

Mathématiques 4ème

E. Suong

1^{er} avril 2024

Table des matières

I	Nombres et calculs	4
1	Calcul littéral	5
1	Propriétés opératoires (rappels)	6
2	Manipuler les expressions littérales	7
3	Équations	10
2	Arithmétique	12
1	Multiplés et diviseurs d'un nombre entier	13
2	Notion de nombre premier, décomposition d'un entier	13
3	Nombres décimaux et relatifs	16
1	Opérations sur les nombres décimaux relatifs	17
2	Puissances de 10 et écriture scientifique d'un nombre décimal	22
4	Nombres rationnels	27
1	Des fractions aux nombres rationnels	28
2	Opérations sur les fractions	29
3	Simplification, encadrement et comparaison de fractions	31
4	Notion d'inverse	33
5	Nombres rationnels et nombres décimaux, différentes représentations d'un nombre	33
5	Racine carrée	35
1	Notion de racine carrée	35
II	Données et Fonctions	38
1	Fonctions	39
2	Grandeurs et proportionnalité	40
3	Statistiques	41
4	Probabilités	42
III	Espace et Géométrie	43
1	Transformations du plan	44
2	Quadrilatères	45
3	Triangles	46
1	Éléments de géométrie dans le plan	48
2	Triangles semblables	51
3	Triangles remarquables, droites remarquables d'un triangle	53
4	Triangles rectangles	54

4	Espace et volumes	59
1	Unités de volume, conversions	60
2	Solides usuels	62
3	Pyramides et cônes	65

Première partie

Nombres et calculs

1 Calcul littéral

1	Propriétés opératoires (rappels)	6
2	Manipuler les expressions littérales	7
3	Équations	10

Compétences

Utiliser le calcul littéral

Connaissances

- ▶ Identifier la structure d'une expression littérale (somme, produit).
- ▶ Notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité.
- ▶ Propriétés de distributivité simple.

Compétences associées

- ▶ Développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples.
- ▶ Utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation.
- ▶ Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.
- ▶ Démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul.

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, menées tout au long du cycle, d'abord dans le cadre numérique, puis dans le cadre algébrique, les élèves doivent avoir mémorisé ou automatisé :

- ▶ les règles de calcul sur les nombres relatifs et les fractions, notamment la condition d'égalité de deux fractions (si $ad = bc$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et réciproquement) ;
- ▶ les conventions d'écritures du calcul littéral ;
- ▶ la formule de distributivité simple ;
- ▶ les procédures de résolution d'équations du type $ax = b$ et $a + x = b$.

1 – Propriétés opératoires (rappels)

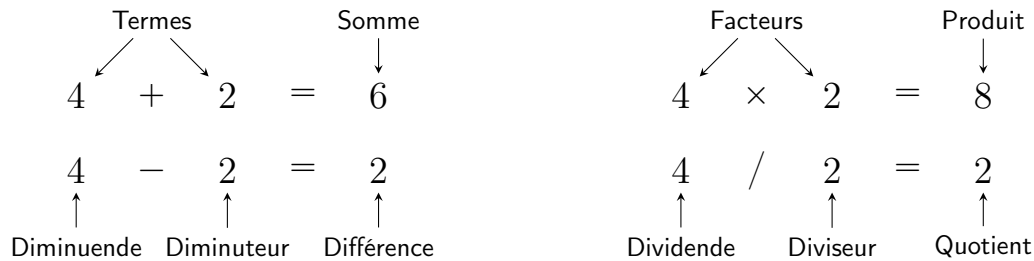
Commençons par quelques rappels de vocabulaire :

Définition 1

- ▶ Les deux opérands de l'addition sont appelées *termes* de l'addition, et le résultat de l'addition des deux termes est appelé *somme*.
- ▶ Dans la soustraction, le nombre auquel on soustrait un autre est appelé *diminuende*, le nombre qui soustrait est appelé *diminuteur*, et le résultat est appelé *différence*.
- ▶ Les deux opérands de la multiplication sont appelées *facteurs* de la multiplication, et le résultat de la multiplication des deux facteurs est appelé *produit*.
- ▶ Dans la division, le nombre que l'on divise est appelé *dividende*, le nombre qui divise est appelé *diviseur*, et le résultat est appelé *quotient*.

Remarque 2

Comme l'ordre importe peu pour l'addition et la multiplication, les deux opérands de l'addition et de la multiplication jouent le même rôle, et donc portent le même nom. *A contrario*, dans la soustraction et la division, les deux opérands ne sont pas interchangeables, et donc portent des noms différents. Néanmoins, on verra parfois les opérands de la soustraction appelées «termes», car les mots «diminuende» et «diminuteur» sont généralement assez méconnus.



Propriété 3 (Priorités des opérations)

Dans une ligne de calcul, on ne peut en général pas appliquer les opérations dans n'importe quel ordre. Il faut respecter l'ordre de priorités suivant :

- 1▶ On calcule d'abord ce qui est entre **P**arenthèses
- 2▶ La **M**ultiplication et la **D**ivision sont prioritaires sur l'**A**ddition et la **S**oustraction

Cette règle est souvent résumée par l'acronyme «PMDAS» (plus exactement «PEMDAS» avec l'**E**xponentiation, qui sera vue plus tard).

Remarque 4

- ▶ On remplace parfois les parenthèses par des crochets par souci de lisibilité (souvent quand les parenthèses sont imbriquées), mais ceci ne change rien aux règles de priorité des opérations.
- ▶ La barre de fraction joue un rôle de parenthèse : l'expression $\frac{\text{machin}}{\text{truc}}$ est équivalente à $(\text{machin})/(\text{truc})$.
- ▶ La barre oblique / de la division est parfois remplacé par l'obélus $\div$, qui tombe en désuétude, voir les deux points : (mais qui ont une autre signification dans les pays anglophones).
- ▶ On peut parfois ajouter des parenthèses inutiles, c'est-à-dire que l'opération reste la même avec ou sans ces parenthèses, pour améliorer la lisibilité. Par exemple, on peut écrire $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8) + (9 \times 10 \times 11)$ au lieu de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 + 9 \times 10 \times 11$ pour mettre en valeur le fait que cette opération est une somme de deux produits.

Remarque 5

Dans une opération, les symboles $+$, $-$, $\times$ et $/$ sont appelés *opérateurs*, et les nombres auxquels on applique les opérateurs sont appelés *opérandes*. La notation que l'on utilise pour les opérations, avec les opérateurs au milieu de leurs opérandes, est appelée *notation affixe*. Ce n'est pas la seule notation qui existe ! La *notation suffixe*, ou *notation polonaise inversée* était par exemple utilisée par les vieilles calculatrices HP. L'opération $1 + 10 \times (2 + 10 \times (5 + 10 \times 3))$ avec la notation affixe s'écrit $3 \ 10 \times 5 + 10 \times 2 + 10 \times 1 +$ en notation polonaise inversée. L'intérêt de cette notation est qu'elle ne nécessite aucune parenthèse, ce qui accélère grandement le temps calcul par un ordinateur.

2 – Manipuler les expressions littérales

Définition 6

Une *expression littérale* est une expression dans laquelle certaines valeurs sont remplacées par des lettres, d'où l'adjectif «littérale». Ces lettres sont appelées *variables* de l'expression littérale.

Remarque 7

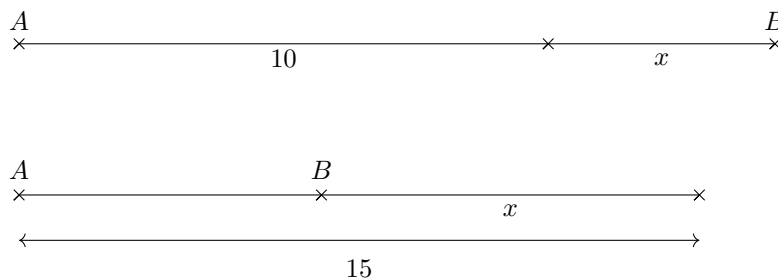
Une *expression* (mathématique) est aux mathématiques ce que les phrases sont à la grammaire : c'est une suite de symboles qui obéit à des règles de syntaxe.

Exemple 8

- L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est $L \times \ell$.
- Le périmètre d'un cercle de rayon r est $2 \times \pi \times r$. Attention, π est un nombre, pas un variable !

Exercice 9

- a► Exprimer la longueur de $[AB]$ en fonction de x dans les deux cas suivants :



- b► Exprimer le résultat P du programme de calcul ci-contre appliqué à un nombre n .

- 1► Choisir un nombre.
- 2► Le multiplier par 3.
- 3► Ajouter 5 au résultat.

Lorsqu'on connaît les valeurs de ses variables, on peut *calculer la valeur* d'une expression littérale.

Exemple 10

- Pour calculer le périmètre d'un cercle de rayon $r = 3$, on remplace la variable r qui représente le rayon dans l'expression du périmètre, c'est-à-dire $2 \times \pi \times 3 = 6 \times \pi$.
- Pour calculer l'aire d'un rectangle de largeur $\ell = 2$ et de longueur $L = 5$, on remplace les variables ℓ et L dans l'expression du périmètre, c'est-à-dire $\ell \times L = 2 \times 5 = 10$.

Définition 11

La *nature* d'une expression littérale est la dernière opération que l'on effectue lors de son calcul : une somme, un produit, une différence, une division.

Exemple 12

- ▶ L'expression $18 \times 3 + 5$ est une somme.
- ▶ L'expression $4 \times (6 + 2, 8)$ est un produit.
- ▶ L'expression $21/5 - 3$ est une différence.
- ▶ L'expression $3/(2 \times 5 + 3 \times 7)$ est un quotient.
- ▶ L'expression $2 \times x + 8$ est une somme.
- ▶ L'expression $2 \times (x + 8)$ est un produit.

Convention d'écriture pour le symbole $\times$

Lorsqu'il est placé devant une lettre ou une parenthèse, on peut omettre le symbole $\times$.

Exemple 13

On peut écrire $2(a+b)$ à la place de $2 \times (a+b)$, $5x$ à la place de $5 \times x$, mais pas $(1+y)2$ à la place de $(1+y) \times 2$, ni $z3$ à la place de $z \times 3$.

Remarque 14

Il y a quelques cas particuliers :

- ▶ Quel que soit x , comme $0 \times x = 0$, on écrit directement 0 plutôt que $0x$.
- ▶ Quel que soit x , comme $1 \times x = x$, on écrit directement x plutôt que $1x$.
- ▶ On n'écrit jamais un même symbole plusieurs fois de suite : au lieu d'écrire xx , on écrit x^2 , ce que se lit « x au carré».
- ▶ De même, au lieu d'écrire xxx , on écrit x^3 , ce que se lit « x au cube».

Propriété 15 (Distributivité simple)

Pour tous nombres a , b et c ,

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad a(b - c) = a \times b - a \times c$$

Remarque 16

L'expression $a(b + c)$ se lit « a facteur de $(b + c)$ ».

Il ne faut surtout pas apprendre par cœur cette formule, il faut les voir (avec ses yeux).

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{Développer}} \\
 a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\
 \xleftarrow{\text{Factoriser}}
 \end{array}$$

Définition 17

Quand on transforme un produit en une somme, on dit qu'on *développe le produit*, et lorsqu'on transforme une somme en produit, on dit qu'on *factorise la somme*.

Remarque 18

Il faut savoir lire cette identité dans tous les sens :

$$(a + b)c = ac + bc \qquad ab + ac = a(b + c) \qquad ac + bc = (a + b)c$$

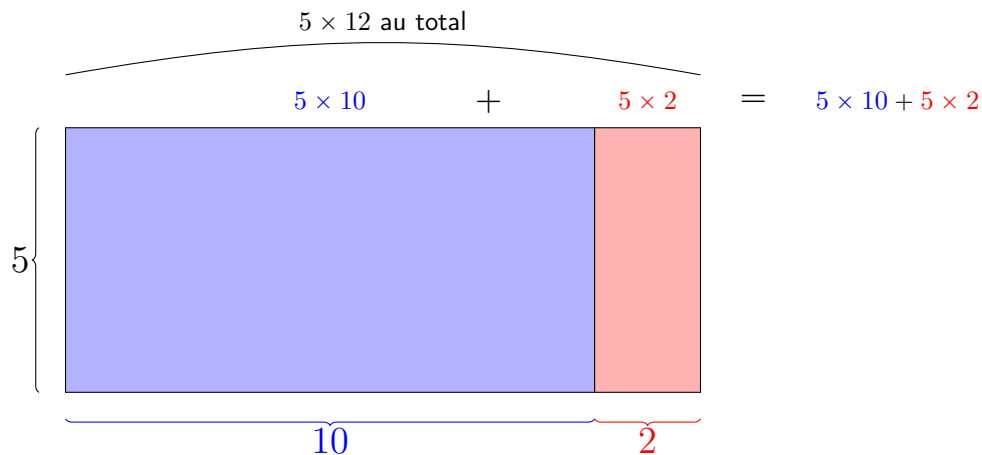
On dit que la multiplication est *distributive* sur l'addition.
Cette propriété donne quelques méthodes de calcul mental.

Exemple 19

- Pour calculer 23×12 , on peut écrire $23 \times 12 = 23 \times (10 + 2) = 23 \times 10 + 23 \times 2$.
- Pour calculer $23 \times 7 + 23 \times 3$, on peut écrire $23 \times 7 + 23 \times 3 = 23 \times (7 + 3) = 23 \times 10$.

