right.$ est bijective.

Or $\text{card}(E \setminus \{e_k\}) = \text{card}(E) - 1 = n$

Donc d'après $\mathcal{P}(n)$ appliquée à $E \setminus \{e_k\}$ au lieu de E et à $p - 1 \in \llbracket 0; n \rrbracket$ au lieu de p :

$$\text{card}(B_k) = \text{card}(\mathcal{A}_{E \setminus \{e_k\}, p-1}) = \frac{n!}{(n - (p-1))!} \text{ (indépendant de } k)$$

$$\text{Donc } \text{card}(\mathcal{A}_{E,p}) = (n+1) \frac{n!}{(n+1-p)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!} \implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}$$

2nd version : "protocole de dénombrement"

Pour construire exactement 1 fois les p -arrangements $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathcal{A}_{E,p}$, on peut :

- choisir x_1 dans E : $n = \text{card}(E)$ choix
- choisir x_2 dans $E \setminus \{x_1\}$: $n - 1$ choix
- choisir x_3 dans $E \setminus \{x_1, x_2\}$: $n - 2$ choix
- ...
- choisir x_p dans $E \setminus \{x_1, \dots, x_{p-1}\}$: $n - (p - 1)$ choix

D'où $n(n-1)(n-2) \dots (n-(p-1))$ choix, donc $\boxed{\text{card}(\mathcal{A}_{E,p}) = \frac{n!}{(n-p)!}}$

18.5 Cardinal de l'ensemble des p -combinaisons d'un ensemble

Soient E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

On note $C_{E,p}$ l'ensemble des p -combinaisons de E .

Montrons que $\text{card}(C_{E,p}) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$

1^{re} version : "rigoureuse"

Pour dénombrer $\mathcal{A}_{E,p}$, on peut le partitionner ainsi : pour toute p -combinaison $C = \underbrace{\{x_1, \dots, x_p\}}_{\substack{\in E, \\ \neq 2 \text{ à } 2}}$ de E , on pose B_C l'ensemble des p -arrangements de E obtenus

en permutant C de toutes les manières possibles.

$(B_C)_{C \in C_{E,p}}$ est une partition de $\mathcal{A}_{E,p}$.

Or $\text{card}(B_C) = p!$ (indépendant de C)
 Donc $\underbrace{\text{card}(\mathcal{A}_{E,p})}_{=\frac{n!}{(n-p)!}} = \underbrace{\text{card}(B_C)}_{=p!} \times \text{card}(C_{E,p})$

Donc $\boxed{\text{card}(C_{E,p}) = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

2nd version : "protocole de dénombrement"

Pour parcourir tous les éléments de $C_{E,p}$, on peut :

- choisir un arrangement $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathcal{A}_{E,p}$: $\frac{n!}{(n-p)!}$ choix
- lui associer la p -combinaison $\{x_1, \dots, x_p\}$

Dans ce cas, chaque p -combinaison est comptée exactement $p!$ fois (c'est le nombre de p -arrangements donnant ladite p -combinaison, et p est indépendant de la combinaison).

Donc $\text{card}(C_{E,p}) = \frac{\text{card}(\mathcal{A}_{E,p})}{p!}$

Donc $\boxed{\text{card}(C_{E,p}) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}}$

18.6 Cardinal des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble de cardinal n .

Montrons que $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

1^{re} méthode

Posons $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, A_k = \{U \in \mathcal{P}(E) \mid \text{card}(U) = k\}$

$(A_0, \dots, A_n)$ forme une partition de $\mathcal{P}(E)$.

Or $A_k = C_{E,k}$ donc $\text{card}(A_k) = \text{card}(C_{E,k}) = \binom{n}{k}$

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n$ (formule du binôme)

Donc $\boxed{\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$

2nd méthode

Notons $E = \{e_1, \dots, e_n\}$

$\mathcal{P}(E)$ est équipotent à $\{0; 1\}^n$.

En effet $\left| \begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \{0; 1\}^n \\ U & \mapsto & (b_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \end{array} \right. \text{ où } b_i = \begin{cases} 1 \text{ si } e_i \in U \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \text{ est bijective.}$

Donc $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \text{card}(\{0; 1\}^n) = \text{card}(\{0; 1\})^n$ Donc $\boxed{\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$

Remarque : On ne montre pas que φ est bijective, mais s'il est demandé de l'expliquer : sa bijection réciproque serait l'application qui à un n -uplet $(b_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ de 0 et de 1 associe un ensemble contenant les e_i avec les i tels que $b_i = 1$

18.7 Propriétés du coefficient du binôme démontrées par une approche de dénombrement

Montrons la propriété de symétrie du coefficient du binôme par une approche de dénombrement.

Soient E un ensemble de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

$C_{E,p}$ est équipotent à $C_{E,n-p}$

En effet $\left| \begin{array}{ccc} \varphi : C_{E,p} & \rightarrow & C_{E,n-p} \\ A & \mapsto & C_E(A) \end{array} \right|$ est bijective.

Donc $\text{card}(C_{E,p}) = \text{card}(C_{E,n-p})$

Donc $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$

Montrons la formule de Pascal par une approche de dénombrement.

Soit E un ensemble de cardinal $n + 1$.

Soit $e \in E$.

Pour dénombrer $C_{E,p+1}$:

Pour parcourir exactement 1 fois chaque partie A de cardinal $p + 1$ de E , on peut :

- choisir $e \in A$ et compléter A avec p éléments de $E \setminus \{e\}$: $\binom{n}{p}$ choix.
- choisir $e \notin A$ puis construire A avec $p + 1$ éléments de $E \setminus \{e\}$: $\binom{n}{p+1}$ choix.

D'où $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ choix.

Donc $\text{card}(C_{E,p+1}) = \boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}}$

Montrons la formule du binôme par une approche de dénombrement.

Pour développer $(a + b)^n$, on écrit $(a + b)^n = \underset{t_1}{(a + b)} \underset{t_2}{(a + b)} \cdots \underset{t_n}{(a + b)}$

ce qui donne la somme de tous les termes obtenus en multipliant soit a soit b choisis dans chaque terme t_i .

Ceci qui donne une somme de termes de la forme $a^k b^{n-k}$, pour a choisi dans k des n termes $t_1, \dots, t_n$ (donc b choisi dans les autres).

→ $\binom{n}{k}$ choix (donc chaque terme $a^k b^{n-k}$ arrive $\binom{n}{k}$ fois).

Donc $\boxed{(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$

Chapitre 19

Probabilités

19.1 Formules de probabilité

19.1.1 Formule des probabilités composées

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B deux événements.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

- 1^{er} cas : si $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Alors $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \implies \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.
- 2nd cas : si $\mathbb{P}(A) = 0$.
On a $(A \cap B) \subset A \implies \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \implies \mathbb{P}(A \cap B) \leq 0$.
Or, $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ par définition.
Donc, par anti-symétrie, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \boxed{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}$.

19.1.2 Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B deux événements.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

$(A, \bar{A})$ forme un système complet d'événements de Ω .

Ainsi, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \boxed{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}$,
d'après la formule des probabilités composées.

19.1.3 Formule de Bayes

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On a, d'une part, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ et, d'autre part, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$, d'après la formule des probabilités composées.

Ainsi, $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) \implies \boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}}$, car $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

19.2 Événements indépendants

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements.

1. Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits deux à deux indépendants si, et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

2. Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants si, et seulement si :

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

3. Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants (pour I un couple).

La réciproque de cette dernière propriété est fausse ; en effet, considérons la situation suivante :

On dispose d'une pièce équilibrée, que l'on lance deux fois.

On note A_1 : "le premier lancer donne pile", A_2 : "le second lancer donne pile" et A_3 : "les 2 lancers donnent le même résultat".

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2),$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3),$$

$$\text{et } \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3),$$

donc A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants, mais $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ et

$\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}$, donc A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

19.3 Approche de la loi binomiale

On lance n fois de manière indépendante un pièce donnant pile avec la probabilité p (comprendre "les lancers sont mutuellement indépendants"). Calculer la probabilité d'obtenir exactement k fois pile sur les n lancers.

$$\Omega = \{P, F\}^n.$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note P_i : "le i -ème lancer donne pile".

Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et A : "on a obtenu exactement k fois pile sur les n lancers".
On a : *

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{c \in C_{\llbracket 1, n \rrbracket, k}} \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i \in c} P_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus c} \bar{P}_i \right) \right) \\ &= \sum_{c \in C_{\llbracket 1, n \rrbracket, k}} \prod_{i \in c} \mathbb{P}(P_i) \times \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus c} \mathbb{P}(\bar{P}_i) \end{aligned}$$

car $(Q_i)_{1 \leq i \leq n}$, où $\begin{cases} Q_i = P_i \text{ si } i \in c \\ Q_i = \bar{P}_i \text{ sinon} \end{cases}$ est mutuellement indépendante puisque $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ aussi.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{c \in C_{\llbracket 1, n \rrbracket, k}} \prod_{i \in c} p \times \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus c} 1 - p \\ &= \sum_{c \in C_{\llbracket 1, n \rrbracket, k}} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ car } p \text{ et } 1 - p \text{ sont indépendants de } i \\ &= \text{card}(C_{\llbracket 1, n \rrbracket, k}) \times p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ car } p^k (1 - p)^{n-k} \text{ est indépendant de } c \\ &= \boxed{\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}} \end{aligned}$$

19.4 Lois de probabilité usuelles : définition, espérance et variance

LOI UNIFORME

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble fini de cardinal n et $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire.

On dit que X suit la loi uniforme sur E notée $\mathcal{U}(E)$, et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, si, et seulement si, la loi de X est définie par $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

On a alors $E(X) = \sum_{k=1}^n \frac{ek}{n}$ et $V(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k \right)^2$

LOI DE BERNOULLI

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $X : \Omega \rightarrow \{0; 1\}$ une variable aléatoire et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p notée $\mathcal{B}(p)$, et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si, et seulement si, la loi de X est définie par $\mathbb{P}(X = 1) = p$ (et donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$).

On a alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

*. Pour comprendre cette somme : on choisit les k lancers où l'on fait Pile, i.e. une combinaison de k entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et les autres entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ donnent donc Face.

LOI BINOMIALE

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$, $X : \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$ une variable aléatoire et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) notée $\mathcal{B}(n, p)$, et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si, et seulement si, la loi de X est définie par $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On a alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Montrons ces résultats pour la loi binomiale :

Lemme : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Se montre immédiatement par l'écriture factorielle des coefficients binomiaux.

Preuve : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on a alors $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$\implies E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \text{ (d'après le lemme)}$$

$$= n \sum_{k=-1}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} \text{ (} n \text{ est indép. de } k \text{ - changement d'indice)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \text{ (convention sur les coefficients binomiaux)}$$

$$= np(p+1-p)^{n+1} = \boxed{np} \text{ (formule du binôme)}$$

Preuve : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on vient de voir $E(X) = np$.

Or, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=E(X)=np} \\ &= \sum_{k=0}^n \underbrace{n(n-1) \binom{n-2}{k-2}}_{\text{lemme}} p^k (1-p)^{n-k} + np \\ &= \underbrace{n(n-1)p^2}_{\text{ indép } k} \sum_{k=-2}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} + np \\ &= (np)^2 - np + (p+1-p)^{n-2} + np \\ &= (np)^2 + np(1-p) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (np)^2 + np(1-p) - (np)^2 = \boxed{np(1-p)}$$

19.5 Espérance mathématique : linéarité et croissance

Propriété de linéarité de l'espérance :

Pour toutes variables aléatoires $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tous réels λ, μ :

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$$

Propriété de croissance de l'espérance :

Pour toutes variables aléatoires $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$X \leq Y \implies \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

Lemme : une définition plus théorique de l'espérance.

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=a\}} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} a \sum_{\omega \in \{X=a\}} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} a \mathbb{P}(X = a) \\ &= \boxed{\mathbb{E}(X)} \end{aligned}$$

Linéarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (\lambda X + \mu Y)(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) + \mu \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \boxed{\lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)} \end{aligned}$$

Croissance : Supposons $X \leq Y$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega) &\implies X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \leq Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &\implies \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &\implies \boxed{\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)} \end{aligned}$$

19.6 Théorème de transfert

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle et $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$E(u(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} u(a) \mathbb{P}(X = a)$$

Remarque : l'essentiel de la preuve réside dans les justifications à chaque égalité : en effet, sans elles, la preuve tient en des égalités successives sur une ligne ! Tout n'est qu'une question de définitions et de partitions : visualiser la situation la rend complètement évidente.

$$\begin{aligned} E(u(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} u(X(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{a\})} u(X(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad (\text{car } (\{X^{-1}(\{a\})\})_{a \in X(\Omega)} \text{ est une partition de } \Omega) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} u(a) \sum_{\omega \in X^{-1}(\{a\})} \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad (\text{car } \omega \in X^{-1}(\{a\}) \Leftrightarrow X(\omega) \in \{a\} \text{ donc } u(X(\omega)) = u(a), \text{ indépendant de } \omega) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} u(a) \mathbb{P}(X = a) \quad (\text{car } (\{\omega\})_{\omega \in X^{-1}(\{a\})} \text{ est une partition de } \{X = a\}) \end{aligned}$$

19.7 Inégalité de Markov

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire positive.

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Soit $a > 0$.

- On a que $1_{\{X \geq a\}} \leq \frac{X}{a}$, montrons-le : $\forall \omega \in \Omega, 1_{\{X \geq a\}}(\omega) \leq (\frac{X}{a})(\omega)$

1^{er} cas : si $\omega \in \{X \geq a\}$ (i.e. $X(\omega) \geq a$)

Alors $1_{\{X \geq a\}}(\omega) = 1$

Or $X(\omega) \geq a \implies \frac{X(\omega)}{a} \geq 1 \implies (\frac{X}{a})(\omega) \geq 1$

Donc $1_{\{X \geq a\}}(\omega) \leq (\frac{X}{a})(\omega)$

2nd cas : si $\omega \in \{X < a\}$ (i.e. $X(\omega) < a$)

Alors $1_{\{X \geq a\}}(\omega) = 0$

Or $X \geq 0$ et $a > 0$ donc $(\frac{X}{a})(\omega) \geq 0$

Donc $1_{\{X \geq a\}}(\omega) \leq (\frac{X}{a})(\omega)$

- On a alors $1_{\{X \geq a\}} \leq \frac{X}{a} \implies E(1_{\{X \geq a\}}) \leq E(\frac{1}{a}X) \implies \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

19.8 Inégalité de Bienaymé-Tchebichev

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

On a $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq a) = \mathbb{P}(|X - E(X)|^2 \geq a^2)$

Posons $Y = |X - E(X)|^2 = (X - E(X))^2 \geq 0$

D'après l'inégalité de Markov appliquée à Y et à a^2 :

$$\begin{aligned} \forall a > 0, \mathbb{P}(Y \geq a^2) &\leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2} \\ \Leftrightarrow \forall a > 0, \mathbb{P}(|X - E(X)|^2 \geq a^2) &\leq \frac{V(X)}{a^2} \\ \Leftrightarrow \boxed{\forall a > 0, \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq a) &\leq \frac{V(X)}{a^2}} \end{aligned}$$

19.9 Espérance et variance de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(a,b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} ab \mathbb{P}((X, Y), (a, b)) \quad (\text{Théorème de transfert}) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{b \in Y(\Omega)} ab \mathbb{P}(X = a) \mathbb{P}(Y = b) \quad (X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \\ &= \sum_{a \in X(\Omega)} \left[\underbrace{a \mathbb{P}(X = a)}_{\text{indep. de } b} \sum_{b \in Y(\Omega)} \underbrace{b \mathbb{P}(Y = b)}_{\text{indep. de } a} \right] \\ &= \left(\sum_{a \in X(\Omega)} a \mathbb{P}(X = a) \right) \left(\sum_{b \in Y(\Omega)} b \mathbb{P}(Y = b) \right) \\ &= \boxed{E(X)E(Y)} \end{aligned}$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(X + Y) = E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2$$

$$\begin{aligned}
&= E(X^2 + Y^2 + 2XY) - (E(X) + E(Y))^2 \\
&= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y) \\
&= \underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{=V(X)} + \underbrace{E(Y^2) - E(Y)^2}_{=V(Y)} + 2 \underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_{=0 \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}} \\
&= \boxed{V(X) + V(Y)}
\end{aligned}$$

19.10 Somme de deux variables aléatoires suivant deux lois binomiales

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω et n et m deux réels.

Si X et Y sont indépendantes, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

On a :
$$\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ Y(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket, \mathbb{P}(Y = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \end{cases}$$

Notons $Z = X + Y$.

$Z(\Omega) = \llbracket 0, n + m \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{l=0}^n \mathbb{P}(X = l) \underbrace{\mathbb{P}_{\{X=l\}}(Z = k)}_{(*)} \\
&\quad \text{formule des probabilités totales sur le système complet d'événements } (\{X = l\})_{l \in \llbracket 0, n \rrbracket} \\
&\quad (*) \mathbb{P}_{\{X=l\}}(Z = k) = \mathbb{P}_{\{X=l\}}(Y = k - X) = \mathbb{P}_{\{X=l\}}(Y = k - l) = \mathbb{P}(Y = k - l) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \mathbb{P}(Y = k - l) \\
&= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \binom{m}{k-l} p^{k-l} (1-p)^{m-(k-l)} \\
&= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \binom{m}{k-l} \underbrace{p^k (1-p)^{(n+m)-k}}_{\text{indep. de } l} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \binom{m}{k-l} \right)}_{= \binom{n+m}{k} \text{ Formule de Vandermonde}} p^k (1-p)^{(n+m)-k} \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{(n+m)-k}
\end{aligned}$$

Donc $Z = \boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)}$

19.11 Variance de la somme de n variables mutuellement indépendantes

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur Ω .

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Montrons-le par récurrence simple : notons $\forall n \in \mathbb{N}^* \mathcal{P}(n)$ la propriété à démontrer au rang n .

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(1)$ car $\{(i, j) \in \llbracket 1, 1 \rrbracket \mid 1 \leq i < j \leq 1\} = \emptyset$ donc la somme des covariances est nulle et la propriété est alors évidente.

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i\right) &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1}\right) \\ &= V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + V(X_{n+1}) + 2\text{cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, X_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) + V(X_{n+1}) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \text{cov}(X_i, X_{n+1}) \quad (\mathcal{P}(n) \text{ et linéarité à gauche de } \text{cov}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &\implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)} \end{aligned}$$

$$X_1, \dots, X_n \text{ deux à deux indépendantes} \implies V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Immédiat d'après le premier point : la covariance de deux variables indépendantes est nulle, donc la somme de toutes les covariances est nulle.

19.12 Espérance du produit de n variables mutuellement indépendantes

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des variables aléatoires sur Ω mutuellement indépendantes.

$$E(X_1 \times \dots \times X_n) = E(X_1) \times \dots \times E(X_n)$$

Montrons par récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: "si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $E(X_1 \times \dots \times X_n) = E(X_1) \times \dots \times E(X_n)$ "

$\boxed{\mathcal{I}}$ $\mathcal{P}(1)$: immédiat

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

$$E(X_1 \times \dots \times X_{n+1}) = E((X_1 \times \dots \times X_n) \times X_{n+1})$$

Or $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes donc d'après le lemme des coalitions, $Y = X_1 \times \dots \times X_n$ et X_{n+1} sont (mutuellement) indépendantes.

$$\begin{aligned} \text{Donc } E(Y \times X_{n+1}) &= E(Y) \times E(X_{n+1}) \\ &= E(X_1) \times \dots \times E(X_n) \times E(X_{n+1}) \quad (\mathcal{P}(n)) \\ \implies E(X_1 \times \dots \times X_{n+1}) &= E(X_1) \times \dots \times E(X_{n+1}) \\ \implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)} \end{aligned}$$

19.13 Somme de plusieurs variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}$ **mutuellement** indépendantes, chacune suivant une loi de Bernoulli de paramètre p $\mathcal{B}(p)$.

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

Montrons-le par récurrence simple en notant $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$ la propriété au rang n .

$$\boxed{\mathcal{I}} \mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p) \implies \mathcal{P}(1)$$

$\boxed{\mathcal{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

D'après le lemme des coalitions, $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc d'après $\mathcal{P}(n)$: $Y = X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Montrons que $X_1 + \dots + X_{n+1} = Y + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, p)$

On a que Y est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et X_{n+1} dans $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ donc $(Y + X_{n+1})(\Omega) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \text{De plus, d'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements } (\{X_{n+1} = 0\}, \{X_{n+1} = 1\}) : \forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(X_{n+1} + Y = k) &= \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \mathbb{P}_{\{X_{n+1}=0\}}(Y + X_{n+1} = k) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \mathbb{P}_{\{X_{n+1}=1\}}(Y + X_{n+1} = k) &= \\ \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)}_{=1-p} \underbrace{\mathbb{P}(Y = k)}_{(*)} + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)}_{=p} \underbrace{\mathbb{P}(Y = k-1)}_{\text{idem}(*)} \end{aligned}$$

$(*) : \mathbb{P}_{\{X_{n+1}=0\}}(Y + X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{\{X_{n+1}=0\}}(Y = k) = \mathbb{P}(Y = k)$ car si $\{X_{n+1} = 0\}$ est réalisé, alors $\{X_{n+1} + Y = k\} = \{Y = k\}$, et $\{Y = k\}$ et $\{X_{n+1} = 0\}$ sont indépendants puisque $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendants donc d'après le lemme des coalitions, $Y = X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont

indépendants.

Donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = k) &= (1-p) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + p \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)} \\
 &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} + \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
 &= \left[\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{=\binom{n+1}{k}} \right] p^k (1-p)^{n+1-k} \quad (\text{Formule de Pascal}) \\
 &= \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

Donc $Y + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, p)$

Finalement : $X_1 + \dots + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, p) \implies \boxed{\mathcal{P}(n+1)}$

Deuxième partie

Exercices-type

Chapitre 1

Complexes

1.1 Un module dans l'inégalité

Montrer que pour tout complexe a de module 1, $|1 + a| \geq 1$ ou $|1 + a^2| \geq 1$.

