

Mathématiques 4ème

E. Suong

25 mai 2024

Cours de quatrième

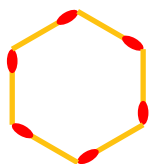
1 Calcul littéral	4
1 Expressions littérales et programmes de calcul	4
2 Distributivité	6
2 Volumes	8
1 Unités de volume, conversions	9
2 Solides usuels	10
2 bis Pyramide et cône	12
3 Nombres relatifs	15
1 Retour sur la notion d'opposé	15
2 Somme et différence de nombres relatifs	17
3 Règle des signes : produit et quotient de nombres relatifs	18
4 Le théorème de Pythagore	21
1 Racine carrée d'un nombre positif	21
2 Le théorème de Pythagore	22
5 Arithmétique	25
1 Multiples et diviseurs d'un nombre entier	25
2 Notion de nombre premier, décomposition d'un entier	26
6 Nombres rationnels (fractions)	28
1 Fractions quotient : quelques rappels	28
2 Des nombres rationnels particuliers : les nombres décimaux	28
3 Addition et soustraction de fractions	29
4 Simplification, encadrement et comparaison de fractions	30
7 Fonctions	33
1 Activité d'introduction	33
2 Représenter des grandeurs liées	33
8 Proportionnalité	36
1 Situation de proportionnalité	36
2 Quatrième proportionnelle	41
3 Proportionnalité et pourcentages	44
9 Le théorème de Thalès	45
1 Quelques rappels sur les triangles	45
2 Quelques rappels de géométrie dans le plan	46
3 Triangles égaux	47
4 Le théorème de Thalès	48
10 Puissances et écriture scientifique	52
1 Puissance d'un nombre	52
2 Écriture scientifique d'un nombre décimal	54

11 Parallélogrammes	58
1 (Re)connaître un parallélogramme	58
2 Tracer un parallélogramme	58
3 Parallélogrammes particuliers – classification des quadrilatères	60
12 Nombres rationnels : multiplication et division	61
1 Multiplier deux fractions	61
2 Notion d'inverse – diviser par une fraction	61
13 Transformations du plan	63
1 Les transformations du plan	63
2 Frises et pavages	64
3 Agrandissement et réduction	65
14 Équations	67
15 Statistiques	70
1 Effectifs et fréquences – représentation graphique des données	70
2 Indicateurs de position d'une série statistique	72
16 Probabilités	73
1 Modéliser le hasard : vocabulaire	73
2 Quantifier le hasard : probabilité d'un évènement	73
17 Cosinus d'un angle	76

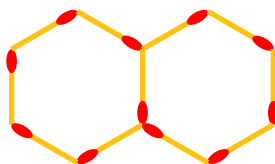
Chapitre 1: Calcul littéral

1– Expressions littérales et programmes de calcul

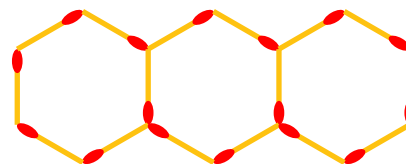
Activité: On fabrique des figures suivantes à l'aide d'allumettes :



ÉTAPE 1



ÉTAPE 2



ÉTAPE 3

- 1► Combien d'allumettes sont utilisées à l'étape 1 ? à l'étape 2 ? à l'étape 3 ?
 - 2► Donner le nombre d'allumettes nécessaires pour construire l'étape 4, puis pour l'étape 5.
 - 3► Établir une formule qui permet de calculer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire n'importe quelle étape. *Détaillez le raisonnement.*
 - 4► Si on dispose de 1 725 allumettes, jusqu'à quelle étape peut-on faire la construction ?
- 1► À l'étape 1, on utilise 6 allumettes. À l'étape 2, on utilise 11 allumettes. À l'étape 3, on utilise 16 allumettes.
 - 2► en faisant un dessin, on voit qu'à l'étape 4, on utilise 21 allumettes, et à l'étape 5, on utilise 26 allumettes.
 - 3► Pour construire une étape donnée, on peut multiplier le numéro de l'étape par 5 et ajouter 1. En effet, à une étape donnée, on compte le nombre d'hexagones ouverts à gauche (qui constituent une chaîne de 5 allumettes) : il y en a autant que le numéro de l'étape. On ajoute 1 pour fermer l'hexagone le plus à gauche.
 - 4► Si on note n le numéro de l'étape, alors le nombre d'allumettes s'exprime $5 \times n + 1$ d'après la question précédente. Comme $1725 = 5 \times 345$, on peut utiliser $5 \times 344 + 1 = 1721$ allumettes pour aller jusqu'à l'étape 344, et il reste 4 allumettes.

Définition : Une expression littérale est une expression dans laquelle certaines valeurs sont remplacées par des lettres, appelées variables de l'expression littérale.

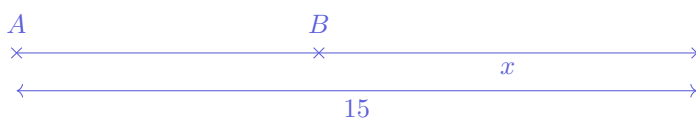
Exemple :

- L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est $L \times \ell$.
- Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2 \times \pi \times r$.

Remarque : Dans l'expression $2 \times \pi \times r$, r est une variable, et π est un nombre !

Exercice:

- a► Exprimer la longueur de $[AB]$ en fonction de x dans les deux cas suivants :



Dans le premier cas, $AB = 10 + x$, et dans le second cas, $AB = 15 + x$.

- b► Exprimer le résultat P du programme de calcul ci-contre appliqué à un nombre n .

- 1► Choisir un nombre.
- 2► Le multiplier par 3.
- 3► Ajouter 5 au résultat.

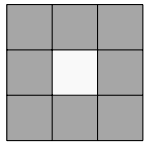
Le résultat s'exprime $P = 3n + 5$.

Lorsqu'on connaît les valeurs de ses variables, on peut calculer la valeur d'une expression littérale, en remplaçant les variables par leurs valeurs.

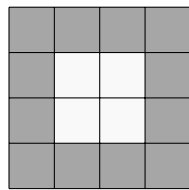
Exemple :

- Le périmètre d'un cercle de rayon $r = 3$ est $2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 3 = 6 \times \pi$.
- L'aire d'un rectangle de largeur $\ell = 2$ et de longueur $L = 5$ est $\ell \times L = 2 \times 5 = 10$.

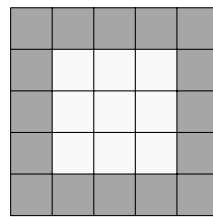
Activité: Pierre joue avec des carreaux de mosaïque. Il dispose des carreaux gris autour de différents carrés constitués de carreaux blancs. En voici quatre :



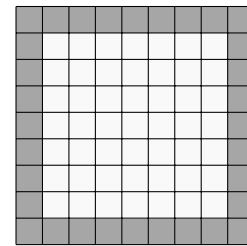
CARRÉ DE TAILLE 1



CARRÉ DE TAILLE 2

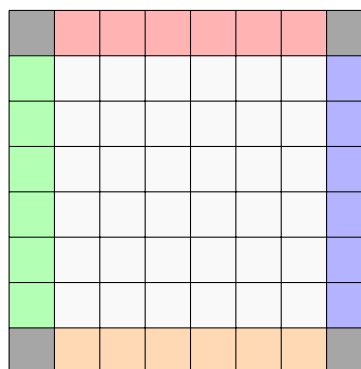


CARRÉ DE TAILLE 3



CARRÉ DE TAILLE 7

- 1► Combien de carreaux gris entourent le carré blanc de taille 1 ? Celui de taille 2 ? Celui de taille 3 ?
 - 2► Combien de carreaux gris entourent le carré blanc de taille 7 ?
 - 3► On construit un carré blanc de taille 56. Combien y aurait-il de carreaux gris entourant celui-ci ?
 - 4► Expliquez par une phrase ou par un calcul comment on peut trouver le nombre de carreaux gris entourant un carré blanc de l'importe quelle taille.
 - 5► Si on double le côté du carré blanc, double-t-on aussi le nombre de carreaux gris de la bordure ?
 - 6► Peut-on obtenir des bordures de 214 carreaux gris ? 348 ? 1 700 ?
- 1► Il y a 8 carreaux autour du carré de taille 1, 12 carreaux autour du carré de taille 2, et 15 carreaux autour du carré de taille 3.
 - 2► Il y a 32 carreaux autour du carré de taille 7. On peut faire un dessin ou utiliser le raisonnement expliqué dans la question suivante.
 - 3► Pour compter les carreaux autour d'un carré d'une certaine taille, on peut multiplier la taille du carré par 4 (pour les 4 côtés) et ajouter 4 au résultat (pour les 4 sommets), en vertu du découpage suivant :



Ainsi, à l'étape 56, il y a $4 \times 56 + 4 = 228$ carreaux.

- 4► Pour entourer un carré blanc de n'importe quelle taille, il suffit de multiplier le côté du carré par 4 puis d'ajouter 4 au résultat.
- 5► Non, car par exemple, pour passer de l'étape 1 à l'étape $2 = 2 \times 1$, on ne multiplie pas par 2 le nombre de carreaux ($12 \neq 8 \times 2$).
- 6► Avec la formule que l'on a donné à la question 4►, on remarque le nombre de carreaux est toujours un multiple de 4. Comme 214 n'est pas un multiple de 4, on ne peut pas réaliser une bordure de 214 carreaux. À l'inverse, $348 = 344 + 4 = 4 \times 86 + 4$ donc 348 est le nombre de carreaux à l'étape 86, et $1700 = 1696 + 4 = 4 \times 424 + 4$ donc 1700 est le nombre de carreaux à l'étape 424.

Opération	Symbole	Nombre de gauche	Nombre de droite	Résultat
Addition	+	Terme	Terme	Somme
Soustraction	−	Terme	Terme	Différence
Multiplication	×	Facteur	Facteur	Produit
Division	/	Dividende	Diviseur	Quotient

Définition : La nature d'une expression littérale est la dernière opération que l'on effectue lors de son calcul : une somme, un produit, une différence, une division.

Exemple :

- L'expression $18 \times 3 + 5$ est une somme.
- L'expression $6, 2 \times (1 + 3, 7)$ est un produit.
- L'expression $2 \times x + 8$ est une somme.

Convention d'écriture : Lorsqu'il est placé devant une lettre ou une parenthèse, on peut ne pas écrire le symbole $\times$ de la multiplication.

Exemple : On peut écrire $2(a + b)$ à la place de $2 \times (a + b)$, ou $5x$ à la place de $5 \times x$. On ne peut pas écrire $(1 + y)2$ à la place de $(1 + y) \times 2$, ni $z3$ à la place de $z \times 3$.

Cas particuliers :

- On écrit toujours 0 au lieu de $0x$.
- On écrit toujours x au lieu de $1x$.
- On n'écrit jamais un même symbole plusieurs fois de suite : on écrit x^2 au lieu de xx (ce que se lit « x au carré»), on écrit x^3 au lieu de xxx (ce que se lit « x au cube»).

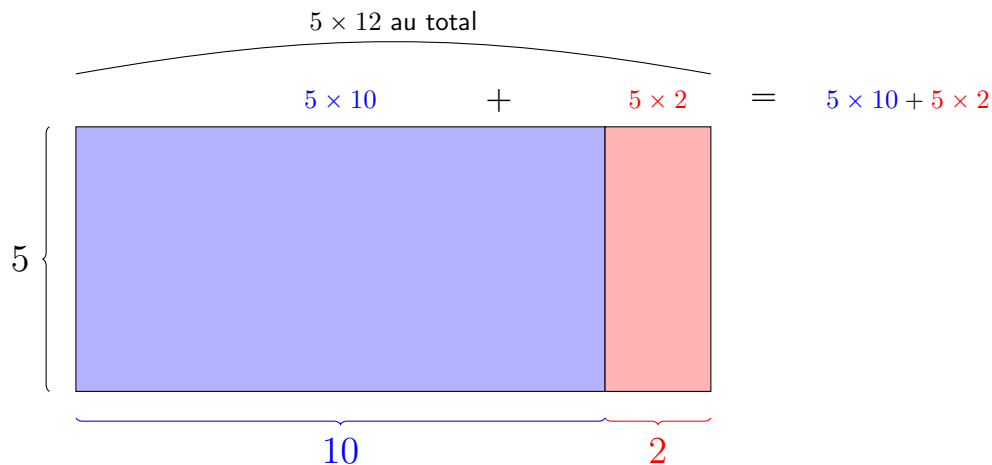
2– Distributivité

A– Développement et factorisation

Propriété (Distributivité simple) : Pour tous nombres a , b et c ,

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{Développer}} \\
 a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\
 \xleftarrow{\text{Factoriser}}
 \end{array}$$

Remarque : On peut représenter la situation avec un dessin :



Exercice: Développez :

a► $4(x + 3)$

b► $3(4x - 5)$

c► $5(2y - 6)$

d► $7x(2 - 3x)$

Factorisez :

e► $2m + 2 \times 7$

f► $15 - 10y$

g► $3x^2 - 18x$

a► $4(x + 3) = 4 \times x + 4 \times 3 = 4x + 12$

b► $3(4x - 5) = 3 \times 4x - 3 \times 5 = 12x - 15$

c► $5(2y - 6) = 5 \times 2y - 5 \times 6 = 10y - 30$

d► $7x(2 - 3x) = 7x \times 2 - 7x \times 3x = 14x - 21x^2$

e► $2m + 2 \times 7 = 2(m + 7)$

f► $15 - 10y = 5 \times 3 - 5 \times 2y = 5(3 - 2y)$

g► $3x^2 - 18x = 3x \times x - 3x \times 9 = 3x(x - 9)$

B– Simplifier/réduire une expression

Définition : Simplifier (ou réduire) une expression littérale, c'est la réécrire sous une forme plus concise/compacte, sans redondance ou complexité inutile.

Exemple : $4x - 2y + 6x + 3y - 5 + y = 10x + 2y - 5$

[À FAIRE : détailler ce paragraphe]

Chapitre 2: Volumes

Un bon gouter

Activité 1

Jessica a acheté une brique de lait représentée ci-contre.

1. a. Quel est le nom de ce solide ?
 b. Donner :
 - le nombre et la nature des faces ;
 - le nombre de sommets ;
 - le nombre d'arêtes.
- c. Après en avoir bu le contenu, Jessica ouvre intégralement l'emballage et le met à plat. Construire la figure obtenue.

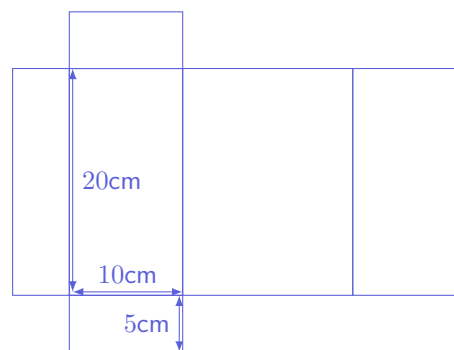


2. Jessica prend ensuite une boîte de conserve d'abricots. Elle en décolle l'étiquette puis la déroule bien à plat.
- a. Quelle est la forme obtenue ? Quelles sont ses dimensions ?
- b. Réaliser un patron de cette boîte de conserve.
- c. Le fabricant de cette boîte affiche sur l'étiquette une contenance de 850 mL. Sachant que le volume $\mathcal{V}$ d'un cylindre est donné par la formule $\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$, cette contenance est-elle vraisemblable ?



Activité:

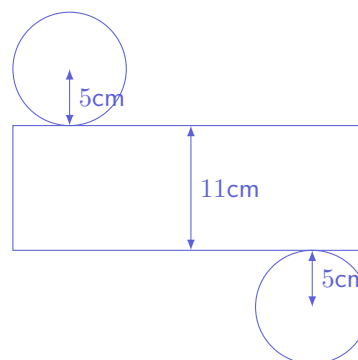
- 1► Ce solide est un pavé droit.
- 2► Il a 6 faces rectangulaires, 8 sommets et 12 arêtes.
- 3► Elle obtient la figure ci-contre.



- 4► a► Elle obtient un rectangle de 11cm par $10 \times \pi = 10\pi \simeq 31,4\text{cm}$.
- b► Elle obtient la figure ci-contre.
- c► Le volume de la boîte en dm^3 est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \text{aire de la base} \times \text{hauteur} \\ &= \pi \times .5^2 \times 1,1\text{dm}^3 \simeq 0,275\text{dm}^3\end{aligned}$$

Comme $1\text{dm}^3 = 1\text{L}$, on obtient $\mathcal{V} \simeq 275\text{mL}$.
La contenance annoncée n'est donc pas vraisemblable.



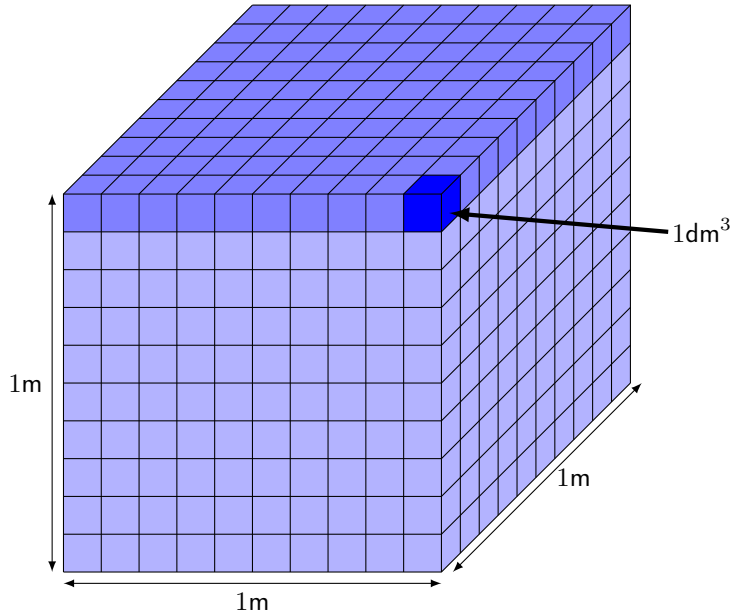
1– Unités de volume, conversions

Définition : Le volume d'un solide est une mesure de l'espace occupé par ce solide.

L'unité du volume du système international est le mètre cube (m^3).

Propriété :

- ▶ Un mètre cube est le volume d'un cube de 1m de côté.
- ▶ Un décimètre cube est le volume d'un cube de 1dm de côté.
- ▶ ...



Proposition :

- ▶ $1\text{m}^3 = 1000\text{dm}^3$
- ▶ $1\text{cm}^3 = 1000\text{mm}^3$
- ▶ $1\text{dm}^3 = 1000000\text{mm}^3$
- ▶ $1\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3$
- ▶ $1\text{m}^3 = 1000000\text{cm}^3$
- ▶ $1\text{m}^3 = 1000000000\text{mm}^3$

Remarque : Pour effectuer des calculs, il faut veiller à avoir une seule unité : on n'ajoute pas des dm^3 avec des mm^3 !

Pour désigner le volume à l'intérieur d'un récipient, on parle plutôt de contenance, et on utilise une unité plus pratique pour les contenances de la vie de tous les jours : le litre (L).

Définition : $1\text{L} = 1\text{dm}^3$ (et donc $1\text{mL} = 1\text{cm}^3$).

Méthode 1 : Pour convertir des volumes en m^3 , dm^3 , cm^3 , ... , on peut utiliser le tableau suivant :

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		

Sous chaque multiple de l'unité, il y a trois colonnes, car $1\text{m}^3 = 1000\text{dm}^3$, et $1\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3$, ...

Par exemple, essayons de convertir 23dm^3 en cm^3 .

1▶ Dans 23dm^3 , il y a 3 unités de dm^3 et 2 dizaines de dm^3 :

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
				2	3						

- 2► On cherche à convertir en cm^3 : il nous faut donc faire apparaître autant de 0 que nécessaire pour atteindre la colonne des unités de centimètres cubes.

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
				2	3	0	0	0			

- 3► On lit combien de cm^3 on a : ici, $23\text{dm}^3 = 23\,000\text{cm}^3$.

Exemple : Convertissons 23dm^3 en m^3 grâce à cette même méthode :

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		0	0	2	3						

Ce qui donne l'égalité : $23\text{dm}^3 = 0,023\text{m}^3$.

Méthode 2 : Une autre manière d'effectuer les conversions est d'utiliser la Proposition précédente :

$$23\text{dm}^3 = 23 \times (1\text{dm}^3) = 23 \times (1\,000\text{cm}^3) = 23 \times 1\,000\text{cm}^3 = 23\,000\text{cm}^3.$$

Méthode 3 : Une autre manière d'effectuer les conversions est de convertir les trois longueurs sous-jacentes (comme si on avait le volume d'un pavé droit de largeur et de hauteur 1) :

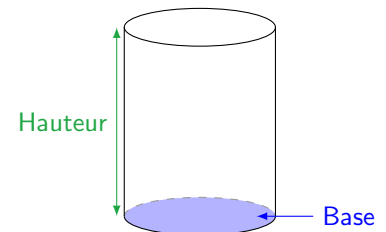
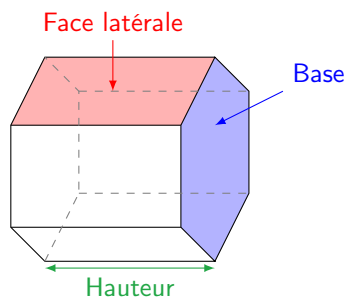
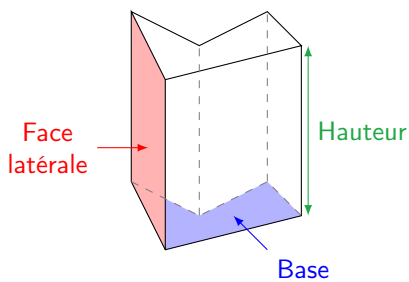
$$23\text{dm}^3 = 23\text{dm} \times 1\text{dm} \times 1\text{dm} = 230\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm} = 23 \times 10 \times 10\text{cm}^3 = 23\,000\text{cm}^3.$$

Exercice:

- a► $23,1\text{m}^3 = 23\,100\,000\text{cm}^3$.
 b► $0,5\text{dm}^3 = 0,5 \times 1\,000\text{cm}^3 = 500\text{cm}^3$.
 c► $25\text{cm}^3 = 25 \times \frac{1}{1000}\text{dm}^3 = 0,025\text{dm}^3 = 0,025\text{L}$.
 d► $1\text{cL} = 0,01\text{L} = 0,01\text{dm}^3 = 0,01 \times 1000\text{cm}^3 = 100\text{cm}^3$.

2– Solides usuels

Vocabulaire :

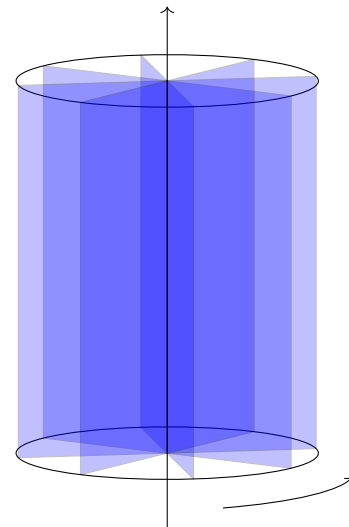


Proposition :

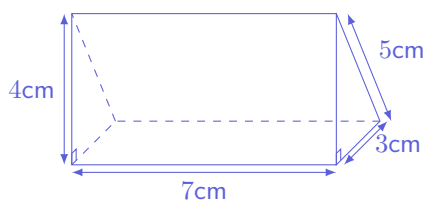
Solide	Volume
Cube	côté $\times$ côté $\times$ côté
Pavé droit	Longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur
Prisme droit	Aire de la base $\times$ hauteur
Cylindre	Aire de la base $\times$ hauteur

Remarque : Un cube est un type particulier de pavé droit, dont les faces sont des carrés, et un pavé droit est un type particulier de prisme droit, à base rectangulaire.

Remarque : On parle de cylindre de révolution car c'est un solide obtenu par révolution d'un objet, c'est-à-dire que le cylindre de révolution est l'ensemble des points balayés par une forme géométrique lorsque cette-dernière tourne autour d'un axe donné. Plus précisément, un cylindre de révolution est obtenu par révolution d'un rectangle.