Remarque 20

On peut également voir cette formule avec un dessin. Par exemple, pour illustrer l'égalité $5 \times (10 + 2) = 5 \times 10 + 5 \times 2$:

**Exercice 21**

Développez :

a► $4(x + 3)$

b► $3(4x - 5)$

c► $5(2y - 6)$

d► $7x(2 - 3x)$

Factorisez :

e► $2m + 2 \times 7$

f► $15 - 10y$

g► $3x^2 - 18x$

La fin de ce paragraphe s'adresse aux curieux. La distributivité simple porte le nom de «simple» pas parce qu'elle est facile (bien qu'elle l'est), mais parce qu'on distribue *une* quantité. Son éternel acolyte est la *distributivité double*, qui porte le nom de «double» car on distribue *deux* quantités. La distributivité double est au programme de la classe de 3ème.

Propriété 22 (Distributivité double)

Pour tous nombres a, b, c et d , $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Encore une fois, il ne faut surtout pas apprendre par cœur cette formule, il faut les voir (avec ses yeux).

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

La distributivité double porte bien son nom, car c'est en fait une double distributivité simple, où l'une des parenthèses est vue comme un seul bloc que l'on distribue dans l'autre parenthèse dans un premier temps :

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$$

Exercice 23 (*Astuces de calcul*)

En décomposant les nombres comme dizaines + unités (exemples : $13 = 10 + 3$, $25 = 20 + 5$, $58 = 50 + 8$) et en utilisant la distributivité double, calculez :

a► 23×17

b► 58×65

c► 19×19

d► 98×42

3 – Équations

Définition 24

Une *équation* est une égalité faisant intervenir (au moins) un nombre de valeur inconnue, justement appelé *inconnue de l'équation*. Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs des inconnues, et fausse pour d'autres. Une *solution* d'une équation est la donnée des valeurs que doivent prendre les inconnues pour que l'égalité soit vraie.

Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

Remarque 25

À la différence d'une équation, une *identité* est une égalité toujours vraie, quelles que soient les valeurs que l'on donne à ses variables. C'est pour cela qu'on écrit toujours «Pour tout...» avant d'écrire une identité.

Dans toute la suite, on ne s'intéressera qu'aux équations à une seule inconnue.

Remarque 26

Pour vérifier si une certaine valeur de l'inconnue d'une équation est solution de cette-dernière, on remplace chaque occurrence de l'inconnue par la valeur, et on vérifie si l'égalité est juste.

On dit qu'on *substitue* la valeur à l'inconnue.

Exemple 27

L'équation $2x + 3 = 5$ d'inconnue x admet 1 comme solution, car $2 \times 1 + 3 = 5$.

Remarque 28

Le calcul littéral moderne n'a pas toujours existé. Avant que l'utilisation des lettres pour désigner les inconnues ne soit devenue la norme, les équations étaient essentiellement formulées avec des phrases. Par exemple, résoudre l'équation $2x + 7 = 0$ d'inconnue x , c'est chercher un nombre dont le produit par 2 auquel on ajoute 7 donne 0.

Exercice 29

Traduire en équations les problèmes suivants :

a► Le nombre dont l'opposé, une fois doublé puis augmenté de 3, vaut 12.

b► Le nombre tel que diminué de 5 puis triplé vaut lui-même, multiplié par 7 et augmenté de 1.

c► Le nombre tel qu'augmenté de 1 puis élevé au carré donne lui-même élevé au carré puis augmenté de 1.

Traduire les équations suivantes avec des phrases :

a► $4x - 3 = 8$

b► $-3x + 2 = 7(x + 9)$

c► $(1 - x)^2 = -2x$

Remarque 30

Certains concepts mathématiques sont définis comme les solutions d'une certaine équation :

- L'opposé d'un nombre a est la solution de l'équation $x + a = 0$ d'inconnue x .
- L'inverse d'un nombre $a \neq 0$ est la solution de l'équation $ax = 1$ d'inconnue x .
- La fraction $\frac{n}{a}$ est la solution de l'équation $dx = n$ d'inconnue x .
- La racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ est la solution *positive* de l'équation $x^2 = a$ d'inconnue x .

Définition 31

On dit que deux équations sont *équivalentes* si elles ont les mêmes solutions.

Méthode 32 (Résolution d'une équation)

Pour résoudre une équation, on la transforme successivement en des équations équivalentes plus simples à résoudre. Pour cela, on applique de part et d'autre de l'égalité une même opération, ce qui ne change pas les solutions. Par exemple :

- Pour résoudre une équation de la forme $x + a = b$ d'inconnue x , on soustrait a de part et d'autre de l'égalité : cela donne $x + a - a = b - a$, c'est-à-dire $x = b - a$.
- Pour résoudre une équation de la forme $ax = b$ d'inconnue x où $a \neq 0$, on divise par a de part et d'autre de l'égalité : cela donne $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, c'est-à-dire $x = \frac{b}{a}$.

On peut bien sûr combiner ces opérations successivement.

L'idée est d'isoler l'inconnue d'un côté de l'égalité. Par exemple, considérons l'équation $4x - 2 = 3x + 5$ d'inconnue x . Pour avoir des termes contenant l'inconnue x seulement dans le membre de gauche de l'égalité et pas à droite, on peut soustraire $3x$ à chaque membre, ce qui donne $4x - 2 - 3x = 3x + 5 - 3x$, c'est-à-dire $x - 2 = 5$ après simplifications. Ensuite, pour n'avoir que des termes contenant l'inconnue x dans le membre de gauche, il faut éliminer le -2 , ce qui se fait en ajoutant son opposé de part et d'autre de l'égalité : cela donne $x - 2 + 2 = 5 + 2$, c'est-à-dire $x = 7$.

Exemple 33

Dans les équations suivantes, on note x l'inconnue. L'équation $9x + 3 = -x + 13$ est équivalente à l'équation $9x + x + 3 = -x + x + 13$, qui est équivalente à $10x + 3 = 13$, qui est équivalente à $10x + 3 - 3 = 13 - 3$, qui est équivalente à $10x = 10$, qui est équivalente à $\frac{10x}{10} = \frac{10}{10}$, qui est équivalente à $x = 1$. Cette dernière équation admet une seule solution, qui est 1. Comme les équations sont équivalentes, on en conclut que l'équation $9x + 3 = -x + 13$ admet 1 comme seule solution.

Exercice 34

Résoudre les équations suivantes :

a► $x + 7 = 12$

b► $5x = 18$

c► $-x + 3 = 2x - 8$

d► $8(x + 2) = 6x + 3$

e► $4(x - 5) - 6(4 - x) = 12 + 3(1 + x)$

f► $-5(1 - x) = 2$

2 Arithmétique

1	Multiples et diviseurs d'un nombre entier	13
2	Notion de nombre premier, décomposition d'un entier	13

Compétences

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

► *Nombres*

Compétences associées

- Utiliser les puissances d'exposant strictement positifs d'un nombre pour simplifier l'écriture des produits.

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

Connaissances

- Multiples et diviseurs.
- Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9.
- Division euclidienne (quotient, reste).
- Définition d'un nombre premier ; liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

Compétences associées

- Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.
- Déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.
- Utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10.
- Déterminer les diviseurs d'un nombre à la main, à l'aide d'un tableur, d'une calculatrice.
- Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers (à la main ou à l'aide d'un logiciel).
- Modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes, etc.).

1 – Multiples et diviseurs d'un nombre entier

Définition 1

Soient a et b deux nombres entiers.

S'il existe un nombre entier k tel que $a = b \times k$, alors on dit que a est un *multiple de b* , ou que b *divise a* , ou encore que b est un *diviseur de a* .

Exemple 2

$12 = 3 \times 4$ donc, 12 est un multiple de 3 et un multiple de 4, et 3 et 4 sont des diviseurs de 12.

Théorème 3 (*Division euclidienne*)

Soient a et b deux nombres entiers, avec b différent de 0. Il existe deux uniques nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$.

Remarque 4

Le nombre a est appelé *dividende* de la division euclidienne, le nombre b est appelé *diviseur* de la division euclidienne, le nombre q est appelé *quotient* de la division euclidienne, et le nombre r est appelé *reste* de la division euclidienne.

Proposition 5

Soient a et b deux nombres entiers, avec b différent de 0.

L'entier b divise a si, et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

Proposition 6

Un nombre entier est divisible par :

- ▶ 2 si, et seulement si son chiffre des unités est pair, c'est-à-dire 0, 2, 4, 6 ou 8.
- ▶ 3 si, et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- ▶ 5 si, et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- ▶ 9 si, et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- ▶ 10 si, et seulement si son chiffre des unités est 0.

Remarque 7

Un nombre entier est divisible par 11 si, et seulement si la somme alternée de ses chiffres (on ajoute le premier, on soustrait le deuxième, on ajoute le troisième, on soustrait le quatrième, ...) est divisible par 11.

2 – Notion de nombre premier, décomposition d'un entier

Définition 8

On dit qu'un nombre entier est *premier* si c'est un entier supérieur ou égal à 2 dont les seuls diviseurs (positifs) sont 1 et lui-même.

Exemple 9

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 sont tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

Exercice 10 (Crible d'Ératosthène)

Le *crible d'Ératosthène* donne une méthode pour déterminer la liste des nombres premiers. Voici comment il procède :

- 1► On trace un tableau contenant les nombres entiers naturels à partir de 1.
- 2► On raye le 1.
- 3► On parcourt ensuite les cases non rayées, dans l'ordre croissant : la première est un nombre premier, et on raye ses multiples dans la suite du tableau (qui donc ne sont pas des nombres premiers).

(Pour améliorer la lisibilité, dans le tableau ci-dessous, les cases sont colorées à la place d'être rayées. Chaque couleur correspond à un multiple d'un nombre premier.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

À l'aide du crible d'Ératosthène, déterminer les nombres premiers inférieurs à 100.

Proposition 11

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

Pour les (très) curieux :

Démonstration : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si n est déjà premier, alors n est un diviseur premier de n . Dans le cas contraire, n est composé, donc par définition admet un diviseur distinct de 1 et de n . Notons D_n l'ensemble des diviseurs positifs de n distincts de 1 et de n . Comme n est composé, D_n admet au moins 1 élément. Notons p le plus petit d'entre eux. Ainsi p est un diviseur de n , montrons qu'il est premier. Si k est un diviseur positif de p distinct de 1, alors c'est aussi un diviseur positif de n . Comme p est le plus petit, nécessairement $p \leq k$. Or comme k est un diviseur positif de p , nécessairement $k \leq p$. Finalement, $k = p$: on a montré que les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p , c'est-à-dire que p est premier. ■

Théorème 12 (fondamental de l'arithmétique)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme produit de facteurs premiers. Ces facteurs premiers sont uniques.

Définition 13

L'écriture d'un entier $n \geq 2$ sous forme du produit de ses facteurs premiers est appelée *décomposition* (ou *factorisation*) de n en (produit de) facteurs premiers.

Exemple 14

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

La notation puissance permet de simplifier l'écriture des produits :

Définition 15

Soient a un nombre et n un entier naturel.

Le nombre a^n , lu «*a* puissance n », ou «*a* puissance n -ième de a », est défini par :

$$\triangleright \text{ Si } n > 0 : a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$\triangleright \text{ Si } n = 0 : a^0 = 1$$

Dans l'écriture a^n , le nombre n est appelé *exposant*, et a est appelé *base* de la puissance.

Proposition 16 (*Règles de calcul sur les puissances*)

Soient a et b deux nombres, et m et n deux entiers naturels.

$$1 \triangleright a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$2 \triangleright (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Démonstration : $1 \triangleright a^n \times a^m = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{m \text{ fois}} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n+m \text{ fois}} = a^{n+m}.$

$$2 \triangleright (a \times b)^n = \underbrace{(a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(b \times \cdots \times b)}_{n \text{ fois}} = a^n \times b^n$$

■

Exemple 17

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Exercice 18

On appelle *radical* d'un nombre entier n le produit des nombres premiers distincts divisant n . Par exemple, $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, donc le radical de 360 est $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Déterminez les décompositions en facteurs premiers et radicaux des nombres suivants : 18, 31, 32, 40, 68, 78.

3 Nombres décimaux et relatifs

1	Opérations sur les nombres décimaux relatifs	17
1.1	Retour sur la notion d'opposé	17
1.2	Somme et différence de nombres relatifs	18
1.3	Règle des signes : produit de nombres relatifs	20
1.4	Règle des signes bis : quotient de deux nombres	21
2	Puissances de 10 et écriture scientifique d'un nombre décimal	22
2.1	Puissances de 10	22
2.2	Écriture scientifique d'un nombre décimal	23
2.3	Comparaison des nombres décimaux en écriture scientifique	24

Compétences

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

► Nombres

Connaissances

- Utiliser les puissances de 10 d'exposant positif ou négatif.
- Nombres décimaux (positifs et négatifs), *notion d'opposé*.
- Les préfixes de nano à giga.

Compétences associées

- Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée).
- Passer d'une représentation d'un nombre à une autre.
- Utiliser les puissances de 10 d'exposant positif ou négatif.
- Utiliser les puissances d'exposant strictement positifs d'un nombre pour simplifier l'écriture des produits.