Soit $a \in \mathbb{C}, |a| = 1 \implies \exists \theta \in]-\pi, \pi] : a = e^{i\theta}$

1^{er} cas : si $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] &\implies \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \\ &\implies |2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| \geq 1 \quad (t \mapsto |t| \text{ croissante sur } \mathbb{R}^+) \\ &\implies \underbrace{|e^{i\frac{\theta}{2}}|}_{=1} \times |2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| \geq 1 \\ &\implies |e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})| \geq 1 \quad (\text{formule d'Euler}) \\ &\implies |1 + e^{i\theta}| \geq 1 \\ &\implies \boxed{|1 + a| \geq 1} \end{aligned}$$

2nd cas : si $\theta \in]-\pi, -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi]$

Alors, par un raisonnement similaire :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) \leq -\frac{1}{2} &\implies |2 \cos(\theta)| \geq |-1| \quad (t \mapsto |t| \text{ décroissante sur } \mathbb{R}^-) \\ &\implies \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1} \times |2 \cos(\theta)| \geq 1 \\ &\implies |e^{i\theta} (e^{-i\theta} + e^{i\theta})| \geq 1 \quad (\text{formule d'Euler}) \\ &\implies |1 + e^{2i\theta}| \geq 1 \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{|1 + a^2| \geq 1}$$

1.2 Système d'équations complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$(S) : \begin{cases} x = y^2 \\ y = z^2 \\ z = x^2 \end{cases}$$

$$\text{On a } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = z^2 \\ z = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \text{ (} L_1 \text{)} \\ y = z^2 \text{ (} L_2 \text{)} \\ z = z^8 \text{ (} L_3 \text{)} \end{cases}$$

$$(L_3) \Leftrightarrow z(z^7 - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z^7 = 1 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket : z = e^{ik\frac{2\pi}{7}}$$

$$(L_2) \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket : y = e^{ik\frac{4\pi}{7}} \text{ (formule de Moivre)}$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket : z = e^{ik\frac{8\pi}{7}} \text{ (formule de Moivre)}$$

L'ensemble des solutions de (S) est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\} \cup \left\{ (e^{ik\frac{8\pi}{7}}, e^{ik\frac{4\pi}{7}}, e^{ik\frac{2\pi}{7}}) \mid k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket \right\}}$$

1.3 Triangles équilatéraux complexes

Soient P, Q et R trois points distincts du plan, d'affixes respectives p, q et r .

1. Montrer que PQR est équilatéral direct si, et seulement si $p + qj + rj^2 = 0^*$
2. Caractériser de même " PQR est équilatéral indirect"
3. En déduire la propriété : PQR est équilatéral $\Leftrightarrow p^2 + q^2 + r^2 = pq + pr + rq$

-
1. PQR équilatéral direct $\Leftrightarrow P$ est l'image de R par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre Q

$$\Leftrightarrow p = e^{i\frac{\pi}{3}}(r - q) + q = -j^2(r - q) + q^\dagger$$

$$\Leftrightarrow p + \underbrace{(-1 - j^2)}_{=j \text{ car } 1+j+j^2=0} q + rj^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p + qj + rj^2 = 0}$$

*. " PQR est direct" signifie que l'on décrit le triangle dans l'ordre des points P, Q puis R dans le sens trigonométrique.

Rappel : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

†. car $-j^2 = -\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{-i\pi} e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. PQR équilatéral indirect $\Leftrightarrow PRQ$ équilatéral direct

$\Leftrightarrow \boxed{p + rj + qj^2 = 0}$ en échangeant les rôles de q et r dans Q1.

3. PQR équilatéral $\Leftrightarrow PQR$ équilatéral direct ou indirect

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p + qj + rj^2 = 0 \\ \text{ou} \\ p + rj + qj^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (p + qj + rj^2)(p + rj + qj^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 + qrj^2 + qr(j^2)^2 + prj + prj^2 + pqj^2 + pqj + q^2 \underbrace{j^3}_{=1} + r^2 \underbrace{j^3}_{=1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p^2 + q^2 + r^2 = pq + pr + rq}$$

Chapitre 2

Fonctions - Applications

2.1 Un prolongement par continuité (non dérivable)

Montrons que $f : x \mapsto \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ est prolongeable par continuité en 0 mais n'y est pas dérivable.

Prolongement par continuité

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 \in \mathbb{R} \text{ (limite non indéterminée)}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Montrons que le prolongement n'est pas dérivable

(On continue de noter f la fonction prolongée)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \text{ n'existe pas car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

2.2 $e^x = x + 2$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^+$

Posons $f : x \mapsto e^x - x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = e^x - 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, avec $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, f'(x) > 0$

et f est continue en 0 (car dérivable) donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Finalement : f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, donc d'après le théorème de la bijection continue, f induit une bijection de $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ dans $[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1; +\infty[$

(car $x = o(e^x) \implies f(x) \sim e^x$)

Donc $\forall y \in [1; +\infty[, \exists ! x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = y$

En particulier pour $y = 2 \in [1; +\infty[$:

$$\boxed{\exists ! x \in \mathbb{R} : e^x - x = 2}$$

2.3 Preuve d'une induction de bijection

Montrons que $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ induit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et précisons sa fonction réciproque.

$$\begin{aligned} \forall (x; y) \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \times \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = y \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} = y \\ \Leftrightarrow x+1 = y(x+2) \quad (\text{car } x+2 \neq 0) \\ \Leftrightarrow x(1-y) = -2y-1 \\ \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2y+1}{y-1}} \quad (\text{car } y-1 \neq 0) \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = y$ possède une unique solution pour chaque y fixé, donc f induit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

$$\left| \begin{array}{ccc} f^{-1} : & \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & y & \mapsto \frac{2y+1}{y-1} \end{array} \right|$$

2.4 Équation fonctionnelle de arctan

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Posons $\left| \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right|$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et composée de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

2.5 Démonstration de la bijectivité d'une application donnée

On pose $\left| \begin{array}{lcl} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x; y) & \mapsto (x + y; x - y) \end{array} \right.$
 Montrer que f est bijective.

→ Montrons que f est injective

Soit $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (\mathbb{R}^2)^2$

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1)) &= f((x_2, y_2)) \\ \implies (x_1 + y_1; x_1 - y_1) &= (x_2 + y_2; x_2 - y_2) \\ \implies \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 & (L_1) \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 & (L_2) \end{cases} \\ \frac{(L_1) + (L_2)}{2} &\implies x_1 = x_2 \\ \frac{(L_1) - (L_2)}{2} &\implies y_1 = y_2 \\ \implies \boxed{(x_1; y_1) = (x_2; y_2)} \end{aligned}$$

→ Montrons que f est surjective

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Posons $(x; y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{R}^2$

$$f((x; y)) = (x + y; x - y) = (\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}; \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}) = (a; b)$$

On a montré que : $\boxed{\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, \exists (x; y) \in \mathbb{R}^2 : f((x; y)) = (a; b)}$

2.6 Équation à 3 paramètres

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer qu'il existe un réel x tel que :

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Posons $f : t \mapsto at^4 + bt^3 + ct^2 - (a + b + c)t$, définie sur $\mathbb{R}$.

→ f est continue sur $[0, 1]$ comme fonction polynomiale.

→ f est dérivable sur $]0, 1[$ comme fonction polynomiale.

$$\rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = a + b + c - (a + b + c) = 0 \end{cases} \implies f(0) = f(1)$$

Donc, d'après le théorème de Rolle, $\exists x \in]0, 1[: f'(x) = 0$

$$\implies 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Or, $]0, 1[\subset \mathbb{R}$, donc $\boxed{\exists x \in \mathbb{R} : 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c}$

2.7 Dérivées bornées

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On a f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ intervalle, $a \in \mathbb{R}$ et f'' bornée, donc $\exists M \in \mathbb{R}^{+*} : \forall x \in \mathbb{R}, |f''(x)| \leq M$.

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 en a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M|x-a|^2}{2}$$

Et, en particulier pour $x = a + 1$, $|f(a+1) - f(a) - f'(a)| \leq \frac{M}{2}$

En outre, $|f'(a)| = |-f'(a)| = |-f'(a) + f(a+1) - f(a) - f(a+1) + f(a)|$
 $\implies |f'(a)| \leq |f(a+1) - f(a) - f'(a)| + |f(a+1)| + |f(a)|$ d'après l'inégalité triangulaire

Et, f étant elle aussi bornée, on sait que $\exists M' \in \mathbb{R}^{+*} : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M'$

Donc on a finalement $|f'(a)| \leq \frac{M}{2} + 2M'$, et M et M' sont indépendants de a

D'où f' est elle aussi bornée.

Chapitre 3

Sommes

3.1 Somme des $\cos(k\theta)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(e^{i\theta})^{n+1}-1}{e^{i\theta}-1}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}(e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}-e^{-i(n+1)\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}})}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right) \\ &= \boxed{\cos(n\frac{\theta}{2}) \frac{\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}}\end{aligned}$$

3.2 Produit des entiers pairs / impairs

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les deux produits :

$$\prod_{k=0}^n 2k \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n 2k+1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\rightarrow \prod_{k=1}^n 2k = 2^n \prod_{k=1}^n k = \boxed{2^n n!}$$

$\rightarrow$ On a $\prod_{k=1}^{2n+1} k = \prod_{k=1}^n 2k \times \prod_{k=0}^n 2k+1$, par séparation des indices pairs et impairs

$$\text{Donc } \prod_{k=1}^n 2k+1 = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=0}^n 2k} = \boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}}$$

3.3 Imparité d'une expression

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \\ (2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} \end{cases}$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$ est impair.

Soit $n \in \mathbb{N}$; d'après la formule du binôme, on a :

$$\begin{aligned} \rightarrow (2 + \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k + \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^k \\ &\text{(par séparation des indices pairs et impairs)} \\ \rightarrow (2 - \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1} 3^k + \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{=-1} 3^k \end{aligned}$$

(de la même manière)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k - \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^k \\ \text{Ainsi, posons : } &\begin{cases} a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k \in \mathbb{Z} \\ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } \begin{cases} (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \quad (L_1) \\ (2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} \quad (L_2) \end{cases}$$

En outre :

$$(L_1) + (L_2) \implies (2 + \sqrt{3})^n = 2a_n - (2 - \sqrt{3})^n = (2a_n - 1) + (1 - (2 - \sqrt{3})^n)$$

$$\text{Or, } 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\implies 0 < 2 - \sqrt{3} < 1$$

$$\implies 0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1 \quad (t \mapsto t^n \text{ strict. croissante sur } \mathbb{R}^+)$$

$$\implies 0 < 1 - (2 - \sqrt{3})^n < 1$$

$$\implies 1 - (2 - \sqrt{3})^n \in [0, 1[$$

$$\text{Donc } \lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor = \underbrace{\lfloor (2a_n - 1) \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + (1 - (2 - \sqrt{3})^n) = 2a_n - 1$$

D'où $\boxed{\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor \text{ est impair.}}$

3.4 Formule des colonnes

Prouver que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{i=m}^n \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

1^{er} cas : si $m > n$

Alors $\llbracket m, n \rrbracket = \emptyset$, donc $\sum_{i=m}^n = 0$, par convention

Or, $\binom{n+1}{m+1} = 0$ par convention aussi, donc la formule est valide

2nd cas : sinon

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{i=m}^n \binom{i}{m} &= \sum_{i=m}^n \binom{i}{m} + \binom{i}{m+1} - \binom{i}{m+1} \\ &= \sum_{i=m}^n \binom{i+1}{m+1} - \binom{i}{m+1} \text{ (formule de Pascal)} \\ &= \sum_{i=m+1}^{n+1} \binom{i}{m+1} - \sum_{i=m}^n \binom{i}{m+1} \text{ (changement d'indice)} \\ &= \boxed{\binom{n+1}{m+1}}, \text{ car } \binom{m}{m+1} = 0 \text{ par convention} \end{aligned}$$

3.5 Somme des $\binom{n}{k} \sin(kx)$

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(e^{ikx}) \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k \right), \text{ car } \binom{n}{k} \in \mathbb{R} \text{ (formule de Moivre)} \\ &= \operatorname{Im}((e^{ix} + 1)^n) \text{ (formule du binôme)} \\ &= \operatorname{Im}((e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})) \text{ (factorisation par l'angle moyen)} \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{nx}{2}} \times \underbrace{2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)}_{\in \mathbb{R}} \right) \text{ (formule d'Euler)} \\ &= \boxed{2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)} \end{aligned}$$

Chapitre 4

Intégration

4.1 Application d'une intégration par parties

Calculons $I = \int_0^1 \arcsin(t) dt$

Soit $a \in [0; 1[$. Notons $I(a) = \int_0^a \arcsin(t) dt$

Intégrons par parties en posant $\begin{cases} u : t \mapsto t \\ v : t \mapsto \arcsin(t) \end{cases}$ de classe C^1 sur $[0; a]$
(puisque $[0; a] \subset]-1; 1[$).

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\arcsin(t)}_{v(t)} dt = \underbrace{[t \arcsin(t)]_0^a}_{u(t)v(t)} - \int_0^a \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}_{v'(t)} dt \\ &= a \arcsin(a) - \int_0^a \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = a \arcsin(a) - [-\sqrt{1-t^2}]_0^a \\ &= a \arcsin(a) + \sqrt{1-a^2} - 1 \end{aligned}$$

Or $\lim_{a \rightarrow 1} I(a) = I$. (*)

$$\text{Donc } I = \lim_{a \rightarrow 1} a \arcsin(a) + \sqrt{1-a^2} - 1 = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$$

(*) En effet : la fonction $I : x \mapsto \int_0^x \arcsin(t) dt$ est continue en 1 car $t \mapsto \arcsin(t)$ est continue sur $[-1; 1]$ qui est un intervalle et $0 \in [-1; 1]$ donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, I en est l'unique primitive sur $[-1; 1]$ qui s'annule en 0, ainsi I est dérivable sur $[-1; 1]$ donc I est dérivable en 1, donc I est continue en 1.

4.2 Application d'un changement de variables

Calculons $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \cos(u)$.

Posons $x = \cos(u)$. ($u \mapsto \cos(u)$ est de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$)

(Remarque : pas sur $[0; \frac{1}{2}]$!)

x	u
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$

et $\frac{dx}{du} = -\sin(u) \implies dx = -\sin(u) du$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2(u)}}_{=|\sin(u)|=\sin(u)} (-\sin(u) du) \quad \text{car } \sin(u) \geq 0 \text{ sur } [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}] \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) du \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} \cos(2u) + \frac{1}{2} du \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) du + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 1 du \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) - \left[\frac{\sin(2u)}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \left(0 - \frac{\sin(\frac{2\pi}{3})}{2} \right) \right) \\
 &= \boxed{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}}
 \end{aligned}$$

4.3 Intégrales avec des sin et cos

Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$.

Montrer que $I = J$, et en déduire la valeur de I .

Montrons que $I = J$.

(On peut poser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$; on montre ici une autre méthode.)

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx \\
&= [\ln(|\sin(x) + \cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0 \implies \boxed{I = J}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi : } I &= \frac{2I}{2} = \frac{I + J}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \right) \\
&= \boxed{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

4.4 Intégrale d'une fonction symétrique

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], f(x) = f(a + b - x)$.
Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Effectuons le changement de variable $u = a + b - x$ de classe C^1 sur $[a, b]$.
On a $du = -dx$ et $x = a + b - u$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b x f(x) dx &= \int_a^b x f(a + b - x) dx \quad (\text{propriété de } f) \\
&= \int_b^a -(a + b - u) f(u) du \\
&= \int_a^b (a + b) f(u) - u f(u) du \\
&= (a + b) \int_a^b f(u) du - \int_a^b u f(u) du
\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } 2 \int_a^b x f(x) dx = (a + b) \int_a^b f(x) dx$$

$$\implies \boxed{\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx}$$

Remarque : on peut par exemple calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$ en posant $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}$ et en effectuant le changement de variable $u = -\cos(x)$, ce qui donne $\frac{\pi^2}{4}$.

Chapitre 5

Équations différentielles

5.1 Une résolution d'équation différentielle avec le théorème de superposition

Réolvons $(E) : y' - 2y = \text{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$

ÉQUATION HOMOGÈNE

$$(H) : y' - 2y = 0$$

$x \mapsto -2$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto -2x$ donc $S_H = \{x \mapsto \lambda e^{+2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

SOLUTION PARTICULIÈRE

On a $(E) \Leftrightarrow y' - 2y = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$

Posons $\begin{cases} (E_1) : y' - 2y = \frac{e^x}{2} \\ (E_2) : y' - 2y = \frac{e^{-x}}{2} \end{cases}$

Cherchons une solution particulière de (E_1) de la forme $y_1 : x \mapsto \mu e^x$

$$\begin{aligned} y_1 \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y_1' - 2y_1 = \frac{e^x}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mu e^x - 2\mu e^x = \frac{1}{2}e^x \\ &\Leftrightarrow \mu - 2\mu = \frac{1}{2} \quad (\text{car } e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $y_1 : x \mapsto -\frac{1}{2}e^x$ est solution particulière de (E_1) .

Cherchons une solution particulière de (E_2) de la forme $y_2 : x \mapsto \mu e^{-x}$

$$y_2 \text{ solution de } (E_2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y_2' - 2y_2 = \frac{e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -\mu e^{-x} - 2\mu e^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x} \\
&\Leftrightarrow -\mu - 2\mu = \frac{1}{2} \quad (\text{car } e^{-x} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Donc $y_2 : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-x}$ est solution particulière de (E_2) .

SOLUTIONS

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_E = \{x \mapsto -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^{-x} + \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

5.2 Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Fixons $y \in \mathbb{R}$.

$x \mapsto f(x+y)$ et $x \mapsto f(x) \times f(y)$ sont dérivables comme composée et produit respectivement.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) \times f(y) \implies \frac{d}{dx}[f(x+y)] = \frac{d}{dx}[f(x) \times f(y)] \implies f'(x+y) = f'(x) \times f(y)$.

Pour $y = 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(0)f(x) \implies f' - af = 0$

en posant $a = f'(0)$. C'est une équation différentielle du premier ordre.

$x \mapsto -ax$ est une primitive de $x \mapsto -a$ sur $\mathbb{R}$ donc $S = \{x \mapsto \lambda e^{ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On a donc montré que si f est solution de (E) , alors f est de la forme $x \mapsto \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons les fonctions de S qui sont solution de (E) :

$$\begin{aligned}
&\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lambda e^{a(x+y)} = \lambda e^{ax} \times \lambda e^{ay} \\
&\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lambda e^{a(x+y)} = \lambda^2 e^{a(x+y)} \\
&\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lambda = \lambda^2 \quad (\text{car } e^{a(x+y)} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{0; 1\}
\end{aligned}$$

On a donc montré que si une fonction de S est solution de (E) , alors elle est soit nulle soit de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

On en déduit l'ensemble des solutions de (E) :

$$S = \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto e^{ax} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

5.3 Équation du deuxième ordre à coefficients non constants

On considère l'équation différentielle $(E) : (1 + e^x)y'' + y' - e^xy = 0$.

On pose $z : x \mapsto y(x) + y'(x)$.

Vérifier que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

En déduire les solutions de (E) .

1. On pose $e : x \mapsto y(x) + y'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 (E) : (1 + e^x)y'' + y' - e^xy &= 0 \\
 \Leftrightarrow (1 + e^x)(y'' + y') - e^x(y' + y) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \underbrace{(1 + e^x)}_{\neq 0} z' - e^x z &= 0 \\
 \Leftrightarrow (E_2) : z' + \frac{e^x}{1 + e^x} z &= 0
 \end{aligned}$$

z est donc solution de (E_2) qui est du premier ordre.

2. $x \mapsto -\frac{e^x}{1+e^x}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto -\ln(|1 + e^x|) = -\ln(1 + e^x)$

Donc $S_{H_2} = \{x \mapsto \lambda e^{\ln(1+e^x)} = \lambda(1 + e^x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

De plus, z solution de $(E_2) \Leftrightarrow y$ solution de (E)

Or z solution de $(E_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda(1 + e^x) = y(x) + y'(x)$.

Notons $(E_3) : y' + y = \lambda(1 + e^x)$.

$x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$ donc $S_{H_3} = \{x \mapsto \mu e^{-x} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

Cherchons une solution particulière de (E_3) par la méthode de variation de la constante.

On pose $y_0 : x \mapsto c(x)e^{-x}$ avec c une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors : y_0 solution de (E_3)

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, y_0(x) + y_0'(x) &= \lambda(1 + e^x) \\
 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, c'(x)e^{-x} + \cancel{c(x)e^{-x}} - \cancel{c(x)e^{-x}} &= \lambda(1 + e^x) \\
 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, c'(x) &= \lambda e^{2x} + \lambda e^x \quad (e^{-x} \neq 0)
 \end{aligned}$$

Prenons par exemple $c(x) = \lambda \frac{1}{2} e^{2x} + \lambda e^x$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Alors $y_0(x) = \lambda(\frac{e^{2x}}{2} + e^x)e^{-x} = \lambda(\frac{e^x}{2} + 1)$

Ainsi :

$$S_E = \{x \mapsto \lambda(\frac{e^x}{2} + 1) + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Chapitre 6

Structures algébriques - Ensembles

6.1 $\sqrt{2}$ est irrationnel

Par l'absurde : supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Alors $\exists !(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : \begin{cases} \sqrt{2} = \frac{p}{q} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

Donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$

Donc $p^2 = 2q^2$

Donc p^2 est pair

Donc p est pair (en effet : par la contraposée : si p impair, notons $p = 2k + 1$
donc $p^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$ donc p^2 impair)

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} : p = 2k$

Donc $p^2 = 4k^2 = 2q^2$

Donc $q^2 = 2k^2$

Donc q est pair

Donc p et q sont pairs, ce qui contredit $p \wedge q = 1$

6.2 Inclusion, intersection, union

Soient E un ensemble, et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

Montrons que $B \subset C \Leftrightarrow \begin{cases} (A \cap B) \subset (A \cap C) \\ (A \cup B) \subset (A \cup C) \end{cases}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $B \subset C$.

— Soit $x \in (A \cap B)$.

Alors $x \in A$ et $x \in B$.