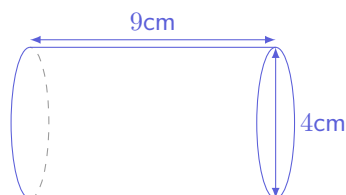


Exercice: Calculez le volume du prisme ci-dessous :



La base de ce prisme droit est un triangle rectangle dont les cathètes (les côtés qui forment l'angle droit) mesurent 3cm et 4cm. L'aire de la base est donc $\frac{3\text{cm} \times 4\text{cm}}{2} = 6\text{cm}^2$. La hauteur est 7cm, donc le volume est $6\text{cm}^2 \times 7\text{cm} = 42\text{cm}^3$.

Exercice: Calculez le volume du cylindre ci-dessous :



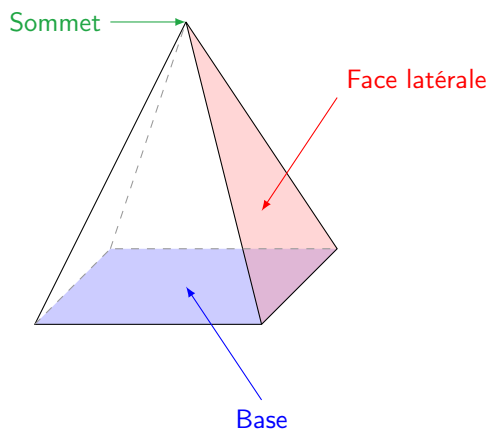
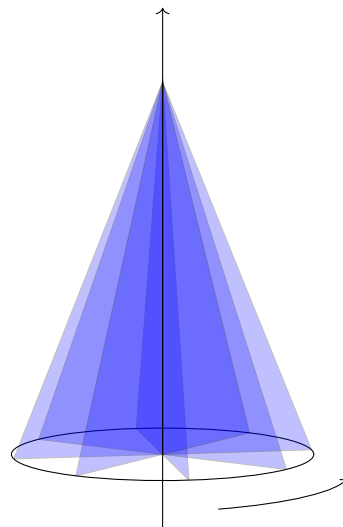
La base de ce cylindre est d'aire $\pi \times 2^2 = 4\pi\text{cm}^2$. La hauteur est 9cm, donc le volume est :
 $4\pi\text{cm}^2 \times 9\text{cm} = 36\pi\text{cm}^3 \simeq 113,1\text{cm}^3$.

Chapitre 2 bis : Pyramides et cônes

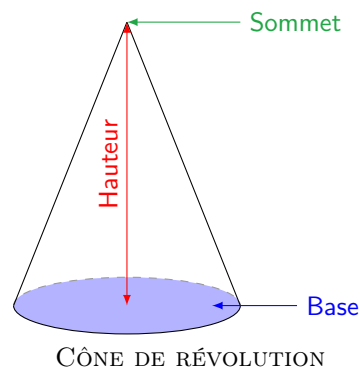
Définition : Une pyramide est un solide construit de la manière suivante :

- 1► On choisit un polygone, que l'on appelle base de la pyramide.
- 2► On choisit un point de l'espace, appelé sommet de la pyramide. La distance entre le sommet et la base est appelée hauteur de la pyramide.
- 3► On relie les côtés de la base au sommet de la pyramide, de façon à former des faces triangulaires.

Définition : Un cône de révolution la surface balayée par un triangle rectangle tournant autour de l'axe passant par l'un de ses côtés portant l'angle droit.



PYRAMIDE À BASE CARRÉE

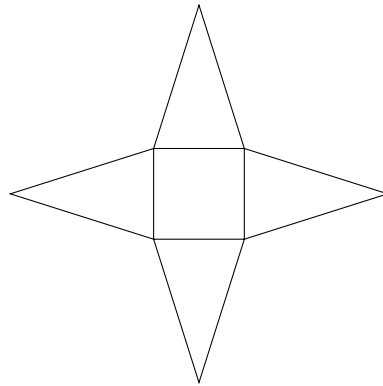
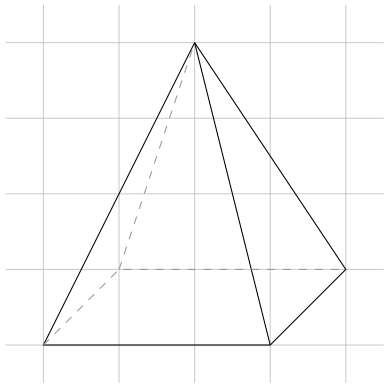


Définition :

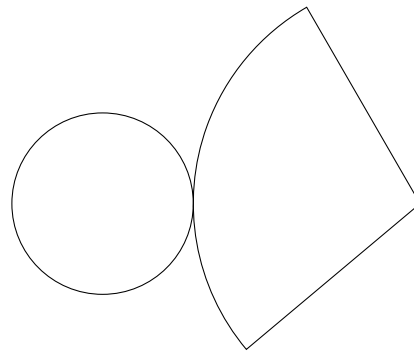
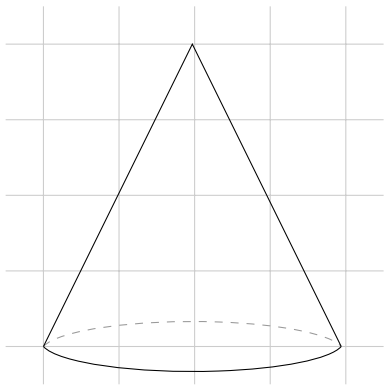
- On dit qu'un polygone est régulier si tous ses côtés et tous les angles sont identiques. Les sommets d'un polygone régulier sont inscrits dans un cercle, dont le centre est appelé centre du polygone.
- On dit qu'une pyramide est régulière si sa base est un polygone régulier et si son sommet est au-dessus du centre de sa base.

Propriété : Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles identiques de sommets le sommet de la pyramide.

Proposition : Le patron d'une pyramide se construit en dessinant, en taille réelle, la base de la pyramide, puis ses faces tout autour de la base.



PYRAMIDE À BASE CARRÉE

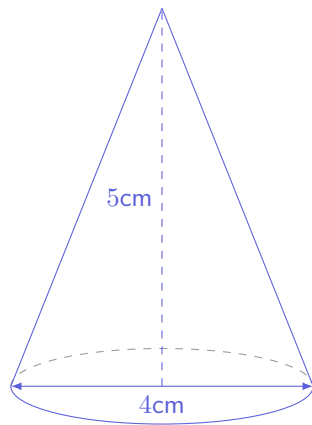


CÔNE DE RÉVOLUTION

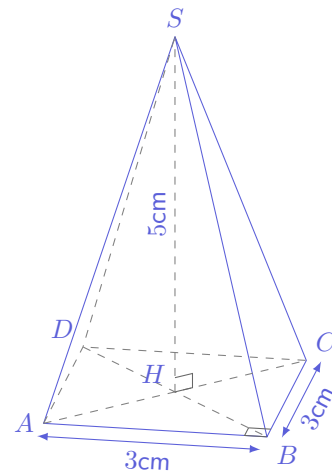
Proposition :

Solide	Volume
Pyramide	$\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$
Cône	$\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$

Exercice: Calculez les volumes des solides suivants :



Le volume du cône est $\frac{\pi \times 4^2 \times 5}{3} \approx 201,68\text{cm}^3$.



Le volume de la pyramide est $\frac{3 \times 3 \times 5}{3} = 15\text{cm}^3$.

Chapitre 3: Nombres relatifs

1– Retour sur la notion d'opposé

Exercices du Cahier Mission Indigo : 9 page 5

Activité: Compléter :

$$\blacktriangleright 5 + \underline{7} = 12$$

$$\blacktriangleright 2 + \underline{3} = 5$$

$$\blacktriangleright 9 + \underline{0} = 9$$

$$\blacktriangleright 4 + \underline{-4} = 0$$

Définition : Soit a un nombre. L'opposé de a est le nombre qu'il faut ajouter à a pour obtenir 0. On note $-a$ l'opposé de a , qui se lit «moins a ». À retenir :

$$a + (-a) = 0$$

Remarque : Dans l'identité précédente, on entoure $-a$ de parenthèses pour que les symboles $+$ et $-$ ne soient pas consécutifs. À l'inverse, on écrira $-a + a = 0$ sans parenthèses car deux symboles ne se suivent pas.

Définition :

- ▶ Un nombre négatif est un nombre inférieur ou égal à 0, un nombre positif est un nombre supérieur ou égal à 0.
- ▶ Le caractère positif ou négatif d'un nombre est appelé son signe. Deux nombres qui n'ont pas le même signe sont dits de signes opposés.
- ▶ Les nombres positifs et les nombres négatifs forment l'ensemble des nombres dits relatifs.

Remarques :

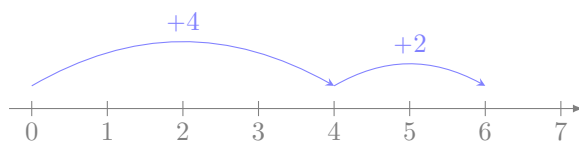
- ▶ Un nombre négatif s'écrit avec un signe moins, comme -5 , -18 ou -2048 par exemple.
- ▶ 0 est à la fois positif et négatif (et c'est le seul). À noter : $0 = -0$, ce qui ne contredit pas la remarque précédente.

Remarque : Parfois, on écrit le symbole $+$ devant un nombre positif. Par exemple, on peut écrire $+5$ à la place de 5, pour mettre son signe (positif) en valeur.

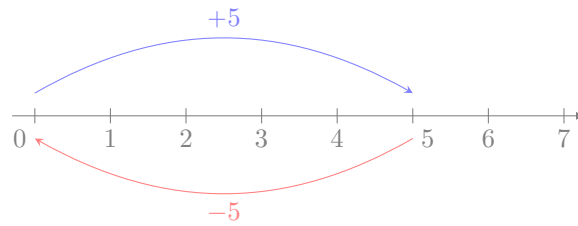
Exemple :

- ▶ Le nombre 12 est (de signe) positif. Son opposé est -12 (car $12 + (-12) = 0$), qui lui est (de signe) négatif.
- ▶ Le nombre -57 est (de signe) négatif. C'est l'opposé de 57 (car $57 + (-57) = 0$), qui lui est positif.

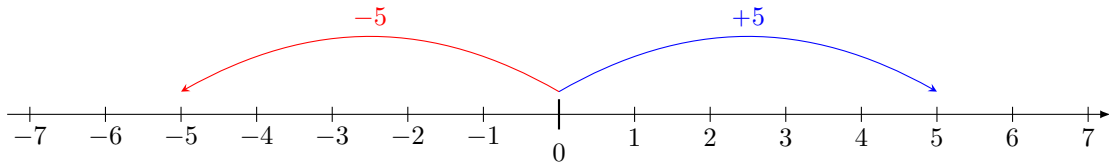
Jusqu'ici, on s'est servi de la demi-droite graduée pour représenter les nombres positifs en termes de longueurs. On peut aussi l'interpréter en termes de déplacements : par exemple, le nombre $+4$ correspond à un déplacement de 4 unités vers la droite. L'opération $4 + 2$ correspond à faire 4 puis 2 pas vers la droite, soit un total de 6 pas vers la droite.



En ajoutant des nombres positifs, on ne peut se déplacer que vers la droite. Pour se déplacer vers la gauche, on a besoin des nombres négatifs. Le schéma suivant illustre l'égalité $5 + (-5) = 0$: 5 pas vers la droite, puis 5 vers la gauche.



Suivant cette idée, on prolonge la demi-droite en une droite graduée, avec les nombres négatifs à gauche de 0 :



Propriété : Sur la droite graduée, un nombre et son opposé sont symétriques par rapport à 0.

Définition : On appelle distance à zéro d'un nombre relatif la distance (positive) entre ce nombre et 0 sur la droite graduée.

Exemples :

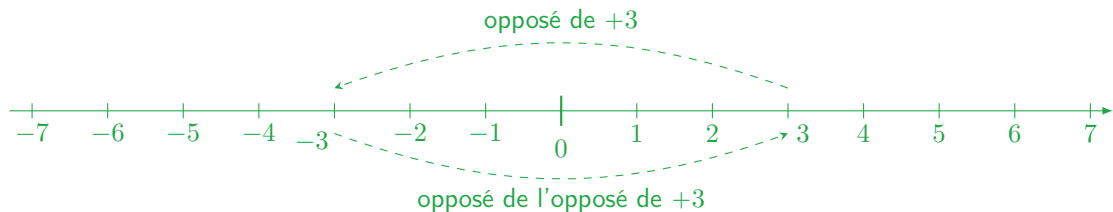
- ▶ La distance à 0 de 2 et 2.
- ▶ La distance à 0 de -2 et 2.
- ▶ La distance à 0 de 47 et 47.
- ▶ La distance à 0 de -28 et 28.

Activité : Écrivez les nombres suivants en chiffre, puis placez-les sur la droite graduée :

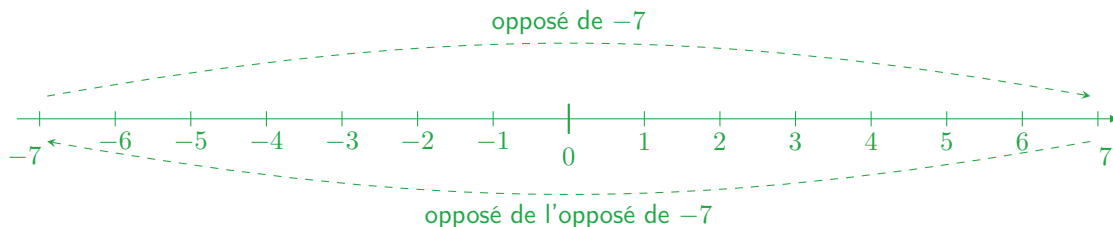
- a▶ L'opposé de l'opposé de +3
- b▶ L'opposé de l'opposé de -7

De manière générale, que peut-on dire de l'opposé de l'opposé d'un nombre ?

- a▶ L'opposé de +3 est $-(+3)$, donc l'opposé de l'opposé de +3 est égal à l'opposé de $-(+3)$, qui est $-[-(+3)]$.



- b▶ L'opposé de -7 est $-(-7)$, donc l'opposé de l'opposé de -7 est égal à l'opposé de $-(-7)$, qui est $-[-(-7)]$.



De manière générale, l'opposé de l'opposé d'un nombre est égal au nombre de départ.

Propriété : Pour tout nombre a (qu'il importe s'il est positif ou négatif),

$$-(-a) = a$$

2– Somme et différence de nombres relatifs

Exercices du Cahier Mission Indigo : 1, 2, 6 page 4, 11, 14 page 5, 36 page 8, 4, 5 page 38

Activité : Compléter le tableau suivant suivant le modèle (on pourra s'aider de la droite graduée) :

	Somme	Dist. à 0 des termes	Signes des termes	Dist. à 0 de la somme	Sg. de la somme
$1 + 2$	3	1 et 2	Même signe	$3 = 1 + 2$	+
$7 + (-4)$	3	7 et 4	Opposés	$3 = 7 - 4$	+
$8 + (-6)$	3	8 et 6	Opposés	$3 = 1 + 2$	+
$2 + (-5)$	-3	5 et 5	Opposés	$3 = 5 - 2$	-
$(-1) + 7$	6	1 et 7	Opposés	$6 = 7 - 1$	+
$(-9) + 3$	-6	9 et 3	Opposés	$6 = 9 - 3$	+
$(-2) + (-3)$	-5	2 et 3	Même signe	$5 = 2 + 3$	-

En déduire une méthode pour ajouter les nombres relatifs.

Méthode : Soient a et b deux nombres. Pour calculer $a + b$:

- Si a et b sont de même signe, on ajoute leurs distances à 0 et on garde leur signe commun,
- Si a et b sont de signes opposés, alors on calcule la différence entre les distances à 0 de a et de b , et on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à 0.

Depuis le début, on utilise le symbole $-$ pour désigner l'opposé... mais vous le savez depuis la maternelle, le symbole $-$ sert surtout à désigner la soustraction ! Pourquoi utiliser le même symbole alors pour deux usages différents ? Eh bien dans un premier temps je vous répondrai que ça n'a pas toujours été le cas ! Par exemple, Hankel en 1867 désignait l'opposé d'un nombre a par $\text{opp}(a)$. Mais de nos jours alors, pourquoi faisons-nous avec le signe $-$? C'est parce qu'opposé et soustraction sont les deux revers d'une même médaille :

Définition : Soustraire un nombre (relatif) revient à ajouter l'opposé.

Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b ,

$$a - b = a + (-b)$$

Remarque : La notation $a + (-b)$ sert pour faire les calculs de tête, mais sinon il suffit d'écrire $a - b$ (c'est plus court !).

Exemples :

$$\blacktriangleright 7 - 4 = 7 + (-4)$$

$$\blacktriangleright 2 - 9 = 2 + (-9)$$

$$\blacktriangleright 3 - (-5) = 3 + [-(-5)] = 3 + 5$$

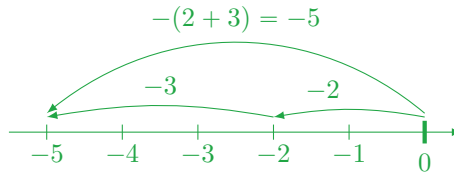
Méthode : Pour calculer des sommes et différences de plus de deux termes,

- 1► On transforme toutes les soustractions en additions (en utilisant $a - b = a + (-b)$),
- 2► On calcule les sommes (on peut regrouper les termes comme ça nous arrange, en particulier on peut calculer la somme de tous les termes positifs d'abord, puis la somme de tous les termes négatifs).

Exemple :

$$\begin{aligned}
 & -2 + 3 + 2 + (-5) - (-7) \\
 &= -2 + 3 + 2 + (-5) + 7 \\
 &= (-2) + (-5) + 2 + 3 + 7 \\
 &= (-7) + 12 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Activité : Avec la droite graduée, déterminer ce que vaut $-(2 + 3)$ en fonction de -2 et -3 . Généraliser cette observation avec une phrase utilisant les mots « somme » et « opposé(s) » deux fois chacun.



Ce dessin illustre la phrase suivante : reculer de $2 + 3$ pas, c'est la même chose que reculer de 2 pas et reculer de 3 pas. En termes mathématiques, cela s'écrit $-(2 + 3) = (-2) + (-3)$: l'opposé de la somme de 2 et 3 est égal à la somme de l'opposé de 2 et de l'opposé de 3.

De manière générale, l'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés (de ses termes).

Propriété : L'opposé d'une somme est la somme des opposés. Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b ,

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

Remarque : Imaginons un instant que l'on sait multiplier les nombres par -1 , et que pour tout nombre x , $-x = (-1) \times x$. Alors $-(a + b) = (-1) \times (a + b)$, et distribuer le -1 donne $-(a + b) = (-1) \times a + (-1) \times b = (-a) + (-b)$. On retombe sur nos pieds ! Le but du prochain paragraphe est de définir la multiplication des relatifs de manière à conserver les bonnes propriétés, comme par exemple ici avec la distributivité.

3– Règle des signes : produit et quotient de nombres relatifs

Exercice du Cahier Mission Indigo : 18, 19, 24 page 6

On a étendu les règles d'addition et de soustraction que l'on connaissait avant aux nombres relatifs. L'enjeu de ce paragraphe est d'étendre les règles de multiplication et de division aux nombres relatifs, de manière à ce qu'on retrouve les propriétés de calcul bien connues, comme par exemple la distributivité.

Activité : Calculer et écrire plus simplement les sommes suivantes :

- ▶ $A = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$
- ▶ $B = (-5) + (-5) + (-5)$
- ▶ $C = (-1, 2) + (-1, 2) + (-1, 2) + (-1, 2)$

Plus généralement, comment calcule-t-on le produit d'un nombre positif par un nombre négatif ?

- ▶ $A = -15$. On ajoute 5 fois (-3) , donc on a envie d'écrire $A = 5 \times (-3)$. On remarque que A est négatif, et sa distance à 0 est 3×5 .
- ▶ $B = -15$. On ajoute 3 fois (-5) , donc on a envie d'écrire $B = 3 \times (-5)$. On remarque que B est négatif, et sa distance à 0 est 5×3 .
- ▶ $C = -4, 8$. On ajoute 4 fois $(-1, 2)$, donc on a envie d'écrire $C = 4 \times (-1, 2)$. On remarque que C est négatif, et sa distance à 0 est $4 \times 1, 2$.

On imagine que le produit d'un nombre négatif par un nombre positif est négatif, et sa distance à 0 est le produit des distances à 0 de ses facteurs.

Ces exemples montrent bien l'idée intuitive que l'on peut avoir sur la multiplication d'un négatif par un entier positif. On étend naturellement cette intuition au produit d'un négatif par un positif qui n'est pas forcément entier.

Propriété (produit de deux nombres de signes opposés) :

Le produit de deux nombres de signes opposés est égal à l'opposé du produit de leurs distances à 0.

Activité : En développant l'expression $(-2) \times (5 + (-5))$, déterminer la valeur de $(-5) \times (-2)$.

Plus généralement, comment calculer le produit de deux nombres négatifs ?

On développe le produit : $(-2) \times (5 + (-5)) = (-2) \times 5 + (-2) \times (-5) = (-10) + (-2) \times (-5)$ d'après la règle sur le produit d'un positif par un négatif.

On calcule avec les priorités opératoires : $(-2) \times (5 + (-5)) = (-2) \times 0 = 0$ (n'importe quoi fois 0 donne 0).

On en déduit que $0 = (-10) + (-2) \times (-5)$. Or par définition, l'opposé de -10 est le nombre qui complète l'addition à trou $(-10) + \dots = 0$, donc $(-2) \times (-5)$ est l'opposé de -10 . Or l'opposé de -10 est $-(-10) = 10$, donc $(-2) \times (-5) = 10$.

Il semble que le produit de deux nombres négatifs est positif, et sa distance à 0 est le produit des distances à 0 des facteurs.

Propriété (produit de deux nombres même signe) :

Le produit de deux nombres négatifs est positif, et égal au produit de leurs distances à 0.

On peut désormais énoncer la règle des signes :

Règle des signes

- ▶ Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- ▶ Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.

Remarque : Dans une multiplication, on peut placer les signes là où ça nous arrange. Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b ,

$$-(a \times b) = (-a) \times b = a \times (-b)$$

Exemple : $-(2 \times 3) = (-2) \times 3 = 2 \times (-3)$.

Remarque : En français, ces égalités se lisent : « l'opposé du produit de 2 par 3 est égal au produit de l'opposé de 2 par 3, qui est égal au produit de 2 par l'opposé de 3 ».

Remarque : Dans le cas où $b = 1$, cette propriété dit en particulier que $-(a \times 1) = a \times (-1)$, donc que $-a = (-1) \times a$. On peut alors constater que la règle des signes est cohérente avec le reste : en effet, on a vu plus tôt que $-(-a) = a$. Or on vient de dire que $-(-a) = (-1) \times (-1) \times a$, donc il est logique que $(-1) \times (-1) = 1$, et donc que le produit de deux nombres négatifs soit positif.

Rappel : Le quotient de deux nombres a et b , noté a/b , ou $a \div b$, ou encore $\frac{a}{b}$, est le nombre qui donne a quand il est multiplié par b , c'est-à-dire :

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

Fort de cette observation, on étend la règle des signes aux quotients :

Proposition : Soient a et b deux nombres, avec b différent de 0.

$$-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$$

ce qui se réécrit avec la notation fractionnaire :

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Proposition (Règle des signes) :

- ▶ Le quotient de deux nombres de même signe est positif.
- ▶ Le quotient de deux nombres de signes opposés est négatif.

Exercice: Calculer :

a ▶ $\frac{-100}{10}$

b ▶ $216/(-3)$

c ▶ $\frac{-196}{-7}$

d ▶ $-(-360)/(-12)$

a ▶ $\frac{-100}{10} = -\frac{100}{10} = -10$

b ▶ $216/(-3) = -(216/3) = -72$

c ▶ $\frac{-196}{-7} = -\frac{196}{7} = -28$

d ▶ D'abord, $360/(-12) = -(360/12) = -30$. Ensuite, $(-360)/(-12) = -[360/(-12)] = -[-30] = 30$. Enfin, $-(-360)/(-12) = -[(-360)/(-12)] = -30$

Chapitre 4: Le théorème de Pythagore

1– Racine carrée d'un nombre positif

Définition : On appelle carré parfait le carré d'un nombre entier.