► Comparaisons de nombres

Connaissances

- Utiliser les puissances de 10 pour comparer des nombres.
- Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.

Compétences associées

- Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique.
- Associer à des objets des ordres de grandeur (par exemple taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, longueur de l'intestin, capacité de stockage d'un disque dur, vitesses du son et de la lumière, populations française et mondiale, distance Terre-Lune, distance du Soleil à l'étoile la plus proche, etc.).

► Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

Connaissances

- Somme, différence, produit, quotient de nombres décimaux (relatifs), de deux nombres rationnels.
- Puissance d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs).
- Notation scientifique.

Compétences associées

- Calculer avec des nombres décimaux.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.
- Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique.
- Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

La mise en acte de produits et de quotients de puissances de même base résulte de l'application de la définition plutôt que de celle d'une formule.

1 – Opérations sur les nombres décimaux relatifs

1.1. Retour sur la notion d'opposé

Définition 1

Soit a un nombre.

L'*opposé* de a est le nombre qu'il faut ajouter à a pour obtenir 0. On note $-a$ l'opposé de a , qui se lit « moins a ». On a donc $a + (-a) = 0$.

Remarque 2

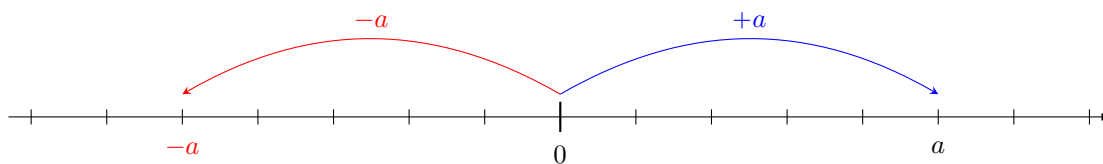
Dans l'identité précédente, on entoure $-a$ de parenthèses pour que les symboles $+$ et $-$ ne soient pas consécutifs. Cela permet également que montrer que $-a$ est un nombre à part entière, et non le résultat d'une opération placée entre parenthèses. Cependant, on écrira $-a + a = 0$ (puisque l'ordre des termes d'une addition importe peu), sans parenthèses.

L'interprétation de la somme de deux nombres en terme de déplacement sur la droite graduée permet de visualiser la notion d'opposé et, comme on le verra dans le paragraphe suivant, la règle des signes.

Chaque nombre positif s'identifie à un unique point sur la demi-droite graduée. Si a et b sont deux nombres positifs, alors $a + b$ est le nombre qui, sur la demi-droite graduée, est à une distance de b unités à droite de a (ou à a unités à droite de b , puisque $a + b = b + a$). Ainsi, ajouter un nombre revient à se déplacer d'autant d'unités vers la droite.

Par définition, le nombre $-a$ est le nombre qu'il faut ajouter à a pour arriver à 0, c'est-à-dire qu'il représente le déplacement de a vers 0. Si a est positif, alors $-a$ correspond au déplacement d'une distance de a vers la gauche. Le nombre $-a$ ne peut pas être identifié à un des point de la demi-droite, puisque ceux-ci correspondent aux nombres positifs, lesquels correspondent à un déplacement vers la droite. Toujours suivant cette idée de déplacement, remarquons que $a = 0 + a$, c'est-à-dire que a est le point obtenu en partant de 0 et en se déplaçant de a unités vers la droite. En écrivant $-a = 0 + (-a)$ ⁽¹⁾, on en vient à l'idée suivante : le nombre $-a$ est, sur la droite graduée, obtenu en se déplaçant d'une distance de a vers la gauche en partant de 0.

On dispose ainsi d'une identification entre des points de la droite graduée et les nombres positifs et leurs opposés.



(1). On peut justifier cette identité avec la définition d'opposé : comme $a = 0 + a$ et $a + (-a) = 0$, on a $0 = a + (-a) = (a + 0) + (-a) = a + (0 + (-a))$. Comme l'opposé d'un nombre est unique, nécessairement $-a = 0 + (-a)$.

Définition 3

- Un nombre représenté à gauche de 0 sur la droite graduée, c'est-à-dire l'opposé d'un nombre positif, est dit *négatif*. Autrement dit, un nombre positif est un nombre supérieur ou égal à 0, et un nombre négatif est un nombre supérieur ou égal à 0.
- Le caractère positif ou négatif d'un nombre est appelé son *signe*. Deux nombres qui n'ont pas le même signe sont dits *de signes opposés*.
- Les nombres positifs et les nombres négatifs forment l'ensemble des nombres dits *relatifs*. On dira donc «soit a un nombre relatif» si l'on considère un nombre quelconque, qu'il soit positif ou négatif.

Exemple 4

- Le nombre 12,8 est (de signe) positif. Son opposé est $-12,8$.
- Le nombre $-57,32$ est (de signe) négatif. C'est l'opposé de 57,32.

Remarque 5

Dans le dessin et le texte précédents, on a supposé a positif, de sorte que $-a$ est négatif. Mais attention, de manière générale, un nombre noté $-x$ n'est pas nécessairement négatif ! En effet, avec les propriétés suivantes, on comprend que l'opposé d'un nombre négatif est positif : ainsi, $-x$ est tantôt négatif, tantôt positif selon le signe de x . Plus précisément, x et $-x$ sont toujours de signes opposés.

Propriété 6

Sur la droite graduée, un nombre et son opposé sont symétriques par rapport à 0.

Jusqu'ici, on n'a discuté que des opposés de nombres positifs. Mais la définition d'opposé n'exclut pas les négatifs ! En effet, soit a un nombre positif, qui donc est placé à droite de 0. On cherche à comprendre d'opposé de $-a$. Par définition, l'opposé de $-a$ est le nombre qu'il faut lui ajouter pour arriver à 0. Il est clair que partant de a , pour arriver à 0, il faut dans ce cas là se déplacer vers la droite de a unités⁽¹⁾. Or par notation de l'opposé, l'opposé de $-a$ est $-(-a)$. De cette observation découle la propriété suivante, qui permet de décrire les opposés des nombres négatifs :

Propriété 7

Pour tout nombre (relatif) a , on a l'identité $-(-a) = a$.

1.2. Somme et différence de nombres relatifs

Avec l'interprétation en termes de déplacement, ajouter deux nombres positifs revient à se déplacer deux fois vers la droite depuis 0, ce qui reste à droite de 0, et ajouter deux nombres négatifs revient à se déplacer deux fois vers la gauche depuis 0, ce qui reste à gauche de 0. Ajouter deux nombres de signes opposés revient à se déplacer une fois à droite et une fois à gauche depuis 0, ce qui peut très bien tomber d'un côté ou de l'autre de 0, selon si le plus grand déplacement s'est effectué vers la droite ou vers la gauche. Formalisons ces idées.

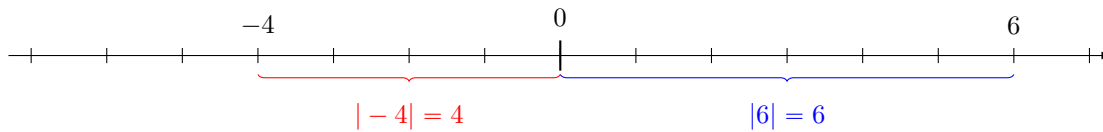
Définition 8

Soit a un nombre relatif.

On appelle *distance à zéro* de a , ou *valeur absolue* de a , le nombre écrit comme a mais sans son signe (autrement dit avec un symbole $+$, puisqu'on écrit les nombres positifs sans le symbole $+$), c'est-à-dire a lui-même si a est déjà positif, et $-a$ sinon.

On note $|a|$ la distance à 0 (ou valeur absolue) de a .

(1). Attention, lorsqu'on parle de « x unités», il faut que x soit positif, sinon ça n'a pas de sens ! Vous connaissez des distances de -3km , vous ?

**Exemple 9**

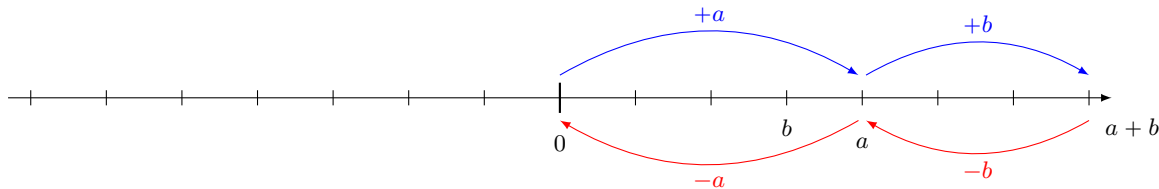
- La distance à 0 (ou valeur absolue) de 12,8 est 12,8.
- la distance à 0 (ou valeur absolue) de $-57,32$ est 57,32.

Propriété 10

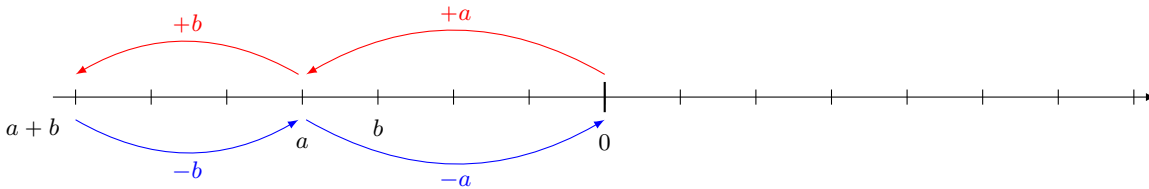
L'opposé d'une somme est la somme des opposés des termes.
Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b , on a l'identité $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Démonstration : Soient a et b deux nombres décimaux (relatifs).

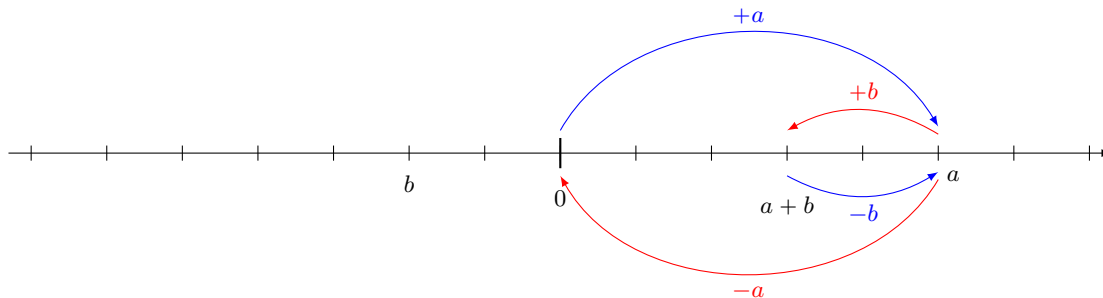
Si a et b sont positifs, alors $a + b$ est le résultat du déplacement de a vers la droite de $|b|$ unités, donc du déplacement depuis 0 vers la droite de $|a|$ unités puis de $|b|$ unités (ou inversement). Ainsi, ajouter $(-a) + (-b)$ à $a + b$ revient à partir de $a + b$ et se déplacer de $|a|$ unités puis de $|b|$ unités (ou inversement) vers la gauche, ce qui revient bien à 0. Par définition de l'opposé, $-(a + b) = (-a) + (-b)$.



Si a et b sont négatifs, alors le raisonnement est le même en inversant les sens de déplacement.



Si a est positif et b est négatif, alors $a + b$ est le résultat du déplacement de a vers la gauche de $|b|$ unités, donc du déplacement depuis 0 vers la droite de $|a|$ unités puis vers la gauche de $|b|$ unités (ou inversement). Ainsi, ajouter $(-a) + (-b)$ à $a + b$ revient à partir de $a + b$ et se déplacer de $|a|$ unités vers la gauche puis de $|b|$ unités vers la droite (ou inversement), ce qui annule bien le déplacement initial et revient bien à 0. Par définition de l'opposé, $-(a + b) = (-a) + (-b)$.



Si a est négatif et b est positif, alors c'est la même chose dans l'autre sens. ■

Méthode 11

Soient a et b deux nombres. Pour calculer $a + b$:

- ▶ Si a et b sont de même signe, on ajoute leurs distances à 0 (ou valeurs absolues) et on garde leur signe commun,
- ▶ Si a et b sont de signes opposés, alors on calcule la différence entre les distances à 0 (ou valeurs absolues) de a et de b , et on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à 0.

Exemple 12

- ▶ $12,8 + 65,3 = 78,1$
- ▶ $46,2 + (-64,7) = -(64,7 - 46,2) = -18,5$
- ▶ $-1,13 + (-2,23) = -(1,13 + 2,23) = -3,36$
- ▶ $-14,3 + 5,95 = -(14,3 - 5,95) = -8,35$
- ▶ $100,5 + (-50,3) = +(100,5 - 50,3) = 50,2$
- ▶ $-22,8 + 75,3 = +(75,3 - 22,8) = 52,5$

Définition 13 (Soustraction des nombres relatifs)

Soustraire un nombre (relatif) revient à ajouter l'opposé. Autrement dit, pour tous nombres (relatifs) a et b , l'opération de soustraction est définie par $a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b)$.