Or, $x \in B \implies x \in C$, car $B \subset C$.
 Donc $x \in (A \cap C)$.
 — Soit $x \in (A \cup B)$.
 Alors $x \in A$ ou $x \in B$.
 Or, $x \in B \implies x \in C$, car $B \subset C$.
 Donc $x \in (A \cup C)$.
 Ainsi, $\begin{cases} (A \cap B) \subset (A \cap C) \\ (A \cup B) \subset (A \cup C) \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\begin{cases} (A \cap B) \subset (A \cap C) \\ (A \cup B) \subset (A \cup C) \end{cases}$

Soit $x \in B$.

- 1^{er} cas : si $x \in A$.
 Alors $x \in (A \cap B)$.
 Donc $x \in (A \cap C)$.
 D'où $x \in C$.
- 2nd cas : si $x \notin A$.
 On a $x \in (A \cup B)$, car $x \in B$.
 Donc $x \in (A \cup C)$.
 D'où $x \in C$, puisque $x \notin A$.

Ainsi, $B \subset C$.

6.3 Démonstration qu'une certaine application est une loi de composition interne

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = x + y - x \times y$. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne, et préciser ses caractéristiques en tant que telle : commutative ? associative ? Dotée d'un élément neutre ? d'éléments symétrisables ? Et si oui, lesquels ?

→ Montrons que $\star$ est une loi de composition interne (i.e. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y \in \mathbb{R}$).

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $x \star y = x + y - x \times y \in \mathbb{R}$.

→ Montrons que $\star$ est commutative (i.e. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = y \star x$).

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $x \star y = x + y - x \times y = y + x - y \times x = y \star x$, car $+$ et $\times$ sont commutatives dans $\mathbb{R}$.

→ Montrons que $\star$ est associative (i.e. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$).

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On a :

$$(x \star y) \star z = (x + y - x \times y) \star z$$

$$\begin{aligned}
&= (x + y - x \times y) + z - (x + y - x \times y) \times z \\
&= x + y - x \times y + z - x \times z - y \times z + x \times y \times z \\
&= x + (y + z - y \times z) - x \times (y + z - y \times z) \\
&= x \star (y + z - y \times z) \\
&= x \star (y \star z)
\end{aligned}$$

—> Montrons que 0 est élément neutre de $\star$ $\left(\text{i.e. } \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x \star 0 = x \\ 0 \star x = x \end{cases} \right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $x \star 0 = x + 0 - x \times 0 = x$, et $0 \star x = x \star 0 = x$, car $\star$ est commutative.

—> Montrons que tout élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ est symétrisable par $\star$, et que $\forall x \in$

$$\mathbb{R} \setminus \{1\}, x^{-1} = \frac{x}{x-1} \left(\text{i.e. } \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x \star \frac{x}{x-1} = 0 \\ \frac{x}{x-1} \star x = 0 \end{cases} \right).$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On a $x \star \frac{x}{x-1} = x + \frac{x}{x-1} - x \times \frac{x}{x-1} = 0$, et $\frac{x}{x-1} \star x = x \star \frac{x}{x-1} = 0$, car $\star$ est commutative.

Au contraire, soit $x = 1$.

Par l'absurde, supposons x symétrisable par $\star$.

$$\text{Alors } \exists y \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \star y = 0 \\ y \star x = 0 \end{cases}.$$

Or, $x \star y = 0 \implies 1 + y - 1 \times y = 0 \implies 1 = 0$, ce qui est absurde.

Donc 1 n'est pas symétrisable par $\star$.

6.4 Images directe et réciproque d'une réunion de deux ensembles

Soit E un ensemble.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \begin{cases} f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{cases}$$

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

• Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Soit $x \in f(A \cup B)$

Donc $\exists y \in A \cup B : f(y) = x$

1^{er} cas : si $y \in A$

Alors $\exists y \in A : f(y) = x$

Donc $x \in f(A)$

2^e cas : si $y \notin A$, alors $y \in B$

Donc $\exists y \in B : f(y) = x$

Donc $x \in f(B)$

→ On a montré que $x \in f(A)$ ou $x \in f(B)$

Donc $x \in f(A) \cup f(B)$

• Montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Soit $x \in f(A) \cup f(B)$

1^{er} cas : si $x \in f(A)$

Alors $\exists y \in A : f(y) = x$

Or $A \subset A \cup B$

Donc $\exists y \in A \cup B : f(y) = x$

Donc $x \in f(A \cup B)$

2^e cas : si $x \notin f(A)$, alors $x \in f(B)$

Donc $\exists y \in B : f(y) = x$

$B \subset A \cup B$

Donc $\exists y \in A \cup B : f(y) = x$

Donc $x \in f(A \cup B)$

Dans tous les cas $x \in f(A \cup B)$

• Montrons que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$x \in f^{-1}(A \cup B)$

$\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

6.5 Différence symétrique de deux ensembles

Soit E un ensemble.

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on appelle différence symétrique de A et B la partie de E notée par $A \Delta B$ définie par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Montrer que $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3, A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.
3. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer les parties X de E telles que $A \Delta X = \emptyset$.

$$\begin{aligned}
 1. \quad A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\
 &= (A \cup B) \cap C_E(A \cap B) \\
 &= (A \cup B) \cap (C_E(A) \cup C_E(B)) \\
 &= \underbrace{(A \cap C_E(A))}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(A \cap C_E(B))}_{=A \setminus B} \cup \underbrace{(B \cap C_E(A))}_{=B \setminus A} \cup \underbrace{(B \cap C_E(B))}_{=\emptyset} \\
 &= \boxed{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}
 \end{aligned}$$

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $B = C$. Alors $A\Delta B = A\Delta C$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A\Delta B = A\Delta C$.

Montrons que $B = C$.

→ Montrons que $B \subset C$

Soit $x \in B$.

• 1^{er} cas : si $x \notin A$

Alors $x \in B \setminus A$.

Or $x \in A\Delta B = A\Delta C$

Donc $x \in C \setminus A$ ou $x \in A \setminus C$, mais comme $x \notin A$, $x \notin A \setminus C$ donc $x \in C \setminus A$ donc $x \in C$.

• 2nd cas : si $x \in A$

Alors $x \notin B \setminus A$ et $x \notin A \setminus B$.

Donc $x \notin A\Delta B = A\Delta C$.

Donc $x \notin C \setminus A$ et $x \notin A \setminus C$

Mais si $x \notin A \setminus C$ alors que $x \in A$, c'est que $x \in C$.

Finalement : $\boxed{B \subset C}$

→ Les rôles étant symétriques : $C \subset B$ donc $\boxed{B = C}$.

$$\begin{aligned} 3. \quad A\Delta X = \emptyset &\Leftrightarrow (A \setminus X) \cup (X \setminus A) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \setminus X = \emptyset \quad \text{et} \quad X \setminus A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \subset X \quad \text{et} \quad X \subset A \\ &\Leftrightarrow \boxed{X = A} \end{aligned}$$

6.6 Groupe des éléments commutatifs

Soit $(G, \star)$ un groupe. On pose $C = \{x \in G \mid \forall y \in G, x \star y = y \star x\}$

Montrer que $(C, \star)$ est un groupe.

Montrons que $(C, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

— $C \subset G$ par définition

— $C \neq \emptyset$ car e étant l'élément neutre de $(G, \star)$, on a $\forall y \in G, y \star e = e \star y$ donc $e \in C$.

— $\forall (x, y) \in C^2, x \star y^{-1} \in C$.

Lemme : $\forall x \in C, x^{-1} \in C$.

Soit $x \in C$.

$$\begin{aligned} \forall y \in G, x \star y &= y \star x \\ \implies x^{-1} \star x \star y \star x^{-1} &= x^{-1} \star y \star x \star x^{-1} \\ \implies y \star x^{-1} &= x^{-1} \star y \\ \implies x^{-1} &\in C \end{aligned}$$

Montrons que $\forall z \in G, (x \star y^{-1}) \star z = z \star (x \star y^{-1})$.

$$(x \star y^{-1}) \star z = x \star (y^{-1} \star z)$$

$$\begin{aligned} &= x \star (z \star y^{-1}) \quad (\text{car } y^{-1} \in C) \\ &= (x \star z) \star y^{-1} \\ &= (z \star x) \star y^{-1} \quad (\text{car } x \in C) \\ &= \boxed{z \star (x \star y^{-1})} \end{aligned}$$

$((G, \star)$ est un groupe donc $\star$ est associative).

Chapitre 7

Limites et continuité

7.1 Convergence d'une intégrale

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\cos^2(t)}{1+t^2} dt \in \mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{\cos^2(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, f en est l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

En particulier, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \frac{\cos^2(x)}{1+x^2} \geq 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, x], \quad \frac{\cos^2(t)}{1+t^2} &\leq \frac{1}{1+t^2} \\ \implies \int_0^x \frac{\cos^2(t)}{1+t^2} dt &\leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ \implies f(x) &\leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc f est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{f \text{ converge}}$.

7.2 Minimum d'une fonction divergente

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^+$.

On a, d'après la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ appliquée à $A = |f(0)| + 1 > 0$:

$$\exists a > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^+, x \geq a \implies f(x) \geq |f(0)| + 1 \implies f(x) \geq f(0)$$

De plus, $[0, a] \subset \mathbb{R}^+$ donc f est continue sur $[0, a]$, donc d'après le théorème des bornes atteintes, $M = \min_{x \in [0, a]} f(x)$ existe.

Montrons que $M = \min_{x \in \mathbb{R}^+} f(x)$.

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq M$.

1^{er} cas : si $x \geq a$

$0 \in [0, a]$ donc $f(0) \geq M$. Or $f(x) \geq f(0)$ donc $f(x) \geq M$.

2nd cas : si $0 \leq x \leq a$

Alors $f(x) \geq M$ Dans tous les cas, $f(x) \geq M$.

Donc $M = \min_{x \in \mathbb{R}^+} f(x)$,

Donc $\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}^+}$.

7.3 Températures terrestres

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que $\exists c \in [0, 1 - \frac{1}{n}] : f(c + \frac{1}{n}) = f(c)$.

Indications... *

Interprétation : supposons que les températures à l'équateur sont continues. On détermine un point qui sera le 0, puis on ramène la description du tour du globe à l'intervalle $[0, 1]$ (c'est-à-dire que, 1 correspond au tour complet – car $f(0) = f(1)$ – et $\frac{1}{2}$ correspond au point diamétralement opposé au 0).

Par exemple, pour $n = 2$, cette propriété affirme qu'il existe deux points diamétralement opposés à l'équateur avec la même température.

Résultat préliminaire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \cancel{f\left(\frac{k}{n}\right)} - f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \cancel{f\left(\frac{k}{n}\right)} \\ &= -f(0) + f(1) = 0 \end{aligned}$$

*. Considérer $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$

On pose $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$

Cette somme ci-dessus vaut 0 et ne peut avoir tous ses termes strictement positifs ou strictement négatifs donc il existe $a \leq b$ dans $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ tels que $g(a) \times g(b) \leq 0$.

Résolution :

Posons $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

g est continue sur $[0; 1 - \frac{1}{n}]$ comme somme et composée de fonctions continues.

D'après le résultat préliminaire, $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.

Ses termes ne sont donc ni tous strictement négatifs, ni tous strictement positifs, donc il existe un $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $g(0)$ et $g(\frac{k}{n})$ soient de signes différents, i.e. $g(0) \times g(\frac{k}{n}) \leq 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [0, \frac{k}{n}] \subset [0; 1 - \frac{1}{n}] : g(c) = 0$

$$\implies \boxed{\exists c \in [0; 1 - \frac{1}{n}] : f(c + \frac{1}{n}) = f(c)}$$

Chapitre 8

Suites

8.1 Théorème de Césaro

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l \in \mathbb{C}$.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$$

Le théorème de Césaro – dont la démonstration est le but de cet exercice – stipule que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = l$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour guider la preuve, le lecteur est invité à montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |M_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - l|$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1 \implies |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1 \implies \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour terminer la preuve ensuite.

-
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |M_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - l|$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, M_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k \\ \implies M_n - l &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k - l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies |M_n - l| = \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n z_k - ln \right) \right| \\
&\implies |M_n - l| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n z_k - l^\dagger \right| \quad \left(\frac{1}{n} > 0 \right) \\
&\implies |M_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - l| \quad (\text{inégalité triangulaire})
\end{aligned}$$

- Montrons que $\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1 \implies |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
D'après la définition de $z_n \rightarrow l$ appliquée à $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1 \implies |z_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_1 \implies \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $n \geq n_1$.

$$\begin{aligned}
&\forall k \in \llbracket n_1, n \rrbracket, |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad ((*) \text{ avec } k \text{ au lieu de } n) \\
&\implies \sum_{k=n_1}^n |z_k - l| \leq \sum_{k=n_1}^n \frac{\varepsilon}{2} \\
&\implies \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l| \leq \frac{1}{n} \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{indep. } k} \sum_{k=n_1}^n 1 \quad \left(\frac{1}{n} > 0 \right) \\
&\implies \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2n} (n - n_1 + 1) \\
&\implies \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} - \underbrace{\varepsilon \left(\frac{n_1 - 1}{2n} \right)}_{\geq 0} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\
&\implies \boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}$$

- Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \implies |M_n - l| \leq \varepsilon$
Soit $\varepsilon > 0$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_1$.

$$\text{On a : } |M_n - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - l| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |z_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l|$$

$$\dagger. \quad ln = l \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n l$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |z_k - l|}_{\text{indep. } n} = 0$$

Donc d'après la définition appliquée à $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_2 \implies \underbrace{\left| \overbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |z_k - l|}^{\geq 0} - 0 \right|}_{= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |z_k - l|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Soit $n \geq n_0$. Donc :

$$|M_n - l| \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |z_k - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } n \geq n_0 \geq n_1} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^n |z_k - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } n \geq n_0 \geq n_2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = l}$

8.2 Simplification d'une expression par un équivalent

Déterminer un équivalent simple de $u_n = \arccos\left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}\right)$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} n^3 + 1 \sim n^3 \\ n^3 + 2 \sim n^3 \end{cases} \quad (1) \\ \implies & \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} \sim \frac{n^3}{n^3} = 1 \\ \implies & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \implies & \lim_{n \rightarrow +\infty} \arccos\left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}\right) = \arccos(1) \\ \implies & \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \implies & \cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2} \\ \implies & \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies u_n^2 \sim -2\left(\frac{n^3+1}{n^3+2} - 1\right) \\
&\implies |u_n| \sim \sqrt{-2\left(\frac{n^3+1-(n^3+2)}{n^3+2}\right)} \\
&\implies \boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{2}{n^3}}} \quad (3) \quad (4)
\end{aligned}$$

(1) : suites polynomiales

(2) : car $\frac{n^3+1}{n^3+2} \in [-1; 1]$ et $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x$.

(3) : $\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) \in [0, \pi]$ donc $|u_n| = u_n$.

(4) : car $n^3 + 2 \sim n^3$

8.3 Étude de suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in [0; 2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$

On pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Intervalle de stabilité :

$$\begin{aligned}
&\forall t \in [0; 2], 0 \leq t \leq 2 \\
&\implies f(0) \leq f(t) \leq f(2) \quad (f \text{ est croissante}) \\
&\implies 0 \leq 1 \leq f(t) \leq \sqrt{3} \leq 2 \\
&\implies f(t) \in [0; 2] \\
&\implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 2]
\end{aligned}$$

Point fixe :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \\
&\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi
\end{aligned}$$

(car on travaille sur l'intervalle $[0; 2]$)

f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne :

f est continue sur $[0, 2]$ et dérivable sur $]0; 2[$ (comme composée de telles fonctions)

De plus, $\forall x \in]0; 2[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2} \geq 0$

D'après l'Inégalité des Accroissements Finis, f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0; 2]$.

Majoration :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 2], \varphi \in [0; 2], f(\varphi) = \varphi$ et f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\varphi)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \varphi| \implies |u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{2} |u_n - \varphi|$$

On note par récurrence évidente* que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \varphi| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \varphi|$.

Or $|\frac{1}{2}| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{|u_0 - \varphi|}_{\text{indep. } n} = 0$

D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \varphi}$

*. $|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \varphi| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n+2} - \varphi| \leq \frac{1}{2^3} |u_{n-3} - \varphi| \leq \dots$

Chapitre 9

Arithmétique

9.1 Infinitude de $4\mathbb{P} + 3$

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Par l'absurde, supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombre premiers de la forme $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$).

Notons-les $p_1, \dots, p_n$ et posons $m = 4(p_1 \times \dots \times p_n) - 1$.

Soit p un diviseur premier de m .

$p \neq 2$ car m est impair donc p s'écrit soit $4k + 1$ soit $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Or ce second cas n'est pas possible : en effet, si c'était le cas, p diviserait m et $m + 1 = 4(p_1 \dots p_n)$ donc p diviserait $m + 1 - m = 1$, ce qui est absurde.

Ainsi, tous les facteurs premiers de m sont congrus à 1 modulo 4.

Or l'écriture de m prouve qu'il est congru à -1 modulo 4.

Par transitivité, $-1 \equiv 1 [4]$, ce qui est absurde.

9.2 PGCD de deux expressions

Calculer $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = (5^n + 6^n) \wedge (5^{n+1} + 6^{n+1})$

En appliquant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{cases} 5^{n+1} + 6^{n+1} = 5(5^n + 6^n) + 5^n \\ 0 \leq 6^n < 5^n + 6^n \end{cases}$$
$$\begin{cases} 5^n + 6^n = 1 \cdot 6^n + 5^n \\ 0 \leq 5^n < 6^n \end{cases}$$

Donc $P_n = (5^n + 6^n) \wedge (5^{n+1} + 6^{n+1}) = 5^n \wedge 6^n$

Or $5 \wedge 6 = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 5^n \wedge 6^n = 1$.

Donc $\boxed{P_n = 1}$

Chapitre 10

Développements limités

10.1 Développement limité de la bijection réciproque

On définit $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

On admet les trois points suivants :

- f admet le $DL_3(0)$: $f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ (cf. méthode 9.2)
- f induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 2 \tan^2(x) - 1 > 0$

(Le lecteur peut à loisir démontrer ces trois points.)

Démontrer que f^{-1} possède un $DL_3(0)$ et le calculer.

f est de classe C^3 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions de classe C^3 , et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0$, donc f^{-1} est de classe C^3 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

D'après le théorème de Taylor-Young, f^{-1} possède un $DL_3(0)$.

Notons-le $f^{-1}(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + o(x^3)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, on peut écrire :

$$f^{-1}(f(x)) = u_0 + u_1f(x) + u_2f(x)^2 + u_3f(x)^3 + \underbrace{o(f(x)^3)}_{=o(x^3)}$$

$$\text{Or } \begin{cases} f(x)^2 = x^2 + o(x^3) \\ f(x)^3 = x^3 + o(x^3) \end{cases}$$

Donc $f^{-1}(f(x)) = u_0 + u_1(x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)) + u_2(x^2 + o(x^3)) + u_3(x^3 + o(x^3)) + o(x^3)$

D'autre part : $f^{-1}(f(x)) = x = x + o(x^3)$

Donc, par unicité du développement limité : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $\frac{2}{3}u_1 + u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = -\frac{2}{3}$

Finalement : $\boxed{f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}$

10.2 Équivalent simple d'une expression

Soient a et b deux réels non nuls distincts.

Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de l'expression $(1+ax)^{\frac{1}{a}} - (1+bx)^{\frac{1}{b}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} ax = 0 \text{ donc } (1+ax)^{\frac{1}{a}} = 1 + \frac{1}{a}(ax) + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - 1\right)\frac{(ax)^2}{2} + o((ax)^2) = 1 + x + \frac{1-a}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{De même } (1+bx)^{\frac{1}{b}} = 1 + x + \frac{1-b}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Donc } (1+ax)^{\frac{1}{a}} - (1+bx)^{\frac{1}{b}} = \frac{b-a}{2}x^2 + o(x^2).$$

Or $\frac{b-a}{2} \neq 0$ car $a \neq b$, donc :

$$\boxed{(1+ax)^{\frac{1}{a}} - (1+bx)^{\frac{1}{b}} \underset{0}{\sim} \frac{b-a}{2}x^2}$$

10.3 "Taux d'accroissement" pour la dérivée seconde

Soit f de classe C^2 sur un intervalle I contenant a .

Montrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

f est de classe C^2 sur un intervalle I et $a \in I$ donc d'après la formule de Taylor-Young f admet au voisinage de a le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2) \\ f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2) \end{cases}$$

Par addition :

$$\begin{aligned} f(a+h) + f(a-h) &= 2f(a) + f''(a)h^2 + o(h^2) \\ \implies \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} &= f''(a) + \underbrace{\frac{o(h^2)}{h^2}}_{=o(1)} \\ \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} f''(a) + o(1) = \boxed{f''(a)} \end{aligned}$$

Chapitre 11

Polynômes et Fractions rationnelles

11.1 Coefficient d'une partie polaire d'un pôle simple dans le cas particulier $\frac{P}{Q'}$

Décomposons en éléments simples $F = \frac{1}{X^n - 1}$

F est sous forme irréductible, $\deg(F) = -n < 0 \implies [F] = 0$

Les racines de $X^n - 1$ sont les racine n -ièmes de 1, i.e. $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ qui sont simples.

La décomposition en éléments simples de F est alors $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - e^{ik\frac{2\pi}{n}}}$

et $\alpha_k = \frac{P(e^{ik\frac{2\pi}{n}})}{Q'(e^{ik\frac{2\pi}{n}})}$ avec $P = 1$ et $Q = X^n - 1 \implies Q' = nX^{n-1}$

$$\implies \alpha_k = \frac{1}{n(e^{ik\frac{2\pi}{n}})^{n-1}} = \frac{e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{n(e^{ik\frac{2\pi}{n}})^n} = \frac{e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{n}$$

Finalement $\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{\frac{1}{n} e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{X - e^{ik\frac{2\pi}{n}}}}$

11.2 Division euclidienne dépendant de n

Soient $n \geq 2$, $A = X^n - X + 1$ et $B = X^2 - 3X + 2$.

Calculer le reste de la division euclidienne de A par B .

Notons Q et R les quotient en reste de la division euclidienne de A par B .

$$\text{Alors : } \begin{cases} A = BQ + R & (*) \\ \deg(R) < \deg(B) = 2 \end{cases}$$

Notons donc $R = aX + b$ avec a et b deux réels.