Exemple : Il faut connaître les treize premiers carrés parfaits :

▶ $0^2 = 0$	▶ $3^2 = 9$	▶ $6^2 = 36$	▶ $9^2 = 81$	▶ $12^2 = 144$
▶ $1^2 = 1$	▶ $4^2 = 16$	▶ $7^2 = 49$	▶ $10^2 = 100$	
▶ $2^2 = 4$	▶ $5^2 = 25$	▶ $8^2 = 64$	▶ $11^2 = 121$	

Il est souvent utile de connaître les suivants :

▶ $13^2 = 169$	▶ $15^2 = 225$	▶ $17^2 = 289$	▶ $19^2 = 361$
▶ $14^2 = 196$	▶ $16^2 = 256$	▶ $18^2 = 324$	▶ $20^2 = 400$

Proposition : Le carré d'un nombre est toujours positif.

Démonstration : Cela vient du fait que le produit de deux nombres de même signe est positif. ■

Définition : Soit a un nombre positif.

La racine carrée de a est l'unique nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré vaut a :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Exemples :

▶ $\sqrt{0} = 0$	▶ $\sqrt{4} = 2$	▶ $\sqrt{36} = 6$	▶ $\sqrt{81} = 9$	▶ $\sqrt{144} = 12$
▶ $\sqrt{1} = 1$	▶ $\sqrt{16} = 4$	▶ $\sqrt{49} = 7$	▶ $\sqrt{100} = 10$	
▶ $\sqrt{2} = 2$	▶ $\sqrt{25} = 5$	▶ $\sqrt{64} = 8$	▶ $\sqrt{121} = 11$	

Voici d'autres exemples :

▶ $\sqrt{5,0625} = 2,25$	▶ $\sqrt{1,999396} = 1,414$	▶ $\sqrt{0,0001} = 0,01$
--------------------------	-----------------------------	--------------------------

Propriété : Si a est un nombre positif, alors $\sqrt{a^2} = a$.

Remarque : Attention à ce que a soit bien positifs ! Contre-exemple : $3 = \sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} \neq -3!$.

Propriété : Pour tous nombres positifs a et b , si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Méthode (Encadrement d'une racine carrée) : Soit a un nombre positif. Pour encadrer $\sqrt{a}$ entre deux nombres entiers consécutifs, on doit trouver le plus grand carré parfait inférieur ou égal à a .

Exemple : On souhaite encadrer $\sqrt{55}$ entre deux entiers. Pour cela on regarde la liste des carrés parfaits :

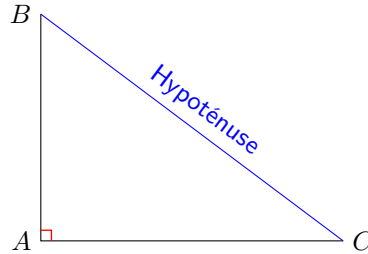
$$\dots \quad 6^2 = 36 \quad 7^2 = 49 \quad 8^2 = 64 \quad 9^2 = 81 \quad \dots$$

Ainsi $7^2 < 55 < 8^2$, donc $7 < \sqrt{55} < 8$.

2– Le théorème de Pythagore

Définition : Soit ABC un triangle. On dit que ABC est rectangle en A si l'angle $\hat{A}$ a une mesure de 90° . Le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit en A , est alors appelé hypoténuse de ABC .

Remarque : L'hypoténuse est aussi le côté le plus long d'un triangle rectangle.



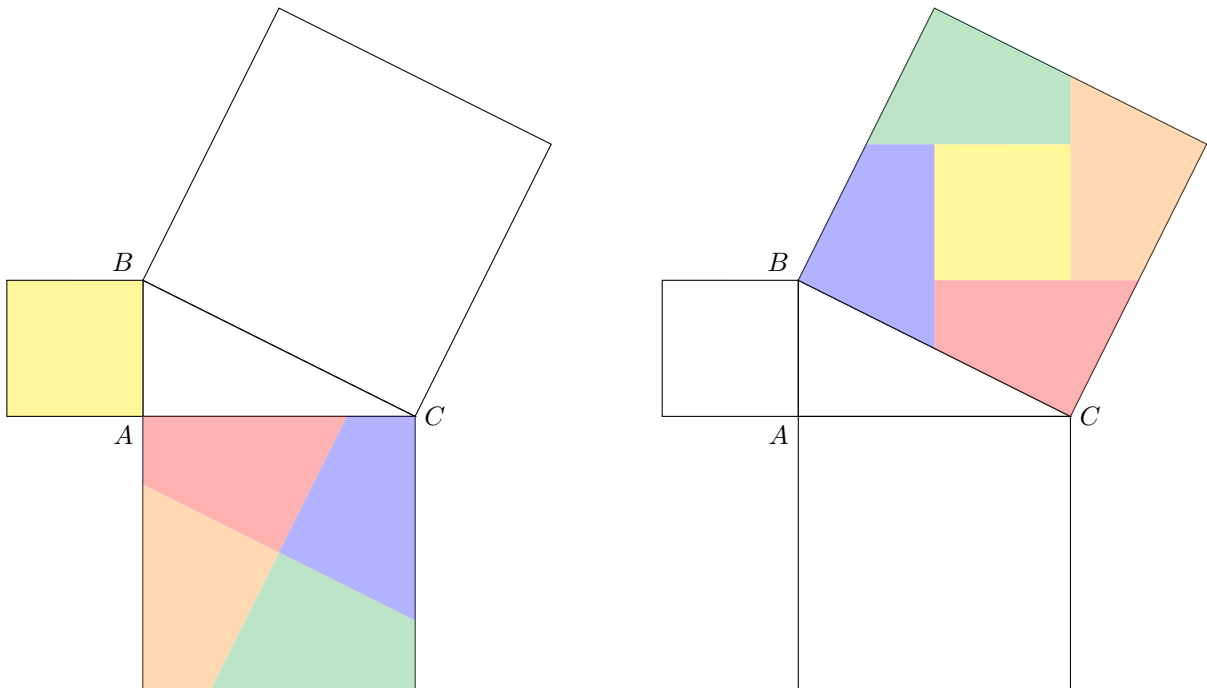
Théorème de Pythagore

Si un triangle rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si un triangle ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

(Cette égalité est appelée égalité de Pythagore.)

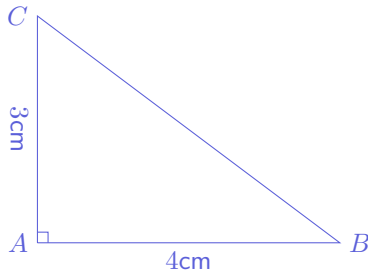
Résumé de l'activité à la maison :



Par cette construction, on remarque que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés. Et comme l'aire d'un de ces carrés est égale à la longueur au carré du côté correspondant du triangle, cette figure illustre bien le théorème de Pythagore (mais ça n'en est pas une démonstration ! La démonstration du théorème de Pythagore sera faite dans le Devoir maison 3.)

Rédactions-types : utilisations du théorème de Pythagore :

Exercice: Calculer la longueur BC dans le triangle suivant :

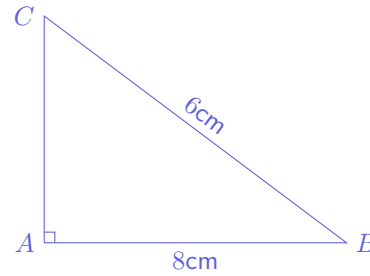


Le triangle ABC est rectangle en A , donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \text{donc } BC^2 &= 4^2 + 3^2 \\ \text{donc } BC^2 &= 25 \end{aligned}$$

La longueur BC est donc $BC = \sqrt{25}\text{cm} = 5\text{cm}$.

Exercice: Calculer la longueur manquante dans le triangle suivant :



Le triangle ABC est rectangle en A , donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \text{donc } 10^2 &= 8^2 + AC^2 \\ \text{donc } 100 &= 64 + AC^2 \\ \text{donc } AC^2 &= 100 - 64 = 36 \end{aligned}$$

La longueur AC est donc $AC = \sqrt{36}\text{cm} = 6\text{cm}$.

Petite activité sur la logique

Un théorème est une propriété qui peut être démontrée grâce à des définitions ou d'autres propriétés mathématiques qui sont vraies.

Voici un exemple de théorème non mathématique :

Théorème : Si j'habite à Bègles, alors j'habite en France.

Ce théorème est-il vrai ? Oui, car Bègles est une ville en France.

La contraposée d'un théorème est toujours vraie. Ici, la contraposée serait :

Si je n'habite pas en France, alors je n'habite pas à Bègles.

La réciproque d'un théorème n'est pas toujours vraie. Ici, la réciproque serait :

Si j'habite en France alors j'habite à Bègles.

C'est faux, car on peut habiter à Aubusson, qui est en France, mais qui n'est pas Bègles.

Pour chacun des théorèmes ci-dessous, donner la contraposée et la réciproque, dire si la réciproque est vraie ou fausse, et expliquer pourquoi.

Théorème : Si B est un avion, alors B a des ailes.

Contraposée : Si B n'a pas d'ailes, alors B n'est pas un avion.

Réciproque : Si B a des ailes, alors B est un avion.

C'est faux, car un oiseau n'est pas un avion, pourtant il a des ailes.

Théorème : Si un quadrilatère est un carré, alors il a quatre angles droits.

Contraposée : Si un quadrilatère n'a pas quatre angles droits, alors ce n'est pas un carré.

Réciproque : Si un quadrilatère a quatre angles droits, alors c'est un carré.

C'est faux, car un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle, et un rectangle n'est pas forcément un carré.

Théorème : Si un quadrilatère est un rectangle, alors il a quatre angles droits.

Contraposée : Si un quadrilatère n'a pas quatre angles droits, alors ce n'est pas un rectangle.

Réciproque : Si un quadrilatère a quatre angles droits, alors c'est un rectangle.

C'est vrai.

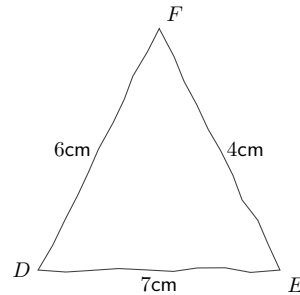
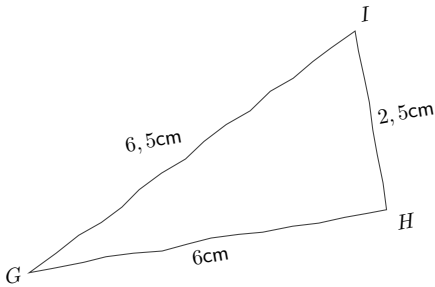
Passons au théorème de Pythagore. Par chance, la réciproque du théorème de Pythagore est vraie.

Théorème : Si ABC est un triangle rectangle en A , alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Contraposée : Si $BC^2 \neq BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A .

Réciproque : Si $BC^2 = BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A .

Place à la pratique : dire si les triangles suivants sont rectangles (écrire les calculs effectués) :



Soit ABC un triangle.

► **Réciproque du théorème de Pythagore** :

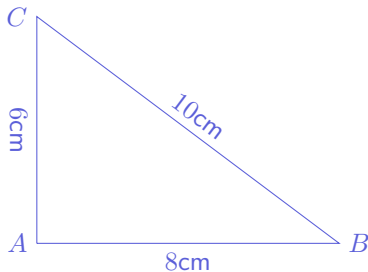
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .

► **Contraposée du théorème de Pythagore** :

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A .

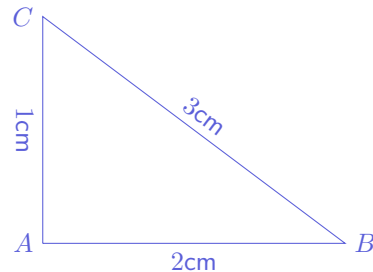
Rédactions-types : utilisation de la réciproque et de la contraposée du théorème de Pythagore :

Exercice: Ce triangle est-il rectangle ?



D'une part, $BC^2 = 10^2 = 100$. D'autre part, $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Comme $AB^2 + AC^2 = BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A .

Exercice: Ce triangle est-il rectangle en A ?



D'une part, $BC^2 = 3^2 = 9$. D'autre part, $AB^2 + AC^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$. Comme $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle en A .

Chapitre 5: Arithmétique

Activité: (Le crible d'Ératosthène)

- 1► Tracer un tableau contenant les nombres entiers de 1 à 100.
- 2► Rayer le 1.
- 3► Parcourir les cases non rayées, dans l'ordre croissant : entourer la première case non rayée, puis rayer ses multiples.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Quelle particularité partagent les nombres entourés ?

1– Multiples et diviseurs d'un nombre entier

Définition : Soient a et b deux nombres entiers.

Lorsqu'il existe un nombre entier k tel que $a = b \times k$, on dit que :

- a est un multiple de b ,
- b divise a ,
- b est un diviseur de a .

Exemple : $12 = 3 \times 4$ donc :

- 12 est un multiple de 3,
- 12 est un multiple de 4,
- 3 et 4 sont des diviseurs de 12.

Théorème (Division euclidienne) : Soient a et b deux nombres entiers, avec b différent de 0. Il existe deux uniques nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$.

Le nombre a est appelé dividende de la division euclidienne, b est appelé diviseur, q est appelé quotient, et r est appelé reste.

Exemple : La division euclidienne de 45 par 7 est $45 = 7 \times 6 + 3$. Dans cette division euclidienne :

- 45 est le dividende,
- 7 est le diviseur,
- 6 est le quotient,
- 3 est le reste.

Proposition : Soient a et b deux nombres entiers, avec b différent de 0.

Si le reste de la division euclidienne de a par b est 0, alors b divise a . La réciproque de cette proposition est vraie.

Exemple :

- La division euclidienne de 27 par 9 est $27 = 9 \times 3 + 0$. Le reste est 0, donc 9 divise 27.
- 6 divise 42, donc le reste de la division euclidienne de 42 par 6 est 0. Et en effet, cette division euclidienne est $42 = 6 \times 7 + 0$.

2– Notion de nombre premier, décomposition d'un entier

Définition : On dit qu'un nombre entier est premier si c'est un entier supérieur ou égal à 2 qui a exactement deux diviseurs positifs.

Exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 sont tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier !

Proposition : Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

Théorème (fondamental de l'arithmétique) : Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire d'une manière, et d'une seule, comme un produit de nombres premiers.

Ce produit est appelé décomposition (ou factorisation) en produit de facteurs premiers.

Exemple : $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Méthode (décomposer un entier en produit de facteurs premiers) : Pour trouver les facteurs premiers d'un nombre entier n , on teste les nombres premiers dans l'ordre, et on vérifie s'ils divisent le nombre.

- Si le nombre premier divise n , alors on l'écrit à côté et on recommence avec le quotient.
- Sinon, on passe au nombre premier suivant.

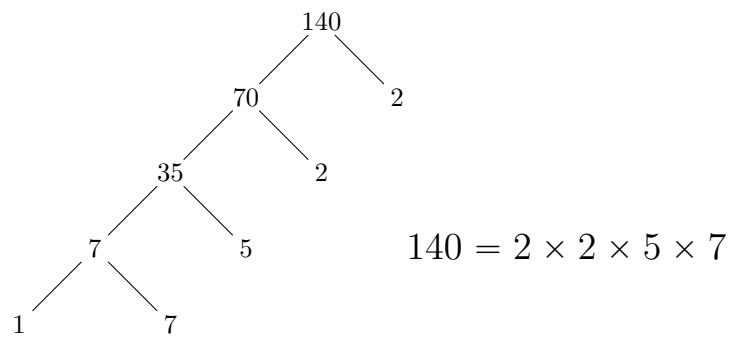
On s'arrête quand le quotient arrive à 1. La décomposition en produit de facteurs premiers de n est alors le produit des nombres premiers que l'on a écrit de côté.

On peut présenter la procédure...

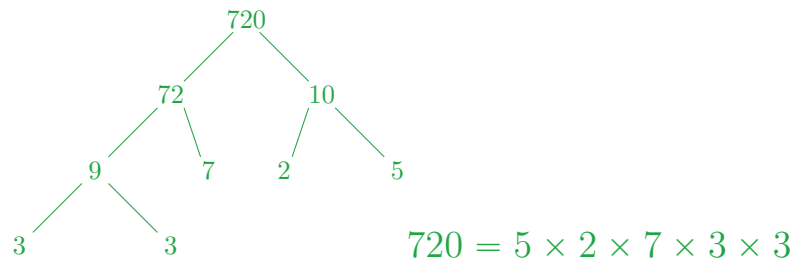
- ... dans un tableau. Par exemple avec 140 :

$\div 2 \left(\begin{array}{c} 140 \\ 70 \end{array} \right.$	2	$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$
$\div 2 \left(\begin{array}{c} 35 \end{array} \right.$	2	
$\div 5 \left(\begin{array}{c} 7 \end{array} \right.$	5	
$\div 7 \left(\begin{array}{c} 1 \end{array} \right.$	7	

- ... dans un arbre de décomposition : par exemple, avec 140 :



Exercice: Déterminer les décompositions en facteurs premiers de 28, 49 et 720.



Chapitre 6: Nombres rationnels (fractions)

1– Fractions quotient : quelques rappels

Durant le cycle 3, on interprète la fraction $\frac{n}{d}$ comme prendre n parts d'un découpage d'une unité en d parts égales. Tout au long du cycle 4, on manipule une autre définition, plus abstraite, de la notion de fraction :

Définition : Soient n et d deux nombres entiers relatifs, avec d différent de 0.

La fraction $\frac{n}{d}$ est le nombre dont le produit par d vaut n , c'est-à-dire $\frac{n}{d} \times d = d \times \frac{n}{d} = n$.

Autrement dit, c'est le résultat de la division de n par d .

Exemple : $\frac{12}{5} \times 5 = 12$, $\frac{3}{8} \times 8 = 3$

Définition : Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction, c'est-à-dire le quotient de deux nombres entiers (relatifs).

Exemple : $\frac{123}{51}$ est un nombre rationnel, $\frac{-4}{2}$ en est un autre.

Remarque : Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels ! Par exemple, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Proposition : Pour tout nombre entier n ,

$$\frac{n}{1} = n$$

Par conséquent, tout nombre entier (relatif) est rationnel.

Remarque : La réciproque n'est pas vraie : $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel qui n'est pas entier.

Propriété : On peut mettre les signes où ça nous arrange dans une fraction : par exemple, $\frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

2– Des nombres rationnels particuliers : les nombres décimaux

Définition : On appelle fraction décimale une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1 000, ...

Définition : Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Exemple : $1,23 = \frac{123}{100}$ est un nombre décimal.

Propriété : Tout nombre décimal est un nombre rationnel, puisqu'il peut s'écrire comme une fraction de deux nombres entiers.

Remarque : Il existe des nombres rationnels qui ne sont pas décimaux : par exemple, $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel, mais pas décimal.

Propriété (pour la culture) : Dans l'écriture décimale d'un nombre rationnel, les décimales se répètent en boucle à partir d'un moment. La réciproque est aussi vraie.

3– Addition et soustraction de fractions

Rappel : Pour additionner deux fractions de même dénominateur, il suffit d'ajouter leurs numérateurs.

"Preuve" par exemple générique

Montrons que $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$ à l'aide de la définition :

$$3 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3} \right) = 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{5}{3} = 1 + 5 = 6$$

Comme $\frac{6}{3}$ est la seule à compléter l'égalité à trou $3 \times \dots = 6$, on a bien $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$.

Preuve (la vraie)

Montrons que $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ à l'aide de la définition :

$$b \times \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right) = b \times \frac{a}{b} + b \times \frac{c}{b} = a + c$$

Comme $\frac{a+c}{b}$ est la seule à compléter l'égalité à trou $b \times \dots = a + c$, on a bien $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Définition : Réduire au même dénominateur deux fractions, c'est réécrire chacune de ces fractions comme d'autres fractions qui leurs sont égales, mais qui ont le même dénominateur.

Exemple :

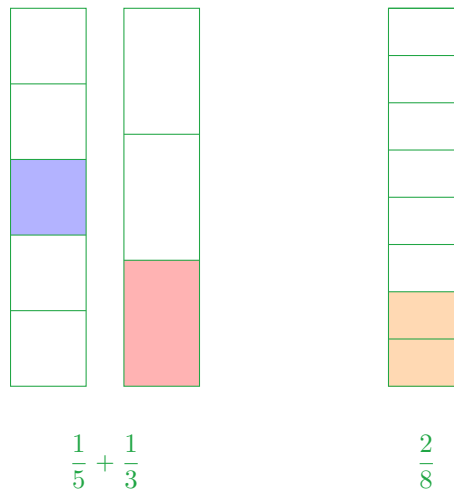
- Pour réduire $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.
- Pour réduire $\frac{12}{6}$ et $\frac{7}{8}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{12}{6} = \frac{48}{24}$ et $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$.

Méthode (Réduction au même dénominateur) : Sur des exemples :

- Pour réduire $\frac{6}{2}$ et $\frac{3}{5}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 5} = \frac{30}{10}$ et $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$.
- Pour réduire $\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{8}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{1}{6} = \frac{1 \times 8}{6 \times 8} = \frac{8}{48}$ et $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 6}{8 \times 6} = \frac{18}{48}$.

Autrement dit, on multiplie en haut et en bas une fraction par le dénominateur de la deuxième fraction.

Activité : À l'aide d'une représentation par découpage de gâteau ou de tablette de chocolat, comparer $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{8}$.
En vertu de cet exemple, est-il juste d'ajouter les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux pour ajouter deux fractions ?



On constate sur ces dessins que $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{8}$ ne sont pas égaux. Il n'est donc pas juste d'ajouter les numérateurs et le dénominateurs.

Méthode (Addition de deux fractions) : Pour ajouter deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur, puis ajouter les numérateurs. On ne peut pas ajouter directement les dénominateurs et les numérateurs. C'est pareil pour la soustraction.

Exemple :

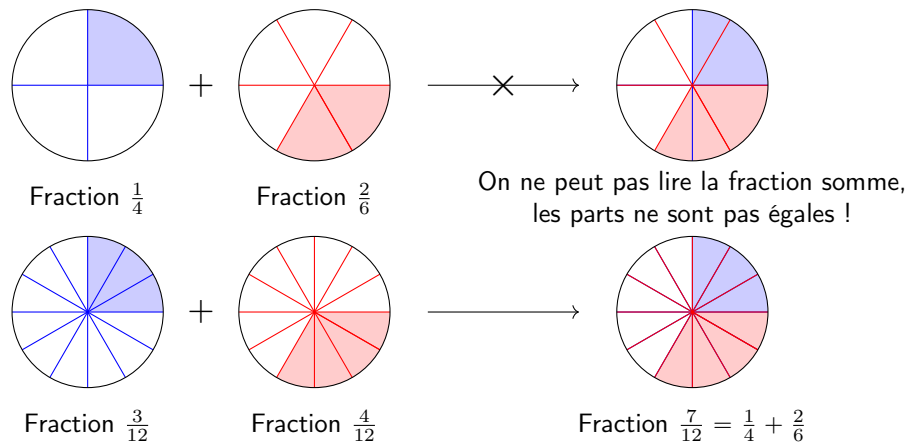
- Pour calculer $\frac{6}{2} + \frac{3}{5}$, on peut écrire

$$\frac{6}{2} + \frac{3}{5} = \frac{6 \times 5}{2 \times 5} + \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{30}{10} + \frac{6}{10} = \frac{36}{10}$$

- Pour calculer $\frac{1}{6} + \frac{3}{8}$, on peut écrire

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{1 \times 8}{6 \times 8} + \frac{3 \times 6}{8 \times 6} = \frac{8}{48} + \frac{18}{48} = \frac{26}{48}$$

Remarque : Le découpage de gâteaux permet de visualiser pourquoi il est nécessaire de réduire au même dénominateur pour calculer : sans ça, les parts de gâteaux n'ont pas la même taille !