Exercice 14

Calculez :

a▶ $12,8 + 3,2$

c▶ $-12,8 + 3,2$

e▶ $23,5 - (-5,2)$

b▶ $12,8 - 3,2$

d▶ $-54,6 - 45,1$

f▶ $-6,3 - (-10,8)$

1.3. Règle des signes : produit de nombres relatifs

On a réussi à étendre l'addition et la soustraction aux nombres relatifs, il est temps d'étendre la multiplication et la division.

La première étape est de comprendre pourquoi pour tout nombre relatif a , $-a = (-1) \times a$ ⁽¹⁾. On peut le justifier par la définition de l'opposé : il suffit d'écrire que $a + (-1) \times a = 1 \times a + (-1) \times a = (1 + (-1)) \times a = 0 \times a = 0$, et par unicité de l'opposé, $(-1) \times a = -a$. On peut interpréter ceci en termes de déplacements sur la droite graduée : multiplier par -1 revient à inverser le sens de déplacement.

Avec la même démonstration en remplaçant -1 par $-b$ pour b un nombre quelconque, on en déduit la propriété suivante :

Propriété 15

Pour tous nombres (relatifs) a et b , $-(a \times b) = (-a) \times b = a \times (-b)$.

Remarque 16

En particulier, à l'exception du dernier membre de ces égalités, les parenthèses ne sont pas nécessaires.

Appliquons cette propriété à $a = b = -1$: cela donne $(-1) \times (-1) = -(1 \times (-1)) = -(-1 \times 1) = -(-1) = 1$ d'après la Propriété 7.

(1). On ajoute ici des parenthèses autour de -1 pour lever l'ambiguïté suivante : $-1 \times a$ désigne-t-il le nombre -1 multiplié par a , ou l'opposé du produit de 1 et a ? Bien que le résultat soit le même, le chemin pour y arriver lui ne l'est pas.

Proposition 17 (Règle des signes)

$$\triangleright (-1) \times 1 = 1 \times (-1) = -1$$

$$\triangleright 1 \times 1 = (-1) \times (-1) = 1$$

Remarque 18

L'égalité $(-1) \times (-1) = 1$ s'interprète également en termes de déplacements sur la demi-droite graduée. En effet, on a vu plus haut que multiplier par -1 revient à inverser le sens de déplacement : ainsi, multiplier par -1 puis à nouveau par -1 revient à inverser deux fois le sens de déplacement, donc à ne pas inverser le sens de déplacement.

Remarque 19

La règle des signes est souvent illustrée par le célèbre adage : «Les amis de mes amis sont mes amis, les amis de mes ennemis sont mes ennemis, les ennemis de mes ennemis sont mes amis.»

Définition 20 (Produit de nombres relatifs)

La distance à 0 du produit de deux nombres (relatifs) est le produit des distances à 0 de ses deux facteurs, et son signe est le produit des signes des facteurs, donné par la règle des signes.

Proposition 21 (Règle des signes)

- Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.
- Le produit de deux nombres de mêmes signes est positif.

Exemple 22

$$\triangleright 2 \times 3 = 6$$

$$\triangleright 3 \times (-4) = -12$$

$$\triangleright -5 \times 5 = -25$$

$$\triangleright -6 \times (-8) = 48$$

Exercice 23

Calculez :

a▸ $-12,8 \times 3,2$

b▸ $-54,6 \times (-45,1)$

c▸ $23,5 \times (-5,2)$

d▸ $-6,3 \times (-10,8)$

1.4. Règle des signes bis : quotient de deux nombres

En ce qui concerne la division des nombres, on a besoin des outils développés dans le chapitre sur les nombres rationnels. L'intégralité de ce paragraphe sera revu plus en détail dans le chapitre en question, et le lien avec les nombres y sera fait.

Définition 24

Soient a et b deux nombres (relatifs), avec b différent de 0.

Le *quotient de a par b* , noté a/b ou $\frac{a}{b}$, est l'unique nombre (rationnel) tel que $b \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times b = a$.

Proposition 25

Soient a et b deux nombres, avec b différent de 0.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Démonstration : Voir le chapitre sur les nombres rationnels. ■

Proposition 26 (Règle des signes)

- ▶ Le quotient de deux nombres de même signe est positif.
- ▶ Le quotient de deux nombres de signes opposés est négatif.

Exercice 27

Calculez :

a ▶ $\frac{-100}{10}$

b ▶ $\frac{215}{-3}$

c ▶ $\frac{-196}{-7}$

d ▶ $-\frac{360}{-12}$

2 – Puissances de 10 et écriture scientifique d'un nombre décimal

2.1. Puissances de 10

Définition 28

Soit n un entier relatif.

Le nombre 10^n , lu «10 puissance n », ou «puissance n -ième de 10», est défini par :

▶ Si $n > 0$: $10^n = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}$

▶ Si $n < 0$: $10^n = \frac{1}{10^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}}}$

▶ Si $n = 0$: $10^0 = 1$

Dans l'écriture 10^n , le nombre n est appelé *exposant*, et 10 est appelé *base* de la puissance.

Propriété 29

Soit n un entier naturel.

Le nombre entier 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n fois le chiffre 0.

Exemple 30

Par exemple, $10^4 = 10\,000$, $10^3 = 1\,000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$, mais aussi $10^0 = 1$ (le chiffre 1 suivi de zéro fois le chiffre 0!).

Proposition 31

Soient n et m deux nombres entiers.

1 ▶ $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$

2 ▶ $\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$

Démonstration : Commençons par le cas où m et n sont positifs.

1 ▶ Il suffit d'écrire :

$$10^n \times 10^m = \underbrace{(10 \times \cdots \times 10)}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{(10 \times \cdots \times 10)}_{m \text{ fois}} = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n+m \text{ fois}} = 10^{n+m}$$

2 ▶ Si $n \geq m$, alors $\frac{10^n}{10^m} = \frac{\overbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}^{n \text{ fois}}}{\underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{m \text{ fois}}} = \frac{\overbrace{10 \times \cdots \times 10}^{n-m \text{ fois}}}{1} = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n-m \text{ fois}} = 10^{n-m}$ d'après la règle de simplification

des fractions. À l'inverse, si $m \geq n$, alors d'après ce qui précède, $\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$, et par définition des exposants entiers négatifs, $10^{n-m} = 10^{-(m-n)} = \frac{1}{10^{m-n}} = \frac{1}{\frac{10^m}{10^n}} = \frac{10^n}{10^m}$ (rappel : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$).

Le trois autres cas se déduisent du cas positif en observant que pour $n \geq 0$, $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n$. Par exemple, dans le cas où $n \geq 0$ et $m \leq 0$ (les autres cas sont laissés en exercice) :

$$1 \blacktriangleright 10^n \times 10^m = 10^n \times \frac{1}{10^{-m}} = \frac{10^n}{10^{-m}} = 10^{n-(-m)} = 10^{n+m}.$$

$$2 \blacktriangleright \frac{10^n}{10^m} = 10^n \times \frac{1}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n+(-m)} = 10^{n-m}.$$

(Notez qu'ici, $-m \geq 0$, donc le premier cas s'applique bien.) ■

Remarque 32

On définit de même la puissance n -ième d'un nombre décimal a (avec $a \neq 0$ pour $n < 0$), notée a^n , en remplaçant tous les 10 par des a dans ce paragraphe.

2.2. Écriture scientifique d'un nombre décimal

Proposition 33

Tout nombre décimal positif non nul peut s'écrire (de manière unique) comme produit d'un nombre entre 1 (inclus) et 10 (exclu) (que l'on appelle *mantisse* de ce nombre) par une puissance de 10.

Exemple 34

Par exemple, $299\,792\,458 = 2,997\,924\,58 \times 10^8$ et $0,00879465 = 8,794\,65 \times 10^{-3}$.

Définition 35

On appelle *écriture scientifique* d'un nombre décimal non nul son écriture sous la forme de son signe suivi de l'écriture donnée par la Proposition 33.

Proposition 36

Un nombre décimal non nul est :

- ▶ plus petit que 1 si, et seulement si l'exposant de la puissance de 10 dans l'écriture scientifique de ce nombre est négatif.
- ▶ plus grand que 1 si, et seulement si l'exposant de la puissance de 10 dans l'écriture scientifique de ce nombre est positif.

Définition 37

Soit x un nombre décimal non nul. Si on note n l'exposant de la puissance de 10 dans l'écriture scientifique de x , alors on dit que x est *de l'ordre de* 10^n , ou que 10^n est l'*ordre de grandeur* de x .

Exemple 38

- ▶ $121,267 = 1,21267 \times 10^2$ et $0 \leq 1,21267 < 10$, donc 121,267 est de l'ordre de 10^2 .
- ▶ $54\,835,2 = 5,48352 \times 10^4$ et $0 \leq 5,48352 < 10$, donc 54 835,2 est de l'ordre de 10^4 .
- ▶ $0,791 = 7,91 \times 10^{-1}$ et $0 \leq 7,91 < 10$, donc 0,791 est de l'ordre de 10^{-1} .
- ▶ $0,00958 = 9,58 \times 10^{-3}$ et $0 \leq 9,58 < 10$, donc 0,00958 est de l'ordre de 10^{-3} .

Le tableau suivant résume quelques multiples d'unités usuels et les liens qui les lient. On note u une unité quelconque : ça peut être des mètres (m), des grammes (g), ...

Nom	Nano- <i>u</i>	Micro- <i>u</i>	Milli- <i>u</i>	Centi- <i>u</i>	Déci- <i>u</i>	/
Symbole	<i>nu</i>	μu	<i>mu</i>	<i>cu</i>	<i>du</i>	<i>u</i>
Valeur	$10^{-9}u$	$10^{-6}u$	$10^{-3}u$	$10^{-2}u$	$10^{-1}u$	$1u$

Nom	/	Déca- <i>u</i>	Hecto- <i>u</i>	Kilo- <i>u</i>	Méga- <i>u</i>	Giga- <i>u</i>	Téra- <i>u</i>
Symbole	<i>u</i>	<i>da u</i>	<i>hu</i>	<i>ku</i>	<i>Mu</i>	<i>Gu</i>	<i>Tu</i>
Valeur	$1u$	$10u$	10^2u	10^3u	10^6u	10^9u	$10^{12}u$

Exemple 39

- Une cellule animale mesure environ $20\mu\text{m}$. La taille d'une cellule animale est donc de l'ordre de la dizaine de micromètres, c'est-à-dire de l'ordre du cent-millième de mètre, ou du dixième de millimètre.
- La distance Terre-Lune est en moyenne 384 400 km, elle est donc de l'ordre de 100 000 km, c'est-à-dire de l'ordre du dixième de mégamètre.
- La masse d'une baleine adulte est en moyenne 140 000 kg, c'est-à-dire de l'ordre de 100 000 kg.
- La masse d'une banane est en moyenne de 120 g, donc de l'ordre de la centaine de grammes, on en est encore au dixième de kilogramme.
- Selon une estimation, 915 000 000 000 gigaoctets (c'est-à-dire 915 000 000 To) de données ont été publiés sur Internet en 2018. C'est de l'ordre de la dizaine de millions de téraoctets. (En guise de comparaison, la capacité de stockage d'un ordinateur personnel est de l'ordre du téraoctet.)

Exercice 40

Complétez le tableau suivant :

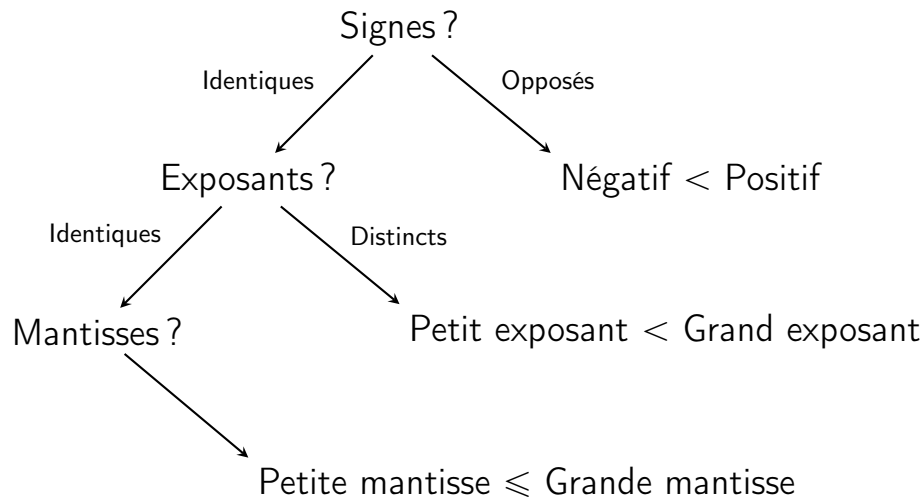
Grandeurs	Valeur en notation décimale	Valeur en notation scientifique	Valeur dans un multiple de l'unité adapté
Diamètre d'un cheveu		m	$70\mu\text{m}$
Potentiel de repos d'un neurone	0,007V	V	mV
Masse d'un grain de blé	g	$5 \times 10^{-2}\text{g}$	mg
Part du nucléaire dans la production française d'électricité en 2019	Wh	Wh	379,5TWh
Durée de vie d'un muon	s	s	$2,2\mu\text{s}$
Poids d'une image Full HD 24 bits	6220800o	o	Mo
Champ magnétique de la Terre à Paris	T	$5 \times 10^{-5}\text{T}$	μT

2.3. Comparaison des nombres décimaux en écriture scientifique**Méthode 41 (Comparaison de nombres écrits sous forme scientifique)**

Pour comparer deux nombres décimaux écrits sous forme scientifique :

- 1► On regarde d'abord leurs signes : s'ils sont de signes opposés, alors le négatif est plus petit que le positif. Sinon, s'ils sont de même signe :
- 2► On compare les exposants de leurs puissances de 10 : si celles-ci sont différentes, alors celui de plus grand exposant est le plus grand des deux nombres. Sinon, si les exposants sont égaux :
- 3► On compare les mantisses : le nombre ayant la plus grande mantisse est le plus grand.