En substituant 1 à X dans $(*)$, on trouve : $A(1) = B(1)Q(1) + R(1) \Leftrightarrow 1 = a + b$

De même, en substituant 2 à X dans $(*)$, on trouve : $2^n - 1 = 2a + b$

$$\text{Donc } \begin{cases} a = 2^n - 2 \\ b = 3 - 2^n \end{cases}, \text{ donc } \boxed{R = (2^n - 2)X + (3 - 2^n)}$$

11.3 Utilisation des relations coefficients-racines

Soit $P = X^3 + 2X^2 - X + 3$. On note α_1, α_2 et α_3 ses racines.

Sans déterminer α_1, α_2 ni α_3 , calculer $\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \\ \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \end{cases}$

D'après les relations coefficients-racines :

$$\begin{cases} \sigma_1 = (-1)^1 \frac{a_3 - 1}{a_3} \implies \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -2 & (1) \\ \sigma_2 = (-1)^2 \frac{a_3 - 2}{a_3} \implies \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -1 & (2) \\ \sigma_3 = (-1)^3 \frac{a_3 - 3}{a_3} \implies \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -3 & (3) \end{cases}$$

Alors $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{-1}{-3} = \boxed{\frac{1}{3}}$ d'après (2) et (3).

Et $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = (-2)^2 - 2 \times (-1) = \boxed{6}$ d'après (1) et (3).

11.4 Propriété de racines simples

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ dont toutes les racines $x_1, \dots, x_n$ sont simples non nulles.

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Posons $F = \frac{1}{P} \in \mathbb{C}(X)$.

Puisque tous les pôles sont simples et $x_k \in \mathbb{C}$, on peut décomposer F en éléments

simples sous la forme $F = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X - x_k}$ où $\alpha_k = \frac{1}{P'(x_k)}$ (cf. démo 12.11).

$$\text{Donc } F = \sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)(X - x_k)} = \frac{1}{P}$$

En substituant 0 à X dans F , on trouve : $F(0) = \frac{1}{P(0)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{-x_k P'(x_k)}$

($P(0) \neq 0$ car $x_k \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de P .)

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}}$$

Chapitre 12

Espaces vectoriels

12.1 Égalité de deux sous-espaces vectoriels engendrés

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et x, y des vecteurs de E .

$$\text{vect}(x, y) = \text{vect}(x + y, x - y)$$

$$\rightarrow \text{vect}(x, y) \subset \text{vect}(x + y, x - y)$$

$\text{vect}(x + y, x - y)$ est une sous-espace vectoriel de E et

$$x \in \text{vect}(x + y, x - y) \text{ car } x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)$$

$$y \in \text{vect}(x + y, x - y) \text{ car } y = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y)$$

Or $\text{vect}(x, y)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et y .

Donc $\text{vect}(x, y) \subset \text{vect}(x + y, x - y)$

$$\rightarrow \text{vect}(x + y, x - y) \subset \text{vect}(x, y)$$

$\text{vect}(x, y)$ est une sous-espace vectoriel de E et

$$x + y \in \text{vect}(x, y)$$

$$x - y \in \text{vect}(x, y)$$

Or $\text{vect}(x + y, x - y)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $x + y$ et $x - y$.

Donc $\text{vect}(x + y, x - y) \subset \text{vect}(x, y)$

12.2 Noyau, image et composée nulle d'applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

$$g \circ f = 0_{\mathcal{F}(E, G)} \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

$\Rightarrow$ Supposons $g \circ f = 0_{\mathcal{F}(E,G)}$
 Soit $x \in \text{Im}(f)$
 Donc $\exists x' \in E : f(x') = x$
 Donc $g(f(x')) = g(x)$
 Or $g(f(x')) = (g \circ f)(x') = (0_{\mathcal{F}(E,G)})(x') = 0_G$
 Donc $g(x) = 0_G$
 Donc $x \in \text{Ker}(g)$

$\Leftarrow$ Supposons $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$
 Soit $x \in E$
 Donc $f(x) \in \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$
 Donc $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0_G$
 Donc $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = 0_G$
 Donc $(g \circ f) = 0_{\mathcal{F}(E,G)}$

12.3 Exemple d'endomorphisme surjectif non injectif et inversement

Surjectif non injectif

Posons $\left| \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$
 $\rightarrow \varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$
 $\rightarrow \varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$
 $\rightarrow \varphi$ est linéaire car $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$
 $\rightarrow \varphi$ n'est pas injective puisque $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ puisque $1 \in \text{Ker}(\varphi)$
 $\rightarrow \varphi$ est surjectif car $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}[X]$
 $\subseteq$: car c'est un sous-espace vectoriel
 $\supseteq$: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$
 Notons le $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$
 Donc $P' = (\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1})' = \varphi(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1})$
 Donc $P \in \text{Im}(\varphi)$

Injectif non surjectif

Posons $\left| \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$
 $\rightarrow \varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$
 $\rightarrow \varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$
 $\rightarrow \varphi$ est linéaire car $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \varphi(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q) = \lambda XP + \mu XQ = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$

→ φ n'est pas surjective puisque $Im(\varphi) \neq \mathbb{K}[X]$ puisque $1 \notin Im(\varphi)$

Par l'absurde : $1 \in Im(\varphi) \implies \exists P \in \mathbb{K}[X] : 1 = XP$

$\implies \underbrace{\deg(1)}_{=0} = \underbrace{\deg(X)}_{=1} + \underbrace{\deg(P)}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}}$, ce qui est absurde.

→ φ est injective car $Ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$

$\supseteq$: car $Ker(\varphi)$ un sous-espace vectoriel de E

$\subseteq$: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

Donc $\varphi(P) = XP = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ (car $X \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$)

Chapitre 13

Espaces préhilbertiens réels

13.1 La trace forme un produit scalaire sur les matrices

Montrons que $\left| \begin{array}{ccc} S : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto \text{tr}({}^t A \cdot B) \end{array} \right|$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Forme : par définition

$$\begin{aligned} \textbf{Symétrie : } \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, S(A, B) &= \text{tr}({}^t A \cdot B) \\ &= \text{tr}({}^t({}^t A \cdot B)) = \text{tr}({}^t(B) \cdot {}^t({}^t A)) = \text{tr}({}^t B \cdot A) = \boxed{S(B, A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Linéarité à gauche : } \forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \\ S(\lambda A + \mu B, C) &= \text{tr}({}^t(\lambda A + \mu B) \cdot C) = \text{tr}(\lambda {}^t A C + \mu {}^t B C) \\ &= \lambda \text{tr}({}^t A \cdot C) + \mu \text{tr}({}^t B \cdot C) = \boxed{\lambda S(A, C) + \mu S(B, C)} \\ &\text{(par linéarité de la transposition et de la trace).} \end{aligned}$$

Linéarité à droite : par symétrie et linéarité à gauche

Positivité : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Notons } A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et } {}^t A \cdot A = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ où } b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j}.$$

$$\text{Alors } S(A, A) = \text{tr}({}^t A \cdot A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{k,i} a_{k,i}}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

$$\textbf{Définition : } \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), S(A, A) = 0 \implies \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{k,i}^2}_{\in \mathbb{R} \Rightarrow \geq 0} = 0$$

$$\implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{k,i}^2}_{\in \mathbb{R} \Rightarrow \geq 0} = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{k,i}^2 = 0$$

$$\implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = 0 \implies \boxed{A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$$

13.2 Calcul de l'image d'une rotation

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ usuel, $x = (1, 2)$ et φ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer $\varphi(x)$.

En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \text{Comp}_{\mathcal{B}}(\varphi(x)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \text{Comp}_{\mathcal{B}}(x) = R\left(\frac{\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(x) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}$

Remarque : l'outil complexe permet également d'effectuer ce calcul :
Notons $z = 1 + 2i$ l'affixe de x et z' l'affixe de $\varphi(x)$.

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

Donc $\boxed{\varphi(x) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}$

13.3 Caractérisation d'une rotation par sa matrice

Soient $A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f son application linéaire canoniquement associée.
Reconnaître f .

${}^t M \cdot M = I_2$ et $\det(M) = 1 \implies M \in SO_2(\mathbb{R})$.

La base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^2$ est orthonormale directe donc :

$$\exists ! \theta \in]-\pi, \pi] : M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Or $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$, et $\mathcal{B}_c$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ donc $M \in O_2(\mathbb{R}) \implies f \in O(\mathbb{R}^2)$.

De plus, $\det(f) = \det(M) = 1$, donc $f \in SO(\mathbb{R}^2)$.

Donc f est une rotation d'angle θ .

Par ailleurs, $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \implies \boxed{\theta = \arctan(2)}$

13.4 Caractérisation d'une réflexion par sa matrice

Soient $A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f son application linéaire canoniquement associée.
Reconnaitre f .

$${}^t A \cdot A = I_2 \text{ et } \det(A) = -1 \implies f \in O(\mathbb{R}^2) \setminus SO(\mathbb{R}^2)$$

Donc f est une réflexion de $\mathbb{R}^2$.

Déterminons son axe Δ .

$$\text{On sait que } \Delta = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x\}$$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = \sqrt{5}x_1 \\ 2x_1 + x_2 = \sqrt{5}x_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{=\varphi} x_2 \\ (1 - \sqrt{5} + \underbrace{\frac{4}{1 + \sqrt{5}}}_{=0}) x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \varphi x_2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\Delta = \text{vect}((1, \varphi))}$$

13.5 Représentation des isométries vectorielles

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que :

$$[\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : \exists \varphi \in O(E) : f = \lambda \varphi$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : \exists \varphi \in O(E) : f = \lambda \varphi$.

Montrons que $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0$.

Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} (x|y) = 0 &\implies (\varphi(x)|\varphi(y)) = 0 \quad (\text{car } \varphi \in O(E)) \\ &\implies \lambda^2 (\varphi(x)|\varphi(y)) = 0 \\ &\implies (\lambda \varphi(x)|\lambda \varphi(y)) = 0 \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{(f(x)|f(y)) = 0}$$

$\boxed{\implies}$ Supposons $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0 \quad (*)$.

Montrons que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : \exists \varphi \in O(E) : f = \lambda\varphi$.

1^{er} cas : si $f = 0_{\mathcal{L}_E}$, posons $\lambda = 0 \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi = id_E \in O(E)$. Alors $f = \lambda\varphi$.

2nd cas : si $f \neq 0_{\mathcal{L}_E}$, alors $\exists \alpha \in E : f(\alpha) \neq 0_E$.

Comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_E$ donc $\alpha \neq 0_E$.

Posons $u = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ qui est unitaire.

Posons $\varphi = \frac{1}{\lambda}f$ avec $\lambda = \|f(u)\| > 0$ car $\|f(u)\| = \underbrace{\frac{1}{\|\alpha\|}}_{>0} \underbrace{\|f(\alpha)\|}_{\neq 0_E}$.

• Montrons que $\forall (x, y) \in E^2, \|x\| = \|y\| \implies \|f(x)\| = \|f(y)\| \quad (**)$:

$$\begin{aligned} \|x\| = \|y\| &\implies \sqrt{(x|x)} = \sqrt{(y|y)} \\ &\implies (x|x) = (y|y) \\ &\implies (x|x) - (y|y) + (x|y) - (y|x) = 0 \\ &\implies (x + y|x - y) = 0 \\ &\implies (f(x + y)|f(x - y)) = 0 \quad (\text{d'après } (*)) \\ &\implies (f(x)|f(x)) - \overline{(f(x)|f(y))} + \overline{(f(y)|f(x))} - (f(y)|f(y)) = 0 \\ &\implies (f(x)|f(x)) = (f(y)|f(y)) \\ &\implies \boxed{\|f(x)\| = \|f(y)\|} \end{aligned}$$

• Montrons que $\varphi \in O(E)$, i.e. $\forall x \in E, \|\varphi(x)\| = \|x\|$:

D'après (**): $\|x\| = \|\|x\| \cdot u\| \implies \|f(x)\| = \|f(\|x\| \cdot u)\| \implies \|f(x)\| = \|x\| \cdot \|f(u)\| = \lambda\|x\|$ (car $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\|x\| \geq 0$)

Donc $\|\varphi(x)\| = \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\geq 0} \|f(x)\| = \|x\|$

On a bien $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in O(E)$ tels que $\boxed{f = \lambda\varphi}$

Chapitre 14

Séries

14.1 Équivalent de la somme harmonique

On note $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ la somme harmonique.

$$H_n \sim \ln(n)$$

• $\forall k \in \mathbb{N}^*,$

$\forall t \in [k; k+1], k \leq t \leq k+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \quad (\text{car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*})$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\text{indep. } t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{indep. } t} dt \quad (\text{car } k+1 \geq k)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dt$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*.$

En sommant la première inégalité pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}}_{l=k+1} &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \\ \Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} &\leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \quad (\text{Relation de Chasles}) \\ \Rightarrow H_n - 1 &\leq \ln(n) - \ln(1) \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{H_n \leq \ln(n) + 1}$$

En sommant la seconde inégalité pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\implies \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq H_n \quad (\text{Relation de Chasles}) \\ &\implies \ln(n) \leq \ln(n+1) \leq H_n \\ &\implies \boxed{\ln(n) \leq H_n} \end{aligned}$$

• On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$

Donc $\forall n \geq 2, 1 \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$ (car $\ln(n) \geq 0$)

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$

Donc $\boxed{H_n \sim \ln(n)}$

14.2 Utilisation du critère de négligeabilité

Montrons que $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

$$\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ car } \frac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ (car } \ln(n) = o(\sqrt{n}))$$

Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ sont à terme général positif,

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de Riemann, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

Donc d'après le critère de négligeabilité, $\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} \text{ converge.}}$

Montrons que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$ diverge.

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}\right) \text{ car } \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ (car } \ln(n) = o(\sqrt{n}))$$

Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$ sont à terme général positif,

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann, $\alpha = 1 \leq 1$)

Donc d'après le critère de négligeabilité, $\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)} \text{ diverge.}}$

14.3 Exponentielle et somme d'une série

$$\forall y \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!} = e^y$$

Soit $y \in \mathbb{R}$

Posons $f : x \mapsto e^x$, $I = \begin{cases} [0; y] & \text{si } y \geq 0 \\ [y; 0] & \text{sinon} \end{cases}$ un intervalle qui contient 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$

f est de classe C^{n+1} sur I et $\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| = |e^x| = e^x \leq K$

où $K = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq 0 \\ e^y & \text{sinon} \end{cases}$, qui est indépendant de x .

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 :

$$\forall x \in I, |f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k| \leq \frac{K|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\implies \forall x \in I, |e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}| \leq \frac{K|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Pour } x = y \in I : \forall x \in I, |e^y - \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!}| \leq \frac{K|y|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K|y|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (car K est indépendant de n et $|y|^{n+1} = o((n+1)!)$)

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!} = e^y$$

Chapitre 15

Matrices

15.1 Diagonalisation d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, notons f son application linéaire canoniquement associée.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ à déterminer telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour avoir $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, il faut que $\begin{cases} f(e_1) = e_1 \Leftrightarrow e_1 \in Ker(f - id_{\mathbb{R}^2}) \\ f(e_2) = 2e_2 \Leftrightarrow e_2 \in Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) \end{cases}$

- $Ker(f - id_{\mathbb{R}^2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f((x, y)) = (x, y)\}$

$$\begin{aligned} f((x, y)) = (x, y) &\Leftrightarrow Comp_{\mathcal{B}_c}(f((x, y))) = Comp_{\mathcal{B}_c}((x, y)) \\ &\Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}_c}(f) \cdot Comp_{\mathcal{B}_c}((x, y)) = Comp_{\mathcal{B}_c}((x, y)) \\ &\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x \\ -x + 3y = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 2y \end{aligned}$$

Donc $Ker(f - id_{\mathbb{R}^2}) = \{y(2; 1) \mid y \in \mathbb{R}\} = vect(\underbrace{(2; 1)}_{=e_1})$

- Par la même étude : $Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^2}) = \{y(1; 1) \mid y \in \mathbb{R}\} = vect(\underbrace{(1; 1)}_{=e_2})$.

• On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ qui est une base de $\mathbb{R}^2$ (libre car non colinéaires, cardinal égale la dimension).

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

15.2 Calcul des puissances n -ièmes d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3 .
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ par la méthode du reste de la division euclidienne (cf. méthode 12.2 avant-dernier point).

1. On a $A^2 = -A + 2I_3$. *

2. Notons Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de X^n par $P = X^2 + X - 2$ (de racines évidentes 1 et -2). †

On a donc $X^n = QP + R$ (*) avec $\deg(R) < \deg(P) = 2$.

Notons donc $R = aX + b$ où a et b sont deux réels.

En substituant 1 à X dans (*), on trouve $1 = a + b$

En substituant -2 à X dans (*), on trouve $(-2)^n = -2a + b$

En soustrayant ces égalités : $3a = 1 - (-2)^n$, soit $a = \frac{1 - (-2)^n}{3}$, et donc $b = \frac{2 + (-2)^n}{3}$.

Or, d'après la question 1, $P(A) = 0$, donc en substituant A à X dans (*), on trouve alors que $A^n = Q(A)P(A) + R(A) = R(A)$, donc :

$$A^n = \frac{1}{3}(A + I_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - (-2)^n & -2 + 2(-2)^n & -3 + 3(-2)^n \\ -1 + (-2)^n & 5 - 2(-2)^n & 3 - 3(-2)^n \\ 2 - 2(-2)^n & -4 + 4(-2)^n & -3 + 6(-2)^n \end{pmatrix}$$

15.3 Inversibilité des matrices à diagonale dominante

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$

(On dit que A est à diagonale dominante).

Montrer que A est inversible.

Par l'absurde, supposons A non inversible.

Alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} : AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$; notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

*. Le calcul de A^2 doit apparaître dans la résolution, mais l'enjeu de l'exercice n'étant pas ce calcul-ci, il est laissé en vérification au lecteur.

†. Ce polynôme est un polynôme annulateur de A : on a trouvé son expression grâce à la relation de la question 1.

On a : $\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket : |x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$

(ce maximum existe car il porte sur un nombre fini de valeurs).

Avec la ligne i_0 du produit AX , on a donc la relation :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{i_0, k} x_k = 0 &\implies \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n a_{i_0, k} x_k = -a_{i_0, i_0} x_{i_0} \\ &\implies \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n a_{i_0, k} x_k \right| = | -a_{i_0, i_0} x_{i_0} | \\ &\implies |a_{i_0, i_0} x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0, k} x_k| \quad (1) \end{aligned}$$

(d'après l'inégalité triangulaire)

Or $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}, |x_k| \leq |x_{i_0}| \implies |a_{i_0, i_0}| |x_k| \leq |a_{i_0, i_0}| |x_{i_0}|$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0, k} x_k| &\leq \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0, k}|}_{\text{indep. } k} \underbrace{|x_{i_0}|}_{\text{indep. } k} \quad (2) \\ &= |x_{i_0}| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0, k}| \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0, k}| < |a_{i_0, i_0}| \quad (3)^*$$

De plus $|x_{i_0}| > 0$ (en effet, si $x_{i_0} = 0$ alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \implies X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$: exclu).

Alors $|x_{i_0}| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n |a_{i_0, k}| < |x_{i_0}| |a_{i_0, i_0}|$ d'après (3).

Et par transitivité d'après (2) et (1) : $|a_{i_0, i_0}| |x_{i_0}| < |a_{i_0, i_0}| |x_{i_0}|$, ce qui est absurde.

15.4 Décomposition d'une matrice en somme de matrices de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $\text{rg}(A) = r$.

Montrer qu'il existe r matrices $M_1, \dots, M_r$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toutes de rang égal à 1 telles que :

$$A = \sum_{k=1}^r M_k$$

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r donc elle est équivalente à $J_{n,p,r}$.

Donc $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) : A = P^{-1} J_{n,p,r} Q$.

*. Car A est à diagonale dominante, propriété appliquée à $i = i_0$

Or $J_{n,p,r} = \sum_{i=1}^r E_{i,i}$ avec $E_{i,i} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang 1.*

Donc $A = \sum_{i=1}^r \underbrace{P^{-1} E_{i,i} Q}_{=M_i}$.

Or, ainsi définies, chaque M_i est équivalent à $E_{i,i}$ de rang 1, donc M_i est de rang 1.

Ainsi, A s'écrit comme la somme de r matrices de rang 1.

*. On note $E_{i,j}$ la matrice avec un 1 en ligne i colonne j et des 0 partout ailleurs – ce sont les matrices de la base canonique de l'espace vectoriel des matrices.

Chapitre 16

Déterminants

16.1 Calcul d'un déterminant par une relation de récurrence

$$\text{Calculer } \forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & & & (0) \\ 2 & 5 & 3 & & & \\ 0 & 2 & 5 & 3 & & \\ & & 2 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_n$$

En développant par rapport à C_n :

$$D_n = 5 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & & (0) \\ 2 & 5 & 3 & & \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \\ & & 2 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}}_{=D_{n-1}} - 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & & (0) \\ 2 & 5 & 3 & & \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \\ & & 2 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 5 & 3 \\ (0) & & & & 0 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

En développant par rapport à L_n :

$$D_n = 5D_{n-1} - 3 \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & & (0) \\ 2 & 5 & 3 & & \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \\ & & 2 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-2}}_{=D_{n-2}}$$

On a alors :
$$\begin{cases} D_1 = 5 \\ D_2 = 19 \\ \forall n \geq 3, D_n - 5D_{n-1} + 6D_{n-2} = 0 \end{cases}$$

On montre que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}}$ (cf. démo 8.5)

16.2 Matrices à coefficients entiers

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille (n, n) à coefficients entiers.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversible.
Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1$.

$$1. \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in \mathbb{Z}} \prod_{k=0}^n \underbrace{a_{\sigma(k),k}}_{\in \mathbb{Z}} \boxed{\in \mathbb{Z}}.$$

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, montrons que $\det(A) = \pm 1$.
 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Or d'après la première question, $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$.

Donc $\boxed{\det(A) = \pm 1}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\det(A) = \pm 1$, montrons que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

On a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A) = \pm {}^t \text{Com}(A)$

Notons ${}^t \text{Com}(A) = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \in \mathbb{Z}$ car, d'après la première question, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow \Delta_{i,j} \in \mathbb{Z}$.

Donc $\boxed{A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$

16.3 Matrice de ± 1

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont tous les coefficients valent ± 1 .
Montrer que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1} .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} \pm 1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix}_n$$

en effectuant $C_n \leftarrow C_n + C_{n-1}$ puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} + C_{n-2}$ puis ... puis $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$.