Exercice: (Énigme des 17 chameaux) *Un chamelier sentant sa fin approcher, il décide de léguer son troupeau de 17 chameaux à ses trois enfants. L'aîné recevra la moitié du troupeau, le cadet en recevra le tiers, et le benjamin en recevra le neuvième. Le problème est que l'on ne peut diviser équitablement une troupe de 17 chameaux en 2, 3 ou 9 sans couper l'un des chameaux en petits morceaux ! Ne sachant quoi faire, les trois enfants consultent un collègue chamelier. Celui-ci dit aux enfants : « Je vous prête l'un de mes chameaux. Effectuez la division de votre troupeau en comptant ce chameau. Mais attention, je tiens à le récupérer ensuite ! ». Les enfants, étonnés, pensent qu'il est impossible de restituer le chameau prêté s'ils en tiennent compte dans la répartition de la troupe. Et pourtant...*

Représentez la situation avec un dessin. Comment expliquer le fait que le chameau prêté puisse être rendu ?

4– Simplification, encadrement et comparaison de fractions

A– Simplification des fraction

Proposition : On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou divisant) son numérateur et son dénominateur par le même nombre.

Rappel :

- Diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$,
- Diviser par 3 revient à multiplier par $\frac{1}{3}$,
- Diviser par 4 revient à multiplier par $\frac{1}{4}$,
- ...

Exemple : $12 \div 2 = 12 \times \frac{1}{2}$, $12 \div 3 = 12 \times \frac{1}{3}$, $12 \div 4 = 12 \times \frac{1}{4}$

Définition : Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par le même nombre.

Exemple : Trois manières de présenter :

Barrer le facteur commun :

$$\frac{15}{10} = \frac{3 \times \cancel{5}}{2 \times \cancel{5}} = \frac{3}{2}$$

Diviser le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{15}{10} = \frac{15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{3}{2}$$

Avec des flèches :

$$\begin{array}{c} \div 5 \\ \curvearrowright \\ \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \\ \curvearrowleft \\ \div 5 \end{array}$$

Méthode (Simplification d'une fraction) : Pour simplifier une fraction, on peut déterminer les décompositions en produits de facteurs premiers de son numérateur et de son dénominateur, et simplifier leurs facteurs communs.

Exemple : $\frac{24}{420} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times 7} = \frac{2}{35}$

Propriété (Produit en croix) : Pour savoir si deux fractions sont égales, il suffit de vérifier si les "produits en croix" sont égaux.

Exemple : Vérifions si $\frac{12}{8}$ est égale à $\frac{3}{2}$. Pour cela, on calcule 12×2 et 8×3 , et on les compare. On les appelle les "produits en croix" en vertu du schéma suivant :

$$\begin{array}{cc} 12 & 3 \\ \hline & \times \\ 8 & 2 \end{array}$$

Ici, $12 \times 2 = 24 = 3 \times 8$, donc $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Exemple : Vérifions si $\frac{5}{9}$ est égale à $\frac{6}{4}$. Les produits en croix sont 5×4 et 9×6 :

$$\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ \hline & \times \\ 9 & 4 \end{array}$$

Ici, $5 \times 4 = 20$ est différent de $9 \times 6 = 54$, donc $\frac{5}{9} \neq \frac{6}{4}$.

B– Comparaison de fractions

Méthode (Comparaison de fractions) : Pour comparer deux fractions, on les réduit d'abord au même dénominateur, puis on compare leurs numérateurs.

Exemple : On souhaite comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. On les réduit au même dénominateur : $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$, et $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$. Comme $\frac{3}{12} < \frac{4}{12}$, on en conclut que $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

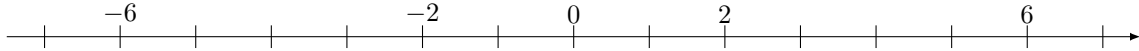
Remarque : Anecdote : dans les années 1980, pour concurrencer le burger "Quarter pounder" de Mc Donalds (un burger dont le steak pèse un quart de livre), la chaîne de fast food A&W a sorti un burger "Third pounder" (un burger dont le steak pèse un tiers de livre) au même prix. Malheureusement, les américains de l'époque ont cru que c'était une arnaque, pensant que $\frac{1}{3}$ était plus petit que $\frac{1}{4}$...

Rappel : comparaison et nombres négatifs

1. Un nombre négatif est toujours plus petit que n'importe quel nombre positif.
2. Quand on compare deux nombres négatifs, ils sont rangés à l'envers par rapport à leurs distances à 0 !

Exemple :

- ▶ $-5 < 2$, $-5 < 56,4$ $-3,16565 < 21,798$
- ▶ $6 > 2$ mais $-6 < -2$!



C– Encadrement de fractions entre deux entiers consécutifs

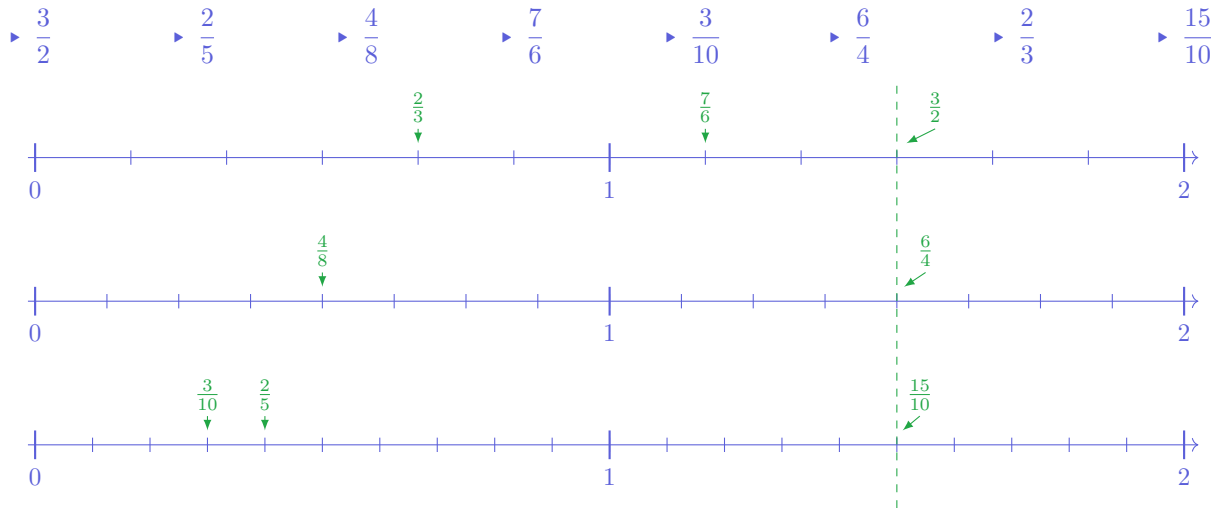
Proposition : Toute fraction peut s'écrire comme somme d'un nombre entier (appelé partie entière de la fraction) et d'une fraction comprise entre 0 (inclus) et 1 (exclu).

Exemple :

- ▶ $\frac{15}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7}$,
- ▶ $\frac{27}{8} = \frac{24}{8} + \frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8}$.

Proposition : Toute fraction est comprise entre deux nombres entiers successifs (c'est-à-dire qui se suivent, comme 1 et 2, comme 9 et 10, ...).

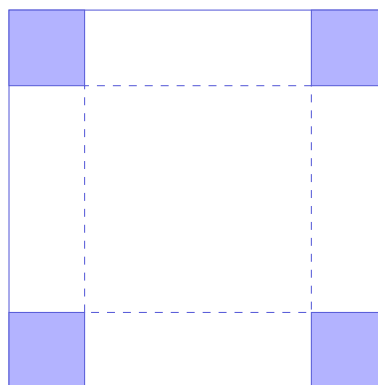
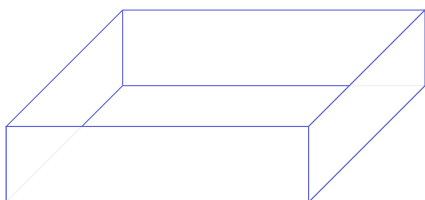
Exercice: Pour chacune des fractions suivantes, décomposez-la en la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1, puis placez-la sur une demi-droite avec une graduation adaptée parmi les demi-droites graduées ci-dessous :



Chapitre 7: Fonctions

1– Activité d'introduction

Activité:



On fabrique une boîte à partir d'une feuille de carton carrée de côté 10cm, dont on coupe les coins de forme carrée comme représenté ci-dessus.

On s'intéresse au volume du boîte en fonction de la taille des coins que l'on retire.

- 1► Calculer le volume de la boîte pour 10 valeurs différentes de la longueur des coins.

Si on note x la taille des coins, alors le volume de la boîte est $x \times (10 - 2x) \times (10 - 2x)$.

x (cm)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Volume (cm ³)	0	40,5	64	73,5	72	62,5	48	31,5	16	4,5	0

- 2► Ce volume varie-t-il en fonction de la taille des coins? Si oui, comment varie-t-il?

Selon vous, le volume atteint-il un maximum? Si oui, donnez une valeur approchée de la taille des coins dans ce cas.

Le volume de la boîte semble maximal quand la taille des coins est autour de 1,5cm.

2– Représenter des grandeurs liées

Dans certains contextes (réels ou abstraits), on observe deux grandeurs, et l'une varie en fonction de l'autre, c'est-à-dire que des variations de la première entraînent des variations de la seconde.

Exemple :

- Si c désigne la longueur des côtés d'un carré, alors l'aire du carré est $c \times c$. L'aire est une grandeur qui varie en fonction du côté carré : quand le côté varie, le périmètre varie.
- La température à Aubusson est une grandeur qui varie en fonction du temps.
- En plongée sous-marine, la pression est une grandeur qui varie en fonction de la profondeur.

Méthode 1 : Pour représenter une grandeur qui varie en fonction d'une autre, on peut faire des tableaux de valeurs.

Exemple : Périmètre d'un carré en fonction de son côté :

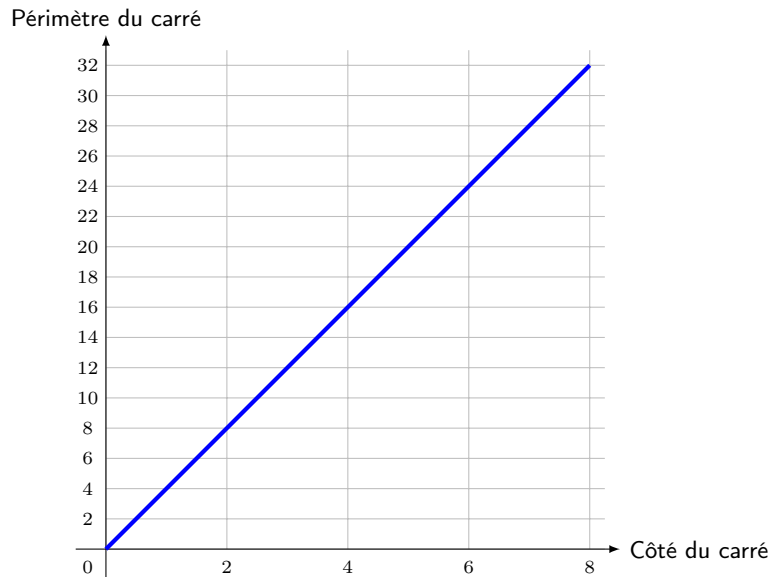
Côté	1	2,5	10	11	15,6	20,45	100
Périmètre	4	10	40	44	62,4	81,2	400

Méthode 2 : Pour représenter une grandeur qui varie en fonction d'une autre, on peut donner une formule (ou un programme de calcul) quand on peut en trouver une.

Exemple : Pour trouver le périmètre d'un carré, on peut multiplier la longueur de son côté par 4. Autrement dit, si c désigne le côté du carré, alors le périmètre est $4 \times c$.

Méthode 3 : Pour représenter une grandeur qui varie en fonction d'une autre, on peut faire un graphique.

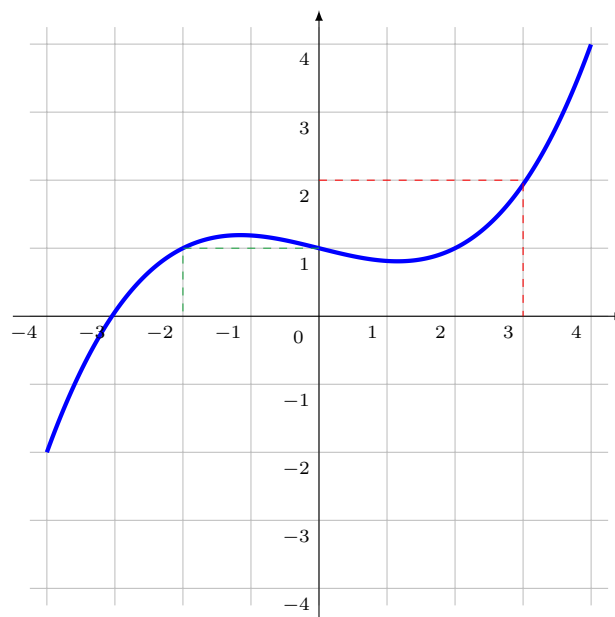
Exemple : Périmètre d'un carré en fonction de son côté :



Vocabulaire :

- La droite graduée horizontale est appelée axe des abscisses.
- La droite graduée verticale est appelée axe des ordonnées.
- L'ensemble des points représentant la dépendance des grandeurs (en bleu ici) est appelée courbe.
- Le point d'intersection des deux axes est appelé origine du graphique.

Comment lire un graphique :



En un sens, un graphique est un tableau de valeurs avec une infinité de colonnes. Pour lire le graphique :

- 1► On choisit une abscisse
- 2► On trouve le point sur la courbe (bleue) qui a cette abscisse (cette étape correspond aux pointillés rouges/verts verticaux ci-dessus)
- 3► On lit l'ordonnée de ce point (cette étape correspond aux pointillés rouges/verts horizontaux ci-dessus)

Du graphique précédent on extrait le tableau de valeur :

Abscisse	-4	-3	-2	0	2	3	4
Ordonnée	-2	0	1	1	1	2	4

Chapitre 8: Proportionnalité

1– Situation de proportionnalité

A– Rappels

Définition : On dit que deux grandeurs sont proportionnelles si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant (ou divisant) l'autre par un même nombre, appelé coefficient de proportionnalité.

Rappel : Diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$, diviser par 3 revient à multiplier par $\frac{1}{3}$, diviser par 18,4 revient à multiplier par $\frac{1}{18,4}$, ...

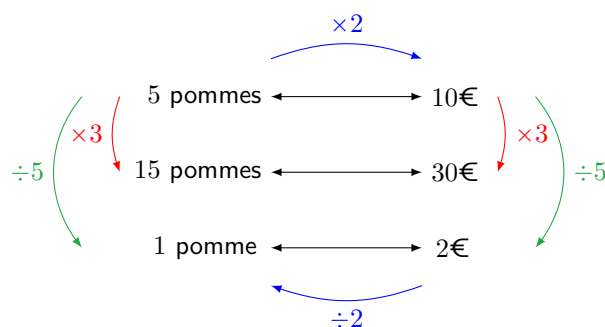
Exemple : $5 \div 2 = 5 \times \frac{1}{2}$, $12 \div 1,5 = 12 \times \frac{1}{1,5}$, $20,5 \div 8 = 20,5 \times \frac{1}{8}$

Méthode : Pour reconnaître une situation de proportionnalité, on peut se demander si on peut utiliser les expressions "fois plus" et "fois moins" comme dans les deux exemples suivants.

Exemple 1 : Imaginons que j'achète 5 pommes pour 10€.

- ▶ Si j'achète 15 pommes, alors je paye 30€ : en effet, si j'achète 3 fois plus de pommes, alors je dois payer 3 fois plus cher ! (15 pommes = 5 pommes $\times 3$ et 30€ = 10€ $\times 3$),
- ▶ Si j'achète 1 pomme, alors je paye 2€ : en effet, si j'achète 5 fois moins de pommes, alors je dois payer 5 fois moins cher ! (1 pomme = 5 pommes $\div 5$ et 2€ = 10€ $\div 5$).

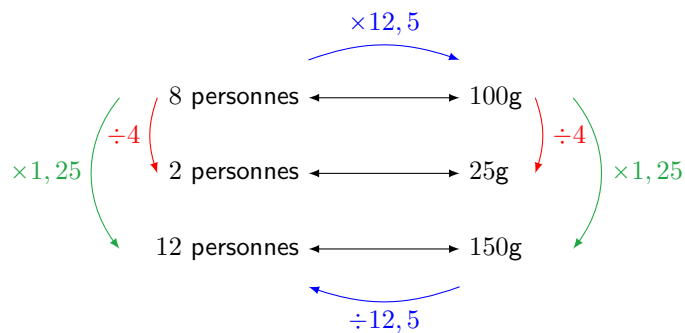
Le nombre de pommes et le prix que l'on paye sont donc deux grandeurs proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité est 2 : pour trouver le prix à payer, on multiplie le nombre de pommes par 2. Inversement, pour trouver le nombre de pommes, on divise le prix par 2. On peut le représenter avec un schéma :



Exemple 2 : Imaginons qu'il faut 100g de farine pour faire un gâteau pour 8 personnes.

- ▶ Si je veux cuisiner pour 12 personnes, alors je dois utiliser 150g de farine : en effet, si je cuisine pour 1,5 fois plus de personnes, alors je dois utiliser 1,5 fois plus de farine ! (12 personnes = 8 personnes $\times 1,5$ et 150g = 100g $\times 1,5$),
- ▶ Si je veux cuisiner pour 2 personnes, alors je dois utiliser 25g de farine : en effet, si je cuisine pour 4 fois moins de personnes, alors je dois utiliser 4 fois moins de farine ! (2 personnes = 8 personnes $\div 4$ et 25g = 100g $\div 4$).

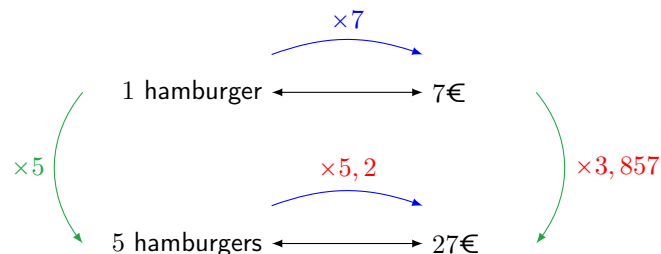
Le nombre de personnes et la quantité de farine sont deux grandeurs proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité est 1,5 : pour trouver la quantité de farine, je multiplie le nombre de personnes par 1,5. Inversement, pour trouver le nombre de personnes, je divise la quantité de farine par 1,5. On peut refaire le même schéma :



Exemple 1 de situation non proportionnelle : Imaginons que je me fais livrer des hamburgers à 5€. Qu'importe la quantité que je commande, les frais de livraison sont de 2€.

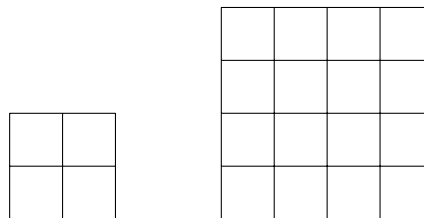
- Si je commande 1 hamburger, je paye au total 7€ = 5€ + 2€ (hamburger + livraison).
- Si je commande 5 hamburgers, je paye au total 27€ = 5€ × 5 + 2€ (hamburgers + livraison).

Donc si je commande 5 fois plus de hamburgers, je ne paye pas 5 fois plus cher, puisque je ne paye pas 35€ = 7€ × 5. Le schéma précédent ne fonctionne pas, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de coefficient de proportionnalité :



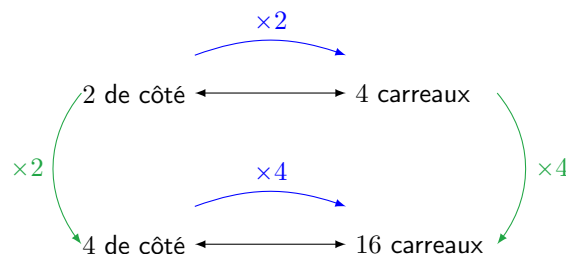
Le nombre de hamburgers et le prix total ne sont donc pas deux grandeurs proportionnelles.

Exemple 2 de situation non proportionnelle : On considère des quadrillages carrés :



- Une grille de côté 2 carreaux contient 4 carreaux au total.
- Une grille de côté 4 carreaux contient 16 carreaux au total.

Donc si je considère une grille 2 fois plus large, elle ne contient pas 2 fois plus de carreaux. Le schéma ne fonctionne toujours pas, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de coefficient de proportionnalité :



Le nombre de carreaux au total et le côté ne sont donc pas deux grandeurs proportionnelles.

Remarque : Dans les schémas ou les raisonnements, il ne faut pas utiliser le symbole $=$. En effet, des pommes ne sont pas un prix, donc 5 pommes ne peuvent pas être "égales à" 10€...

À l'oral, au lieu de dire «5 pommes sont égales à 10€», on dit plutôt «5 pommes correspondent à 10€».

B– Quotients – Grandeurs quotients et produits

Considérons deux grandeurs A et B proportionnelles. Par définition, on peut trouver les valeurs de B en multipliant les valeurs de A par le coefficient de proportionnalité.

Exemple : Avec un coefficient de proportionnalité de 3 :

A	1	2	3,5	8	21,4
B	3	6	10,5	24	64,2

$\times 3$

La relation entre A et B peut s'écrire $B = 3 \times A$. En particulier, quelles que soient les valeurs de A et B (avec $A \neq 0$), on a $\frac{B}{A} = 3$.

Propriété : Si A et B sont deux grandeurs proportionnelles, alors le quotient $\frac{B}{A}$ (si $A \neq 0$) a toujours la même valeur : il est égal au coefficient de proportionnalité.

Proposition : Réciproquement, si A et B sont deux grandeurs telles que le quotient $\frac{B}{A}$ a toujours la même valeur, alors A et B sont proportionnelles, et le coefficient de proportionnalité est égal à la valeur du quotient.

Exemple : Dans le tableau de valeurs suivant :

A	25	50	75	100	200
B	5	10	15	20	40

les quotients des valeurs de B par les valeurs de A sont :

$$\frac{5}{25} = \frac{10}{50} = \frac{15}{75} = \frac{20}{100} = \frac{40}{200} = 0,2$$

Donc A et B sont proportionnelles, et le coefficient de proportionnalité est 0,2.

Activité 3 Grandeurs produit et quotient

1. Un cheval galope à une vitesse constante de 15 m/s. Il parcourt ainsi 15 mètres chaque seconde.

a. Quelle distance parcourt-il en 2 min 15 s ?

b. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 90 m ?

2. La vitesse moyenne d'un mobile est donnée par :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{Temps de parcours}}$$

a. À quelle vitesse moyenne roule un camion s'il parcourt 225 km en 2 h 30 min ?

b. Quelle distance parcourt un moineau en 42 min s'il vole à une vitesse moyenne de 45 km/h ?

3. L'énergie consommée par un appareil électrique est donnée par :

$$\text{Énergie} = \text{Puissance de l'appareil} \times \text{Temps de fonctionnement}$$

a. Si on s'éclaire avec une lampe de 60 W pendant 2 h 48 min, quelle énergie a-t-on consommée ?

b. Quelle est la puissance d'un appareil qui consomme 500 Wh en 1 h 45 min ?

C'est une grandeur quotient. Si la distance parcourue est exprimée en kilomètres (km) et le temps de parcours en heures (h), on obtient une vitesse en kilomètres par heure (km/h).



C'est une grandeur produit. Si la puissance de l'appareil est exprimée en Watts (W) et le temps de fonctionnement en heures (h), on obtient une énergie en Wattheures (Wh).



Activité:

- 1▶ a▶ Comme $2\text{min}15\text{s} = 135\text{s}$, il parcourt $135 \times 15 = 2025\text{m}$.
b▶ Comme $90 = 15 \times 6$, il lui faut 6 secondes.
- 2▶ a▶ Comme $2\text{h}30\text{min} = 2,5\text{h}$, sa vitesse moyenne est $225 \div 2,5 = 90\text{km/h}$.
b▶ Tout d'abord, $42\text{min} = 42 \div 60 = 0,7\text{h}$. Notons d la distance qu'il parcourt. On sait que $45\text{km/h} = \frac{d \text{ km}}{0,7 \text{ h}}$.
On en déduit que $d = 0,7 \times 45 = 31,5\text{km}$.
- 3▶ a▶ Comme $48\text{min} = 48 \div 60 = 0,8\text{h}$, $2\text{h}48\text{min} = 2,8\text{h}$, et donc la lampe consomme $2,8 \times 60 = 168\text{Wh}$.
b▶ Déjà, $45\text{min} = 45 \div 60 = 0,75\text{h}$, donc $1\text{h}45\text{min} = 1,75\text{h}$. On sait alors que $500 = P \times 1,75$, où P désigne la puissance de l'appareil. On en conclut que $P = 500 \div 1,75 \approx 286\text{W}$.