On peut résumer cette méthode avec l'arbre de choix ci-dessous.

**Exemple 42**

- ▶ $-5,12 \times 10^{27} < 1,1 \times 10^{-12}$ car le premier est négatif et l'autre positif.
- ▶ $3,7 \times 10^5 < 1,2 \times 10^9$ car ils ont même signe et l'exposant du premier (5) est strictement plus petit que celui du second (9).
- ▶ $9,8 \times 10^{-3} < 6,5 \times 10^{-17}$ car ils ont même signe et l'exposant du premier (−3) est strictement plus petit que celui du second (−17). ⁽¹⁾
- ▶ $1,2 \times 10^4 < 5,6 \times 10^4$ car ils ont mêmes signes, mêmes exposants, et la mantisse du premier (1,2) est plus petite que celle du second (5,6).
- ▶ $4,7 \times 10^{-80} < 8,6 \times 10^{-88}$ car ils ont mêmes signes, mêmes exposants, et la mantisse du premier (4,7) est plus petite que celle du second (8,6).
- ▶ $-2,2 \times 10^0 < -2,1 \times 10^0$ car ils ont mêmes signes, mêmes exposants, et la mantisse du premier (−2,2) est plus petite que celle du second (−2,1).

Exercice 43

Classez les nombres suivants par ordre croissant :

- a▶ $6,1 \times 10^{27}$
 b▶ $-5,7 \times 10^{-23}$
 c▶ $2,9 \times 10^{19}$
 d▶ $-2,8 \times 10^{-5}$

- e▶ $9,3 \times 10^{16}$
 f▶ $5,5 \times 10^{-1}$
 g▶ $-6,5 \times 10^{48}$
 h▶ $-4,3 \times 10^{-23}$

- i▶ $3,7 \times 10^{-3}$
 j▶ $-1,9 \times 10^{48}$
 k▶ $1,8 \times 10^{-1}$
 l▶ $4,3 \times 10^{19}$

Méthode 44 (Vérifier la cohérence d'un résultat)

On peut utiliser l'écriture scientifique et les ordres de grandeur pour contrôler la cohérence du résultat d'un calcul.

- ▶ Pour contrôler la cohérence d'un produit : on peut simplifier les mantisses en les arrondissant, et calculer ainsi le produit simplifié. Si l'ordre de grandeur du produit simplifié n'est pas le même que celui du résultat calculé, alors ce dernier est nécessairement erroné. Si les ordres de grandeur sont les mêmes, alors on ne peut rien conclure sur la justesse ou non du résultat calculé.
- ▶ Pour contrôler la cohérence d'une somme : l'ordre de grandeur d'une somme de deux termes est le plus grand ordre de grandeur parmi les deux termes, ou ce même ordre de grandeur augmenté de 1. Cela permet de même de détecter les calculs erronés, mais pas ceux qui sont justes.

Exemple 45

- ▶ On souhaite vérifier si $1,96 \times 10^5 \times 3,4 \times 10^8 = 3 \times 10^{10}$. Après arrondi des mantisses, le membre de gauche vaut $2 \times 10^5 \times 3 \times 10^8 = 3 \times 10^{10} = 6 \times 10^{13}$: l'exposant (13) n'est pas même que celui du membre de droite (10), donc on peut affirmer que le calcul est faux.
- ▶ On souhaite vérifier si $5,3 \times 10^6 \times 4,9 \times 10^6 = 2,5 \times 10^{32}$. Après arrondi des mantisses, le membre de gauche vaut $5 \times 10^6 \times 5 \times 10^6 = 25 \times 10^{12} = 2,5 \times 10^{13}$: l'exposant (13) n'est pas même que celui du membre de droite (32), donc on peut affirmer que le calcul est faux.
- ▶ On souhaite vérifier si $1,01 \times 10^2 \times 1,01 \times 10^3 = 9 \times 10^5$. Après arrondi des mantisses, le membre de gauche vaut $1 \times 10^2 \times 1 \times 10^3 = 1 \times 10^5$: l'exposant (5) est pas même que celui du membre de droite, on ne peut donc rien conclure sur la justesse du calcul.
- ▶ On souhaite vérifier si $3,2 \times 10^9 + 5,7 \times 10^{-3} = 6,6 \times 10^{52}$. Le plus grand exposants des deux termes de la somme est 9, donc l'exposant de la somme doit être 9 ou $9 + 1 = 10$. Ce n'est pas le cas, donc on peut affirmer que le calcul est faux.

4 Nombres rationnels

1	Des fractions aux nombres rationnels	28
2	Opérations sur les fractions	29
3	Simplification, encadrement et comparaison de fractions	31
3.1	Simplification des fraction	31
3.2	Encadrement de fractions entre deux entiers consécutifs	32
3.3	Comparaison de fractions	32
4	Notion d'inverse	33
5	Nombres rationnels et nombres décimaux, différentes représentations d'un nombre	33

Compétences

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

- *Nombres*
Connaissances
 - Fractions, nombres rationnels (positifs et négatifs), notion d'inverse.Compétences associées
 - Utiliser les puissances d'exposant strictement positifs d'un nombre pour simplifier l'écriture des produits.
- *Comparaisons de nombres*
Connaissances
 - Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels (positifs ou négatifs)
 - Égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient).
 - Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire.Compétences associées
 - Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire ou scientifique.
 - Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée.
- *Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté*
Connaissances
 - Somme, différence, produit, quotient de nombres décimaux (relatifs), de deux nombres rationnels.
 - Puissance d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs).
 - Utiliser l'inverse pour calculer.
 - Résoudre des problèmes avec des nombres rationnels.Compétences associées
 - Calculer avec des fractions.
 - Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes.

La mise en acte de produits et de quotients de puissances de même base résulte de l'application de la définition plutôt que de celle d'une formule.

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers

- Connaissances
 - Fractions irréductibles.
- Compétences associées
 - Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.

1 – Des fractions aux nombres rationnels

Le mot «fraction» vient du latin *fractio*, signifiant «rompu». En mathématiques, une fraction traduit l'idée du découpage d'une quantité en parts égales. C'est aussi un type de nombre – les nombres *rationnels*, la plupart du temps non entier, qui possède des propriétés et des règles de calcul.

En classe de 6ème, on définit les fractions de la manière suivante : soient n et d deux nombres *entiers naturels* avec d différent de 0.

- ▶ Le nombre noté $\frac{1}{d}$, lu «1 sur d », désigne le résultat du partage d'une unité en d parts égales.
- ▶ Le nombre noté $\frac{n}{d}$, lu « n sur d », désigne n parts d'une unité partagée en d parts égales.

Le nombre $\frac{n}{d}$ est appelé *fraction*, le nombre n en haut est appelé *numérateur* de la fraction, et le nombre d en bas est appelé *dénominateur* de la fraction.

Cette définition est une bonne introduction à la notion de fraction, mais son plus grand défaut est qu'elle exclut les nombres négatifs : en effet, que signifient diviser une unité négative, ou alors prendre un nombre négatif de parts ? Pour cela, on donne une nouvelle définition, qui étend aux nombres entiers relatifs la définition précédente :

Définition 1

Soient n et d deux nombres entiers *relatifs*, avec d différent de 0.

La fraction $\frac{n}{d}$ est l'unique nombre dont le produit par d vaut n , c'est-à-dire $\frac{n}{d} \times d = d \times \frac{n}{d} = n$. Autrement dit, c'est le résultat de la division de n par d .

Définition 2

On dit qu'un nombre est *rationnel* s'il peut s'écrire comme une fraction, c'est-à-dire le quotient de deux nombres entiers (relatifs).

Proposition 3

Pour tout nombre entier n , la fraction $\frac{n}{1}$ est égale à n , c'est-à-dire $\frac{n}{1} = n$. Par conséquent, tout nombre entier (relatif) est rationnel.

Remarque 4

La réciproque n'est pas vraie : $\frac{1}{2}$ est un nombre rationnel qui n'est pas entier.

Remarque 5

Pour rappel, quand $d > 0$, la fraction $\frac{n}{d}$ peut aussi se lire (et s'écrire) « n d-ième(s)», à l'exception de $d = 2$, $d = 3$ et $d = 4$. On dira ainsi :

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| ▶ $\frac{1}{2}$: «un demi» | ▶ $\frac{1}{5}$: «un cinquième» | ▶ $\frac{12}{8}$: «douze huitièmes» |
| ▶ $\frac{5}{3}$: «cinq tiers» | ▶ $\frac{3}{6}$: «trois sixièmes» | ▶ $\frac{0}{9}$: «zéro neuvième» |
| ▶ $\frac{3}{4}$: «trois quarts» | ▶ $\frac{7}{7}$: «sept septièmes» | ▶ etc. |

On ne dit pas «deux moins-tiers» pour désigner la fraction $\frac{2}{-3}$. À la place, on utilise la propriété suivante :

Propriété 6

Pour tous nombres entiers relatifs n et d avec $d \neq 0$,

$$\frac{n}{-d} = \frac{-n}{d} = -\frac{n}{d}$$

Remarque 7

Il faut comprendre pourquoi cette propriété n'est pas vide de sens : les trois nombres qui y sont écrits ne désignent

pas, d'après leurs définitions, les mêmes choses. Cette propriété se lit ainsi : «le quotient de n par $-d$ est égal au quotient de $-n$ par d , qui est encore égal à l'opposé du quotient de n par d ».

Démonstration : Montrons d'abord que $\frac{n}{-d} = \frac{-n}{d}$: par définition, $\frac{n}{-d}$ est l'unique nombre dont le produit par $-d$ vaut n , c'est-à-dire $\frac{n}{-d} \times (-d) = n$. Or $\frac{-n}{d} \times (-d) = \frac{(-1) \times n}{d} \times (-d) = \frac{n}{d} \times (-1) \times (-d) = \frac{n}{d} \times d = n$ par définition de $\frac{n}{d}$. Comme $\frac{n}{-d}$ est l'unique nombre à vérifier cette relation, on en déduit que $\frac{n}{-d} = \frac{-n}{d}$.

Le fait que $\frac{-n}{d} = -\frac{n}{d}$ découle des règles de calcul avec les fractions du fait qu'étant donné un nombre x , on a $-x = (-1) \times x$ (voir le cours sur les nombres décimaux) : $\frac{-n}{d} = \frac{(-1) \times n}{d} = (-1) \times \frac{n}{d} = -\frac{n}{d}$. ■

2 – Opérations sur les fractions

Définition 8

Soient a , b , c et d des nombres entiers, avec b et d différents de 0.

Réduire les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ au même dénominateur, c'est réécrire chacune de ces fractions comme d'autres fractions qui leur sont égales, mais qui ont le même dénominateur. Autrement dit, c'est trouver des nombres entiers x , y et z tels que $\frac{a}{b} = \frac{x}{z}$, et $\frac{c}{d} = \frac{y}{z}$.

Exemple 9

- Pour réduire $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.
- Pour réduire $\frac{12}{6}$ et $\frac{7}{8}$ au même dénominateur, on peut écrire $\frac{12}{6} = \frac{48}{24}$ et $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$.

Méthode 10 (Réduction au même dénominateur)

Soient a , b , c et d des nombres entiers, avec b et d différents de 0.

Pour réduire $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ au même dénominateur, on peut multiplier $\frac{a}{b}$ par d en haut et en bas, et multiplier $\frac{c}{d}$ par b en haut et en bas. On a alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} \quad \text{et} \quad \frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

avec le même dénominateur $b \times d$.

Méthode 11 (Addition de deux fractions)

Pour ajouter deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur, puis ajouter les numérateurs. On ne peut pas ajouter directement les dénominateurs et les numérateurs.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$$

Remarque : c'est une méthode qui fonctionne toujours, mais ce n'est pas la seule ! On peut tout à fait remarquer, à vue, un multiple commun à b et d qui convient.