On a alors $\forall (i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2, b_{i,j} \in \{-2; 0; 2\}$.

$$\text{Donc } \det(A) = 2^{n-1} \underbrace{\begin{vmatrix} \pm 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}_{\in \mathbb{Z}} \text{ par linéarité par rapport aux co-}$$

lonnes C_2 à C_n , avec $\forall (i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \{-1; 0; 1\}$.

$$\text{Donc } \boxed{2^{n-1} \mid \det(A)}$$

Chapitre 17

Dénombrement

17.1 Listes d'entiers naturels dont la somme vaut n

On note E_n l'ensemble des listes d'entiers naturels dont la somme vaut n et $u_n = \text{card}(E_n)$.

Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 1 : par partition

Posons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_k = \{(e_1, \dots, e_p) \in E_n \mid e_p = k\}$.

La famille $(A_1, \dots, A_n)$ forme une partition de E_n , donc $\text{card}(E_n) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k)$.

Or A_k est équipotent à E_{n-k} (car $\left| \begin{array}{ccc} f : & A_k & \rightarrow E_{n-k} \\ & (e_1, \dots, e_{p-1}, k) & \mapsto (e_1, \dots, e_{p-1}) \end{array} \right.$ est bijective).

Donc $\text{card}(A_k) = \text{card}(E_{n-k}) = u_{n-k}$, donc $u_n = \sum_{k=1}^n u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

On montre ensuite par récurrence avec prédécesseurs que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{u_n = 2^{n-1}}$.

Méthode 2 : par équipotence

Pour $n \geq 1$, E_n est en bijection avec $\{0; 1\}^{n-1}$.

En effet, l'application suivante est bijective :

$\left| \begin{array}{ccc} f : & \{0; 1\}^{n-1} & \rightarrow E_n \\ & (b_1, \dots, b_{n-1}) & \mapsto (x_1, \dots, x_p) \end{array} \right.$ où $(x_1, \dots, x_p)$ est construite comme suit :

On écrit $(\underbrace{1}_{e_1} \underbrace{1}_{e_2} \dots \underbrace{1}_{e_{n-1}} \underbrace{1}_{e_n})$ (avec n fois 1 et n "emplacements" notés e_i) où

$$e_i = \begin{cases} -, & \text{si } b_i = 1 \\ + & \text{si } b_i = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on obtient bien une liste d'entiers dont la somme vaut n .

Donc $\text{card}(\{0; 1\}^{n-1}) = \boxed{\text{card}(E_n) = 2^{n-1}}$

17.2 Formule de Vandermonde

$$\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

Soient $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ et E de cardinal $n+m$.

Notons $\begin{cases} E = \{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\} \\ A = \{e_1, \dots, e_n\} \\ B = \{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\} \end{cases}$ où les e_i sont distincts 2 à 2.

On a $\text{card}(A) = n$ et $\text{card}(B) = m$.

Pour dénombrer $C_{E,p}$:

Pour parcourir chaque partie de $C_{E,p}$ exactement 1 fois, on peut pour chaque $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ choisir k éléments de B ($\binom{m}{k}$ choix) puis compléter avec $p-k$ éléments de A ($\binom{n}{p-k}$ choix).

$$\text{Donc } \text{card}(C_{E,p}) = \boxed{\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{n+m}{p}}$$

17.3 Feuilles de match

Combien peut-on faire de "feuilles de match" faisant se rencontrer $2n$ équipes 2 à 2 en n matchs ?

On note M_n l'ensemble des feuilles de match entre $2n$ équipes et $u_n = \text{card}(M_n)$. (Il n'y a d'ordre ni sur les équipes d'un match, ni sur les matchs.)

Parmi les $2n$ équipes, on en choisit une que l'on note e .

Pour parcourir exactement une fois les éléments de M_n , on peut :

- construire le match de l'équipe e : $2n-1$ choix
- construire le reste de la feuille de match avec une feuille de match entre les $2n-2 = 2(n-1)$ équipes restantes : u_{n-1} choix.

$$\text{D'où : } u_n = (2n-1)u_{n-1} = (2n-1)(2n-2)u_{n-2} = \dots = \prod_{k=0}^{n-2} 2k+1 = \boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

(cf. exercice-type 3.2)

17.4 Chemins sur une grille

En se déplaçant $n \in \mathbb{N}$ fois sur une grille en allant à chaque étape soit à gauche soit en haut, i.e. augmenter ou l'abscisse ou l'ordonnée de 1, combien y a-t-il de chemin pour aller de l'origine $(0; 0)$ au point $(p, n - p)$ ($p \in \llbracket 0, n \rrbracket$) ?

On choisit les p étapes parmi les n où on va à droite, i.e. on augmente l'abscisse, soit $\binom{n}{p}$ choix, le reste des déplacements ne pouvant alors être que verticaux, i.e. on augmente l'ordonnée.
Il y a donc $\binom{n}{p}$ chemins.

Chapitre 18

Probabilités

18.1 Espérance d'un tirage simultané

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N .

On prélève simultanément n boules, et l'on considère la variable aléatoire X , qui prend pour valeur le plus grand des numéros des n boules tirées.

Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance.

On a $\Omega = C_{\llbracket 1, n \rrbracket, n}$, muni de la probabilité uniforme.

$X(\Omega) = \llbracket n, N \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket n, N \rrbracket$, calculons $\mathbb{P}(X = k)$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{card}\{X=k\}}{\text{card}\Omega}$$

Or, pour parcourir exactement une fois tous les éléments de $\{X = k\}$, on peut :

1. prendre k dans le tirage : 1 choix possible ;
2. compléter le tirage avec $n - 1$ boules parmi les $k - 1$ boules restantes de numéro inférieur à k : $\binom{k-1}{n-1}$ choix possibles.

$$\text{Donc } \text{card}\{X = k\} = \binom{k-1}{n-1}, \text{ d'où } \mathbb{P}(X = k) = \boxed{\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}}.$$

En outre, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=n}^N k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N k \binom{k-1}{n-1} \\ &= \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} \quad \begin{array}{l} \text{cette transformation du coefficient binomial se} \\ \text{montre immédiatement avec la définition facto-} \\ \text{rielle} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \quad (\text{Formule de Pascal}) \\
&= \frac{n}{\binom{N}{n}} \left(\binom{N+1}{n+1} - \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0 \text{ par convention}} \right), \quad (\text{somme télescopique}) \\
&= \frac{n \binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} \\
&= \boxed{\frac{n(N+1)}{n+1}}
\end{aligned}$$

18.2 Main d'un jeu de cartes

On distribue une main de 8 cartes d'un jeu de 52 cartes.

Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cartes de trèfle et au moins 1 carte de cœur ?

L'univers est l'ensemble des 8-combinaisons de 52 cartes, muni de la probabilité uniforme (son cardinal est $\binom{52}{8}$).

Notons A l'événement : "la main compte exactement 3 cartes de trèfle et au moins 1 carte de cœur".

Pour construire chaque main de A , on peut :

- choisir les 3 trèfles : $\binom{13}{3}$ choix
- choisir 1 cœur : $\binom{13}{1}$ choix
- compléter la main sans trèfle : $\binom{52-13}{4}$ choix

D'où $\binom{13}{3} \binom{13}{1} \binom{52-13}{4}$ possibilités.

$$\text{Donc } \mathbb{P}(A) = \frac{\binom{13}{3} \binom{13}{1} \binom{52-13}{4}}{\binom{52}{8}} \approx 40,6\%$$

18.3 Pièce équilibrée ou non ?

On lance n fois une pièce. On observe une fréquence de Pile égale à $\frac{3}{4}$.

Doit-on en déduire que la pièce n'est pas équilibrée avec un risque de se tromper inférieur ou égal à 5% pour $n = 10$? pour $n = 100$?

Notons F et N la fréquence et le nombre de Pile sur n lancers.

On sait que si la pièce est équilibrée, $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

On a $F = \frac{N}{n}$ donc $E(F) = \frac{1}{n} E(N) = \frac{1}{2}$ et $V(F) = \frac{1}{n^2} V(N) = \frac{1}{4n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev : $\forall a > 0, \mathbb{P}(|F - E(F)| \geq a) \leq \frac{V(F)}{a^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}(|F - \frac{1}{2}| \geq a) \leq \frac{1}{4a^2n} \quad (*)$.

On s'intéresse à $\mathbb{P}(F \geq \frac{3}{4}) = \mathbb{P}(F - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}) \leq \mathbb{P}(|F - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{4})$ (car $\{F - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}\} \subset \{|F - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{4}\}$).

Donc d'après (*) appliquée à $a = \frac{1}{4} : \mathbb{P}(|F - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{4}) \leq \frac{4}{n}$. Donc, par transitivité : $\mathbb{P}(F \geq \frac{3}{4}) \leq \frac{4}{n}$.

Pour $n = 10 : \mathbb{P}(F \geq \frac{3}{4}) \leq \frac{4}{10} = 0,4 \geq 0,05$.

On ne donc pas garantir que la pièce n'est pas équilibrée avec un risque de 5 % de se tromper.

Pour $n = 100 : \mathbb{P}(F \geq \frac{3}{4}) \leq \frac{4}{100} = 0,04 \leq 0,05$.

On donc affirmer que la pièce n'est pas équilibrée avec un risque de 5 % de se tromper.

18.4 Paradoxe des anniversaires

On s'intéresse à la probabilité que deux personnes dans un groupe aient la même date d'anniversaire (on ne considère pas les années bissextiles).

À partir de combien de personnes cette probabilité est-elle d'au moins 50 % ? au moins 99 % ?

(On ne demande pas de formule donnant le nombre de personnes en fonction de la probabilité recherchée, un tableau suffira à la recherche.)

L'univers est $\llbracket 1; 365 \rrbracket^n$ muni de la probabilité uniforme.

Notons A l'événement : "au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire".

Donc $\bar{A}$ est l'événement : "deux personnes différentes ont toujours des dates d'anniversaire différentes".

Les dates d'anniversaire forment un n -uplet à valeurs distinctes dans $\llbracket 1; 365 \rrbracket$, i.e. un n -arrangement de $\llbracket 1; 365 \rrbracket$, donc $\text{card}(\bar{A}) = \frac{365!}{(365-n)!}$.

Donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{365!}{365^n}$.

On trouve que $\begin{cases} n \geq 23 \implies \mathbb{P}(A) \geq 0,5 \\ n \geq 57 \implies \mathbb{P}(A) \geq 0,99 \end{cases}$

18.5 Fonction polynomiale associée à une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Pour toute variable aléatoire réelle $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on définit l'application :

$$\left| \begin{array}{lll} g_X : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & t & \mapsto E(t^X) \end{array} \right|$$

1. Vérifier que g_X est une fonction polynomiale, et déterminer $g_X(1)$ et $g'_X(1)$.
2. Calculer g_X quand $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ et quand $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
3. Montrer que $\forall X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}, g_X = g_Y \Leftrightarrow X$ et Y suivent la même loi.
4. Montrer que $\forall X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}, X$ et Y sont indépendantes $\implies g_{X+Y} = g_X \times g_Y$.
5. En déduire une preuve du théorème "si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$ ".

1. D'après le théorème de transfert : $g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) \times t^k \in \mathbb{R}[X]$
car $\mathbb{P}(X = k)$ n'est non nul que pour un nombre fini de valeurs.

$$g_X(1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) = \boxed{1}$$

$$g'_X(1) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \mathbb{P}(X = k) = \boxed{E(X)}$$

2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

D'après le théorème de transfert :

$$g_X = E(t^X) = \sum_{k=0}^n t^k \underbrace{\mathbb{P}(X = k)}_{= \frac{1}{n+1}, \text{ indep. } k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n t^k = \boxed{\begin{cases} \frac{t^{n+1}-1}{(n+1)(t-1)} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}}$$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

D'après le théorème de transfert et la formule du binôme :

$$g_X = E(t^X) = \sum_{k=0}^n t^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} = \boxed{((1-p) + tp)^n}$$

3. Soient $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$.

$$g_X = g_Y \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, E(t^X) = E(t^Y)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) t^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y = k) t^k$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) \quad \begin{array}{l} \text{(les fonction polynomiales coïncident sur un infinité de valeurs si, et seulement si les polynômes sont égaux)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X \text{ et } Y \text{ ont la même loi}}$$

4. Supposons X et Y indépendants.

$$g_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X \times t^Y) = E(t^X) \times E(t^Y) = \boxed{g_X(t) \times g_Y(t)}$$

(car X et Y sont indépendants donc t^X et t^Y aussi)

5. Supposons $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et X et Y indépendantes.

D'après les questions 4 et 2 :

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t) \times g_Y(t) = (tp + (1-p))^n (tp + (1-p))^m = (tp + (1-p))^{n+m}$$

D'après la question 2 : si $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, p)$ alors $g_Z(t) = (tp + (1-p))^{n+m}$

D'après la question 3 : $g_{X+Y} = g_Z$ donc $X+Y$ et Z suivent la même loi, i.e.

$$\boxed{X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, p)}$$

18.6 Loi d'un couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un univers Ω telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et dont la loi conjointe est de la forme :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \lambda \binom{n}{i} \binom{n}{j}$$

1. Déterminer la valeur de la constante λ .
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

1. $\mathbb{P}$ est une probabilité et $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket^2$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) &= 1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \underbrace{\lambda}_{\text{indep. } i,j} \underbrace{\binom{n}{i} \binom{n}{j}}_{\text{indep. } j} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \underbrace{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}}_{\text{indep. } i} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda 2^n \times 2^n = 1 \quad (\text{Formule du binôme}) \\ &\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{4^n}} \end{aligned}$$

2. Déterminons la loi marginale de X :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^n \underbrace{\lambda \binom{n}{i} \binom{n}{j}}_{\text{indep. } j} = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i} \underbrace{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}}_{=2^n}$$

Donc $\boxed{\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i}}$

De même pour Y : $\boxed{\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j}}$

3. Montrons que X et Y sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j) &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \times \frac{1}{2^n} \binom{n}{j} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \\ &= \boxed{\mathbb{P}((X, Y) = (i, j))} \end{aligned}$$

Troisième partie

Méthodes

Chapitre 1

Polynômes

1.1 Arithmétique

1.1.1 Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3+4x^2+6x+6 & 2x^2+2x+1 \\
 - 2x^3+2x^2+x & \\
 \hline
 & 2x^2+5x+6 \\
 - 2x^2+2x+1 & \\
 \hline
 & 3x+5
 \end{array}$$

La division euclidienne permet de trouver la partie entière d'une fraction rationnelle.

1.1.2 PGCD

$$\forall (A, B) \neq (0, 0) \in \mathbb{K}[X]^2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P \in \mathbb{K}[X] \\ P \text{ unitaire} \\ P \mid A \text{ et } P \mid B \\ \forall C \in \mathbb{K}[X], (C \mid A \text{ et } C \mid B) \implies C \mid P \end{array} \right. \implies P = A \wedge B$$

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2, A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2 : AU + BV = 1$$

Remarque : ces résultats sont très similaires à ceux en arithmétique des entiers.

1.2 Décomposition en éléments simples

1.2.1 Racines d'un polynôme

Relations coefficients-racines

Les relations coefficients-racines donnent des relations entre les coefficients d'un polynôme et ses racines.

Elles peuvent servir à déterminer une racine manquante, ou à résoudre certains systèmes dans lesquels on peut reconnaître lesdites relations et leur polynôme associé.

(voir démonstration 12.6)

Ordre des racines

Pour déterminer l'ordre r d'une racine α d'un polynôme P , si on connaît P sous forme...

développée : α est d'ordre r dans P si, et seulement si :

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

factorisée : α est d'ordre r dans P si, et seulement si :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] : \begin{cases} P = (X - \alpha)^r Q \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Plus généralement, bien qu'on ne s'en serve jamais en pratique, on a par la défini-

tion : $r = \max\{n \in \mathbb{N} \mid (X - \alpha)^n \mid P\}$ et on a donc $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, (X - \alpha)^k \nmid P \\ \forall k \geq r+1, (X - \alpha)^k \nmid P \end{cases}$

1.2.2 Pôles d'une fraction rationnelle

Pôles de deuxième espèce

En pratique, on trouve les parties polaires de deuxième espèce de la même manière que pour les pôles de première espèce (dans $\mathbb{C}$).

Pour les méthodes, on multiplie le pôle en question par $(X^2 + aX + b)$ ou par $(X^2 + bX + c)^r$ et on évalue l'expression en une seule des racines non réelles de $(X^2 + bX + c)^r$.

La relation donne alors deux inconnues réelles, puis on se sert de la propriété suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + zb = c + zd \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Cas particuliers

Voyons quelques cas particuliers : pour le premier, considérons l'exemple suivant : $F = \frac{X}{X^4 - 1}$ dans $\mathbb{R}(X)$ (F est unitaire, irréductible, sa partie entière est nulle)

On a que $X^4 - 1 = \underbrace{(X^2 + 1)}_{\Delta < 0} (X + 1)(X - 1)$, donc la décomposition en éléments

$$\begin{aligned} \text{simples de } F \text{ est de la forme : } F &= \frac{\alpha}{X + 1} + \frac{\beta}{X - 1} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2 + 1} \\ (X^2 + 1)F &= \frac{X}{(X + 1)(X - 1)} = \alpha \frac{X^2 + 1}{X + 1} + \beta \frac{X^2 + 1}{X - 1} + \gamma X + \delta \\ X \leftarrow i &\implies \gamma i + \delta = -\frac{1}{2}i \\ \text{Donc } \delta &= 0 \text{ et } \gamma = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.2.3 La méthode

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ écrite sous forme irréductible.

Si on note $x_1, \dots, x_n$ les pôles de F et $r_1, \dots, r_n$ leurs ordres respectifs, alors la fraction rationnelle F peut se décomposer de manière unique sous la forme ($\alpha_{i,k} \in \mathbb{C}$) :

$$F = [F] + \sum_{k=1}^{r_1} \frac{\alpha_{1,k}}{(X - x_1)^k} + \dots + \sum_{k=1}^{r_n} \frac{\alpha_{n,k}}{(X - x_n)^k}$$

Dans le reste de cette partie, on supposera $[F] = 0$.

Évacuons un cas particulier : si $F = \frac{Q'}{Q}$ ($Q \in \mathbb{C}(X)$), alors $F = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{X - x_i}$.

1. Si F est paire ou impaire, alors l'écriture de $F(-X) = \pm F(X)$ permet de réduire le nombre d'inconnues.
2. Si $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors on sait que $\bar{x}_i$ est aussi un pôle de F , ce qui permet aussi de réduire le nombre d'inconnues à déterminer.
3. Si x_i est un pôle simple, alors sa partie polaire correspondante est $\frac{\alpha_i}{X - x_i}$ où $\alpha_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}$.
4. Si x_i est un pôle simple, on effectue $X \leftarrow x_i$ dans les deux expressions données par $(X - x_i)F$ avec F sous sa forme fractionnaire et sous sa forme décomposée.
5. Si x_i est un pôle d'ordre r_i , alors sa partie polaire associée est $\frac{\alpha_1}{(X - x_i)} + \frac{\alpha_2}{(X - x_i)^2} + \dots + \frac{\alpha_{r_i-1}}{(X - x_i)^{r_i-1}} + \frac{\alpha_{r_i}}{(X - x_i)^{r_i}}$.
On effectue $X \leftarrow x_i$ dans les deux expressions données par $(X - x_i)^{r_i} F$ avec F sous sa forme fractionnaire et sous sa forme décomposée. Cela donne alors le coefficient α_{r_i} du terme $\frac{\alpha_{r_i}}{(X - x_i)^{r_i}}$.

Pour trouver les autres coefficients, on peut **en dernier recours** calculer la décomposition en éléments simples de $F - \frac{\alpha_{r_i}}{(X-x_i)^{r_i}}$. $\triangle$ La partie entière n'est peut-être pas nulle à ce moment-là.

Sinon, on peut appliquer les idées suivantes :

6. On effectue $X \leftarrow x$ dans XF , ce qui donne $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \dots + \alpha_{1,n-1} + \alpha_{1,n}$, i.e. la somme des coefficients des premiers termes de chaque partie polaire, de la forme $\frac{\alpha_{1,i}}{X-x_i}$.
7. S'il reste peu d'inconnues, on peut substituer à X des valeurs connues pour avoir $F(X)$ (connu) = une expression de la décomposition en éléments simples avec les inconnues restantes.

1.3 Autres

1.3.1 Montrer qu'un polynôme est nul

- Si on connaît P sous forme développée, on montre que chacun de ses coefficients est nul.
- On montre que P a une infinité de racines.
- Si P est de degré n , on montre que P a $n + 1$ racines (comptées avec leurs ordres) ou plus.

Remarque : pour montrer que $P = Q$, on montre que $P - Q = 0$

1.3.2 Factorisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Si $P \neq 0 \in \mathbb{C}[X]$, si on trouve $\deg(P)$ racines de P comptées avec leurs ordres, le théorème de d'Alembert-Gauss assure qu'il n'y en n'a pas plus et donne alors la factorisation avec les facteurs en $(X - \alpha)^r$
- Pour factoriser $P \in \mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[X]$, on peut commencer par le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis revenir dans $\mathbb{R}[X]$ en fusionnant les facteurs de racines complexes conjuguées (on sait que si $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine d'ordre r de P , alors $\bar{\beta}$ est aussi racine d'ordre r dans P).
- On peut parfois reconnaître des identités remarquables.