C— Représentation graphique

Activité 1 Représentations graphiques et proportionnalité

1. Un joueur lance son ballon de basket vers le panier ; on relève la hauteur du ballon à différents instants. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-contre.

Temps (en s)	0,1	0,4	0,5	0,7	1
Hauteur (en m)	2,9	4,2	4,3	4,1	2,9

a. Représenter la hauteur du ballon en fonction du temps dans un repère orthogonal, en choisissant 1 cm pour 0,1 s sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 0,5 m sur l'axe des ordonnées.

b. La hauteur du ballon est-elle proportionnelle à la durée ? Justifier.

2. Voici trois situations représentées chacune de deux façons : par un tableau et par un graphique.

Tableau A : Pour la pâte à crêpes

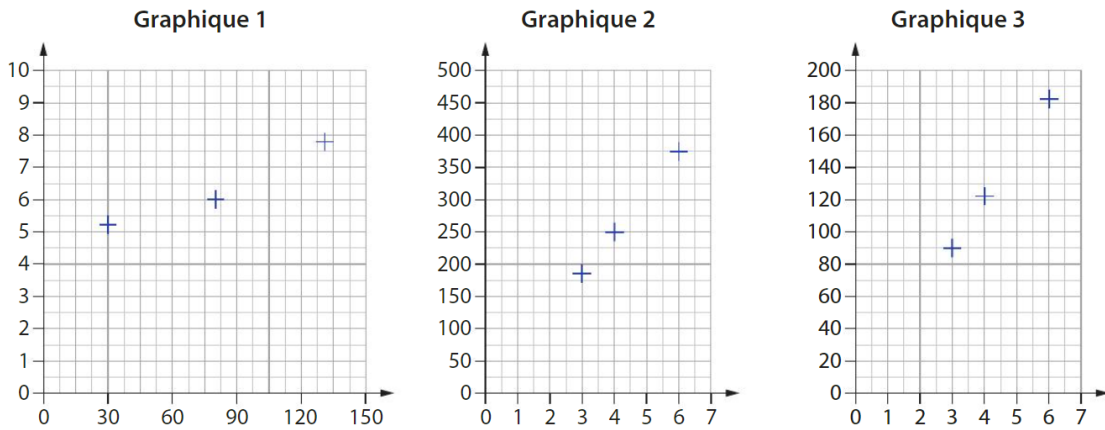
Nombre d'œufs	3	4	6
Masse de farine (en g)	187,5	250	375

Tableau B : Consommation moyenne d'essence d'une voiture sur 100 km

Vitesse (km/h)	30	80	130
Volume d'essence consommé (en L)	5,2	6	7,8

Tableau C : Une unité anglo-saxonne de longueur : le pied

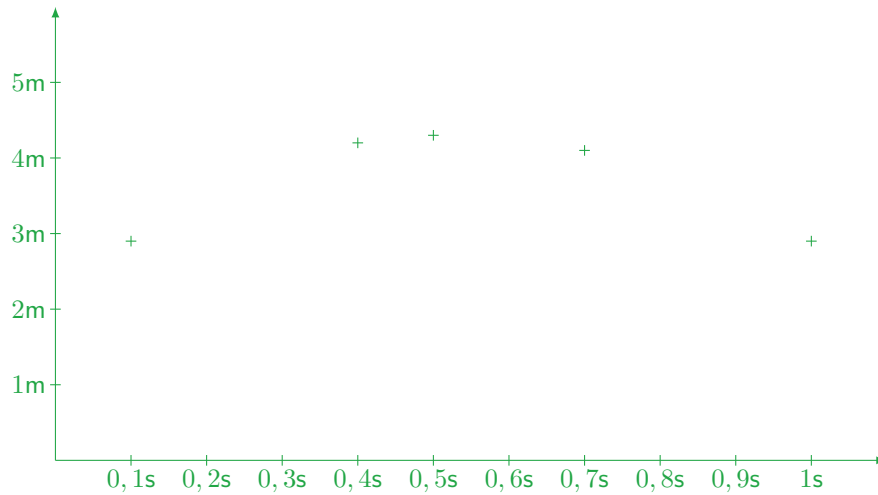
Longueur (en pieds)	3	4	6
Longueur (en cm)	91,44	121,92	182,88



- a. Quels tableaux traduisent une situation de proportionnalité ? Justifier.
 b. Associer chaque graphique au tableau correspondant.
 3. En utilisant les quatre exemples de cette activité, comment semble-t-on pouvoir reconnaître une situation de proportionnalité sur un graphique ?

Activité:

1► a►



b► Non : la hauteur du ballon est 4,3m à 0,5s, mais en deux fois plus de temps (1s), le ballon n'est pas deux fois plus haut (2,9m).

2► On calcule les quotients :

Tableau A : Graphique 2

- $187,5 \div 3 = 62,5$
- $250 \div 4 = 62,5$
- $375 \div 6 = 62,5$

C'est un tableau de proportionnalité.

Tableau B : Graphique 1

- $5,2 \div 30 \approx 0,173333333$
- $6 \div 80 = 0,075$

Ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

Tableau C : Graphique 3

- $91,44 \div 3 = 30,48$

► $121,92 \div 4 = 30,48$

► $182,88 \div 6 = 30,48$

C'est un tableau de proportionnalité.

3► C'est la propriété suivant :

Propriété : La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est une droite passant par l'origine.

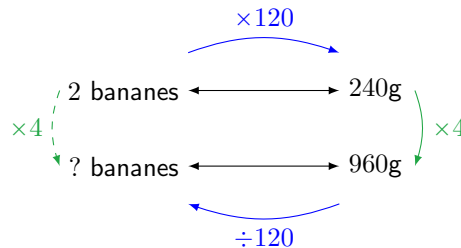
2– Quatrième proportionnelle

A– Rappels

Définition : Trouver la quatrième proportionnelle, c'est trouver une valeur dans une situation de proportionnalité.

Exemple-méthodes : Deux bananes pèsent 240g. Le nombre de bananes et la masse totale sont deux grandeurs proportionnelles : si je prends 12 fois plus de bananes, elles pèseront 12 fois plus lourd.

Imaginons que j'ai 960g de bananes. La grandeur inconnue est le nombre de bananes : c'est la quatrième proportionnelle. On peut faire le schéma :

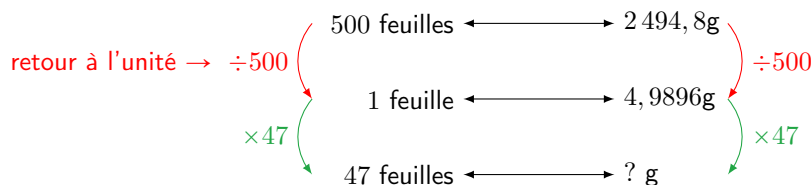


Puisque les grandeurs sont proportionnelles, il y a deux méthodes pour trouver le nombre de bananes :

- Avec le **coefficient de proportionnalité** : pour trouver le nombre de bananes, on divise la masse par 120 : comme $960 \div 120 = 8$, il y a 8 bananes.
- Avec le "**fois plus/fois moins**" : 960g sont 4 fois plus lourds que 240g, donc on a 4 fois plus de bananes, c'est-à-dire $2 \times 4 = 8$ bananes.

Autre méthode : Retour à l'unité

Une ramette de papier (500 feuilles) pèse 2494,8g. On veut déterminer combien pèsent 47 feuilles : le nombre de feuilles et leur masse sont deux grandeurs proportionnelles, on cherche donc une quatrième proportionnelle. Le retour à l'unité, c'est déterminer la quatrième proportionnelle pour l'unité (ici, combien pèse 1 seule feuille), puis faire la multiplication. On peut faire le schéma :



On calcule d'abord la masse d'une seule feuille : $2\,494,8g \div 500 = 4,9896g$. Ensuite, on multiplie cette valeur par 47, pour trouver que 47 feuilles pèsent $4,9896g \times 47 = 234,5112g$.

Exemple-Propriété : Le nombre de pastèques que j'achète et le prix que je paye sont deux grandeurs proportionnelles. Je sais que 2 pastèques coûtent 7€ et que 3 pastèques coûtent 10,5€. Je veux savoir combien coûtent 5 pastèques. Comme 5 pastèques = 2 pastèques + 3 pastèques, le prix total est de $7€ + 10,5€ = 17,5€$. On peut faire un schéma :

2 pastèques	←————→	7€
+ 3 pastèques	←————→	10,5€
5 pastèques	←————→	17,5€

Remarque : Ce raisonnement fonctionne grâce à la proportionnalité : sans elle, on ne peut pas ajouter les grandeurs comme ça !

B– Produit en croix et règle de trois

Définition : On dit que deux grandeurs positives A et B sont dans un ratio 2 : 3 (lire «2 pour 3») si $\frac{A}{2} = \frac{B}{3}$.

Illustration : Le ratio 2 : 3 peut se schématiser comme :

A	A	B	B	B
---	---	---	---	---

Exemple : Pour faire un bon sirop, il faut que les quantités de sirop concentré et d'eau soient dans un ratio 1 : 9, c'est-à-dire 1 dose de sirop pour 9 doses d'eau.

Sirop	Eau	Eau	Eau	Eau	Eau	Eau	Eau	Eau	Eau
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Remarque : Cela signifie qu'il y a $\frac{1}{10}$ de sirop !

Activité 2 Piña Colada

La *Piña Colada* est un cocktail composé de jus d'ananas et de lait de coco, dans le ratio 3 : 2.

1. a. Recopier et compléter le tableau de proportionnalité ci-contre.

Quantité de jus d'ananas (en cL)	30	45		
Quantité de lait de coco (en cL)			50	80

b. Choisir deux colonnes parmi les quatre de ce tableau et calculer les produits $a \times x$ et $b \times c$, comme indiqué ci-contre.

a	c
b	x

c. Recommencer plusieurs fois avec deux autres colonnes. Quelle conjecture peut-on formuler ?

2. a. On suppose que le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité, avec a, b, c et x non nuls. Justifier l'égalité $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$.

b. En mettant ces deux quotients au même dénominateur, justifier que $a \times x = b \times c$.

Cette égalité est connue sous le nom d'égalité des produits en croix.

c. Dédurre de la question **a.** que $x = c \times \frac{b}{a}$ puis que $x = \frac{c \times b}{a}$.

3. En utilisant cette égalité, calculer la quantité de lait de coco nécessaire si on utilise 50 cL de jus d'ananas.

Activité:

1► a►

Ananas	30	45	75	120
Coco	20	30	50	80

b► Avec les deux premières colonnes : $30 \times 30 = 900$ et $20 \times 45 = 900$.

c► Avec la première et la troisième colonne : $30 \times 50 = 1500$ et $20 \times 75 = 1500$.

Avec la troisième et la quatrième colonne : $75 \times 80 = 6000$ et $50 \times 120 = 6000$.

Conjecture : dans un tableau de proportionnalité, qu'importe les paires de colonnes que l'on choisit, les produits en croix sont égaux.

- 2► a► Dans un tableau de proportionnalité, les quotients sont égaux : $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$.
- b► D'une part, $\frac{b}{a} = \frac{b \times c}{a \times c}$, et d'autre part, $\frac{x}{c} = \frac{x \times a}{c \times a}$. Ainsi, $\frac{b \times c}{a \times c} = \frac{x \times a}{c \times a}$, et on en déduit que $b \times c = x \times a$.
- c► En divisant les deux membres par a , puis en simplifiant la fraction, on obtient : $\frac{b \times c}{a} = \frac{x \times a}{a}$, et donc $\frac{b \times c}{a} = x$. On a également $x = c \times \frac{b}{a}$.
- 3► On peut utiliser la première colonne : $\frac{30}{20} \mid \frac{50}{x}$ et donc $x = \frac{20 \times 50}{30} \approx 33,3\text{L}$.

Bilan-méthode : On a vu précédemment que si deux grandeurs sont proportionnelles, alors les quotients sont égaux. On peut alors exploiter la proportionnalité pour déterminer de nouvelles valeurs.

Imaginons la situation de proportionnalité suivante dans laquelle l'une des valeurs est inconnue (on la note x) :

$$250 \longleftrightarrow 100$$

$$7 \longleftrightarrow x$$

Le raisonnement est le suivant :

- On sait que les quotients sont égaux : $\frac{250}{7} = \frac{100}{x}$.
- Or lorsque deux fractions sont égales, leurs produits en croix sont aussi égaux, c'est-à-dire $250 \times x = 7 \times 100$.
- En particulier, en divisant les deux membres de l'égalité par 250, on trouve que $\frac{250 \times x}{250} = \frac{7 \times 100}{250}$.
- Comme $\frac{250 \times x}{250} = \frac{250 \times x}{250} = x$, on en déduit que $x = \frac{7 \times 100}{250}$.

Ce raisonnement, et plus particulièrement cette dernière égalité qui donne x , est appelée règle de trois.

Remarque : Pour signifier dans un schéma de proportionnalité que l'on utilise la règle de trois, on fait parfois le petit dessin suivant :

$$\begin{array}{ccc} 250 & \longleftrightarrow & 100 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ 7 & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

Exemple : Avec un tableau de valeurs et des unités :

Distance (km)	50	80
Temps (h)	2	x

$$x = \frac{2 \times 80}{50} = 3,2\text{h}$$

L'égalité des quotients traduit ici l'égalité des vitesses.

Remarque : Cette méthode fonctionne également si l'inconnue x n'est pas forcément en bas à droite.

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 4 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ 27 & & x \end{array}$$

$$x = \frac{4 \times 27}{12}$$

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 27 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ x & & 9 \end{array}$$

$$x = \frac{9 \times 12}{27}$$

$$\begin{array}{ccc} x & & 27 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ 4 & & 9 \end{array}$$

$$x = \frac{27 \times 4}{9}$$

$$\begin{array}{ccc} 12 & & x \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ 4 & & 9 \end{array}$$

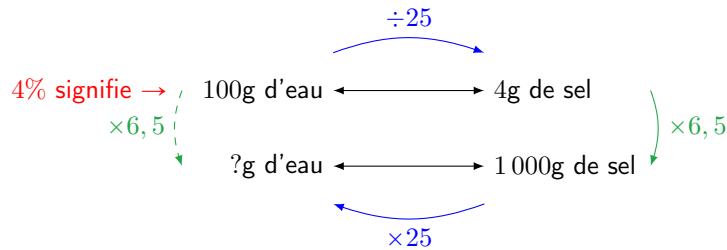
$$x = \frac{12 \times 9}{4}$$

3– Proportionnalité et pourcentages

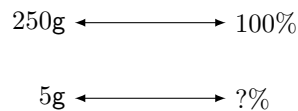
Vocabulaire : Dans certaines situations, on utilise le mot «taux» à la place de «pourcentage». Ces deux mots ont le même sens.

Les pourcentages rendent compte d'une situation de proportionnalité ! Et dans une situation de proportionnalité, il est bienvenu de faire un schéma (voir les exemples ci-dessous).

Exemple : ► Le taux de sel dans l'eau de mer est d'environ 4%. Cela signifie que dans 100g d'eau de mer, il y a 4g de sel. Mais si on prend 8 fois plus d'eau, à la fin on obtient bien 8 fois plus de sel ! La quantité d'eau et la quantité de sel dissoute (en grammes) sont donc des grandeurs proportionnelles. Pour trouver combien il faut traiter d'eau de mer pour obtenir $1\text{kg} = 1,000\text{g}$ de sel, on peut utiliser le schéma :



► Inversement, on peut vouloir trouver un pourcentage ou un taux. Imaginons que vous mettez 5g de sel pour faire un pain de 250g : quelle est le taux de sel de ce pain ? C'est une situation de proportionnalité (si on fait n fois plus de pain, alors on doit mettre n fois plus de sel), donc on peut faire le schéma. Pour savoir les grandeurs en jeu, on peut faire la remarque suivante : 250g représente 100% de la masse du pain, et on cherche le pourcentage que représente 5g de sel dans 250g.



On peut par exemple utiliser la règle de trois : $? = \frac{5 \times 100}{250} = 2$. On en conclut qu'un tel pain a un taux de sel de 2%.

Problème : L'épargne permet de gagner de l'argent : à la fin de l'année, on vous offre 2% de l'argent que vous avez épargné durant l'année.

Exemple : si vous avez épargné 100€, alors à la fin de l'année vous gagnez 2% de 100€, c'est-à-dire 2€. Vous avez donc 102€.

Alice dit la chose suivante : «J'épargne 100€ la première année. Si j'attends pendant 5 ans, alors je vais gagner 10% au total, et donc j'aurai 110€ à la fin !»

Qu'en pensez-vous ?

Énigme : paradoxe des pommes de terre (très difficile) : Un agriculteur récolte des pommes de terre : il en récolte 100kg, et ses pommes de terre sont composées de 99% d'eau. Un mois plus tard, l'eau s'est évaporée, et les pommes de terre sont alors composées à 98% d'eau. Lorsqu'il pèse à nouveau sa récolte, il trouve 50kg...

Expliquez ce phénomène.

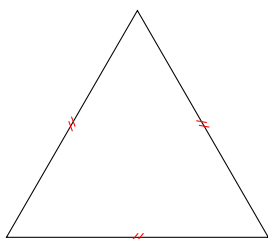
Chapitre 9: Le théorème de Thalès

1– Quelques rappels sur les triangles

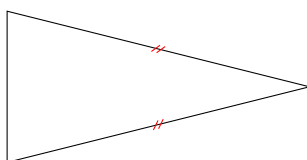
Dans tout ce paragraphe, ABC désigne un triangle.

Définition :

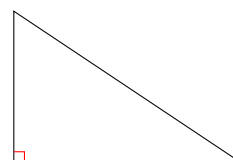
- ▶ Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont de même longueur.
- ▶ Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés ont même longueur. Plus précisément, si $AB = AC$, alors on dit que ABC est isocèle en A . Le point A est appelé sommet principal du triangle, et $[BC]$ est appelée base du triangle.
- ▶ Un triangle rectangle est un triangle dont l'un des angles est droit. Plus précisément, si l'angle en A est droit, alors on dit que ABC est rectangle en A .



ÉQUILATÉRAL

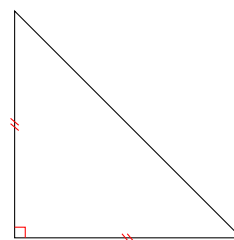


ISOCÈLE



RECTANGLE

Remarque : Un triangle équilatéral est isocèle (en chacun de ses sommets), et il existe des triangles à la fois isocèles et rectangles, que l'on dit alors isocèles rectangles.



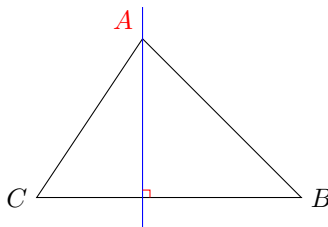
ISOCÈLE RECTANGLE

Propriété : Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure.

Propriété : Les angles d'un triangle équilatéral mesurent tous 60° .

Propriété : Les angles à la base d'un triangle isocèle et rectangle ont pour mesure 45° .

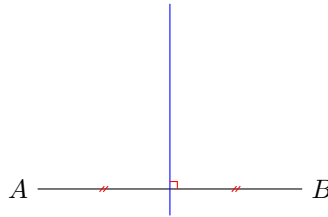
Définition : La hauteur issue de A est la droite passant par A perpendiculaire au côté opposé, qui est $[BC]$. Dans ce contexte, le côté $[BC]$ est appelé base de ABC relative à la hauteur issue de A .



Propriété : La somme des mesures des angles d'un triangle vaut toujours 180° .

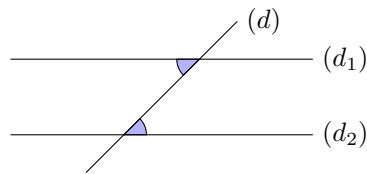
2– Quelques rappels de géométrie dans le plan

Définition : La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par le milieu de $[AB]$.



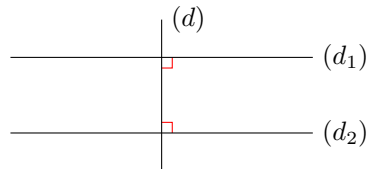
Théorème des angles alternes-internes

Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles non confondues, et (d) une droite qui intersecte (d_1) et (d_2) . Les angles alternes-internes formés par ces intersections (ceux représentés sur la figure) sont de même mesure.



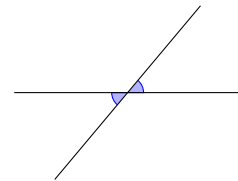
Théorème : Soient d , d_1 et d_2 trois droites du plan, avec d et d_1 perpendiculaires.

- ▶ Si d_1 et d_2 sont parallèles, alors d et d_2 sont perpendiculaires.
- ▶ Réciproquement, si d et d_2 sont perpendiculaires, alors d_1 et d_2 sont parallèles.



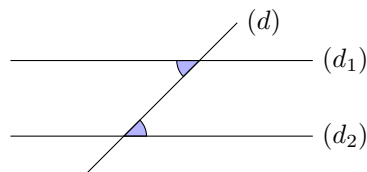
Remarque : Le premier point de ce théorème est souvent énoncé « deux droites perpendiculaires à une troisième droite sont parallèles entre elles ».

Théorème : Deux angles opposés au sommet ont même mesure.



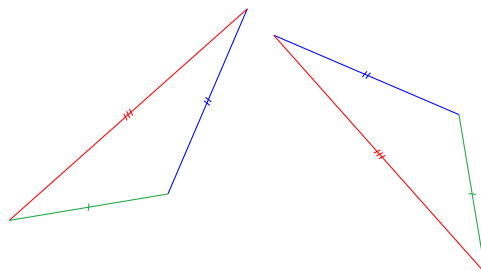
Réciproque du théorème des angles alternes-internes

Soient (d_1) et (d_2) deux droites non confondues, et (d) une droite qui intersecte (d_1) et (d_2) . Si les angles alternes-internes formés par ces intersections (ceux représentés sur la figure) sont de même mesure, alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

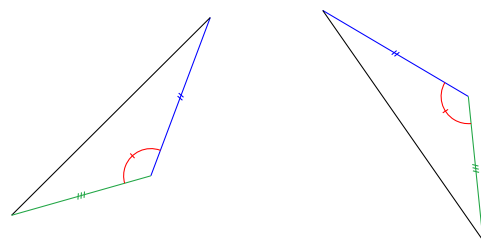


3– Triangles égaux

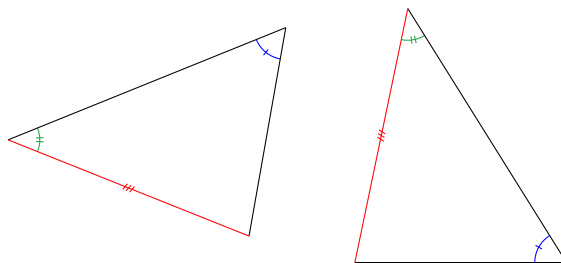
Définition : On dit que deux triangles sont égaux si leurs côtés sont deux à deux de même longueur. Cela revient à dire qu'on peut les superposer.



Proposition : Deux triangles qui ont deux côtés ayant deux à deux même longueur, et tels que les angles entre ces côtés correspondant ont même mesure, sont égaux.



Proposition : Si deux triangles partagent deux angles de même mesure, et si leurs côtés entre ces angles sont de même longueur, alors ces triangles sont égaux.



4– Le théorème de Thalès

Activité 1 Avec des droites parallèles

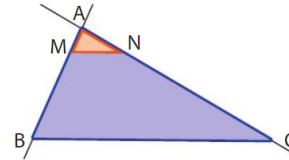
1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer deux triangles « emboîtés » ABC et AMN tels que :

- les droites (MN) et (BC) sont parallèles ;
- $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$.

Choisir une couleur différente pour chaque triangle.

b. Avec le tableur, réaliser un tableau indiquant les longueurs des côtés de chacun des triangles. Insérer une dernière ligne pour calculer les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$.