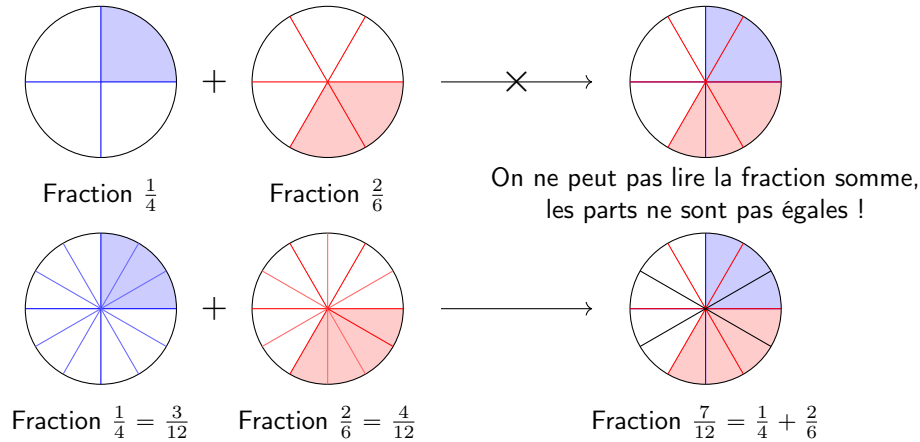
Exercice 12 (Énigme des 17 chameaux)

Un chamelier sentant sa fin approcher, il décide de léguer son troupeau de 17 chameaux à ses trois enfants. L'aîné recevra la moitié du troupeau, le cadet en recevra le tiers, et le benjamin en recevra le neuvième. Le problème est que l'on ne peut diviser équitablement une troupe de 17 chameaux en 2, 3 ou 9 sans couper l'un des chameaux en petits morceaux ! Ne sachant quoi faire, les trois enfants consultent un collègue chamelier. Celui-ci dit aux enfants : «Je vous prête l'un de mes chameaux. Effectuez la division de votre troupeau en comptant ce chameau. Mais attention, je tiens à le récupérer ensuite !». Les enfants, étonnés, pensent qu'il est impossible de restituer le chameau prêté s'ils en tiennent compte dans la répartition de la troupe. Et pourtant...

Représentez la situation avec un dessin. Comment expliquer le fait que le chameau prêté puisse être rendu ? La division est-elle réellement équitable ?

Remarque 13

On peut visualiser la contrainte des dénominateurs dans la somme de deux fractions avec la "fraction-partage", comme vue en 6ème. Essayons de comprendre en termes de gâteaux pourquoi on ne peut pas ajouter les dénominateurs directement. Imaginons que l'on cherche à calculer $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$. D'un côté, on a 3 parts d'un gâteau coupé en 4 parts égales, et d'un autre, on a 5 parts d'un gâteau coupé en 8 parts égales. On n'a pas, au total, 5 parts d'un gâteau coupé en 12 parts égales, puisque nos parts n'ont pas la même taille !

**Exercice 14**

À l'aide d'une représentation par découpage de gâteau ou de tablette de chocolat, comparer $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$ et $\frac{1+1}{5+3} = \frac{2}{8}$. En vertu de cet exemple, est-il juste d'ajouter les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux pour ajouter deux fractions ?

Méthode 15 (Multiplication de deux fractions)

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs.

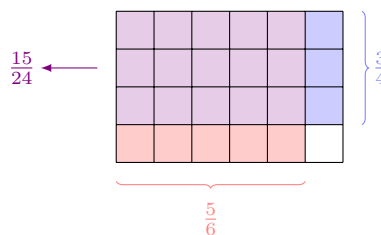
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Remarque 16

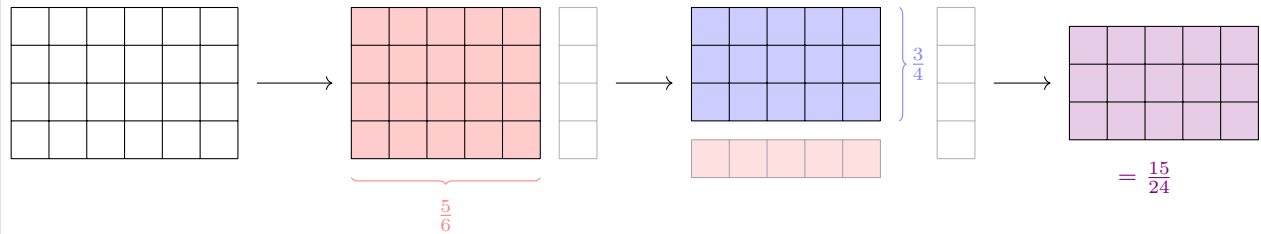
Ces deux méthodes, d'addition et de multiplication de deux fractions, fonctionnent de la même manière avec une fraction et un entier, grâce à la Proposition 3.

Remarque 17

La multiplication des nombres rationnels peut s'interpréter avec la notion de "fraction-partage" comme on la voit en classe de 6ème. En termes de tablettes de chocolat, ça s'illustre assez bien. Par exemple, essayons de multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{6}$. On regarde les deux dénominateurs : on coupe la tablette de chocolat en 4 bandes égales dans la longueur et en 6 bandes égales dans la largeur. On peut ainsi représenter à la fois $\frac{3}{4}$ de la tablette en coloriant 3 des 4 bandes horizontales, et $\frac{5}{6}$ de la tablette en coloriant 5 des 6 bandes verticales. Le découpage dans les deux sens de la tablette induit un découpage plus fin en $6 \times 4 = 24$ carrés égaux, et on compte $3 \times 5 = 15$ carrés coloriés dans les deux couleurs.



Cependant, cette visualisation peine à expliquer profondément pourquoi on multiplie les fractions ainsi et pas autrement. Pour cela, il faut plutôt passer par le calcul en se souvenant de la Propriété 32. Sur l'exemple ci-dessus : calculer $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$ revient à prendre $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$. Avec des tablettes de chocolat, ça donne le procédé suivant : on extrait $\frac{5}{6}$ de la tablette initiale, puis on prend $\frac{3}{4}$ de cette tablette plus petite qui est devenue la nouvelle unité. Avec le découpage adéquat comme ci-dessus, on obtient bien le résultat annoncé.



3 – Simplification, encadrement et comparaison de fractions

3.1. Simplification des fraction

Proposition 18

Soient n et d deux nombres entiers, avec d différent de 0.

L'ensemble des fractions égales à $\frac{n}{d}$ est l'ensemble des fractions de la forme $\frac{n \times k}{d \times k}$ où k est un nombre entier non nul.

Définition 19

Soient n , d et k des nombres entiers avec d et k non nuls. *Simplifier* la fraction $\frac{n \times k}{d \times k}$, c'est écrire $\frac{n \times k}{d \times k} = \frac{n}{d}$. Autrement dit, on enlève au numérateur et au dénominateur un diviseur qu'ils ont en commun.

Méthode 20 (*Simplification d'une fraction*)

Pour simplifier une fraction, on peut déterminer les décompositions en produits de facteurs premiers de son numérateur et de son dénominateur (sans tenir compte de leurs signes, en vertu de la Propriété 6), et simplifier leurs facteurs communs.

Exemple 21

$$\frac{24}{420} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times 7} = \frac{2}{35}$$

Méthode 22 (*Produit en croix*)

Soient a , b , c et d quatre nombres, avec b et d différents de 0.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si, et seulement si } ad = bc.$$

On dit qu'on vérifie le *produit en croix* en vertu du dessin suivant :

$$\begin{array}{cc} a & c \\ \times & \times \\ b & d \end{array}$$

3.2. Encadrement de fractions entre deux entiers consécutifs

Proposition 23

Toute fraction peut s'écrire comme somme d'un nombre entier (appelé *partie entière* de la fraction) et d'une fraction comprise entre 0 (inclus) et 1 (exclu).

Méthode 24 (*Décomposition d'une fraction*)

Soient n et d deux nombres entiers, avec d différent de 0.

Soient q et r les quotient et reste de la division euclidienne de n par d . On rappelle que $n = d \times q + r$ et $r < d$.
En vertu de la règle d'addition des fractions et de la Proposition 18 sur l'égalité de fractions,

$$\frac{n}{d} = \frac{d \times q + r}{d} = \frac{d \times q}{d} + \frac{r}{d} = \frac{d \times q}{d \times 1} + \frac{r}{d} = \frac{q}{1} + \frac{r}{d} = q + \frac{r}{d}$$

et dans cette écriture, q est un nombre entier et $\frac{r}{d} < 1$.

Proposition 25

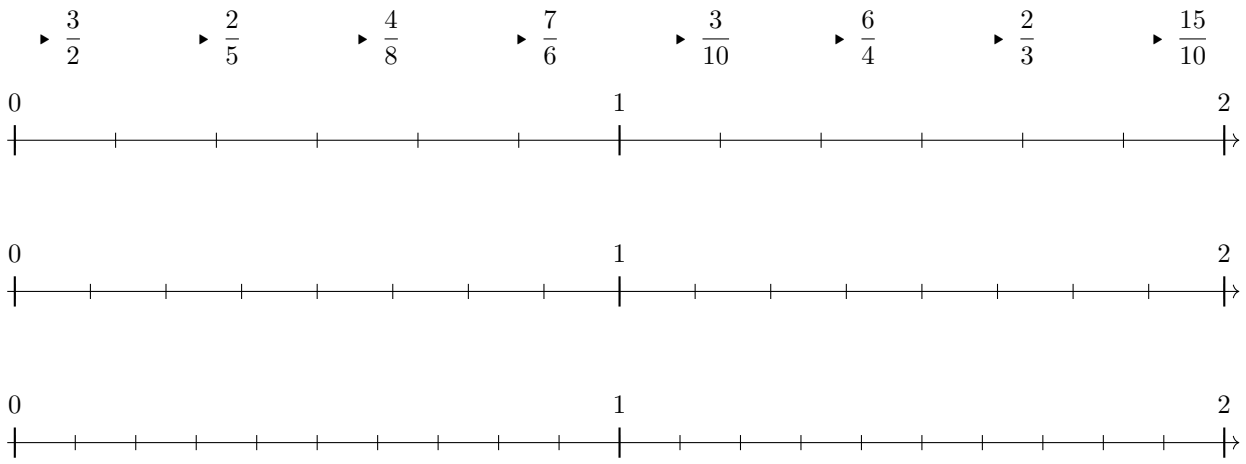
Toute fraction est comprise entre deux nombres entiers successifs.

Méthode 26 (*Encadrement d'une fraction*)

Pour trouver de tels nombres entiers, on utilise la méthode précédente.

Exercice 27

Pour chacune des fractions suivantes, décomposez-la en la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1, puis placez-la sur une demi-droite avec une graduation adaptée parmi les demi-droites graduées ci-dessous :



3.3. Comparaison de fractions

Méthode 28 (*Comparaison de fractions*)

Pour comparer deux fractions, on les réduit d'abord au même dénominateur, puis on compare leurs numérateurs.

Remarque 29

Anecdote : dans les années 1980, pour concurrencer le burger "Quarter pounder" de Mc Donalds (un burger dont le steak pèse un quart de livre), la chaîne de fast food A&W a sorti un burger "Third pounder" (un burger dont le steak pèse un tiers de livre) au même prix. Malheureusement, les américains de l'époque ont cru que c'était une arnaque, pensant que $\frac{1}{3}$ était plus petit que $\frac{1}{4}$...

4 – Notion d'inverse

Définition 30

Soit x un nombre différent de 0. On appelle *inverse de x* l'unique nombre dont le produit par x vaut 1. On note $\frac{1}{x}$ l'inverse de x . On a donc $x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.

Proposition 31

Soient a et b deux nombres entiers différents de 0.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$. Autrement dit, $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Démonstration : D'après les règles de calcul sur les fractions, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{1}{1} = 1$ (on simplifie par a et par b). Ainsi, $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$ par définition. ■

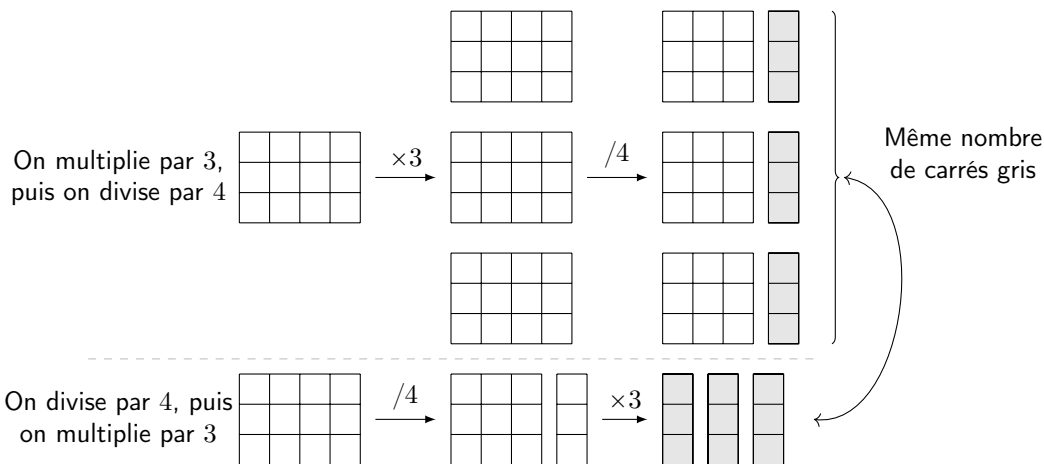
Propriété 32

«Prendre la moitié de quelque chose» revient à multiplier ce quelque chose par $\frac{1}{2}$.

Plus généralement, soit d un nombre entier différent de 0. «Prendre un d -ième de quelque chose» revient à multiplier ce quelque chose par $\frac{1}{d}$. Autrement dit, multiplier par $\frac{1}{d}$ est équivalent à diviser par d .

Plus généralement encore, soit n un nombre entier. «Prendre n d -ième de quelque chose» revient à multiplier ce quelque chose par $\frac{n}{d}$. Autrement dit, multiplier par $\frac{n}{d}$ est équivalent à multiplier par n puis diviser par d , ce qui est aussi équivalent à d'abord diviser par d puis multiplier par n .