Exemple

Factorisons dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 1$.

$$\begin{aligned}
 z \in \mathbb{C} \text{ racine de } P &\Leftrightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = 1e^{i\pi} \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket : z = |1|^{\frac{1}{4}} e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4})} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{-3\pi}{4}} \\ z = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{-\pi}{4}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a trouvé 4 racines distinctes ; or $\deg(P) = 4$ donc d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P possède 4 racines comptées avec leurs ordres donc ces 4 racines sont simples et :

$$\begin{aligned} P &= 1(X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{i\frac{-\pi}{4}})(X - e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - e^{i\frac{-3\pi}{4}}) \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{P = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)}$$

Identité remarquable $P = X^4 + 1 = \underbrace{X^4 + 2X^2 + 1}_{=(X^2+1)^2} - \underbrace{2X^2}_{=(\sqrt{2}X)^2}$

$$= \underbrace{(X^2 - \sqrt{2}X + 1)}_{\Delta=-2<0} \underbrace{(X^2 + \sqrt{2}X + 1)}_{\Delta=-2<0}$$

Donc P dispose dans $\mathbb{R}[X]$ de la factorisation :

$$\boxed{P = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)}$$

1.3.3 Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3

Idées :

1. factoriser par une racine pour se ramener à un problème d'un degré de moins
2. se ramener à des racines n-ièmes
3. poser un changement de variable (notamment pour les équations bicarrées)

Chapitre 2

Espaces vectoriels

2.1 Bases

Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Pour déterminer si $\mathcal{B}$ est une base de E :

- On montre que $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$ et que $\mathcal{B}$ est libre (ou génératrice de E)
- On montre que $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E
- On montre que son déterminant dans une autre base (connue) de E est non nul

2.2 Dimension

Pour déterminer la dimension d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , on peut :

- Chercher une base $\mathcal{B}$ de E : on a alors $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B})$ d'après le théorème de la dimension.
- Trouver un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F isomorphe à E dont on connaît la dimension : on a alors $\dim(E) = \dim(F)$
- Trouver une famille libre infinie (généralement une suite) : or le cardinal de toute famille libre est inférieur à la dimension de E , on en déduit donc que E est de dimension infinie.

2.3 Égalité

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Pour montrer que $E = F$, on peut :

- Si E et F sont de dimension finie, on montre que $\dim(E) = \dim(F)$ et $F \subset E$ uniquement (ou $E \subset F$ uniquement)
- Sinon, on montre que $E \subset F$ et $F \subset E$

2.4 Somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
Pour montrer que $E = F \oplus G$ (i.e. F et G sont supplémentaires dans E), on peut :

- Si E est de dimension finie et qu'on connaît $\dim(E), \dim(F), \dim(G)$, alors on peut montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ et vérifier que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
- Sinon, on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$

2.5 Détermination de $Im(\varphi)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour déterminer $Im(\varphi)$, on peut :

- Si on connaît une base $(e_1, \dots, e_n)$, alors on a :

$$Im(\varphi) = vect(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

(voir la démonstration en 13.8)

- Sinon, on la conjecture et on la montre par double inclusion

Chapitre 3

Fonctions - Applications

3.1 Équations différentielles

3.1.1 Solutions particulières pour le 1^{er} ordre

Si $(E) : y' + \alpha y = \beta$ où α et β sont deux constantes, on cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto cste$

Si $(E) : y' + \alpha y = \beta e^{\gamma x}$ où α, β, γ sont des constantes, on cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto \mu e^{\gamma x}$ (même γ , μ est une constante).

3.1.2 Solutions particulières pour le 2^e ordre

Soit l'équation différentielle $(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ d'inconnue y et d'équation caractéristique $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$. Dans les cas simples suivant :

- Si $f(x) = ue^{vx}$ (u et v sont deux constantes).

Si v n'est pas racine de (E_c) : $y_0 : x \mapsto \alpha e^{vx}$

Si v est racine simple de (E_c) : $y_0 : x \mapsto \alpha x e^{vx}$

Si v est racine double de (E_c) : $y_0 : x \mapsto \alpha x^2 e^{vx}$

où v est le même et α est à déterminer en injectant dans (E)

- Si $f(x) = u \cos(vx)$ ou $f(x) = u \sin(vx)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (donc $(u, v) \in \mathbb{R}^2$) :
On écrit $f(x) = u \operatorname{Re}(e^{ivx})$ ou $f(x) = u \operatorname{Im}(e^{ivx})$ et on utilise la méthode précédente.

Ensuite, on se sert du fait que $\operatorname{Re}(y_0)$ est solution de $(E_1) : ay'' + by' + cy = \operatorname{Re}(f(x))$ et, de manière analogue : $\operatorname{Im}(y_0)$ est solution de $(E_2) : ay'' + by' + cy = \operatorname{Im}(f(x))$.

Enfin on utilise le principe de superposition.

3.1.3 Recollement de solutions et problèmes de Cauchy

Pour certaines équations différentielles initialement non sous forme résolue, on effectue diverses opérations pour s'y ramener. Si toutefois on divise par une fonction, on doit séparer les domaines d'étude selon les zéros de cette fonction (pour ne pas diviser par 0).

Il faut ensuite trouver une solution aux points exclus.

Enfin, on rassemble les solutions dans chaque domaine et aux points particuliers pour trouver une combinaison donnant, si possible, une fonction continue sur tout l'intervalle (et si possible aussi, dérivable).

Pour résoudre un problème de Cauchy, i.e. on connaît la forme générale des solutions et des informations en un point x_0 , on évalue la forme générale en x_0 et cela donne une équation qui permet de trouver la constante.

S'il y a plusieurs constante, il faut connaître autant de dérivées en x_0 qu'il y a de constantes inconnues, et cela mène à la résolution d'un système d'équations.

3.2 Étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour étudier f , il faut :

1. déterminer son domaine de définition
2. déterminer d'éventuelles parité ou périodicité pour réduire le domaine d'étude
3. déterminer les limites, la dérivée et son signe pour construire le tableau de variations complet sur le domaine d'étude
4. déterminer les branches infinies
5. tracer l'allure du graphe

3.3 Divers

3.3.1 Égalité

Pour montrer que deux applications linéaires φ et ψ d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F sont égales, on peut choisir une base de E et une base de F dans lesquelles on écrit les matrices de φ et ψ . Si leurs matrices sont égales, (par injectivité de l'application qui à une application linéaire associe sa matrice), alors $\varphi = \psi$.

3.3.2 Matrice

Le principe : pour écrire la matrice d'une application linéaire f dans une base $\mathcal{B}$, on écrit à droite de la matrice, de haut en bas, les vecteurs e_i de la base $\mathcal{B}$, et au-dessus de chaque colonne les composantes de chaque $f(e_i)$ dans $\mathcal{B}$.

3.3.3 Prolongement (par continuité)

Soient f une fonction et $a \notin D_f$. On peut se demander si l'on peut prolonger f en a par continuité.

Si oui, on pose $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Alors on peut également voir si f prolongée est dérivable en a : on calcule la limite du taux d'accroissement.

Un développement limité à l'ordre 1 en a permet aussi l'étude du prolongement en a . En effet, celui-ci donne $f(x) = u_0 + u_1(x - a) + o(x - a)$, et a se prolonge donc par continuité en a en posant $f(a) = u_0$ (puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = u_0$).

Dans ce cas f est dérivable en a avec $f'(a) = u_1$ (en effet : $f(x) = u_0 + u_1(x -$

$$a) + o(x - a) \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{= u_0}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} u_1 + \underbrace{\frac{o(x - a)}{x - a}}_{\rightarrow 0} = u_1.$$

Le théorème de prolongement de classe C^n peut aussi servir dans ce cas :

Énoncé : Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, I un intervalle, $a \in I$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$ telle que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = l_k \in \mathbb{R}$.

Si on prolonge f en a en posant $f(a) = l_0$ alors f est de classe C^n sur I et on a $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^{(k)}(a) = l_k$.

Exemple d'utilisation : Posons $f : x \mapsto \arccos \frac{1}{x}$

Montrons que f est prolongeable en 0 pour obtenir une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R}^+$ est un intervalle et $0 \in \mathbb{R}^+$.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (comme composée de fonctions de classe C^2) et :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1+x^2} = -1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de prolongement de classe C^2 , si on prolonge f en 0 en posant $f(0) = \frac{\pi}{2}$, alors f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ avec $f'(0) = -1$ et $f''(0) = 0$.

3.3.4 Justification rigoureuse de dérivabilité (ou de continuité)

Bien qu'en pratique on justifie la dérivabilité d'une fonction en la disant "somme, produit et composée de fonctions dérivables", ce qui découle d'un théorème, on peut également répondre de sa dérivabilité en la décomposant en somme, produit et composée de fonctions élémentaires dont la dérivabilité est connue.

Même idée pour la continuité.

Exemple :

Justifions en détails la dérivabilité de $f : x \mapsto x^3 \ln(\sin(x))$ sur $]0, \pi[$, et calculons sa dérivée.

- $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $]0, \pi[$
- $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$
- $\forall x \in]0, \pi[, f_1(x) \in \mathbb{R}^{+*}$
- $f_3 = f_2 \circ f_1 : x \mapsto \ln(\sin(x))$ est donc dérivable sur $]0, \pi[$
- $f_4 : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $]0, \pi[$
- $f = f_4 \times f_3 : x \mapsto x^3 \ln(\sin(x))$ est donc dérivable sur $]0, \pi[$.

Dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[x^3] \ln(\sin(x)) + x^3 \frac{d}{dx}[\ln(\sin(x))] \\ &= 3x^2 \ln(\sin(x)) + x^3 \frac{d}{dx}[\sin(x)] \frac{1}{\sin(x)} \\ &= 3x^2 \ln(\sin(x)) + x^3 \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$

3.3.5 Une fonction puissance une autre

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$$

On ne travaille jamais sur la première forme de cette expression, on se ramène toujours à la seconde.

3.4 Bijectivité d'une fonction ou d'une application

Soit $f : E \rightarrow F$. Pour montrer que f est bijective, on peut :

- Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x pour y fixé, et vérifier qu'elle a toujours une unique solution. Alors on a en plus l'expression de f^{-1} .
- Montrer que f est injective et surjective, i.e.

$$\begin{cases} \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \\ \forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y \end{cases}$$

- Trouver une fonction g telle que $\begin{cases} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{cases}$ (alors $f^{-1} = g$)

- Utiliser le Théorème de la Bijection Continue

Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , pour montrer que f est un automorphisme, il faut montrer que f est un endomorphisme bijectif :

1. $f : E \rightarrow E$
2. f est linéaire
3. $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$

4. $\text{Im}(f) = E$

Si f est une application linéaire, on peut :

- Si on connaît une base de E , on détermine si la famille des images des vecteurs de cette base par f forme une base de F .
- Si E et F sont de dimension finie, on montre que $\dim(E) = \dim(F)$ et montrer uniquement que f est injective (ou surjective uniquement)
- Trouver $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ (ou $f \circ g = \text{id}_F$)
- Choisir deux bases de E et F et écrire la matrice de f dans celles-ci : f est bijective si, et seulement si sa matrice est inversible.
- Si $\dim(E) = \dim(F) = \text{rg}(f)$ alors f est bijective.

Si f est un endomorphisme de E :

- f est bijective si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$

Si E et F sont deux ensembles finis et f est une application de E dans F .

- Si f est injective et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, alors f est bijective
- De même, si f est surjective et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, alors f est bijective

Chapitre 4

Complexes

4.1 Racines carrées en écriture algébrique

Pour utiliser la formule des racines n -ièmes dans le cas particulier $n = 2$ (racines carrées), il faut connaître le complexe sous sa forme trigonométrique, ce qui n'est pas toujours évident. Pour ce cas particulier, on peut utiliser la méthode suivante (illustrée sur un exemple) :

Notons $z = x + iy$ avec x et y réels.

On a : $z^2 = 3 + 4i \Rightarrow (x + iy)^2 = 3 + 4i \Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (L_1) \\ 2xy = 4 & (L_2) \end{cases}$$

De plus : $z^2 = 3 + 4i \Rightarrow |z^2| = |3 + 4i| \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad (L_3)$

Alors : $\frac{(L_1)+(L_3)}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Et : $\frac{(L_1)-(L_3)}{2} \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

Or $(L_2) \Rightarrow x, y$ de même signe

Donc : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Donc les racines carrées de $3 + 4i$ sont $\pm(2 + i)$

4.2 Factorisation par l'angle moitié (ou moyen)

Pour simplifier certaines expressions, on peut remarquer que $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$.

De façon analogue : $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})$.

On parle de factorisation par l'angle moitié.

Dans un cas plus général, on parle de factorisation par l'angle moyen : $e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}})$.

4.3 Linéarisation et opération inverse pour $\cos^n$ ou $\sin^n$

Pour linéariser une forme $\cos^n$ (idem pour $\sin^n$), on utilise successivement les formules d'Euler, du Binôme et de Moivre, puis on développe et on arrange, i.e. on rassemble les exponentielles identiques au signe près (pour faire apparaître la formule d'Euler à nouveau).

Attention! Si on a un produit (par exemple $\cos^3 \sin^7$), il faut bien développer tout ce qui peut l'être, et non traiter chaque parenthèse séparément !

Pour l'opération inverse, on écrit d'abord les cos et les sin comme partie réelle ou imaginaire d'une puissance d'une exponentielle, puis on écrit l'exponentielle comme $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ et on développe avec la formule du binôme (sans oublier de ré-appliquer la partie réelle ou la partie imaginaire à la fin !)

4.4 Factorisation de $a \cos(x) + b \sin(x)$

1. On pose $z = a + ib$ (car a et b sont réels)
2. On remarque que $z = \rho e^{i\theta} = \rho \cos(\theta) + i \rho \sin(\theta)$ où $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. *

Par unicité de l'écriture algébrique, on a alors :
$$\begin{cases} a = \rho \cos(\theta) \\ b = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

3. Enfin on écrit :

$$\begin{aligned} a \cos(x) + b \sin(x) &= \rho \cos(\theta) \cos(x) + \rho \sin(\theta) \sin(x) \\ &= \rho (\cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x)) \\ &= \boxed{\rho \cos(x - \theta)}^\dagger \end{aligned}$$

*, La seule difficulté consiste en passer z sous forme trigonométrique.

†. Remarque : $\cos(\theta - x) = \cos(x - \theta)$

Chapitre 5

Suites

5.1 Études de suites

5.1.1 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient une fonction f et une suite définie par
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \end{cases}$$

Dans le cas d'une étude ne rencontrant aucune particularité :

1. Résoudre $f(x) = x$ (notons $\bar{u}$ la solution)
2. Trouver un intervalle stable par f contenant u_0 , i.e. un intervalle I tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
3. Montrer que f est λ -lipschitzienne sur I , avec $\lambda \in]0; 1[$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \bar{u}| \leq \lambda |u_n - \bar{u}|$
puis montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \bar{u}| \leq \lambda^n |u_0 - \bar{u}|$
5. Conclure par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \bar{u}$

(cf. exercice-type 8.3 pour un exemple d'application)

5.1.2 Suites arithmético-géométriques

Le principe est d'expliciter le point fixe (une constante vérifiant la relation de récurrence), puis de poser une suite auxiliaire définie comme la première suite à laquelle on retranche le point fixe.

On l'écrit au rang suivant, on utilise la relation de récurrence de la première suite et la relation entre les 2 suites pour simplifier l'expression pour arriver à une forme récurrente de la seconde suite que l'on peut facilement expliciter.

On se sert alors une dernière fois du lien entre les 2 suites.

Autre méthode :

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique.

Pour l'expliciter :

- poser $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = z_n + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer,
- prendre λ tel que $t_{n+1} = \mu t_n$, où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante multiplicative ($(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors géométrique),
- expliciter $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple : Explicitons la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $z_{n+1} = 4z_n + 2$.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = z_n + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.

$$\begin{aligned} \text{On a : } t_{n+1} &= z_{n+1} + \lambda \\ &= 4z_n + 2 + \lambda \\ &= 4(t_n - \lambda) + 2 + \lambda \\ &= 4t_n - 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Prenons $\lambda = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$.

Alors $t_{n+1} = 4t_n$.

Donc $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 4.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 \times 4^n$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, z_n &= t_n - \lambda \\ &= 4^n t_0 - \frac{2}{3} \\ &= 4^n \left(z_0 + \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

5.2 À la limite

5.2.1 Être majorée ou minorée à partir d'un certain rang

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers l est majorée (idem pour minorée) à partir d'un certain rang par un réel a , i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq a$, on applique la définition $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$ à un ε qui permet d'impliquer $u_n \leq a$. Pour se libérer de

la valeur absolue, on se sert de la propriété : $x \leq |y| \iff \begin{cases} x \leq y \\ -x \leq y \end{cases}$

On utilise le même procédé pour montrer qu'une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est minorée (resp. majorée) par un réel à partir d'un certain rang.

5.2.2 Montrer qu'une suite n'a pas de limite

Le théorème des suites extraites permet de montrer par l'absurde qu'une suite n'a pas de limite.

Pour cela, on suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite $l \in \mathbb{R}$. Ensuite, on exhibe une suite extraite de limite $l' \neq l$. Ce qui contredit le théorème des suites extraites.

Chapitre 6

Limites

6.1 Limites indéterminées

Pour calculer une limite indéterminée, on peut...

1. appliquer un théorème adapté (croissances comparées, négligeabilité, théorème des gendarmes, limite de la dérivée, ...)
2. effectuer un changement de variable pour se ramener à une situation plus simple
3. factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme prépondérant
4. reconnaître / faire apparaître un taux d'accroissement

Pour calculer des limites de la forme $1^{+\infty}$ ($u_n^{v_n}$ où $u_n \rightarrow 1$ et $v_n \rightarrow +\infty$), qui sont indéterminées, on écrit $u_n^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}$ puis on utilise généralement un équivalent.

Attention! aux opérations autorisées sur les équivalents, qui sont peu nombreuses $\triangle$

6.2 Plan d'étude des branches infinies

Sur la page suivante se trouve un arbre permettant d'explorer les différents cas pouvant arriver lors de l'étude – détaillée au long de l'arbre – des branches infinies d'une fonction.

*. Note pour le graphe : si $a = 0$ alors C_f présente une branche parabolique de direction l'axe des abscisses, i.e. $y = 0$

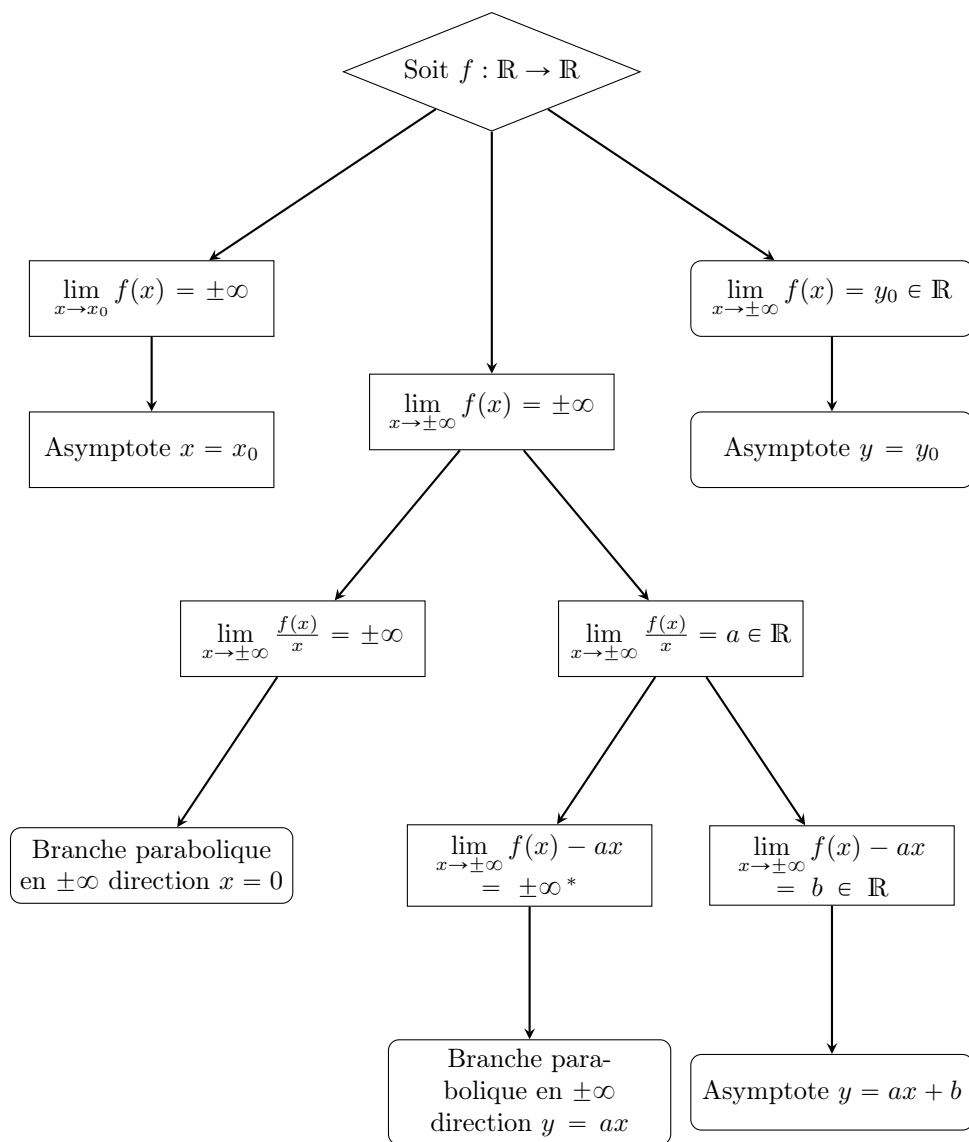


FIGURE 6.1 – Plan d'étude des branches infinies

6.3 Limite de la dérivée

Si on ne sait pas calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, le théorème de limite de la dérivée permet de la retrouver si on sait calculer $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

6.4 Autres

6.4.1 Pas de limite

Le "théorème de composition de la limite d'une suite par une fonction" permet de montrer par l'absurde qu'une fonction n'a pas de limite.

L'exemple du cosinus est laissé en exercice au lecteur.

6.4.2 Être majorée au voisinage d'un réel

Si on connaît $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, on peut montrer que f est majorée ou minorée par un réel au voisinage de a . Pour cela, on écrit la définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et on l'applique à un ε qui convient.

6.4.3 Développements limités, équivalents et limites

Un développement limité permet de déterminer un équivalent, qui permet de déduire la limite.

Voir le chapitre sur le développements limités.

Chapitre 7

Structures algébriques et ensembles

7.1 Ensembles

7.1.1 max et sup d'un ensemble

Soient A un ensemble, v un réel.