	A	B	C	D
1	Triangle ABC	AB=3.5	AC=4.6	BC=6
2	Triangle AMN	AM=0.7	AN=0.92	MN=1.2
3		AM/AB=0.2	AN/AC=0.2	MN/BC=0.2



2. a. Expliquer pourquoi les résultats affichés dans les lignes 1 et 2 du tableau sont proportionnels.

b. À l'aide de la question précédente, comment peut-on caractériser le triangle AMN à partir du triangle ABC ?

3. a. Déplacer le point M sur la demi-droite [AB). Que remarque-t-on ?

b. Déplacer les points A, B et C pour faire des observations dans d'autres triangles. Que peut-on constater ?

c. Quelle propriété peut-on ainsi conjecturer ?

Cette propriété porte le nom de « Théorème de Thalès ». Elle a été démontrée de plusieurs façons différentes au cours de l'histoire.

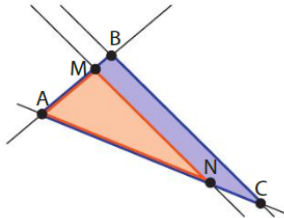


Activité 3 Avec des rapports de distances égaux

On veut construire deux triangles ABC et AMN « emboîtés » tels que :

- $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ • $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

1. Lola a réalisé la figure ci-dessous à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et de son tableur. Expliquer pourquoi sa figure semble correcte.



	A	B
1	AM/AB	AN/AC
2	0.78	0.78

2. Que peut-on conjecturer pour les droites (MN) et (BC) ?

3. En procédant comme Lola avec un logiciel de géométrie dynamique et l'affichage du tableur, construire une autre figure correcte.

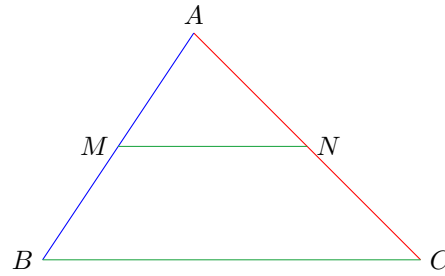
Déplacer les points pour obtenir plusieurs figures différentes tout en gardant des triangles « emboîtés », des points alignés et des rapports égaux.

4. Que peut-on conjecturer pour les droites (MN) et (BC) ?

Écrire un énoncé précis et complet de la propriété conjecturée.

Théorème de Thalès

On considère des points A, B, C, M et N tels que A, M et B sont alignés, et A, N et C sont alignés (on parle de "configuration des triangles emboîtés").

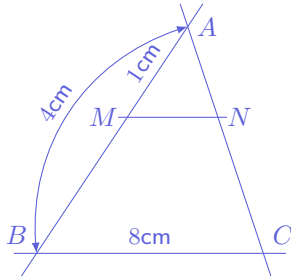


Si (MN) est parallèle à (BC) , alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Remarque : Le théorème de Thalès dit que, dans les bonnes conditions, les longueurs de ABC et de AMN sont proportionnelles, autrement dit que ABC est un agrandissement de AMN .

Remarque : Attention, l'ordre des points compte ! Si on change l'ordre des points, alors on change les quotients. Ici, on a choisi de mettre M entre A et B , et N entre A et C .

Exercice : Dans la figure suivante, (BC) et (MN) sont parallèles. Calculer MN .



Rédaction-type : Les points A, M et B sont alignés, les points A, N et C sont alignés, et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème de Thalès,

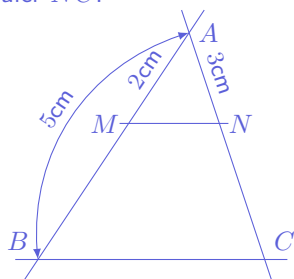
$$\begin{aligned} \frac{AM}{AB} &= \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \\ \text{donc } \frac{1}{4} &= \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{8} \\ \text{donc } \frac{1}{4} &= \frac{MN}{8} \\ \text{donc } MN &= \frac{1 \times 8}{4} = 2 \end{aligned}$$

et donc $MN = 2\text{cm}$.

Déroulement de la rédaction :

- 1► On écrit les hypothèses d'alignement et de parallélisme,
- 2► On invoque le théorème,
- 3► On écrit les égalités de quotients,
- 4► On remplace les longueurs que l'on connaît,
- 5► On entoure :
 - la fraction qui contient la longueur que l'on cherche
 - la fraction qui ne contient que des nombres connus
- 6► On calcule la valeur manquante avec un produit en croix/une règle de trois,
- 7► On écrit la conclusion.

Exercice: Dans la figure suivante, (BC) et (MN) sont parallèles. Calculer NC .



Rédaction-type : Les points A , M et B sont alignés, les points A , N et C sont alignés, et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

donc $\frac{2}{7} = \frac{3}{AC} = \frac{MN}{BC}$

donc $\frac{2}{7} = \frac{3}{AC}$

donc $AC = \frac{7 \times 3}{2} = 10,5$

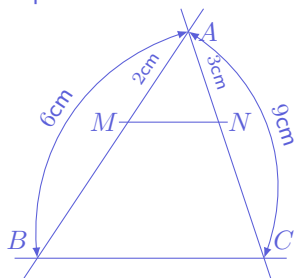
et donc $NC = AC - AN = 10,5 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$.

Réciproque du théorème de Thalès

On considère des points A , B , C , M et N tels que A , M et B sont alignés dans cet ordre, et A , N et C sont alignés dans cet ordre.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors (MN) est parallèle à (BC) .

Exercice: Dans la figure suivante, les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?



Rédaction-type : Les points A , M et B sont alignés dans cet ordre, les points A , N et C sont alignés dans cet ordre. On calcule les deux rapports de longueurs :

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{AM}{AB} &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \triangleright \frac{AN}{AC} &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ces deux rapports sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) et (BC) sont parallèles.

Déroulement de la rédaction :

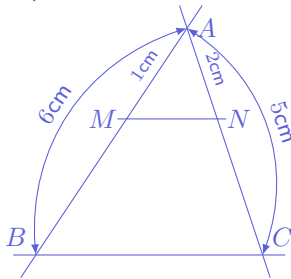
- 1► On écrit les hypothèses d'alignement et d'ordre,
- 2► On écrit les quotients de longueurs,
- 3► On vérifie que les quotients sont égaux :
 - soit en comparant les produits en croix
 - soit en simplifiant les fractions
- 4► On invoque la réciproque du théorème, et on écrit la conclusion.

Contraposée du théorème de Thalès

On considère des points A , B , C , M et N tels que A , M et B sont alignés dans cet ordre, et A , N et C sont alignés dans cet ordre.

Si $\frac{AN}{AB} \neq \frac{AM}{AC}$, alors (MN) n'est pas parallèle à (BC) .

Exercice : Dans la figure suivante, les droites (BC) et (MN) sont-elles parallèles ?



Rédaction-type : Les points A , M et B sont alignés dans cet ordre, les points A , N et C sont alignés dans cet ordre. On calcule les deux rapports de longueurs :

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{AM}{AB} &= \frac{1}{6} \\ \triangleright \frac{AN}{AC} &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Les produits en croix sont $1 \times 6 = 6$ et $2 \times 5 = 10$: ils ne sont pas égaux, donc ces deux rapports de longueur ne sont pas égaux, donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Déroulement de la rédaction :

- 1► On écrit les hypothèses d'alignement et d'ordre,
- 2► On écrit les quotients de longueurs,
- 3► On vérifie que les quotients ne sont pas égaux :
 - soit en comparant les produits en croix
 - en calculant une valeur approchée (à condition qu'elles soient vraiment bien différentes !)
- 4► On invoque la contraposée du théorème, et on écrit la conclusion.

Remarque : Dans la contraposée, on peut également utiliser une valeur approchée pour justifier que les rapports ne sont pas égaux, à condition de mettre suffisamment de chiffres après la virgule pour voir la différence !

Chapitre 10: Puissances et écriture scientifique

1– Puissance d'un nombre

Activité 4 Coupe-coupe



On prend une feuille de papier d'épaisseur 0,1 mm. On coupe cette feuille en deux et on superpose les deux parties obtenues. Puis on coupe ce paquet en deux, on superpose les deux parties obtenues, et ainsi de suite.

On imagine que la feuille est assez grande et que l'on dispose d'un massicot permettant de couper de grosses épaisseurs de papier.

Un massicot est une machine servant à couper les feuilles de papier disposées en pile.



- Quelle épaisseur totale de papier obtient-on après avoir coupé vingt fois la feuille de papier ?

Étape 0 :	1 épaisseur	
		× 2
Étape 1 :	2 épaisseurs	× 2
		× 2
Étape 2 :	$4 = 2 \times 2$ épaisseurs	× 2
		⋮
Étape 3 :	$8 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ fois le chiffre } 2}$ épaisseurs	
	⋮	
Étape 20 :	$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{20 \text{ fois le chiffre } 2}$ épaisseurs	× 2

À l'étape 20, il y aura $2 \times 2 \times \dots \times 2$ (on multiplie 2, par 2, par 2, ... en écrivant au total 20 fois le chiffre 2) épaisseurs, c'est-à-dire 1 048 576 épaisseurs. Comme chaque épaisseur fait 0,1 mm, l'épaisseur totale sera $1\,048\,576 \times 0,1 \text{ mm} = 104\,857,6 \text{ mm} = 10,485\,76 \text{ m}$.

A– Puissances de 10

Définition : Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.

- ▶ Le nombre 10^n , lu «10 exposant n », ou «puissance n -ième de 10», est défini par $10^n = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$.
- ▶ Le nombre 10^{-n} , lu «10 exposant moins n », est défini par $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}}}$.
- ▶ Par convention, $10^0 = 1$.

Dans l'écriture 10^m (que m soit positif ou négatif), le nombre m est appelé exposant, et 10 est appelé base de la puissance.

Exemple :

- ▶ $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1\,000$, ...
- ▶ $10^{-2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$, ...

Remarque : $10^{-1} = \frac{1}{10}$

Propriété : Soit n un nombre entier positif. Le nombre 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n fois le chiffre 0.

Exemple :

- ▶ $10^4 = 10\,000$
- ▶ $10^1 = 10$
- ▶ $10^0 = 1$ (le chiffre 1 suivi de zéro fois le chiffre 0!).

Proposition : $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$

Exemple :

- ▶ $10^2 \times 10^5 = 10^{2+5} = 10^7$
- ▶ $10^4 \times 10^{-6} = 10^{4+(-6)} = 10^{-2}$

B– Puissance d'un nombre quelconque

On définit la puissance n -ième d'un nombre a (avec $a \neq 0$ lorsque $n < 0$), notée a^n , de la même manière que pour les puissances de 10.

Définition : Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Soit a un nombre.

- ▶ Le nombre a^n , lu « a exposant n », ou «puissance n -ième de a », est défini par $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.
- ▶ Si $a \neq 0$, alors le nombre a^{-n} , lu « a exposant moins n », est défini par $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.
- ▶ Par convention, $a^0 = 1$.

Dans l'écriture a^m (que m soit positif ou négatif), le nombre m est appelé exposant, et a est appelé base de la puissance.

Exemple :

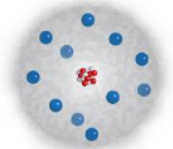
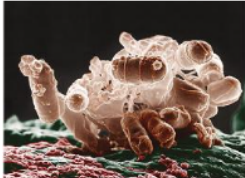
- ▶ $2^1 = 2$, $1,5^2 = 1,5 \times 1,5$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5$, ...
- ▶ $1^{-2} = \frac{1}{1 \times 1}$, $2^{-3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$, ...

Remarque : $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

2– Écriture scientifique d'un nombre décimal

Activité 3 Ordre de grandeur

Voici huit objets de l'Univers :

			
La Terre	Une molécule	Une galaxie	Un smartphone
			
Un atome	La plus haute tour du monde	Une bactérie	Le système solaire

Voici les dimensions approximatives de ces huit objets :

12 750 km	10^{-10} m	14 cm	12 milliards de km
828 m	$2 \mu\text{m}$	1 nm	10^{21} m

1. Associer à chaque objet sa dimension.
2. Écrire chacune de ces dimensions en mètres et sous la forme du produit d'un nombre décimal a , tel que $1 \leq a < 10$, par une puissance de dix.

1 micromètre (μm) est un millionième de mètre.
1 nanomètre (nm) est un milliardième de mètre.

Cette écriture est unique et s'appelle la notation scientifique (ou l'écriture scientifique) de ce nombre.

3. Classer les dimensions de ces objets dans l'ordre croissant.

- 1► Du plus grand au plus petit, les objets sont une galaxie, le système solaire, la Terre, la plus haute tour du monde, un smartphone, une bactérie, une molécule et un atome. On vérifie aisément que la taille d'un smartphone est environ 14cm. On écrit les autres longueurs en mètres :

$$A = 12\,750\text{km} = 12\,750 \times 1\,000\text{m} = 12\,750\,000\text{m}$$

$$B = 10^{-10}\text{m} = 0,000\,000\,000\,1\text{m}$$

$$C = 12 \text{ milliards de km} = 12\,000\,000\,000\text{km} = 12\,000\,000\,000 \times 1\,000\text{m} = 12\,000\,000\,000\,000\text{m}$$

$$D = 2\mu\text{m} = 2 \times 0,000\,001\text{m} = 0,000\,002\text{m}$$

$$E = 1\text{nm} = 0,000\,000\,001\text{m}$$

$$F = 10^{21}\text{m} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\text{m}$$

On les range dans l'ordre décroissant : $F < C < A < 828\text{m} < D < E < B$. Les dimensions de chaque objet sont donc les suivantes :

- Une galaxie : 10^{21}m
- La plus haute tour du monde : 828m
- Une molécule : 1nm
- Le système solaire : 12 milliard de km
- Un smartphone : 14cm
- Un atome : 10^{-10}m
- La Terre : 12 750km
- Une bactérie : $2\mu\text{m}$

2► $10^{21}\text{m} = 1 \times 10^{21}\text{m}$

- ▶ 12 milliard de km = 12 000 000 000 000 m = $1,2 \times 10\,000\,000\,000\,000 = 1,2 \times 10^{13} \text{ m}$
- ▶ 12 750 km = 12 750 000 m = $1,275 \times 10\,000\,000 = 1,275 \times 10^7 \text{ m}$
- ▶ 828 m = $8,28 \times 100 \text{ m} = 8,28 \times 10^2 \text{ m}$
- ▶ 14 cm = $14 \times 0,01 \text{ m} = 0,14 \text{ m} = 1,4 \times 0,1 \text{ m} = 1,4 \times 10^{-1} \text{ m}$
- ▶ $2 \mu\text{m} = 0,000\,002 \text{ m} = 2 \times 0,000\,001 \text{ m} = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$
- ▶ 1 nm = $0,000\,000\,001 \text{ m} = 10^{-9} \text{ m} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$
- ▶ $10^{-10} \text{ m} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$

A– Définition

Proposition : Tout nombre décimal positif non nul peut s'écrire (de manière unique) comme produit d'un nombre entre 1 (inclus) et 10 (exclu) (que l'on appelle mantisse de ce nombre) par une puissance de 10. L'exposant de la puissance de 10 est aussi appelé exposant de ce nombre.

Exemple :

- ▶ $299\,792\,458 = \underbrace{2,997\,924\,58}_{\text{mantisse}} \times 10^8$ (l'exposant est 8)
- ▶ $0,00879465 = \underbrace{8,794\,65}_{\text{mantisse}} \times 10^{-3}$ (l'exposant est -3)

Définition : On appelle écriture scientifique d'un nombre décimal non nul son écriture sous la forme de son signe suivi de l'écriture donnée par la Proposition précédente.

Exemple :

- ▶ $-6\,502,4 = -6,5024 \times 10^3$
- ▶ $0,123 = 1,23 \times 10^{-1}$

Proposition : Un nombre décimal positif non nul est :

- ▶ plus petit que 1 lorsque son exposant est négatif.
- ▶ plus grand que 1 lorsque son exposant est positif.

Exemple :

- ▶ $0,123 = 1,23 \times 10^{-1}$: son exposant est négatif, et ce nombre est plus petit que 1.
- ▶ $456,7 = 4,567 \times 10^2$: son exposant est positif, et ce nombre est plus grand que 1.

B– Unités

Le tableau suivant résume quelques multiples d'unités usuels et les liens qui les lient. On note u une unité quelconque : ça peut être des mètres (m), des grammes (g), ...

Nom	/	Déca- u	Hecto- u	Kilo- u	Méga- u	Giga- u	Téra- u
Symbole	u	$da\,u$	$h\,u$	$k\,u$	$M\,u$	$G\,u$	$T\,u$
Valeur	$1\,u$	$10\,u$	$10^2\,u$	$10^3\,u$	$10^6\,u$	$10^9\,u$	$10^{12}\,u$
Numération	Unité	Dizaine	Centaine	Millier	Million	Milliard	/

Nom	Nano- <i>u</i>	Micro- <i>u</i>	Milli- <i>u</i>	Centi- <i>u</i>	Déci- <i>u</i>	/
Symbole	<i>nu</i>	μu	<i>mu</i>	<i>cu</i>	<i>du</i>	<i>u</i>
Valeur	$10^{-9}u$	$10^{-6}u$	$10^{-3}u$	$10^{-2}u$	$10^{-1}u$	$1u$
Numération	Milliardième	Millionième	Millième	Centième	Dixième	Unité

Exemple :

- Une cellule animale mesure environ $20\mu\text{m}$. La taille d'une cellule animale est donc de l'ordre de la dizaine de micromètres, c'est-à-dire de l'ordre du cent-millième de mètre, ou du dixième de millimètre.
- La distance Terre-Lune est en moyenne 384 400km, elle est donc de l'ordre de 100 000km, c'est-à-dire de l'ordre du dixième de mégamètre.
- La masse d'une baleine adulte est en moyenne 140 000kg, c'est-à-dire de l'ordre de 100 000kg.
- La masse d'une banane est en moyenne de 120g, donc de l'ordre de la centaine de grammes, on en a encore du dixième de kilogramme.
- Selon une estimation, 915 000 000 000 gigaoctets (c'est-à-dire 915 000 000 To) de données ont été publiés sur Internet en 2018. C'est de l'ordre de la dizaine de millions de téraoctets. (En guise de comparaison, la capacité de stockage d'un ordinateur personnel est de l'ordre du téraoctet.)

C– Ordres de grandeur

Définition : Soit x un nombre décimal non nul. Si on note n l'exposant de x , alors on dit que x est de l'ordre de 10^n , ou que 10^n est l'ordre de grandeur de x .

Exemple :

- $121,267 = 1,21267 \times 10^2$ et $0 \leq 1,21267 < 10$, donc 121,267 est de l'ordre de 10^2 .
- $54\,835,2 = 5,48352 \times 10^4$ et $0 \leq 5,48352 < 10$, donc 54 835,2 est de l'ordre de 10^4 .
- $0,791 = 7,91 \times 10^{-1}$ et $0 \leq 7,91 < 10$, donc 0,791 est de l'ordre de 10^{-1} .
- $0,00958 = 9,58 \times 10^{-3}$ et $0 \leq 9,58 < 10$, donc 0,00958 est de l'ordre de 10^{-3} .

Méthode : On peut utiliser l'écriture scientifique et les ordres de grandeur pour contrôler la cohérence du résultat d'un calcul :

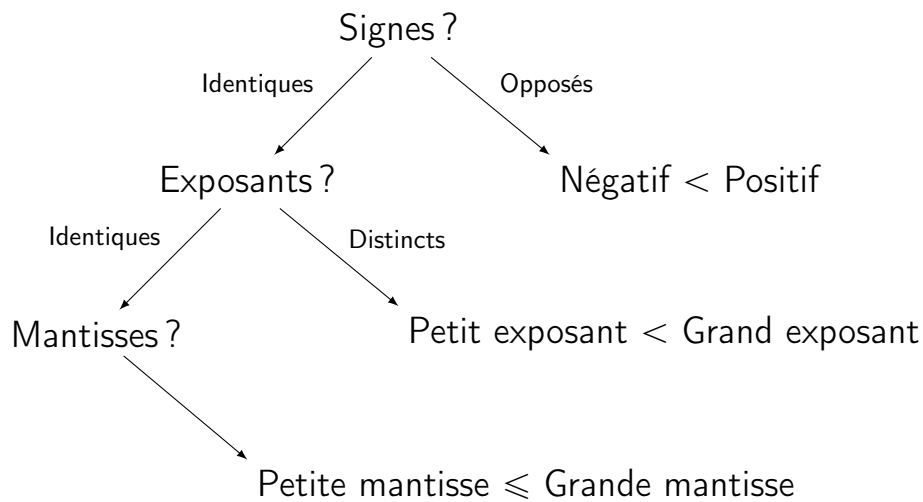
- Pour les produits, on arrondit les mantisses et on raisonne sur ces nombres simplifiés. Si les exposants sont différents, c'est qu'un y a une erreur.
- Pour les sommes, on regarde le plus grand exposant si les deux exposants sont différents.

Exemple :

- De quelle valeur se rapproche $1,96 \times 10^5 \times 3,4 \times 10^8$? On arrondit les mantisses : $2 \times 10^5 \times 3 \times 10^8 = 6 \times 10^{13}$. Donc si on trouve un résultat avec un exposant différent (par exemple $6,05 \times 10^{11}$), on sait qu'on s'est trompé.
- De quelle valeur $3,2 \times 10^3 + 5,7 \times 10^{-2}$. Les exposants, 3 et -2, sont différents. On peut le voir avec des unités : 10^3m correspond à 1km, et 10^{-2}m correspond à 1cm. Ajouter des cm à des km, ça change pas grand chose ! Donc le résultat doit être proche de $3,2 \times 10^3$.

D– Comparaison des nombres décimaux en écriture scientifique

Méthode : Pour comparer deux nombres décimaux écrits sous forme scientifique, on peut utiliser l'arbre de choix suivant :

**Exemple :**

- ▶ $-5,12 \times 10^{27} < 1,1 \times 10^{-12}$ car le premier est négatif et l'autre positif.
- ▶ $3,7 \times 10^5 < 1,2 \times 10^9$ car ils ont même signe et l'exposant du premier (5) est strictement plus petit que celui du second (9).
- ▶ $9,8 \times 10^{-3} < 6,5 \times 10^{-17}$ car ils ont même signe et l'exposant du premier (-3) est strictement plus petit que celui du second (-17).
- ▶ $1,2 \times 10^4 < 5,6 \times 10^4$ car ils ont mêmes signes, mêmes exposants, et la mantisse du premier (1,2) est plus petite que celle du second (5,6).
- ▶ $4,7 \times 10^{-80} < 8,6 \times 10^{-88}$ car ils ont mêmes signes, mêmes exposants, et la mantisse du premier (4,7) est plus petite que celle du second (8,6).
- ▶ $-2,2 \times 10^0 < -2,1 \times 10^0$ car ils ont mêmes signes, mêmes exposants, et la mantisse du premier (-2,2) est plus petite que celle du second (-2,1).

Exercice: Classez les nombres suivants par ordre croissant :

- a▶ $6,1 \times 10^{27}$
 b▶ $2,9 \times 10^{19}$
 c▶ $9,3 \times 10^{16}$

- d▶ $5,5 \times 10^{-1}$
 e▶ $3,7 \times 10^{-3}$
 f▶ $1,8 \times 10^{-1}$

- g▶ $4,3 \times 10^{19}$

Chapitre 11: Parallélogrammes

1– (Re)connaître un parallélogramme

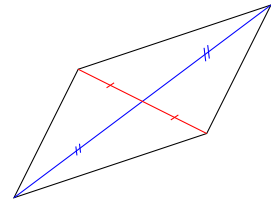
Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

Rappel : Un quadrilatère est un polygone qui a 4 côtés.

Rappel bis : Un polygone est une figure géométrique plane, dont les côtés sont des segments (c'est-à-dire des traits droits).