Remarque 33



Derrière cette dernière phrase se cache une propriété très importante de la multiplication et de la division, et peut se visualiser avec la notion de "fraction-partage". Prenons un exemple pour l'illustrer avec des tablettes de chocolat : essayons de représenter d'un côté ce que ça fait d'abord de multiplier par 3 une tablette de chocolat puis de diviser le résultat par 4, et d'un autre côté ce que ça fait de d'abord diviser par 4 une tablette de chocolat puis de multiplier par 3 le résultat.

On obtient bien la même chose à la fin, comme l'illustre le dessin ci-dessus.

5 – Nombres rationnels et nombres décimaux, différentes représentations d'un nombre

Définition 34

On appelle *fraction décimale* une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

On rappelle la définition d'un nombre décimal :

Définition 35

Un *nombre décimal* est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

En découle immédiatement la proposition suivante :

Proposition 36

Tout nombre décimal est rationnel.

Remarque 37

Il existe des nombres rationnels qui ne sont pas décimaux : par exemple, $\frac{1}{3}$.

En classe de 6ème, on définit les nombres décimaux comme les nombres qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule. En effet, si un nombre x s'écrit avec n chiffres après la virgule, alors $10^n \times x$ est un nombre entier, puisque cela revient à décaler la virgule de n crans vers la droite. En écrivant alors $x = \frac{10^n \times x}{10^n}$, qui est bien une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, on montre qu'un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule est aussi un nombre décimal (et réciproquement avec la même démonstration).

Ainsi, si on montre qu'un nombre rationnel ne peut pas s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule, alors on montre que ce nombre n'est pas décimal. Point culture : un nombre est rationnel *si, et seulement si* ses décimales se répètent en boucle au bout d'un certain temps, ce que l'on note avec une barre au-dessus des décimales qui se répètent. Par exemple, $\frac{19}{110} = 0,172727272\dots$ se note $\frac{19}{110} = 0,17\overline{2}$. On peut déterminer les décimales d'une fraction avec une division décimale.

$$\begin{array}{r}
 19,000000 \\
 - 0 \\
 \hline
 190 \\
 - 110 \\
 \hline
 800 \\
 - 770 \\
 \hline
 300 \\
 - 220 \\
 \hline
 800 \\
 - 770 \\
 \hline
 300 \\
 - 220 \\
 \hline
 80
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 110 \\
 \hline
 0,17272
 \end{array}$$

5 Racine carrée

1	Notion de racine carrée	35
---	-----------------------------------	----

Compétences

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes

► Nombres

Connaissances

- Les carrés parfaits de 1 à 144.
- Définition de la racine carrée.

► Pratiquer le calcul exact ou approché

Compétences associées

- Encadrer la racine carrée d'un nombre positif entre deux entiers.
- Utiliser une calculatrice pour déterminer une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.
- Utiliser la racine carrée pour résoudre des problèmes, notamment géométriques (théorème de Pythagore, agrandissement ou réduction des aires).

1 – Notion de racine carrée

L'opération consistant à multiplier un nombre par lui-même s'appelle l'*élévation au carré*, ce qui, par définition de la notation puissance, correspond à calculer la puissance 2 de ce nombre. C'est pourquoi on note $x^2 = x \times x$ le carré d'un nombre x .

Définition 1

On appelle *carré parfait* le carré d'un nombre entier.

Exemple 2

Il faut connaître les treize premiers carrés parfaits :

- | | | | | |
|-------------|--------------|--------------|----------------|----------------|
| ► $0^2 = 0$ | ► $3^2 = 4$ | ► $6^2 = 36$ | ► $9^2 = 81$ | ► $12^2 = 144$ |
| ► $1^2 = 1$ | ► $4^2 = 16$ | ► $7^2 = 49$ | ► $10^2 = 100$ | |
| ► $2^2 = 2$ | ► $5^2 = 25$ | ► $8^2 = 64$ | ► $11^2 = 121$ | |

Il est souvent utile de connaître les suivants :

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| ► $13^2 = 169$ | ► $15^2 = 225$ | ► $17^2 = 289$ | ► $19^2 = 361$ |
| ► $14^2 = 196$ | ► $16^2 = 256$ | ► $18^2 = 324$ | ► $20^2 = 400$ |

Proposition 3

Le carré d'un nombre rationnel est toujours positif.

Démonstration : Cela vient du fait que le produit de deux facteurs de même signe est positif. ■

Inversement, on peut se demander si un nombre est le carré d'un autre. Déjà, d'après la Proposition 3, un nombre négatif n'est jamais le carré d'un nombre relatif. De plus, pour tout nombre a , $a^2 = (-a)^2$.

Définition 4

Soit a un nombre positif.

La *racine carrée* de a est l'unique nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré vaut a .

Exemple 5

Les premiers exemples, les plus évidents, sont bien sûr les racines carrées des carrés parfaits :

$$\begin{array}{lllll} \blacktriangleright \sqrt{0} = 0 & \blacktriangleright \sqrt{4} = 2 & \blacktriangleright \sqrt{36} = 6 & \blacktriangleright \sqrt{81} = 9 & \blacktriangleright \sqrt{144} = 12 \\ \blacktriangleright \sqrt{1} = 1 & \blacktriangleright \sqrt{16} = 4 & \blacktriangleright \sqrt{49} = 7 & \blacktriangleright \sqrt{100} = 10 & \\ \blacktriangleright \sqrt{2} = 2 & \blacktriangleright \sqrt{25} = 5 & \blacktriangleright \sqrt{64} = 8 & \blacktriangleright \sqrt{121} = 11 & \end{array}$$

Voici d'autres exemples :

$$\begin{array}{lll} \blacktriangleright \sqrt{5,0625} = 2,25 & \blacktriangleright \sqrt{1,999396} = 1,414 & \blacktriangleright \sqrt{0,0001} = 0,01 \\ \blacktriangleright \sqrt{0,0169} = 0,13 & \blacktriangleright \sqrt{9,8596} = 3,14 & \blacktriangleright \sqrt{0,2025} = 0,45 \end{array}$$

Propriété 6

Pour tous nombres positifs a et b , si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Pour celles et ceux qui veulent comprendre d'où ce résultat provient :

Démonstration : Soient x et y deux nombres positifs tels que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. On note h le nombre $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, de sorte que $\sqrt{x} = \sqrt{y} + h$ et $h \geq 0$. En élevant les deux côtés de cette égalité au carré, on obtient :

$$x = \sqrt{x}^2 = (\sqrt{y} + h)^2 = (\sqrt{y} + h)(\sqrt{y} + h) = \sqrt{y}\sqrt{y} + h\sqrt{y} + \sqrt{y}h + hh = \sqrt{y}^2 + 2\sqrt{y}h + h^2 = y + 2\sqrt{y}h + h^2$$

Or $2\sqrt{y}h + h^2 \geq 0$, donc $x \geq y$.

On a montré que pour tous nombres positifs x et y , si $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$, alors $x \geq y$. Soient a et b deux nombres positifs tels que $a < b$. On veut montrer que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Si ce n'était pas le cas, c'est-à-dire si $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$, alors d'après ce qu'on a montré précédemment, nécessairement $a \geq b$. Or on a supposé que $a < b$, donc il est impossible que $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$. Cela montre bien que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. ⁽¹⁾ ■

De cette propriété découle une méthode pour encadrer les racines carrées :

Méthode 7 (Encadrement d'une racine carrée)

Soit a un nombre positif. Pour encadrer $\sqrt{a}$ entre deux nombres entiers consécutifs, on doit trouver le plus grand carré parfait inférieur ou égal à a . Si on note n^2 un tel carré parfait (avec n entier naturel), alors $n^2 \leq a < (n+1)^2$, donc $n \leq \sqrt{a} < n+1$ (en effet, n^2 est le plus grand carré parfait inférieur ou égal à a , et $(n+1)^2$ est un carré parfait plus grand que n^2 , donc dépasse a).

Exemple 8

On souhaite encadrer $\sqrt{55}$ entre deux entiers. Pour cela on regarde la liste des carrés parfaits :

$$\dots \quad 6^2 = 36 \quad 7^2 = 49 \quad 8^2 = 64 \quad 9^2 = 81 \quad \dots$$

Ainsi $7^2 < 55 < 8^2$, donc $7 < \sqrt{55} < 8$.

(1). Si x et y sont deux nombres (rationnels), alors soit $x < y$, soit $x \geq y$, il n'y a pas d'autre cas possible. On a montré que le second cas était impossible, donc nécessairement, c'est le premier cas qui est le bon.

Exercice 9

► 12 456,64

► 66 267,13

► 864 245,98

► 5 091 902,08

Pour chacun des nombres ci-dessus, appliquer le programme suivant :

1► Choisir un nombre x .

2► Encadrer la racine de ce nombre entre deux entiers consécutifs n et $n + 1$.

3► Calculer $n + \frac{1}{2n}(x - n^2)$.

Comparez les valeurs obtenues par le programme précédent et les racines carrées des nombres ci-dessus (on utilisera une calculatrice) : que remarquez-vous ?

Deuxième partie

Données et Fonctions

1 Fonctions

Compétences

Comprendre et utiliser la notion de fonction

- ▶ Connaissances
 - ▶ Vocabulaire : variable, fonction, antécédent, image.
 - ▶ Différents modes de représentation d'une fonction (expression symbolique, tableau de valeurs, représentation graphique, programme de calcul).
 - ▶ Notations $f()$ et $\mapsto f()$.
 - ▶ Fonction linéaire, fonction affine.
- ▶ Compétences associées
 - ▶ Passer d'un mode de représentation d'une fonction à un autre.
 - ▶ Déterminer, à partir d'un mode de représentation, l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction.
 - ▶ Représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine.
 - ▶ Modéliser un phénomène continu par une fonction.
 - ▶ Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire.
 - ▶ Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions.

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation des procédures et la résolution de problèmes, menées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé ou automatisé :

- ▶ différentes procédures de calcul d'une quatrième proportionnelle ;
- ▶ l'allure de la représentation graphique d'une fonction affine ou linéaire ;
- ▶ les procédures d'application et de calcul d'un pourcentage ou d'une échelle ;
- ▶ les procédures de recherche d'image et d'antécédent d'un nombre par une fonction.

2

Grandeurs et proportionnalité

Compétences

Résoudre des problèmes de proportionnalité

- ▶ Connaissances
 - ▶ Coefficient de proportionnalité.
 - ▶ Taux d'évolution, coefficient multiplicateur.
 - ▶ Notion de ratio : on dit, par exemple, que :
 - ▶ deux nombres a et b sont dans le ratio 2 : 3 (notation standardisée) si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$
 - ▶ trois nombres a, b, c sont dans le ratio 2 : 3 : 7 (notation standardisée) si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$
- ▶ Compétences associées
 - ▶ Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
 - ▶ Calculer une quatrième proportionnelle.
 - ▶ Partager une quantité (par exemple une somme d'argent) en deux ou trois parts selon un ratio donné.
 - ▶ Utiliser une formule liant deux grandeurs dans une situation de proportionnalité (par exemple la longueur d'un cercle en fonction de son rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension en fonction de l'intensité, la distance parcourue en fonction du temps à vitesse constante, etc.).
 - ▶ Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité (pourcentages, échelles, agrandissement réduction).

3 Statistiques

Compétences

Interpréter, représenter et traiter des données

- ▶ Connaissances
 - ▶ Effectifs, fréquences.
 - ▶ Indicateurs de position : moyenne, médiane.
 - ▶ Indicateur de dispersion : étendue.
- ▶ Compétences associées
 - ▶ Recueillir des données, les organiser.
 - ▶ Lire et interpréter des données sous forme de données brutes, de tableau, de diagramme (diagramme en bâtons, diagramme circulaire, histogramme).
 - ▶ Utiliser un tableur-grapheur pour présenter des données sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme.
 - ▶ Calculer des effectifs, des fréquences.
 - ▶ Calculer et interpréter des indicateurs de position ou de dispersion d'une série statistique.

4 Probabilités

Compétences

Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités

- ▶ Connaissances
 - ▶ Vocabulaire des probabilités.
 - ▶ Notion de probabilité ; la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1.
 - ▶ Probabilité d'événements certains, impossibles, contraires.
- ▶ Compétences associées
 - ▶ Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples.
 - ▶ Calculer des probabilités dans des cas simples (par exemple évaluation des chances de gain dans un jeu).
 - ▶ Exprimer des probabilités sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage).
 - ▶ Faire le lien entre fréquence et probabilité.

Troisième partie

Espace et Géométrie

1 Transformations du plan

Comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques

- ▶ Connaissances
 - ▶ Effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les angles, les aires et les volumes.
- ▶ Compétences associées
 - ▶ Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes) pour calculer des longueurs, des aires, des volumes.
 - ▶ Utiliser l'échelle d'une carte.
 - ▶ Utiliser des transformations pour calculer des grandeurs géométriques.
 - ▶ Faire le lien entre la proportionnalité et certaines configurations ou transformations géométriques (agrandissement réduction, triangles semblables, homothéties).

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé et automatisé les formules donnant les longueurs, aires, volumes des figures et solides figurant au programme, ainsi que les procédures de conversion d'unités.

2 Quadrilatères

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

- ▶ Connaissances
 - ▶ Caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes internes, angles correspondants.
 - ▶ Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique).
- ▶ Compétences associées
 - ▶ Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.