Pour montrer que $\sup(A) = v$, on peut montrer que

- $\begin{cases} v \text{ est un majorant de } A \\ v \text{ est le plus petit des majorants} \end{cases}$

Autrement dit, pour une relation d'ordre $\mathcal{R} : \begin{cases} \forall x \in A, x\mathcal{R}v \\ v' \text{ majore } A \implies v\mathcal{R}v' \end{cases}$,

- On peut aussi montrer que v majore A et trouver une suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui tend vers v .

Pour montrer que $\max(A) = v$, on peut montrer que $v \in A$ et v est un majorant de A .

Inversement pour $\inf(A)$ et $\min(A)$.

Pour montrer que $\sup(A)$ existe, on utilise généralement le théorème fondamental de l'algèbre.

7.1.2 Égalité de deux ensembles finis

Pour montrer que deux ensembles E et F finis sont égaux, on peut :

- montrer que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ puis que $F \subset E$ (ou $E \subset F$) uniquement.
- montrer que $F \subset E$ et $E \subset F$.

7.2 Groupes, anneaux, corps

7.2.1 Groupe

Soient H un ensemble et $\star$ une loi de composition interne.

Pour montrer que $(H, \star)$ est un groupe :

- Soit on revient à la définition et on montre que :
 - $\star$ est une loi de composition sur H
 - $\star$ est associative
 - $\star$ a un élément neutre
 - tout élément de H a un symétrique par $\star$
- Soit, si on connaît un groupe $(G, \star)$, on montre que
 - $H \subset G$
 - $H \neq \emptyset$
 - $\forall (x, y) \in H^2, x \star y^{-1} \in H$

Remarque : pour montrer que $H \neq \emptyset$, on exhibe généralement l'élément neutre.

7.2.2 Anneau

Pour montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau, il faut montrer que :

- $(A, +)$ est un groupe commutatif
 - $(A, +)$ est un groupe
 - $+$ est commutative
- $\times$ associative
- Déterminer l'élément neutre pour $\times$
- $\times$ est distributive sur $+$
- $\times$ est commutative

(Plus de détails dans la sous-section "Corps")

7.2.3 Corps

Pour montrer que $(A, +, \times)$ est un corps, il faut montrer que :

- $(A, +)$ est un groupe commutatif
 - $+$ est une loi de composition interne sur A
($\forall (x, y) \in A^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in A$)
 - $+$ est associative
($\forall (x, y, z) \in A^3, (x + y) + z = x + (y + z)$)
 - $+$ est commutative
($\forall (x, y) \in A^2, x + y = y + x$)
- Tout élément de A est symétrisable par $+$
($\forall x \in A, \exists y \in A : x + y = 0_A = y + x$ par commutativité)
- Déterminer l'élément neutre pour $+$
(On le note 0_A , il est tel que $\forall x \in A, x + 0_A = x$)
- $\times$ associative
($\forall (x, y, z) \in A^3, (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$)

- Déterminer l'élément neutre pour $\times$
(On le note 1_A , il est tel que $\forall x \in A, x \times 1_A = 1_A \times x = x$)
- $\times$ est commutative
($\forall (x, y) \in A^2, x \times y = y \times x$)
- $\times$ est distributive sur $+$
($\forall (x, y, z) \in A^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$)

Attention : la quasi-totalité des propriétés à montrer ne dépendent pas fondamentalement de la commutativité : celle-ci permet de démontrer la moitié des égalités, mais tant qu'elle n'est pas démontrée, il faut montrer les "deux sens". Par exemple pour les éléments symétrisables pour $+$: il faut montrer que

$$\begin{cases} x + y = 0_A \\ y + x = 0_A \end{cases}$$

À l'écrit, IL FAUT écrire cela tel quel, montrer une des deux lignes et écrire "idem par commutativité" s'il y a lieu.

Chapitre 8

Arithmétique

8.1 Équations diophantiennes

Réolvons $(E) : 198x + 216y = 36$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

$$(E) \Leftrightarrow 11x + 12y = 2$$

- $(-2, 2)$ est une solution particulière évidente

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ solution de } (E) &\implies 11x + 12y = 2 = 11 \times (-2) + 12 \times (2) \\ &\implies 11(x + 2) = 12(2 - y) \quad (*) \\ &\implies 12 \mid 11(x + 2) \\ &\implies 12 \mid x + 2 \quad (\text{théorème de Gauss car } 12 \wedge 11 = 1) \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z} : x = 12k - 2 \\ (*) &\implies y = -11k + 2\end{aligned}$$

- Réciproquement, ces expressions sont solution de (E)

Donc $\boxed{S = \{(12k - 2; -11k + 2) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

8.2 PGCD et PPCM

8.2.1 "Factorisation" d'un PGCD

Soient a, b, c dans $\mathbb{N}$.

Montrons que $(ca) \wedge (cb) = |c|(a \wedge b)$

Notons $d = |c|(a \wedge b)$

- $d \in \mathbb{N}$
- $d \mid ac$ et $d \mid bc$ car $(a \wedge b) \mid a \Rightarrow |c|(a \wedge b) \mid ac$, idem pour l'autre.
- $\forall k \in \mathbb{Z}, (k \mid ac \text{ ET } k \mid bc) \implies k \mid d$

En effet : soit $k \in \mathbb{Z}$, supposons $k \mid ac$ et $k \mid bc$.

On sait que $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : a \wedge b = au + bv \Rightarrow |c|(a \wedge b) = au|c| + bv|c|$

Or $k \mid ac$ et $k \mid bc$ donc $k \mid a|c|$ et $k \mid b|c|$
 Donc $k \mid au|c| + bv|c|$ donc $k \mid d$

8.2.2 Détermination du PGCD et du PPCM

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, \begin{cases} c \geq 0 \\ c \mid a \text{ et } c \mid b \\ \forall k \in \mathbb{Z}, [k \mid a \text{ et } k \mid b] \implies k \mid c \end{cases} \implies a \wedge b = c$$

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, \begin{cases} c \geq 0 \\ a \mid c \text{ et } b \mid c \\ \forall k \in \mathbb{Z}, [a \mid k \text{ et } b \mid k] \implies c \mid k \end{cases} \implies a \vee b = c$$

8.3 Partie entière

$$\begin{cases} v \in \mathbb{Z} \\ v \leq x \\ v + 1 > x \end{cases} \implies [x] = v$$

Chapitre 9

Développements limités

9.1 DL de sommes, produits et composées

Rappel sur les notations : $DL_n(a)$ désigne un développement limité à l'ordre n en a .

On note parfois DL_n au lieu de $DL_n(0)$.

On notera dans cette section f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ et μ deux réels.

9.1.1 Combinaison linéaire

Pour calculer un $DL_n(a)$ de $\lambda f(x) + \mu g(x)$, on calcule les $DL_n(a)$ de f et de g et on applique à ceux-ci la même combinaison linéaire, en regroupant à la fin la combinaison linéaire des $o((x-a)^n)$ pour ne le garder que sous cette forme-ci.

9.1.2 Produit

Pour simplifier, considérons un DL_n de $f \times g$

Plusieurs précautions pour simplifier les calculs :

1. Si $f(x) \underset{a}{\sim} u_p x^p$, i.e. le premier terme non nul du $DL_n(0)$ de f non nul arrive pour un monôme de puissance p , alors on peut n'effectuer qu'un DL_{n-p} de g .
2. On procède la même manière avec le DL_n de f .
3. Les deux DL_n effectués, on ne développe pas tout : tous les termes qui sont multipliés par un $o()$ n'apparaîtrons pas dans le DL final.
4. Pour déterminer le $o()$ du DL final, si chaque DL est écrit dans l'ordre croissant des puissances, on regarde les puissances dans les $o()$ résultant du produit entre le premier terme du DL de f et le $o()$ de g , et entre le premier terme du DL de g et le $o()$ de f (les puissances s'ajoutent), on garde le plus petit.
Tout cela pour signifier qu'on garde le plus petit $o()$.

9.1.3 Composée et quotient

Pour calculer un DL_n de $(g \circ f)(x)$, on effectue un DL_n de f puis on pose un changement de variable $u = ?$ (pas toujours $f(x)$) et on calcule le DL_n de g avec la variable u .

Ensuite on calcule $u, u^2, \dots, u^n, o(u^n)$, ce qui termine le calcul.

Pour le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$, il faut voir un produit et une composée par l'inverse : $f(x) \times \frac{1}{g(x)}$, où le DL de $\frac{1}{g(x)}$ s'obtient généralement en reconnaissant $\frac{1}{1+x}$.

9.2 DL particuliers

1. On écrit le DL_1 avec un équivalent
2. On le dérive, ce qui donne le DL_2
3. On le primitive, ce qui donne le DL_3

Et on réitère : voir exemples ci-dessous.

Pour $\tan$:

$$\tan(x) \sim x \implies \tan(x) = x + o(x)$$

Or, $\tan$ est dérivable sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $0 \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et, $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) \\ &= 1 + (x + o(x))^2 \\ &= 1 + x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de primitivation des développements limités :

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

En répétant l'opération, l'on obtient que :

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\ &= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Puis que :

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \\ &= \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)} \end{aligned}$$

Pour th : $\text{th}(x) \sim x \implies \text{th}(x) = x + o(x)$

Or, th est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$, et, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\text{th}'(x) &= 1 - \text{th}^2(x) \\ &= 1 - (x + o(x))^2 \\ &= 1 - x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de primitivation des développements limités :

$$\begin{aligned}\text{th}(x) &= \text{th}(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

En répétant l'opération, l'on obtient que :

$$\begin{aligned}\text{th}'(x) &= 1 - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\ &= 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Puis que :

$$\begin{aligned}\text{th}(x) &= \text{th}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \\ &= \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)}\end{aligned}$$

Pour $\arccos$: $\arccos$ est dérivable sur l'intervalle $] -1; 1[$, $0 \in] -1; 1[$, et, $\forall x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned}\arccos'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -(1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\left(1 + \left(-\frac{(-x^2)}{2}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-x^2)^2}{2!} + o((-x^2)^2)\right), \\ \text{car } -x^2 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de primitivation des développements limités :

$$\begin{aligned}\arccos(x) &= \arccos(0) - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}\end{aligned}$$

Pour *arcsin* : $\arcsin$ est dérivable sur l'intervalle $] -1; 1[$, $0 \in] -1; 1[$, et, $\forall x \in] -1; 1[$:

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \left(-\frac{(-x^2)}{2} \right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-x^2)^2}{2!} + o((-x^2)^2), \\ \text{car } -x^2 &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de primitivation des développements limités :

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= \arcsin(0) + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \\ &= \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}\end{aligned}$$

9.3 Autres

9.3.1 DL et équivalents

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0 \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = u_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \Leftrightarrow f(x) \underset{a}{\sim} u_n(x-a)^n$$

Ce résultat peut s'utiliser dans les 2 sens :

- Si on connaît un équivalent de f en a sous la forme d'un monôme, on en déduit un développement limité.
- Si on connaît un DL à l'ordre $m \geq n$ de f et qu'on note u_n le premier coefficient non nul, on en déduit un équivalent.

9.3.2 DL ailleurs qu'en 0

On pose un changement de variable $y = x - a$, on effectue le DL_n avec y et on revient à la variable initiale.

9.3.3 DL asymptotiques

Pour étudier f en $\pm\infty$, on pose le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, on effectue le DL_n et on revient à la variable x .

Ce qui donne : $f(x) = \frac{u_0 x^n + u_1 x^{n-1} + \dots + u_{n-1} x + u_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$

9.3.4 DL, graphe et tangente

La connaissance d'un DL à l'ordre 2 permet de déterminer la position de la tangente par rapport au graphe en un point : en effet le signe en $(x - a)^2$ est le même que celui de $f''(a)$.

- S'il est positif, la courbe est convexe donc la tangente est en-dessous de la courbe ;
- S'il est négatif, la courbe est concave donc la tangente est au-dessus de la courbe ;
- S'il est nul, il y a un point d'inflexion : la tangente est de part et d'autre de la courbe en coupant par le point d'abscisse a . Pour déterminer les positions de la tangente à gauche et à droite, il faut déterminer un équivalent de " f moins la tangente" (l'écart) qui donne accès au signe de cet écart.

Par exemple : si $f(x) = u_0 + u_1(x - a) + u_2(x - a)^2 + u_3(x - a)^3 + o((x - a)^3)$

Alors l'équation de la tangente en a est $y = u_0 + u_1(x - a)$.

Si $u_2 = 0$: si $u_3 \neq 0$, alors $f(x) - (u_0 + u_1(x - a)) \underset{a}{\sim} u_3(x - a)^3$

Si $\forall i \in \llbracket 3; k - 1 \rrbracket, u_i = 0$, on aura $f(x) - (u_0 + u_1(x - a)) \underset{a}{\sim} u_k(x - a)^k$.

Puis on regarde le signe de $u_k(x - a)^k$ à droite et à gauche.

9.3.5 Utilisation des DL

- Pour calculer une limite, on se sert des DL pour trouver un équivalent.
- Pour calculer des dérivées n -ièmes : par unicité des DL , on a d'une part le DL calculé et d'autre part la formule de Taylor-Young.

Chapitre 10

Séries

10.1 Études de séries

10.1.1 Séries à terme général de signe fixe à partir d'un certain rang

On sait dans ce cas qu'il existe un rang à partir duquel la suite garde le même signe, et l'étude est la même.

Dans ce cas les critères sont valides, sauf le critère de majoration qui nécessite un terme général positif.

10.1.2 Séries alternées

On peut jouer sur la puissance du (-1) en sortant un moins de la somme. Le critère spécial des séries alternées finit l'étude.

10.1.3 Séries télescopiques

Pour montrer qu'une série converge et calculer sa somme, on peut décomposer son terme général en différence de deux termes consécutifs pour faire apparaître une somme télescopique.

10.1.4 Somme d'une série

On sait qu'une série converge : pour calculer sa somme, on peut décomposer son terme général en somme de deux termes dont on sait que leurs séries respectives convergent (attention à cela!), et dont on peut déterminer les sommes plus facilement.

10.2 Plan d'étude

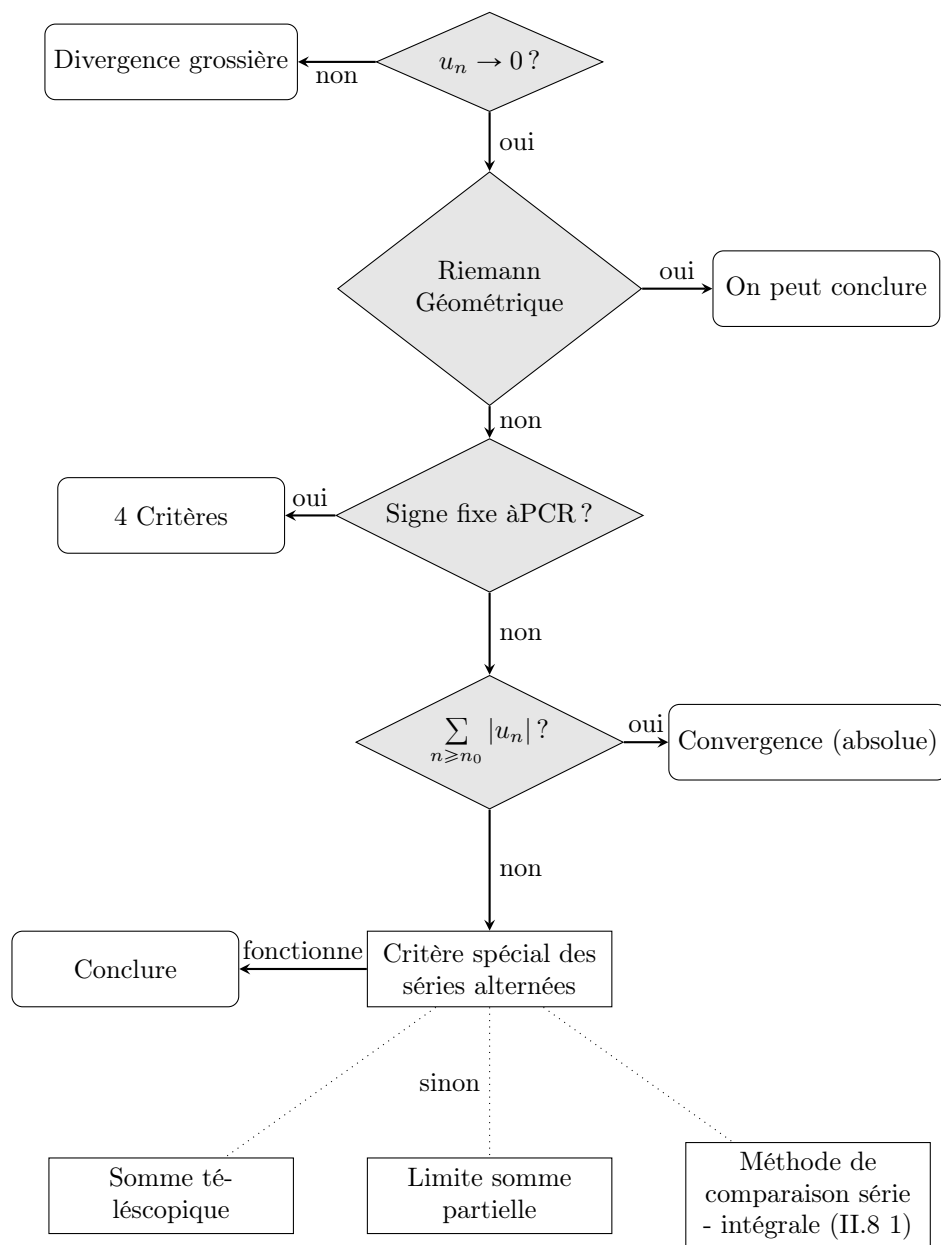


FIGURE 10.1 – Plan d'étude d'une série réelle

Chapitre 11

Intégrales

11.1 Intégrales de fractions rationnelles

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2 + 8x + 8} dx$$

On remarque que $\frac{1}{2x^2 + 8x + 8} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+2)^2}$

$$\text{Donc } I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{x+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2 - 2x - 4} dx$$

On remarque que $\frac{1}{2x^2 - 2x - 4} = \frac{1}{2(x^2 - x - 2)} = \frac{1}{2(x+1)(x-2)}$

Décomposons $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2} \quad (*)$$

$$\text{Puis } (x+1)(*) \implies \frac{1}{x-2} = \alpha + \frac{\beta(x+1)}{x-2}$$

$$\text{Et } x \leftarrow -1 \implies \boxed{\alpha = -\frac{1}{3}}$$

$$\text{Ensuite } (x-2)(*) \implies \frac{1}{x+1} = \beta + \frac{\alpha(x-2)}{x+1}$$

$$\text{Et } x \leftarrow 2 \implies \boxed{\beta = \frac{1}{3}}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-2}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left(- \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx \right) \\
 &= \frac{1}{6} (-[\ln(|x+1|)]_0^1 + [\ln(|x-2|)]_0^1) \\
 &= \frac{1}{6} (-\ln(2) + \ln(1) + \ln(|-1|) - \ln(|-2|)) \\
 &= \boxed{-\frac{\ln(2)}{3}}
 \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} dx$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} &= \frac{1}{2(x^2 + x + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2((x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{4}[(x + \frac{1}{2})^2 + 1]} = 2 \times \frac{1}{(2(x + \frac{1}{2}))^2 + 1} = 2 \times \frac{1}{(2x + 1)^2 + 1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I_3 = 2 \int_0^1 \frac{1}{(2x + 1)^2 + 1} dx = 2 \underbrace{\left[\frac{1}{2} \arctan(2x + 1) \right]_0^1}_{\text{Attention composée!}} = \boxed{\arctan(3) - \frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^1 \frac{3x + 5}{2x^2 + 2x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\frac{3}{4}(4x + 2) + \frac{7}{2}}{2x^2 + 2x + 1} dx \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 1} dx + \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} dx \\
 &= \frac{3}{4} [\ln(|2x^2 + 2x + 1|)]_0^1 + \frac{7}{2} I_3 \\
 &= \boxed{\frac{3}{4} \ln(5) + \frac{7}{2} \arctan(3) - \frac{7\pi}{8}}
 \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{2x^3 + 4x^2 + 6x + 6}{2x^2 + 2x + 1} dx$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+4x^2+6x+6 & 2x^2 + 2x + 1 \\ - & \\ \hline 2x^3+2x^2+x & \\ - & \\ \hline 2x^2+5x+6 & x+1 \\ - & \\ \hline 2x^2+2x+1 & \\ - & \\ \hline 3x+5 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 2x^3 + 4x^2 + 6x + 6 &= (2x^2 + 2x + 1)(x + 1) + (3x + 5) \\ \implies \frac{2x^3 + 4x^2 + 6x + 6}{2x^2 + 2x + 1} &= x + 1 + \frac{3x + 5}{2x^2 + 2x + 1} \quad (\text{car } 2x^2 + 2x + 1 \neq 0 \text{ sur } [0; 1]) \\ \implies I_5 &= \int_0^1 x + 1 \, dx + I_4 \\ &= \frac{1}{2}[x^2]_0^1 + [x]_0^1 + I_4 \\ &= \boxed{\frac{3}{4} \ln(5) + \frac{7}{2} \arctan(3) + \frac{3}{2} - \frac{7\pi}{8}} \end{aligned}$$

11.2 Opérations spéciales sur les intégrales

11.2.1 Limite d'une intégrale dont la borne dépend d'une variable

On part d'une inégalité "simple" qui permet de reconstruire la fonction intégrée, en la majorant / minorant / bornant par une fonction dont on connaît l'intégrale. Par croissance de l'intégrale (à écrire correctement), on intègre l'inégalité, ce qui nous donne d'une part l'intégrale dont on cherche la limite et d'autre part une intégrale que l'on sait calculer et qui dépend du paramètre.

Enfin, on invoque le théorème des gendarmes.

11.2.2 Dérivation d'une intégrale composée

Pour dériver une intégrale dont les bornes sont fonctions d'un paramètre x :

1. On coupe l'intégrale en 2 pour faire apparaître une constante sur une borne de chaque, et on change le signe de l'une pour avoir la constante "en bas".

Ce faisant, si on note $I(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$, on a une expression de la forme $I(u(x)) - I(v(x))$.

2. Le Théorème fondamental de l'Intégration permet, avec la continuité de f , de justifier la dérivabilité de I .

3. On dérive alors l'intégrale initiale comme somme et en faisant attention aux compositions.

Montrons que la fonction $J : x \mapsto \int_{\sqrt{x}}^x e^{t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculons sa dérivée.