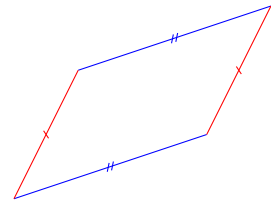
Propriété 1 :

- ▶ Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leurs milieux.
- ▶ *Réciproquement*, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leurs milieux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

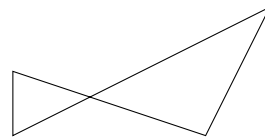
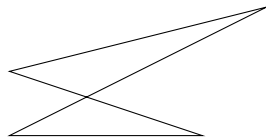


Propriété 2 :

- ▶ Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
- ▶ *Réciproquement*, si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé sont deux à deux de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

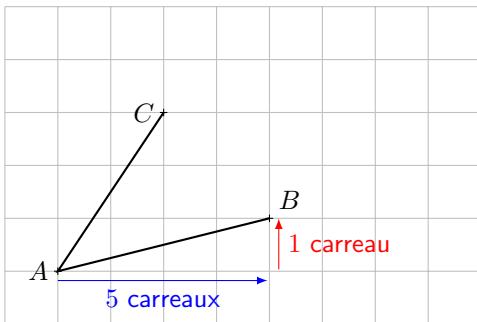


Rappel (?) : Un quadrilatère croisé est un quadrilatère dont deux côtés se croisent. Ça lui donne une forme de sablier, ou de papillon.

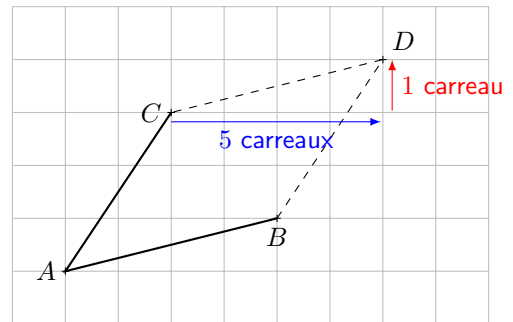


2– Tracer un parallélogramme

Astuce : Tracer rapidement un parallélogramme sur une feuille à carreaux

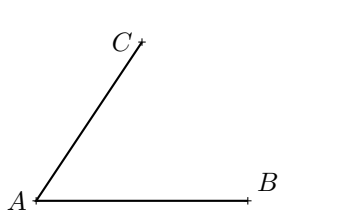


ÉTAPE 1 : On commence par placer trois points A , B et C . On compte le nombre de déplacements pour aller de A à B : ici, on avance de 4 carreaux vers la droite, et de 1 vers le haut.

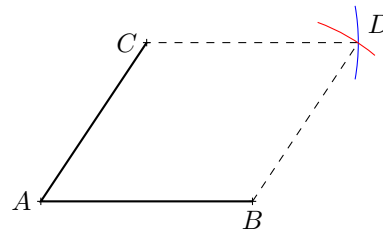


ÉTAPE 2 : On reproduit le même déplacement à partir du point C .

Méthode 1 : En utilisant les côtés opposés de même longueur (compas)

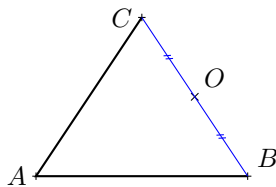


ÉTAPE 1 : On reporte la longueur AB , en centrant (c'est-à-dire en plantant) le compas en C

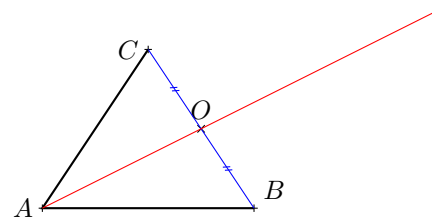


ÉTAPE 2 : On reporte la longueur AC , en centrant le compas en B . Le point D est à l'intersection des deux arcs de cercle

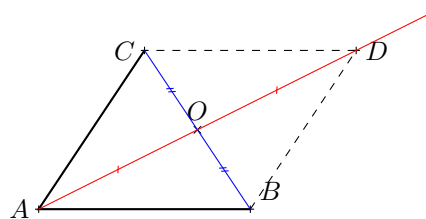
Méthode 2 : En utilisant les diagonales qui se coupent en leurs milieux (règle et compas)



ÉTAPE 1 : On trace $[BC]$ et on détermine son milieu

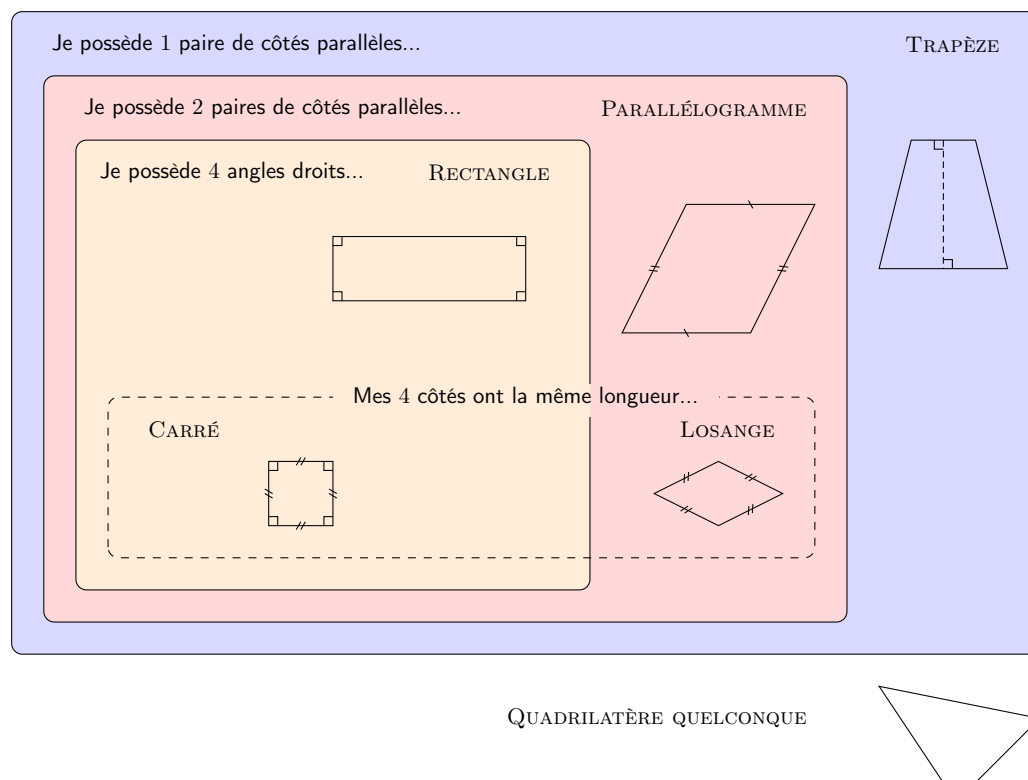


ÉTAPE 2 : On trace la demi-droite $[AO)$



ÉTAPE 3 : On construit le symétrique de A par rapport à O (pour cela, on peut reporter la longueur au compas). Cela construit le point D qui finit le parallélogramme

3– Parallélogrammes particuliers – classification des quadrilatères



Chapitre 12: Nombres rationnels : multiplication et division

1– Multiplier deux fractions

Méthode (Multiplication de deux fractions) : Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple : $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$.

Remarque : Cas particulier : multiplier une fraction par un entier : $5 \times \frac{2}{3} \left(= \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{1 \times 3} \right) = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}$.

"Preuve" par exemple générique

Montrons que $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$ à l'aide de la définition :

$$(3 \times 4) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \right) = \left(3 \times \frac{2}{3} \right) \times \left(4 \times \frac{5}{4} \right) = 2 \times 5$$

Comme $\frac{2 \times 5}{3 \times 4}$ est la seule à compléter l'égalité à trou $(3 \times 4) \times \dots = 2 \times 5$, on a bien $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$.

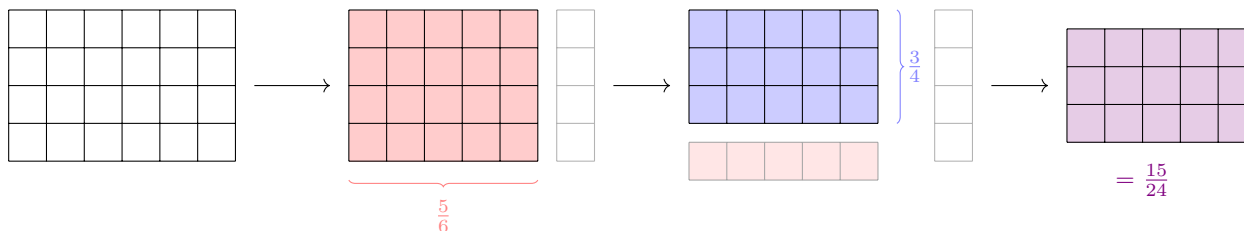
Preuve (la vraie)

Montrons que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ à l'aide de la définition :

$$(b \times d) \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \right) = \left(b \times \frac{a}{b} \right) \times \left(d \times \frac{c}{d} \right) = a \times c$$

Comme $\frac{a \times c}{b \times d}$ est la seule à compléter l'égalité à trou $(b \times d) \times \dots = a \times c$, on a bien $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Remarque : On peut illustrer la multiplication des fractions à nouveau à l'aide des fractions-partage :



Propriété : Prendre une fraction d'un nombre revient à multiplier ce nombre par la fraction.

Exemple : Pour calculer « $\frac{5}{6}$ de 12 », on calcule $\frac{5}{6} \times 12 = \frac{5 \times 12}{6} = \frac{60}{6}$.

2– Notion d'inverse – diviser une fraction

Définition : Soit x un nombre différent de 0. On appelle inverse de x l'unique nombre dont le produit par x vaut 1.

On note $\frac{1}{x}$ l'inverse de x . On a donc $x \times \frac{1}{x} = 1$.

Exemple : L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$, l'inverse de 10^n est 10^{-n} .

Méthode : Pour trouver d'inverse d'une fraction, on échange son numérateur et son dénominateur.

Exemple : L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$, l'inverse de $\frac{5}{9}$ est $\frac{9}{5}$, l'inverse de $\frac{1}{2}$ est $\frac{2}{1}$, ...

Propriété : Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse. Autrement dit, pour tous nombres a et b avec $b \neq 0$,

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

Remarque : En particulier, $\dots \div \frac{a}{b} = \dots \times \frac{b}{a}$.

Remarque : On a vu que pour un nombre non nul, $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Pour cette raison, on utilise parfois des exposants négatifs pour parler de certains grandeurs quotient. Par exemple, des km/h sont parfois notés $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. En effet, des km/h sont des kilomètres divisés par des heures, c'est-à-dire des kilomètres multipliés par l'inverse d'heures.

Exemple : Diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$, diviser par 3 revient à multiplier par $\frac{1}{3}$, Diviser par $\frac{5}{9}$ revient à multiplier par $\frac{9}{5}$, ...

De même,

► diviser par $\frac{2}{3}$ revient à multiplier par $\frac{3}{2}$: par exemple,

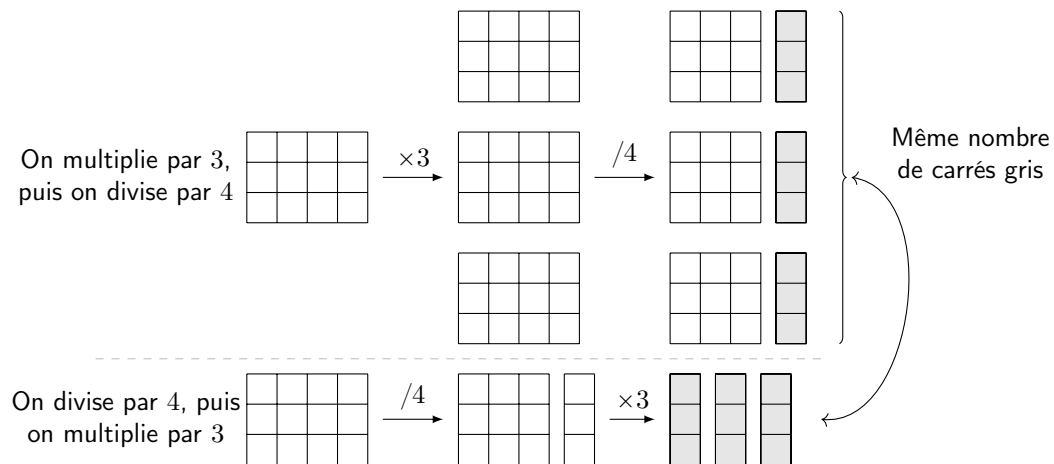
$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{2}$$

► diviser par $\frac{5}{9}$ revient à multiplier par $\frac{9}{5}$: par exemple,

$$\frac{7}{8} \div \frac{5}{9} = \frac{7}{8} \times \frac{9}{5}$$

► ...

Remarque : Quand on multiplie une nombre, disons par $\frac{3}{4}$, cela revient à multiplier par 3 et diviser par 4, mais on peut aussi d'abord diviser par 4 puis multiplier par 3, comme l'illustre le schéma ci-dessous.



Chapitre 13: Transformations du plan

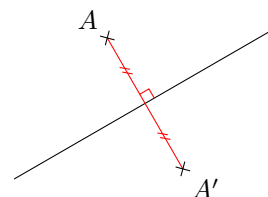
1– Les transformations du plan

A– Symétrie axiale

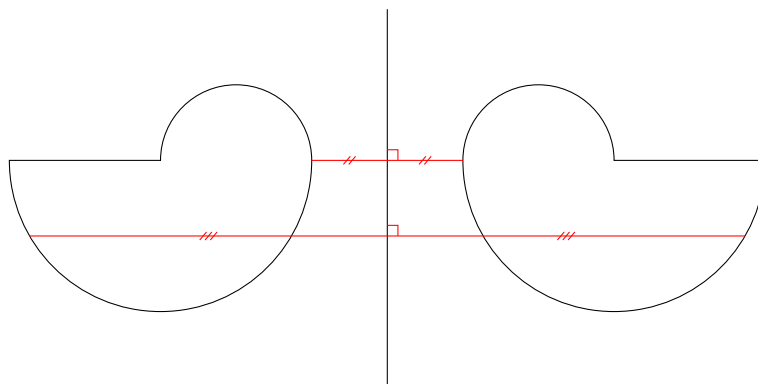
Définition : Soit d une droite du plan.

- ▶ Soit A un point qui n'est pas sur d . Le symétrique de A par rapport à d est le point A' tel que d coupe $[AA']$ perpendiculairement en son milieu (autrement dit d est la médiatrice de $[AA']$).
- ▶ Le symétrique par rapport à d d'un point sur d est lui-même.

La droite d est appelée axe de la symétrie.



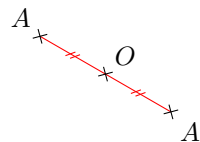
Définition : Soient $\mathcal{F}$ une figure et d une droite du plan. La figure symétrique de $\mathcal{F}$ par rapport à d est la figure obtenue en construisant les symétriques par rapport à d de chaque point de $\mathcal{F}$.



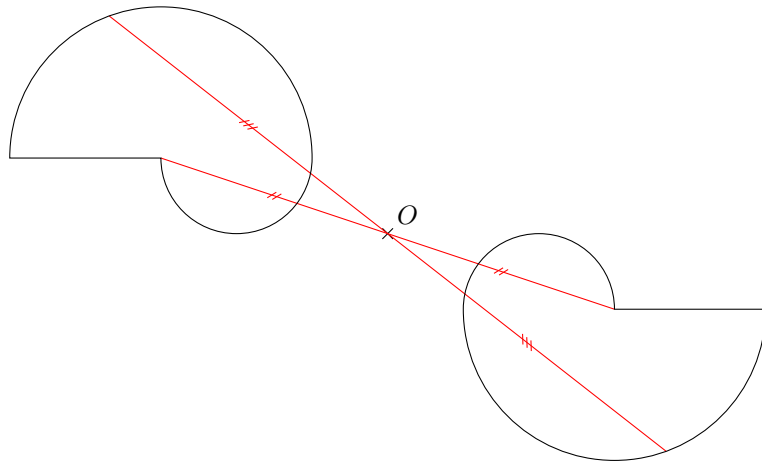
Propriété : La symétrie axiale conserve les longueurs et les angles. En particulier, elle conserve le parallélisme, la perpendicularité, l'alignement et les aires.

B– Symétrie centrale

Définition : Soient O et A deux points du plan. Le symétrique de A par rapport à O est le point A' tel que O est le milieu de $[AA']$.
Le point O est appelé centre de la symétrie.



Définition : Soient $\mathcal{F}$ une figure et O un point du plan. La figure symétrique de $\mathcal{F}$ par rapport à O est la figure obtenue en construisant les symétriques par rapport à O de chaque point de $\mathcal{F}$.

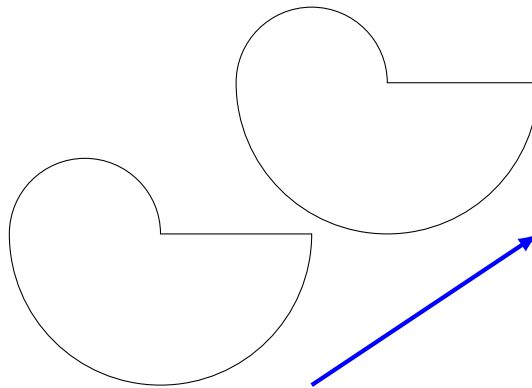


Remarque (propriété) : Faire une symétrie centrale de centre O revient à faire un demi-tour autour du point O .

Propriété : La symétrie centrale conserve les longueurs et les angles. En particulier, elle conserve le parallélisme, la perpendicularité, l'alignement et les aires.

C– Translations

Définition : Soit $\mathcal{F}$ une figure. Transformer $\mathcal{F}$ par translation, c'est la faire glisser selon une direction, un sens et un longueur. On représente ces trois informations avec un flèche, appelée vecteur.



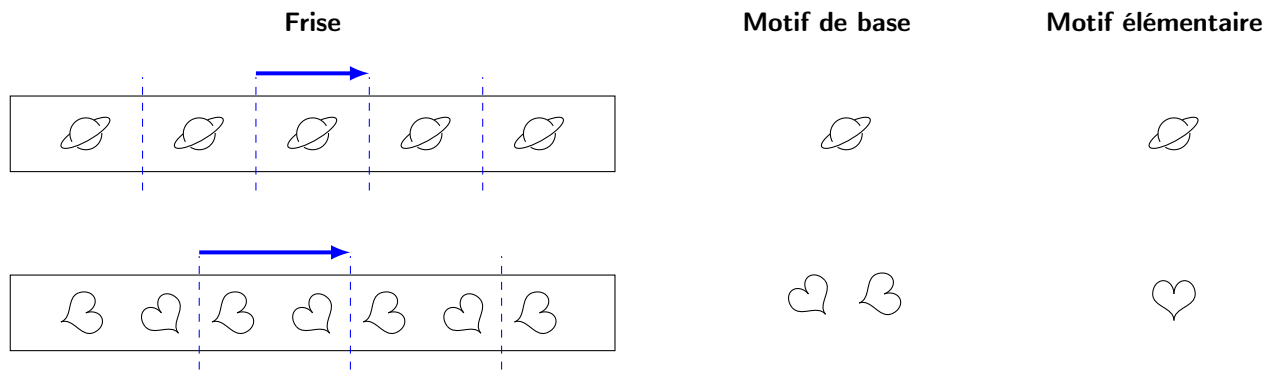
Propriété : La translation conserve les longueurs et les angles. En particulier, elle conserve le parallélisme, la perpendicularité, l'alignement et les aires.

2– Frises et pavages

A– Frises

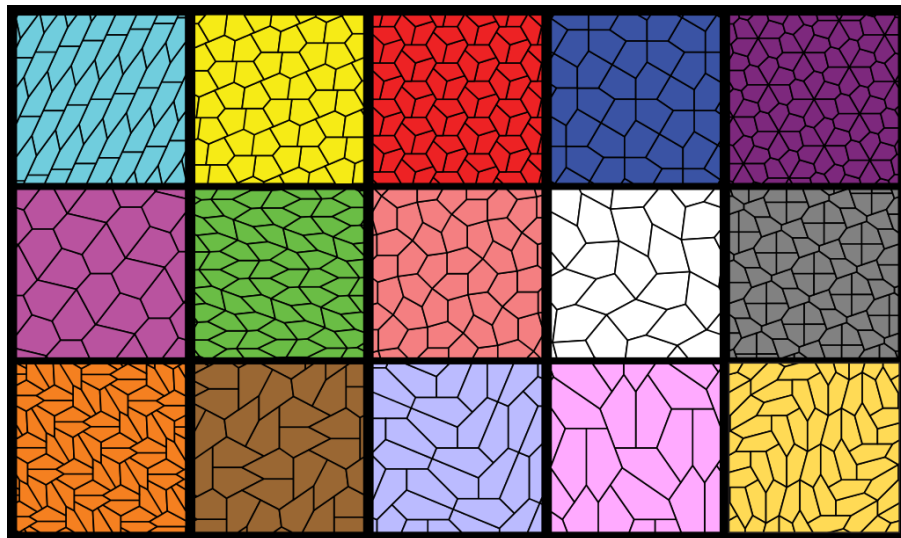
Définition : Une frise est une bande de plan dans laquelle un motif se répète régulièrement par une même translation. Un motif associé à une translation la plus courte possible est un motif de base. Celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un motif élémentaire, reproduit par d'autres transformations.

Exemple :



Définition : Un pavage est une portion de plan dans laquelle un motif se répète régulièrement par deux translations qui n'ont pas la même direction. Un motif associé à deux translations les plus courtes possibles est un motif de base. Celui-ci peut lui-même être obtenu à partir d'un motif élémentaire, reproduit par d'autres transformations.

Exemple : Voici 15 exemples des pavages avec différents polygones :

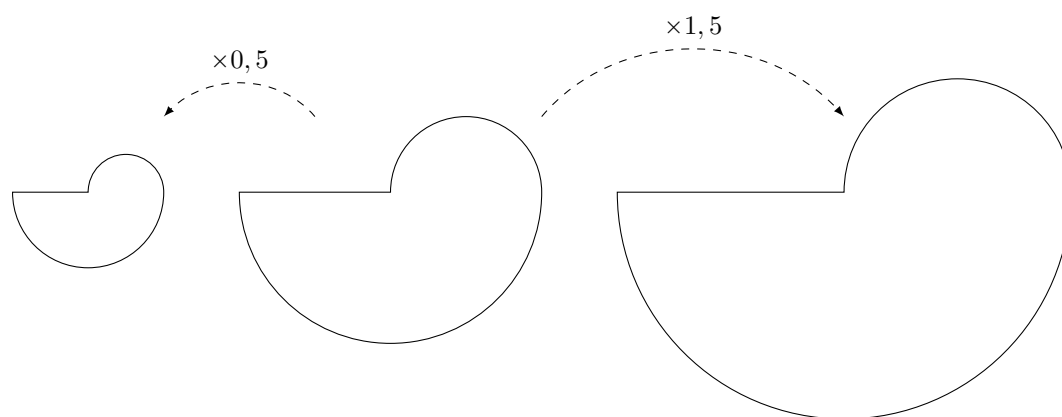


3– Agrandissement et réduction

Définition :

- ▶ Agrandir une figure, c'est multiplier toutes ses longueurs par un nombre $k > 1$.
- ▶ Réduire une figure, c'est multiplier toutes ses longueurs par un nombre $k < 1$.

Le nombre k est appelé rapport de l'agrandissement ou de la réduction.

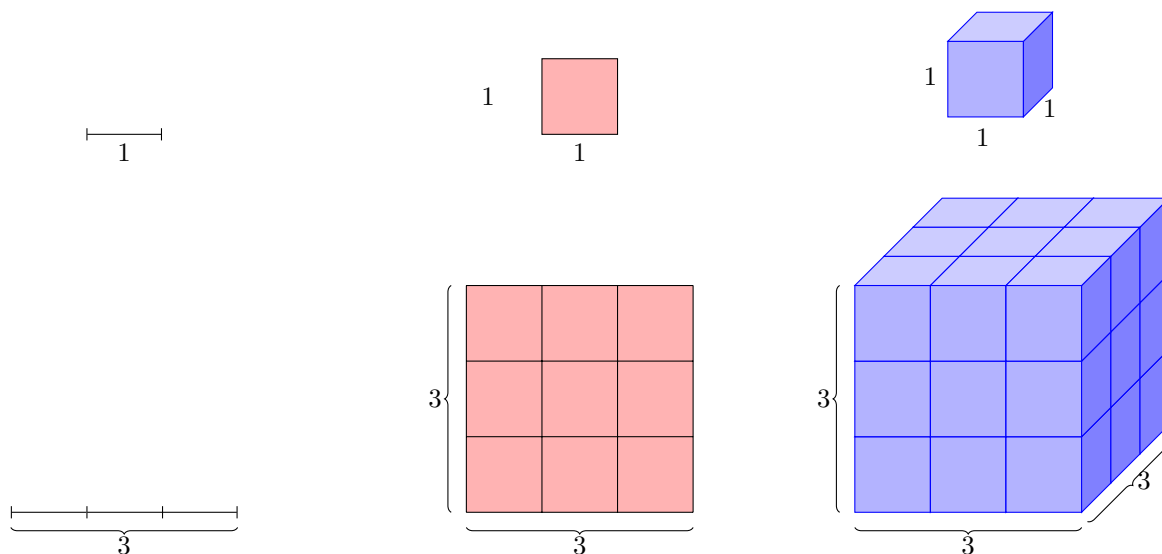


Propriété : Un agrandissement ou une réduction conserve les angles. En particulier, le parallélisme et la perpendicularité sont conservés.