Posons $I : x \mapsto \int_2^x e^{t^2} dt$

$$\text{On a } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, J(x) = \int_{\sqrt{x}}^x e^{t^2} dt = - \int_2^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt + \int_2^x e^{t^2} dt = I(x) - I(\sqrt{x})$$

La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de fonctions continues et $2 \in \mathbb{R}^{+*}$ donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, I en est l'unique primitive qui s'annule en 2 ; en particulier I est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, I'(x) = e^{x^2}$.

Donc J est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, J'(x) &= \frac{d}{dx}[I(x)] - \frac{d}{dx}[I(\sqrt{x})] \\ &= e^{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}^2} \\ &= \boxed{e^{x^2} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

11.2.3 Intégrale d'une fonction non de classe C^1 sur une borne

Il se peut que l'on veuille intégrer une fonction qui n'est pas de classe C^1 sur une borne (voir l'exemple de arcsin en 1 section 2.1 des exercices-type).

On passe cette borne en paramètre variable, on intègre avec celui-ci, puis par un argument de continuité (à démontrer, souvent avec le Théorème fondamental de l'Intégration), la limite de ce paramètre vers la valeur initiale de la borne donne l'intégrale recherchée.

11.2.4 Changement de variable

Pour poser un changement de variable $u = f(x)$:

1. $\frac{du}{dx} = f'(x)$ donc $du = f'(x)dx$: on fait d'abord apparaître $f'(x)$ à côté de dx , ce qui donnera le du .
2. On fait "disparaître" x en transformant l'expression pour n'y laisser que du u
3. On change les bornes ! que l'on peut préparer avec un petit tableau.

(voir exercice-type 4.2)

11.2.5 Calcul de primitive avec une intégrale

Le Théorème fondamental de l'Intégration et une intégration permettent de calculer une primitive d'une fonction.

Pour cela on intègre f par parties entre $a \in \mathbb{R}$ et x , en voyant la fonction dans l'intégrale comme $1 \times f$.

On dérive alors f et on primitive 1.

Exemple de arctan laissé en exercice au lecteur.

Remarque : on peut aussi rechercher une primitive avec un changement de variable.

Chapitre 12

Matrices

12.1 Inversibilité

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = Y$$

De plus ce résultat affirme que $X = A^{-1}Y$ qui donne accès aux coefficients de A^{-1}

Si on veut juste montrer que A est inversible, on a aussi le résultat qui demande moins de calculs :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \implies X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$$

Pour montrer que A n'est pas inversible, on peut expliciter une matrice colonne non nulle qui multipliée par A donne la matrice nulle.

On dispose également d'autres résultats :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

On peut également déterminer A^{-1} en appliquant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (mais pas de mélange !) sur une méthode éventuellement inspirée du Pivot de Gauss pour transformer A en I_n . On trouve alors A^{-1} en appliquant à I_n les mêmes opérations (dans le même ordre).

Si on dispose d'un polynôme annulateur de A – notons-le $P = \sum_{k=1}^n a_k X^k + a_0 I_n -$

on remarque que : $P(A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k A^k = -a_0 I_n \Leftrightarrow A \left(\frac{1}{-a_0} \sum_{k=1}^n a_k A^{k-1} \right) = I_n$

ce qui donne une expression de A^{-1} en fonction des puissances de A .

Enfin, on a aussi :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

12.2 Puissance n -ième

Pour déterminer A^n , on peut :

- conjecturer sa forme et la montrer par récurrence
- décomposer A en somme de deux matrices qui commutent et dont on détermine plus simplement les puissances, puis utiliser la formule du binôme
- trouver un polynôme P tel que $P(A)$ est la matrice nulle. On note Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de X^n par P . On a donc $X^n = QP + R$ et donc $A^n = \underbrace{Q(A)P(A)}_{\text{car } P(A)=0} + R(A)$, donc $A^n = R(A)$

(voir exercice-type 15.2)

- Par diagonalisation : on note f l'application linéaire canoniquement associée à A , on trouve une base dans laquelle la matrice de f devient une matrice D diagonale. On explicite la matrice de passage P : on a alors que $A^n = P^{-1}D^nP$

Chapitre 13

Permutations

13.1 Signature

Pour calculer la signature d'une permutation σ , on peut compter le nombre n de transpositions (alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$), mais une décomposition en produit de cycles suffit : si on trouve des cycles de longueurs $p_1, \dots, p_n$, comme $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$, on a que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p_1} \times \dots \times (-1)^{p_n}$.

13.2 Décomposition en produit de transpositions de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Sur la page suivante se trouve un schéma type "algorithme itératif" permettant de trouver la décomposition en produit de transpositions d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

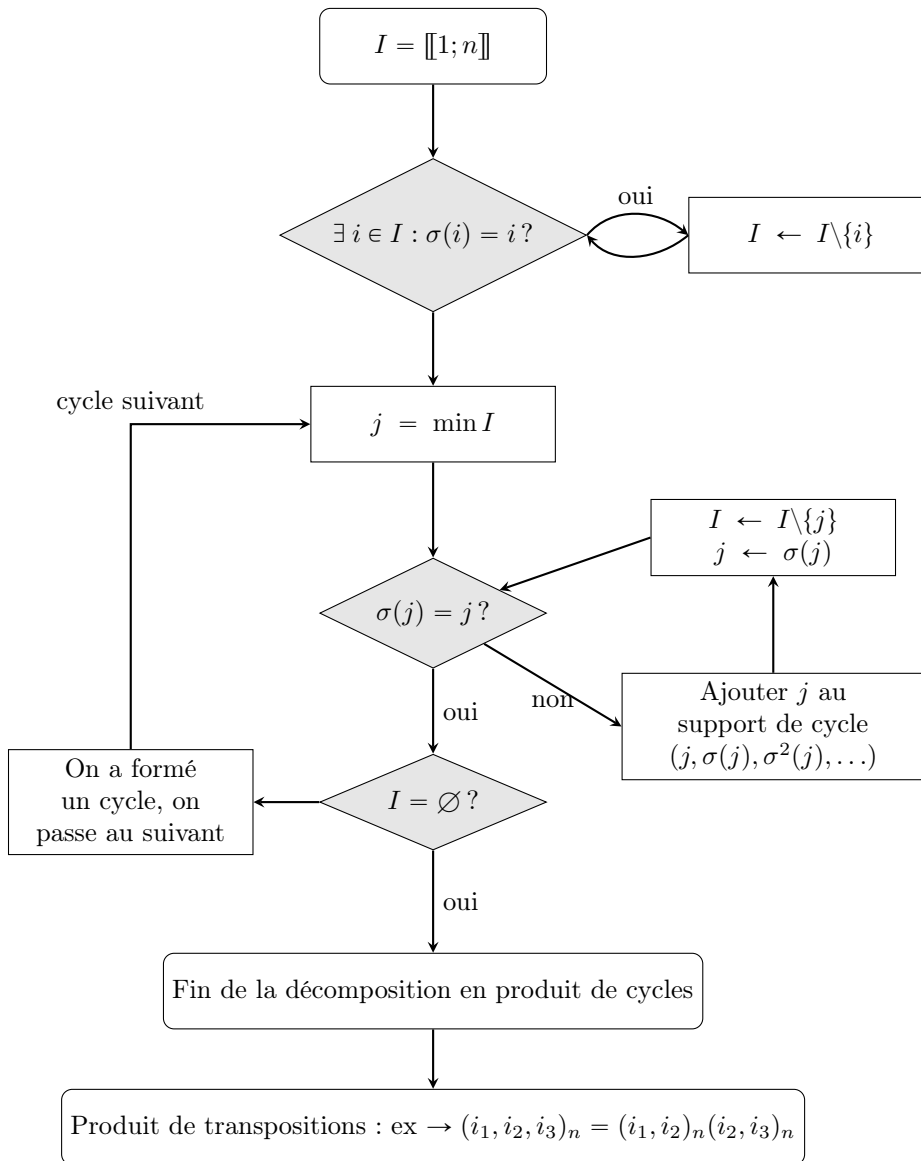


FIGURE 13.1 – Décomposition d'une permutation

Chapitre 14

Déterminants

14.1 Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour calculer $\det(u)$, il suffit de choisir une base $\mathcal{B}$ de E et de calculer $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$. Pour cela, on peut s'aider de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Remarque : la valeur du déterminant ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie, même si la matrice de u en dépend.

14.2 Calcul d'un déterminant

Pour calculer un déterminant, on peut lui appliquer une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître un déterminant plus simple.

Le plus souvent (mais pas tout le temps), on utilise une méthode semblable au Pivot de Gauss pour trianguler le déterminant (le résultat est alors le produit des éléments diagonaux) ; dans d'autres cas on essaie de se ramener à une des situations ci-dessous.

Attention à l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées : une opération ne doit pas se servir d'une ligne ou colonne déjà modifiée.

On ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres.

Une opération du type $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplie la valeur du déterminant a par α .

Une permutation σ de l'ordre des colonnes d'un déterminant multiplie sa valeur par $\epsilon(\sigma)$. Par conséquent, une opération du type $C_i \leftrightarrow C_j$ inverse le signe du déterminant.

Idem avec les lignes.

Remarque : quand le Pivot de Gauss ne fonctionne pas, souvent effectuer la somme des lignes / colonnes peut démêler la situation.

Quand les déterminants ont une forme un peu particulière avec quelques bonnes propriétés, un développement par rapport à une ligne ou une colonne permet de

faire apparaître le même déterminant avec une taille inférieure : on peut ainsi établir une relation de récurrence (souvent d'ordre 2), qui ramène le calcul du déterminant à l'étude d'une suite. (voir exercice-type 16.1)

Chapitre 15

Dénombrement

15.1 Dénombrement d'un ensemble

Pour dénombrer un ensemble E , i.e. montrer qu'il est fini et trouver son cardinal, on peut :

- chercher $n \in \mathbb{N}$ et trouver $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$ (ou dans l'autre sens bijective.
- chercher un ensemble F dont on connaît le cardinal et trouver $\varphi : E \rightarrow F$ (ou l'inverse) bijective.
- Trouver une partition de E dont on connaît (ou trouver plus simplement) les cardinaux de chaque partie ; ainsi le cardinal de E est la somme de ceux des parties de sa partition.
On peut parfois faire apparaître une relation de récurrence.
- Dérouler un protocole de dénombrement.
- Dans une rédaction protocole, il est parfois difficile de compter une unique fois les éléments de l'ensemble : dans ce cas on s'assure de tous les compter le même nombre de fois, connu, puis on divise le résultat par ce nombre.
- Dénombrer un ensemble dont on connaît le cardinal, en faisant intervenir le cardinal que l'on cherche et d'autres cardinaux connus. Par résolution de l'équation (simple), on trouve le cardinal cherché.

Pour dénombrer un ensemble, il est parfois plus simple de dérouler un protocole de dénombrement que d'étudier une partition. Pour des exemples et la rédaction, voir le chapitre Dénombrement dans la partie Démonstrations.

Chapitre 16

Probabilités

16.1 Modélisation des expériences aléatoires

Lors d'une expérience aléatoire, si on [répétition] et que [ordre compte] :

oui/oui : l'univers est un produit cartésien. On modélise par des p -uplets.

non/oui : l'univers est l'ensemble des p -arrangements. On modélise par des listes.

non/non : l'univers est l'ensemble des p -combinaisons. On modélise par des (sous-)ensembles.

Remarque : ce ne sont que des situations générales, un problème particulier peut amener à des constructions différentes.

16.2 Variance

Pour calculer la variance d'une variable aléatoire, on utilise en pratique la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Souvent $E(X)$ a été calculé au préalable, et le théorème de transfert permet de calculer $E(X^2)$

16.3 Décomposition d'une variable aléatoire

On utilise souvent des variables indicatrices pour en décomposer une autre.

Chapitre 17

Espaces préhilbertiens réels

17.1 Algorithme d'orthonormalisation de Schimdt

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E .

Si cette famille est libre, alors il existe une unique famille de vecteurs de E orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} \text{vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{vect}(f_1, \dots, f_i) \\ (e_i|f_i) > 0 \end{cases}$$

Les vecteurs $f_1, \dots, f_n$ s'obtiennent par l'algorithme formé par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \\ \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, f_i = \frac{e_i - \sum_{k=1}^{i-1} (e_i|f_k)f_k}{\|e_i - \sum_{k=1}^{i-1} (e_i|f_k)f_k\|} \end{cases}$$

17.2 Montrer qu'une famille est une base ortho-normale

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E , on montre que $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ et que $\mathcal{F}$ est une famille orthonormée.

Pour ce dernier point, on peut montrer que $\mathcal{F}$ est orthogonale et normée, i.e.

$$\text{(avec des notations évidentes)} \begin{cases} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (e_i|e_j) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|e_i\| = 1 \end{cases}, \text{ mais c'est équi-}$$

valent à montrer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ (démonstration simple laissée en exercice au lecteur).

Autrement, une famille est orthonormale si, et seulement si, sa matrice est orthogonale.

17.3 Détermination du projecteur orthogonal

Soient $(E, (.,.))$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E .

Pour déterminer $p_F^\perp(x)$, on peut :

- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , alors $p_F^\perp(x) = \sum_{k=1}^p (x|e_k)e_k$
(la base orthonormale de F peut s'obtenir par orthonormalisation d'une base de F quelconque.)
- Utiliser le fait que $p_F^\perp + p_{F^\perp}^\perp = id_E$: l'intérêt est d'autant plus grand que la dimension de $F^\perp$ est plus petite que celle de F , notamment pour la recherche d'une base orthonormale.
- $y = p_F^\perp(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F & (1) \\ x - y \in F^\perp & (2) \end{cases}$

La base de F ne doit pas forcément être orthonormale.

$$(1) \Leftrightarrow \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : y = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k$$

$$(2) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x - y|e_i) = 0$$

Ce qui donne un système à résoudre avec p équations et de p inconnues λ_i

- On peut mélanger les méthodes ci-dessus

17.4 Détermination de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

On a que $d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F^\perp(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F^\perp(x)\|^2}$

Donc le calcul de distance soit se précède d'un calcul de projeté orthogonal, soit de minimum.

17.5 Isométries vectorielles

Soient $(E, (.,.))$ un espace euclidien et φ une application.

Pour montrer que φ est une isométrie vectorielle, il faut montrer que :

- $\varphi \in \mathcal{L}(E)$
- φ conserve la norme
- OU φ conserve le produit scalaire
- OU φ conserve les bases orthonormales, i.e. la famille des images par φ d'une base orthonormale de E forme une base orthonormale de E .

On peut aussi déterminer si sa matrice est orthogonale (la réciproque est vraie).

17.6 Base orthonormale

Soient $(E, (.,.))$ une base orthonormale, $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E telle que $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

$\mathcal{F}$ est une base orthonormale de E si, et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est orthogonale.

17.7 Matrices orthogonales

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ la famille de ses colonnes forme une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
- $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ la famille de ses lignes forme une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
- $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t A \cdot A = I_n$

17.8 Mesure de l'angle entre deux vecteurs

Soient x et y deux vecteurs d'un espace euclidien $(E, (.,.))$. Pour calculer l'angle θ entre x et y , on peut calculer leur produit scalaire $(x|y)$, leur produit mixte $[x, y]$, les normes $\|x\|$ de x et $\|y\|$ de y .

On utilise ensuite les formules
$$\begin{cases} (x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta) \\ [x, y] = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

pour écrire
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \\ \sin(\theta) = \frac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|} \end{cases}$$

De là, selon les valeurs trouvées, on peut soit effectuer le quotient des lignes et passer à l'arctangente, soit passer la première ligne à l'arccos, ce qui laisse deux possibilités : pour déterminer le signe, on passe la seconde ligne à l'arcsin.

Chapitre 18

Divers

18.1 Rang et trace

Pour calculer le rang d'une matrice, on peut lui appliquer une succession de transformations élémentaires en s'inspirant de la méthode de Gauss. Le but est de trianguler la matrice, i.e. échelonner ses colonnes/lignes. La famille des colonnes/lignes échelonnées forme alors une base de l'espace vectoriel engendré par la famille des colonnes/lignes de la matrice initiale. Le rang de la matrice est donc le nombre de colonnes/lignes échelonnées.

Attention! Pour interpréter la famille des lignes ou des colonnes comme une base, il ne faut avoir travaillé que sur les lignes uniquement ou que sur les colonnes uniquement, sans mélange.

Pour calculer le rang d'une application linéaire en dimension finie, on peut calculer le rang de sa matrice, ou utiliser le théorème du rang.

La trace d'une application linéaire en dimension finie est celle de sa matrice.

18.2 Sommes

18.2.1 Séparation d'indices pairs et impairs

Pour trouver les bornes de la somme des...

$$\begin{array}{lll} \dots \text{ pairs :} & \dots \text{ impairs :} & \\ 0 \leq 2l \leq n & 0 \leq 2l+1 \leq n & \text{Attention si } n_0 \neq 0 \\ \Leftrightarrow 0 \leq l \leq \frac{n}{2} & -\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{n-1}{2} & \text{Puis on écrit :} \\ 0 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & 0 \leq l \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor & l \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$\sum_{l=0}^n a_l = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2l} + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2l+1}$$

Exprimons $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \cos(nx) &= \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^n) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(x))^{n-k} (i \sin(x))^k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n i^k \sin^k(x) \cos^{n-k}(x)\right) \text{ (formule du} \\
 &\text{binôme)} \\
 &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} \sin^{2k+1}(x) \cos^{n-2k-1}(x)\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x)}_{\in \mathbb{R}} \right. \\
 &\quad \left. + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(x) \cos^{n-2k-1}(x)}_{\in \mathbb{R}}\right)
 \end{aligned}$$

Donc $\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x)$

De même en remplaçant Re par Im :

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(x) \cos^{n-2k-1}(x)$$

18.2.2 Permutations de sommes

Les sommes rectangulaires, de la forme $\sum_{k=n_0}^n \sum_{l=m_0}^m a_{k,l}$ permutent sans souci.

Les sommes triangulaires, de la forme $\sum_{k=n_0}^n \sum_{l=n_0}^k a_{k,l}$ permutent différemment :

Pour s'y retrouver, on peut écrire au brouillon : $\sum_{n_0 \leq l \leq k \leq n} a_{k,l}$

On peut y lire les inégalités : $\begin{cases} n_0 \leq k \leq n \\ n_0 \leq l \leq k \end{cases}$ qui sont celles déjà utilisées,

et $\begin{cases} n_0 \leq l \leq n \\ l \leq k \leq n \end{cases}$ qui sont celles utilisées après permutation.

Pour le voir, on peut souligner ces différents jeux d'inégalités.

Attention à bien permuter les sommes après avoir changé les bornes !

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 1 \right) 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k 2^k = \sum_{l=1}^n \sum_{k=l}^n 2^k = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=0}^n 2^k - \sum_{k=0}^{l-1} 2^k \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^n \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - \frac{2^{l-1+1} - 1}{2 - 1} \right) \text{ (formule des sommes géométriques)} \\
&= \sum_{l=1}^n (2^{n+1} - 2^l) = 2^{n+1} \sum_{l=1}^n 1 - \left(\sum_{l=0}^n 2^l - 2^0 \right) \text{ (car } 2^{n+1} \text{ est indépendant de } k) \\
&= n2^{n+1} - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} + 1 \text{ (formule des sommes géométriques)} \\
&= \boxed{(n-1)2^{n+1} + 2}
\end{aligned}$$

18.3 Pivot de Gauss

• Cas général : à chaque étape, on fait ajoute aux lignes des combinaisons linéaire des autres pour faire disparaître une même inconnue. On commence par la ligne 2 et celles en-dessous, puis la 3^e et celles en-dessous, jusqu'à ce que la dernière ligne ne contienne qu'une seule inconnue.

Autrement dit, en notant les inconnues $x_1, \dots, x_n$, à la première étape, L_1 contient $x_1, \dots, x_n$, $L_2, \dots, L_n$ contiennent $x_2, \dots, x_n$.

À la deuxième étape, L_1 contient $x_1, \dots, x_n$, L_2 contient $x_2, \dots, x_n$, et L_3 jusqu'à L_n contiennent $x_3, \dots, x_n$.

etc.

À la n^{e} étape, L_1 contient $x_1, \dots, x_n$, L_2 contient $x_2, \dots, x_n$, et ainsi de suite jusqu'à L_n contient x_n .

Pour le phase de remontée, on exprime x_n à x_1 successivement avec les lignes L_n à L_1 .

• Cas particulier 1 : si au cours de la phase de triangulation, une ligne s'écrit $0 = 0$, on l'enlève du système ; si elle s'écrit $v = 0$ (avec $v \neq 0$) alors le système n'a pas de solutions.

• Cas particulier 2 : si, à la fin de la phase de triangulation, la dernière ligne contient plus d'une inconnue (dites "non triangulées"), on les passe de l'autre côté du signe = et on les considère comme paramètres.

• Cas particulier 3 : on appelle k^{e} pivot le coefficient $a_{k,k}$ devant l'inconnue x_k à la ligne L_k . Si lors de la phase de triangulation l'un des pivots est nul, on échange la ligne en question avec celle en-dessous.

18.4 Inégalités

Quelques idées pour démontrer certaines inégalités :

18.4.1 Avec des intégrales

On peut démontrer certaines inégalités en intégrant les dérivées de chaque membre, pour lesquels l'inégalité est transparente.

18.4.2 Inégalité d'une valeur absolue

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ -x \leq a \end{cases} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

On peut aussi, s'il s'agit de fonctions, montrer que l'une est λ -lipschitzienne.

18.5 Trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit

Sur un exemple :

Soient u et v deux complexes tels que
$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u \times v = 1 \end{cases}$$

u et v sont les racines de l'équation $(z - u)(z - v) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (u + v)z + uv = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = 0$

1 en est la racine double évidente, donc $u = v = 1$

Merci pour votre acquisition de cet ouvrage!

En ce qui concerne les petites blagues mathématiques que vous avez trouvées à la fin des chapitres de la partie I, elles sont extraites du livre "Blagues mathématiques et autres curiosités" de Bruno Winckler, que vous pouvez aussi trouver sur Internet en PDF. Certaines ont été remaniées pour s'affranchir de leur contexte initial.