Proposition : Après un agrandissement ou une réduction de rapport k ,

- ▶ les aires sont multipliées par k^2 ,
- ▶ les volumes sont multipliés par k^3 .

Illustration :



Chapitre 14: Équations

Activité: Dans cette activité, vous devez écrire tous les calculs et toutes les recherches effectuées sur votre cahier :

- 1▶ Deux élèves, Alice et Bob, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur l'écran de leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bob, lui, multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 7 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. **Quel nombre ont-ils affiché au départ ?**
- 2▶ Deux élèves, Alice et Bob, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur l'écran de leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 2, puis retranche 5 au résultat obtenu. Bob, lui, multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 1 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?
- 3▶ Deux élèves, Alice et Bob, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur l'écran de leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 4, puis ajoute 3 au résultat obtenu. Bob, lui, multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 8 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?
- 4▶ Deux élèves, Alice et Bob, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur l'écran de leur calculatrice.
Alice multiplie le nombre affiché par 8, puis enlève 3 au résultat obtenu. Bob, lui, multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 4 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Définition :

- ▶ Une équation est une égalité faisant intervenir (au moins) un nombre de valeur inconnue, justement appelé inconnue de l'équation. Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue, et fausse pour d'autres.
- ▶ Trouver une solution d'une équation, c'est trouver une valeur que peut prendre l'inconnue pour l'égalité soit vraie.
- ▶ Résoudre une équation, c'est déterminer toutes ses solutions.
- ▶ Pour vérifier si une certaine valeur de l'inconnue d'une équation est solution de cette-dernière, on remplace chaque occurrence de l'inconnue par la valeur, et on vérifie si l'égalité est juste.
On dit qu'on substitue la valeur à l'inconnue.
- ▶ La partie à gauche du signe = est appelée membre de gauche de l'équation, et la partie à droite est appelée membre de droite.

Exemple :

- ▶ $2x - 1 = 0$ est une équation d'inconnue x . L'égalité est vérifiée pour $x = \frac{1}{2}$, mais elle est fausse pour $x = 0$ puisque $2 \times 0 - 1 = -1 \neq 0$.
- ▶ $3y^2 - 1 = 2$ est une équation d'inconnue y . Elle est vraie pour $y = 1$, mais elle est fausse pour $y = 5$ puisque $3 \times 5^2 - 1 = 3 \times 25 - 1 = 74 \neq 2$.

Remarque : À la différence d'une équation, une identité est une égalité toujours vraie, quelles que soient les valeurs que l'on donne à ses variables. C'est pour cela qu'on écrit toujours «Pour tout...» ou «Soit...» avant d'écrire une identité.

Par exemple, pour tout nombre x , $2(x + 1) = 2x + 2$: c'est une identité dont x est une variable.

Remarque : Le calcul littéral moderne n'a pas toujours existé. Avant que l'utilisation des lettres pour désigner les inconnues ne soit devenue la norme, les équations étaient essentiellement formulées avec des phrases. Par exemple, résoudre l'équation $2x + 7 = 0$ d'inconnue x , c'est chercher un nombre dont le produit par 2 auquel on ajoute 7 donne 0.

Exercise:

1► Traduire en équations les problèmes suivants :

- a) Le nombre dont l'opposé, une fois doublé puis augmenté de 3, vaut 12.
- b) Le nombre tel que diminué de 5 puis triplé vaut lui-même, multiplié par 7 et augmenté de 1.
- c) Le nombre tel qu'augmenté de 1 puis élevé au carré donne lui-même élevé au carré puis augmenté de 1.

2► Traduire les équations suivantes avec des phrases :

a► $4x - 3 = 8$

b► $-3x + 2 = 7(x + 9)$

► $(1 - x)^2 = -2x$

Remarque : Certains concepts mathématiques sont définis comme les solutions d'une certaine équation :

- L'opposé d'un nombre a est la solution de l'équation $x + a = 0$ d'inconnue x .
- L'inverse d'un nombre $a \neq 0$ est la solution de l'équation $ax = 1$ d'inconnue x .
- La fraction $\frac{n}{d}$ est la solution de l'équation $dx = n$ d'inconnue x .
- La racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ est la solution positive de l'équation $x^2 = a$ d'inconnue x .

Méthode : Résoudre une équation

Pour résoudre une équation, il faut la transformer en une autre équation plus simple sans pour autant changer ses solutions. Le plus souvent, l'objectif est d'arriver à la forme $x = a$. Pour cela, on dispose de deux procédures, que l'on peut mélanger :

► **Procédure 1** : Ajouter ou soustraire une même quantité aux deux membres

On peut ajouter ou soustraire aux deux membres une même quantité, qui peut dépendre ou non de l'inconnue.

Présentation 1 : en ligne

$$\begin{array}{r} 6x - 2 = 3x + 4 \\ 6x - 2 - 3x = 3x + 4 - 3x \\ 3x - 2 = 4 \\ 3x - 2 + 2 = 4 + 2 \\ 3x = 6 \end{array}$$

Présentation 2 : avec des flèches

$$\begin{array}{r} -3x \left(\begin{array}{l} 6x - 2 = 3x + 4 \\ 3x - 2 = 4 \end{array} \right) -3x \\ +2 \left(\begin{array}{l} 3x - 2 = 4 \\ 3x = 6 \end{array} \right) +2 \end{array}$$

| Présentation 3 : en colonnes

$$\begin{array}{r} 6x - 2 = 3x + 4 \\ -3x \quad -3x \\ 3x - 2 = 4 \\ +2 \quad +2 \\ 3x = 6 \end{array}$$

► **Procédure 2** : Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre

On peut multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre. Attention : en classe de 4e, on n'a pas le droit de diviser par une quantité qui dépend de l'inconnue.

Présentation 1 : en ligne

$$\begin{array}{r} 3x = 6 \\ \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \\ x = 2 \end{array}$$

Présentation 2 : avec des flèches

$$\div 3 \left(\begin{array}{l} 3x = 6 \\ x = 2 \end{array} \right) \div 3$$

Remarque : Dans la présentation en ligne, attention à ne pas oublier les parenthèses quand c'est nécessaire !

$$2x + 4 = 5x - 3$$

$$2 \times (2x + 4) = 2 \times (5x - 3)$$

Exercice: Résoudre les équations suivantes :

a ▶ $x + 7 = 12$

b ▶ $5x = 18$

c ▶ $-x + 3 = 2x - 8$

d ▶ $8(x + 2) = 6x + 3$

e ▶ $4(x - 5) - 6(4 - x) = 12 + 3(1 + x)$

f ▶ $-5(1 - x) = 2$

Chapitre 15: Statistiques

Activité 2 Semi-marathon

Éric et ses amis ont participé au semi-marathon de Bordeaux en octobre 2019. Voici leurs résultats en minutes :
127 ; 113 ; 110 ; 121 ; 111 ; 124 ; 111 ; 117 ; 124 ; 124 ; 127 ; 111 ; 130 ; 127 ; 113

1. Éric observe les temps de chacun et dit :

« J'ai obtenu le *temps du milieu* : la moitié d'entre vous ont obtenu un temps inférieur au mien et l'autre moitié un temps supérieur au mien ».

Ce temps est appelé le **temps médian** de la série statistique.



Retrouver le temps d'Éric lors de ce semi-marathon. Expliquer la démarche.

2. Il y a eu une erreur d'affichage, le plus rapide a finalement mis 95 min.
L'affirmation d'Éric est-elle encore vérifiée ?

1– Effectifs et fréquences – représentation graphique des données

A– Vocabulaire

Définition :

- ▶ Quand on a un ensemble de données, on parle de série de données.
- ▶ Le caractère est la grandeur que l'on observe.
- ▶ La population est l'ensemble des individus sur lesquels on effectue l'étude statistique.

Exemple :

- ▶ On recense la taille des arbres d'une forêt : le caractère est la taille des arbres, et la population est l'ensemble des arbres de la forêt.
- ▶ On étudie les couleurs de cheveux dans un collège. Le caractère étudié est la couleur des cheveux, la population est l'ensemble des élèves du collège.

Définition :

- ▶ l'effectif total est le nombre de données,
- ▶ l'effectif d'une donnée est le nombre de fois que cette donnée apparaît,
- ▶ la fréquence d'une donnée est la proportion qu'elle représente dans la série, c'est à dire $\frac{\text{effectif de la donnée}}{\text{effectif total}}$.

Exemple :

Voici les résultats d'un sondage demandant "quel assaisonnement préférez-vous avec du poulet frit ?" :
ketchup – set et poivre – mayonnaise – mayonnaise – set et poivre – ketchup – set et poivre – mayonnaise –
ketchup – set et poivre – ketchup – mayonnaise – mayonnaise – mayonnaise – mayonnaise – mayonnaise –
mayonnaise – set et poivre – mayonnaise – set et poivre

Il y a 20 données, donc l'effectif total est 20. En particulier, pour calculer les fréquences, on divise les effectifs par 20. On peut représenter les effectifs et les fréquences dans un tableau :

Assaisonnement	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre
Effectif	4	10	6
Fréquence	0,2	0,5	0,3

Remarque : Parfois, on exprime les fréquences en pourcentage.

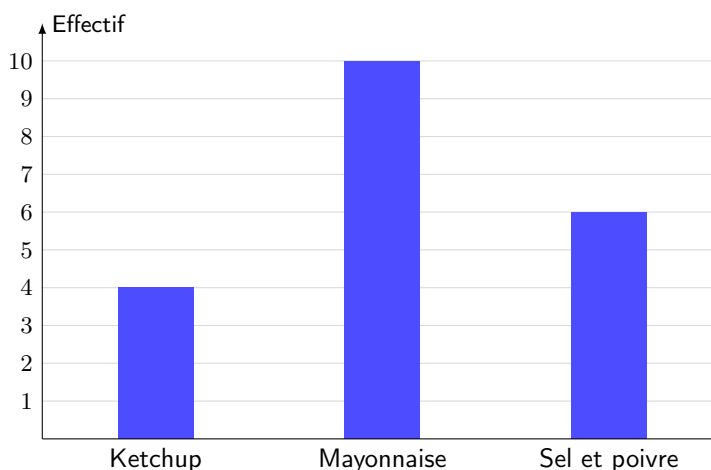
Proposition :

- ▶ Les fréquences sont comprises entre 0 et 1,

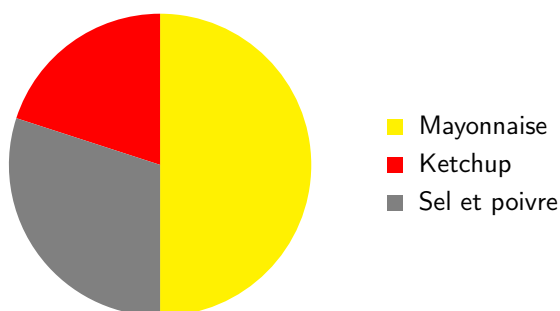
- Les fréquences sont proportionnelles aux effectifs,
- La somme de toutes les fréquences vaut 1.

B– Diagrammes

Définition : Un diagramme en bâtons est un diagramme dans lequel on représente les (classes de) données sur l'axe des abscisses et les effectifs sur l'axe des ordonnées. Les effectifs associés à chaque (classe de) donnée est représenté par un bâton.



Définition : Un diagramme circulaire est un diagramme dans lequel les mesures des angles des secteurs sont proportionnels aux effectifs (ou aux fréquences) des (classes de) données.



Exemple : Le diagramme ci-dessus correspond au sondage du premier exemple. Voici comment calculer les tailles de secteurs : l'effectif total correspond à un tour complet, c'est-à-dire 360° , et on détermine les angles des secteurs par proportionnalité. (Remarque : on sait que le total des angles doit faire 360° , donc on peut se contenter de calculer deux angles sur les trois).

	Ketchup	Mayonnaise	Sel et poivre	Total
Effectif	4	10	6	20
Angle	72°	180°	108°	360°

$\times 18$

2– Indicateurs de position d'une série statistique

Dans cette partie, on ne considère que des séries de données numériques.

A– Médiane

Définition : La médiane d'une série de données numériques est une valeur qui partage cette série en deux parts égales, avec d'un côté les valeurs plus petites, et d'un autre côté les valeurs plus grandes.

Méthode : Pour trouver la médiane, on range la série dans l'ordre croissant.

Exemple 1 : Cas d'une série avec un nombre impair de données

La médiane de la série suivante (déjà rangée dans l'ordre croissant) est 11 :

$$\underbrace{4 - 6 - 7 - 8}_{\text{5 valeurs}} - 11 - \underbrace{13 - 14 - 18 - 19}_{\text{4 valeurs}}$$

Exemple 2 : Cas d'une série avec un nombre pair de données

Une médiane de la série suivante (déjà rangée dans l'ordre croissant) est 12, mais par exemple 12,5 est aussi une médiane :

$$\underbrace{4 - 6 - 7 - 8 - 11}_{\text{5 valeurs}} - 14 - \underbrace{14 - 14 - 14 - 18 - 19}_{\text{5 valeurs}}$$

Remarque : Dans le cas d'une série avec un nombre pair de données, les calculatrices et les logiciels prennent toujours le milieu pour la médiane. Avec l'exemple ci-dessus, une calculatrice donnerait donc la valeur 12,5.

B– Moyenne

Définition : La moyenne d'une série de données numériques se calcule par la formule suivante :

$$\frac{\text{somme des données}}{\text{effectif total}}$$

Exemple : La moyenne de la série de l'exemple précédent est :

$$\frac{4 + 6 + 7 + 8 + 11 + 14 + 14 + 14 + 18 + 19}{10} = \frac{115}{10} = 11,5$$

Définition : Quand les données sont regroupées par effectifs, on parle de moyenne pondérée de la série, et le calcul est le suivant :

$$\frac{\text{valeur}_1 \times \text{effectif}_1 + \text{valeur}_2 \times \text{effectif}_2 + \dots}{\text{effectif total}}$$

Exemple : Dans le club de mathématiques de Alice, les âges des membres sont donnés par le tableau suivant :

Âge	11	12	13	14
Effectif	5	8	22	15

L'effectif total est donc $5 + 8 + 22 + 15 = 50$. La moyenne pondérée est :

$$\frac{11 \times 5 + 12 \times 8 + 13 \times 22 + 14 \times 15}{50} = \frac{647}{50} = 12,94$$

Exercice : Calculez les fréquences dans l'exemple précédent, et appliquez la formule :

$$\text{valeur}_1 \times \text{fréquence}_1 + \text{valeur}_2 \times \text{fréquence}_2 + \dots$$

Que remarquez-vous ?

Chapitre 16: Probabilités

1– Modéliser le hasard : vocabulaire

Définition :

- ▶ Un phénomène dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat est appelé expérience aléatoire.
- ▶ Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat possible est appelé une issue.
- ▶ L'ensemble des issues est appelé l'univers des possibles.

Exemple :

Expérience	Issues
Lancer un dé	1, 2, 3, 4, 5, 6
Tirer une carte	As de pique, 2 de cœur, 3 de trèfle, ...
Lancer une pièce	Pile, Face

Définition : Un événement est constitué d'une ou plusieurs issues. Quand il ne contient qu'une seule issue, on parle d'événement élémentaire.

Exemple : Voici quelques exemples d'événements associés à différentes expériences aléatoires :

- ▶ Lancer d'un dé : "obtenir un nombre pair", "obtenir un 2", ou "obtenir un nombre plus grand que 4"
- ▶ Tirage d'une carte : "obtenir un trèfle", "obtenir une tête ou un as", "obtenir une carte de carreau et qui porte un nombre pair"
- ▶ Lancer une pièce : "obtenir pile", "ne pas obtenir face"

Définition :

- ▶ Un événement certain est un événement qui se produit à coup sûr.
- ▶ Un événement impossible est un événement qui ne se réalise jamais.
- ▶ Soit A un événement. L'événement contraire de A , noté $\bar{A}$, est l'événement qui se produit quand A ne se réalise pas.

Exemple : Lors du lancer d'un dé,

- ▶ "obtenir un nombre" est un événement certain
- ▶ "obtenir un 0, 5" est un événement impossible
- ▶ L'événement contraire de "obtenir un nombre pair" est "obtenir un nombre impair"

Lors du tirage d'une carte,

- ▶ "obtenir un nombre ou une figure" est un événement certain
- ▶ "obtenir un trèfle et un cœur" est un événement impossible
- ▶ L'événement contraire de "obtenir une carte rouge" est "obtenir une carte noire"

2– Quantifier le hasard : probabilité d'un événement

A– Notion de probabilité

Définition : À un événement, on associe un nombre entre 0 et 1, appelé probabilité de l'événement. Plus la probabilité est proche de 1, plus l'événement a de chances de se produire, et plus la probabilité est proche de 0, moins l'événement a de chances de se produire.



La probabilité d'un évènement A est notée $P(A)$.

Exemple :

- ▶ Quand on lance une pièce, on a 1 chance sur 2 de tomber sur Pile. La probabilité de l'évènement "obtenir Pile" est donc $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 0,5, ou encore 50%. On peut écrire $P(\text{"obtenir Pile"}) = \frac{1}{2}$.
- ▶ Dans un jeu de cartes, un quart des cartes sont des trèfles, on a donc 1 chance sur 4 de tirer un trèfle. La probabilité de l'évènement "tirer un trèfle" est donc $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire 0,25, ou encore 25%. On peut écrire $P(\text{"tirer un trèfle"}) = \frac{1}{4}$.
- ▶ En particulier, on a 3 chances sur 4 de ne pas tirer un trèfle. La probabilité de l'évènement "ne pas tirer un trèfle" est donc $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire 0,75, ou encore 75%. On peut écrire $P(\text{"ne pas tirer un trèfle"}) = \frac{3}{4}$.

Proposition :

- ▶ La probabilité d'un évènement certain est 1.
- ▶ La probabilité d'un évènement impossible est 0.

Propriété : La somme de toutes les probabilités vaut toujours 1.

Exemple : Les issues d'un lancer de pièce sont "Pile" et "Face", leurs probabilités sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. On a bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Définition : Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables.

Exemple : Les issues d'un lancer de pièce, d'un lancer de dé ou d'un tirage de cartes sont équiprobables.

Propriété : Soit n un nombre entier plus grand que 1. Si une expérience aléatoire possède n issues équiprobables, alors la probabilité de chacune des issues vaut $\frac{1}{n}$.

Exemple :

Expérience aléatoire	Probabilité des issues
Lancer de dé	$\frac{1}{6}$
Lancer d'une pièce	$\frac{1}{2}$
Tirage d'une carte	$\frac{1}{52}$

B– Calculer une probabilité

Proposition : La probabilité d'un évènement est égal à la somme des probabilités des évènement qu'il contient.

Exemple : Lors du lancer d'un dé, l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient les issues "obtenir un 1" et "obtenir un 4". Sa probabilité est donc $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

Proposition : Dans une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A se calcule avec la formule :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple : Lors du lancer d'un dé, l'évènement "obtenir un 1 ou un 4" contient 2 issues, et il y a 6 issues au total, donc la probabilité de cet évènement est $\frac{2}{6}$.

Proposition : Soit A un évènement.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Corollaire : Pour trouver la probabilité de l'évènement contraire $\overline{A}$, on peut calculer $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Application : On tire une boule dans une urne avec les probabilités suivantes :

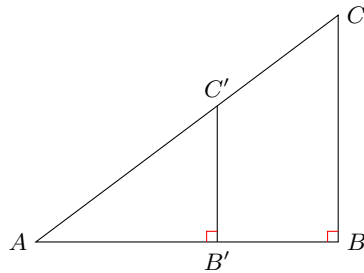
Issue	bleue	rouge	noire	verte
Probabilité	0,2	0,5	0,05	0,25

On note A l'évènement "obtenir une boule bleue ou rouge". On a $P(A) = 0,2 + 0,5 = 0,7$. L'évènement "obtenir une boule verte ou noire" est l'évènement contraire de A , donc sa probabilité est $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Chapitre 17: Cosinus d'un angle

Proposition : Soit ABC un triangle rectangle en B . La valeur du rapport $\frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$ ne dépend que de la mesure de l'angle $\hat{A}$, autrement dit ce rapport de longueurs ne varie pas lorsqu'on prend un agrandissement ou une réduction de ABC .

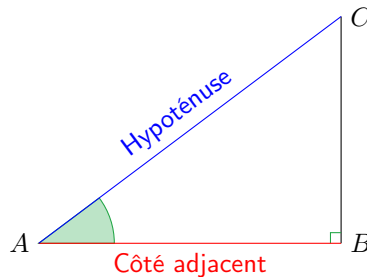
Démonstration : Considérons une réduction de ABC (le raisonnement est le même pour un agrandissement). On peut la représenter de la manière suivante :



Les droites (BC) et $(B'C')$ étant toutes deux perpendiculaires à la droite (AB) , donc elles sont parallèles. Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A , $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$, donc d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. En particulier, $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$, donc (produit en croix) $AB' \times AC = AB \times AC'$, donc $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$. ■

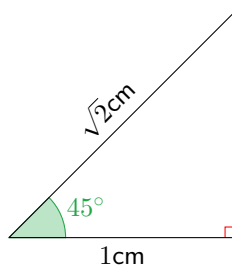
Définition : Soit ABC un triangle rectangle en B . On appelle cosinus de l'angle en A la valeur du rapport :

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$



Remarque : Un cosinus est un rapport de longueurs, en particulier il n'a pas d'unité.

Exemple : Grâce au triangle rectangle suivant (obtenu en coupant un carré en deux selon une diagonale), on calcule $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

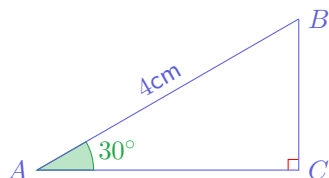


Propriété : Le cosinus d'un angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

Démonstration : L'hypoténuse est le côté le plus grand, donc dans le rapport définissant le cosinus, le dénominateur est plus grand que le numérateur, donc la fraction est bien plus petite que 1. De plus, le cosinus est défini comme un rapport de longueurs, et les longueurs sont positives, donc le cosinus est bien positif. ■

Méthode : Dans un triangle rectangle, si on connaît un angle et une longueur adjacente, on peut calculer la longueur de l'autre côté de l'angle. Pour cela, on calcule le cosinus de l'angle à l'aide de la calculatrice.

Exercice : Dans le triangle suivant, calculez la longueur du côté adjacent à l'angle en A :

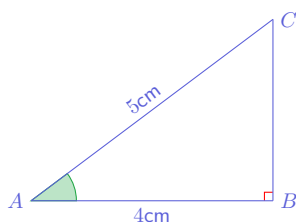


Rédaction-type : Le triangle ABC est rectangle en C , donc :

$$\begin{aligned}\cos(30^\circ) &= \frac{AC}{AB} \\ \text{donc } \frac{\cos(30^\circ)}{1} &= \frac{AC}{4} \\ \text{donc } AC &= \frac{4 \times \cos(30^\circ)}{1} \\ \text{donc } AC &\approx 3,646 \text{ cm}\end{aligned}$$

Méthode : On peut calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle à partir de son cosinus : sur la calculatrice, la touche $\cos^{-1}$ ou arccos permet de retrouver la mesure de l'angle à partir de son cosinus.

Exercice : Dans le triangle suivant, calculez la mesure de l'angle en A :



Rédaction-type : Le triangle ABC est rectangle en B , donc $\cos(\hat{A}) = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} = 0,8$ donc $\hat{A} = \arccos(0,8) \approx 36,87^\circ$.