Les définitions ponctuelles d'une rotation, d'une translation, d'une homothétie ne figurent pas au programme.

À l'issue d'activités rituelles de construction et de verbalisation des procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé des images mentales (configurations de Pythagore et de Thalès, lignes trigonométriques dans un triangle rectangle) et automatisé les procédures de repérage et de constructions géométriques liées aux figures et aux transformations du programme.

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées

- ▶ Connaissances
 - ▶ Aire du parallélogramme (obtenue à partir de celle du rectangle par découpage et recollement).

3 Triangles

1	Éléments de géométrie dans le plan	48
2	Triangles semblables	51
3	Triangles remarquables, droites remarquables d'un triangle	53
4	Triangles rectangles	54
4.1	Le théorème de Pythagore	54
4.2	Triangles rectangles et cercles	57
4.3	Cosinus d'un angle	58

Compétences

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

- ▶ Connaissances
 - ▶ Triangle :
 - ▶ somme des angles d'un triangle (démonstration possible en utilisant les angles correspondants) ;
 - ▶ hauteurs et médiatrices ;
 - ▶ inégalité triangulaire ;
 - ▶ cas d'égalité des triangles ;
 - ▶ triangles semblables (une définition et une propriété caractéristique).
 - ▶ Le théorème de Thalès et sa réciproque (configurations des triangles emboîtés et du papillon).
 - ▶ Le théorème de Pythagore et sa réciproque.
 - ▶ Lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : *cosinus*, *sinus*, *tangente*.
- ▶ Compétences associées
 - ▶ Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.
 - ▶ Faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles.
 - ▶ Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.
 - ▶ Mobiliser les connaissances des figures, des configurations et des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques.
 - ▶ Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations.

Les définitions ponctuelles d'une rotation, d'une translation, d'une homothétie ne figurent pas au programme.

À l'issue d'activités rituelles de construction et de verbalisation des procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé des images mentales (configurations de Pythagore et de Thalès, lignes trigonométriques dans un triangle rectangle) et automatisé les procédures de repérage et de constructions géométriques liées aux figures et aux transformations du programme.

Comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques

- ▶ Compétences associées

- Faire le lien entre la proportionnalité et certaines configurations ou transformations géométriques (agrandissement réduction, triangles semblables, homothéties).

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé et automatisé les formules donnant les longueurs, aires, volumes des figures et solides figurant au programme, ainsi que les procédures de conversion d'unités.

1 – Éléments de géométrie dans le plan

Un théorème, c'est quelque chose qui part de trucs vrais (les hypothèses) pour produire un nouveau truc vrai (la conclusion). Les hypothèses peuvent elles-mêmes provenir d'autres théorèmes, et ainsi de suite... Mais alors, c'est une boucle sans fin ! En effet, pour produire un théorème, on faut donc disposer d'au moins un truc vrai de base, qui ne vient pas lui-même d'un théorème. Ces trucs vrais de base, c'est ce qu'on appelle des *axiomes*. Tout le monde est d'accord pour dire que c'est vrai, et on se base là-dessus pour énoncer les théorèmes. C'est un peu comme des briques de Lego : les axiomes sont les briques élémentaires. On peut les assembler pour former de nouvelles structures – des théorèmes, et on peut assembler ces structures pour faire des structures encore plus grandes.

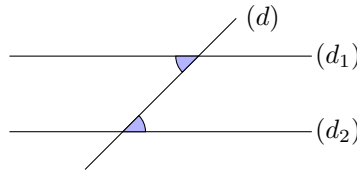
La géométrie euclidienne est la branche de la géométrie qui part des cinq axiomes suivants, formulés par Euclide :

- 1► Par deux points passe une droite.
- 2► Tout segment peut être prolongé suivant sa direction en une droite.
- 3► Étant donné un segment de droite quelconque, on peut toujours tracer un cercle dont ce segment est un rayon.
- 4► Tous les angles droits sont égaux entre eux.
- 5► Il existe une et une seule parallèle à une droite passant par un point donné.

Théorème 1 (des angles alternes-internes)

Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles non confondues, et (d) une droite qui intersecte (d_1) et (d_2) .

Les angles alternes-internes formés par ces intersections (ceux représentés sur la figure) sont de même mesure.

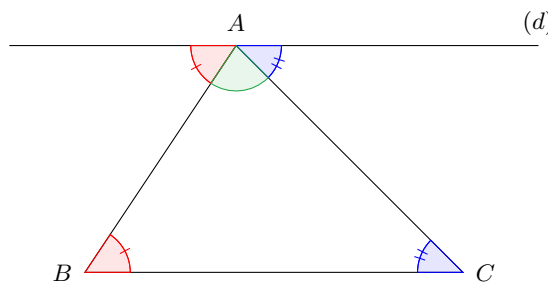


La démonstration de ce théorème est vraiment très difficile !

Théorème 2

La somme des (mesures des) angles d'un triangle vaut toujours 180° .

Démonstration : On considère un triangle ABC quelconque (non aplati, sinon le théorème est immédiat). On trace la droite (d) parallèle à BC passant par A .

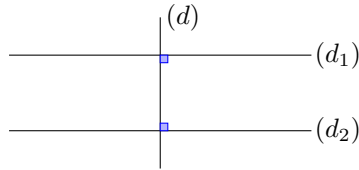


Comme (d) et (BC) sont parallèles, les angles rouges sont égaux d'après le théorème des angles alternes-internes, et il en va de même pour les angles bleus. Ces trois angles forment un angle plat sur (d) de sommet A , et donc la somme de leurs mesures vaut celle d'un angle plat, c'est-à-dire 180° . ■

Théorème 3

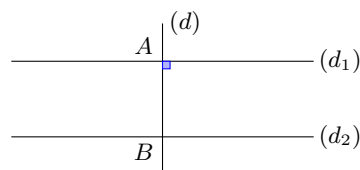
Soient d , d_1 et d_2 trois droites du plan, avec d et d_1 perpendiculaires.

Les droites d et d_2 sont perpendiculaires si, et seulement si d_1 et d_2 sont parallèles.

**Remarque 4**

On voit souvent le sens direct de ce théorème formulée de la sorte : «deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles».

Démonstration : On note A et B les points d'intersection de d et d_1 et de d et d_2 .



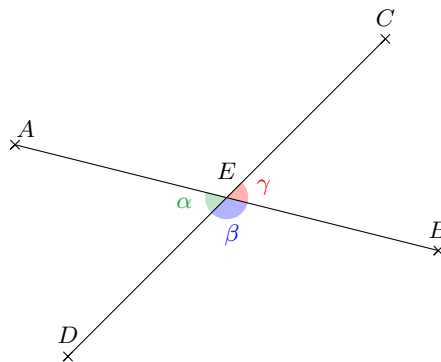
Commençons par le sens direct. Supposons que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles : alors elles s'intersectent en un point C . Mais alors ABC est un triangle possédant deux angles droits en A et en B , ce qui est impossible puisque la somme des angles d'un triangle est toujours 180° . Donc d_1 et d_2 sont parallèles.

Démontrons le sens réciproque. Soit d_3 la perpendiculaire à d passant par B . D'après le sens direct du théorème, comme d_1 et d_3 sont toutes deux perpendiculaires à d , d'après le sens direct, elles sont parallèles. Or d_2 est aussi une parallèle à d_1 passant par B , donc par unicité de la parallèle à une droite passant par un point donné (axiome d'Euclide), d_2 et d_3 sont la même droite, *a fortiori* d_2 est perpendiculaire à d . ■

Théorème 5

Deux angles opposés au sommet sont de même mesure.

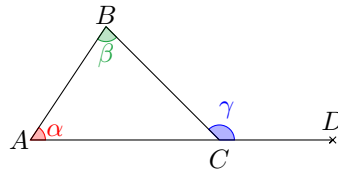
Démonstration : On représente la situation sur un dessin :



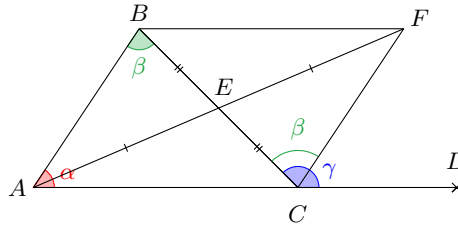
On a $\alpha + \beta = 180^\circ = \beta + \gamma$ donc $\alpha = \gamma$. ■

Théorème 6

Soit ABC un triangle non aplati. Avec les notations sur la figure ci-dessous, $\alpha < \gamma$ et $\beta < \gamma$.



Démonstration : On complète ABC en un parallélogramme $ABCF$ dont $[BC]$ est une diagonale :

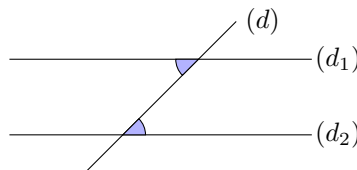


Le triangle CEF est une symétrie centrale de ABC de centre E , donc les angles sont conservés. En particulier, $\beta = \widehat{ABC} = \widehat{ECF} < \widehat{BCD} = \gamma$. En complétant ABC en un parallélogramme dont $[AC]$ est une diagonale, on montre de la même manière que $\alpha < \gamma$. ■

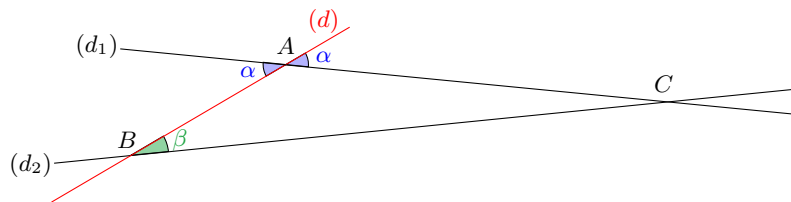
Théorème 7 (des angles alternes-internes réciproque)

Soient (d_1) et (d_2) deux droites non confondues, et (d) une droite qui intersecte (d_1) et (d_2) .

Si les angles alternes-internes formés par ces intersections (ceux représentés sur la figure) sont de même mesure, alors les droites (d_1) et (d_2) .



Démonstration : Supposons que (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles, elles s'intersectent alors en un point C . On note A l'intersection de (d) et (d_1) , et B l'intersection de (d) et (d_2) .

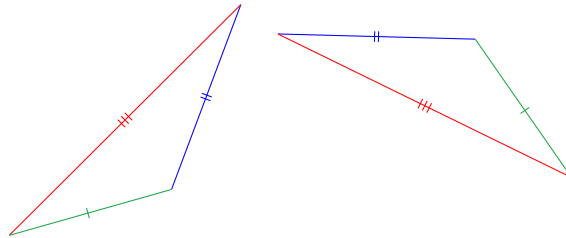


Au sommet A , les deux angles opposés ont la même mesure α . D'après le théorème précédent, comme α est un angle extérieur au triangle ABC au sommet A , il est strictement plus petit que β , et donc $\alpha \neq \beta$. C'est contradictoire, puisqu'on a supposé que $\alpha = \beta$. ■

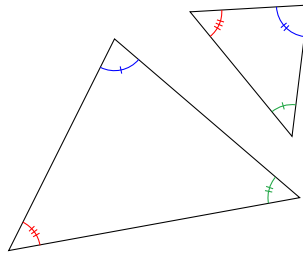
2 – Triangles semblables

Définition 8

- On dit que deux triangles sont *égaux* ou *isométriques* si leurs côtés sont deux à deux de même longueur. Cela revient à dire qu'on peut les superposer.



- On dit que deux triangles sont *semblables* si leur angles sont deux à deux de même mesure.

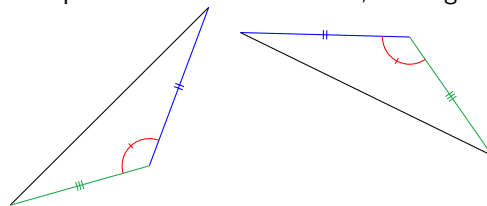


Proposition 9

Deux triangles égaux sont semblables.

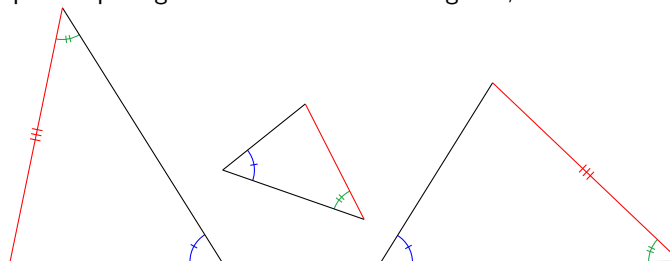
Proposition 10

Deux triangles qui ont deux côtés ayant deux à deux même longueur, et tels que l'angle entre ces côtés correspondant ont même mesure, sont égaux.



Proposition 11

Deux triangles qui ont deux angles deux à deux de même mesure sont semblables.
Si de plus ils partagent un côté de même longueur, alors ils sont égaux.

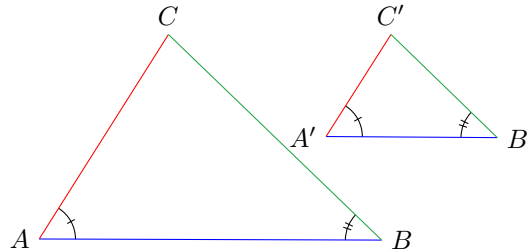


Proposition 12

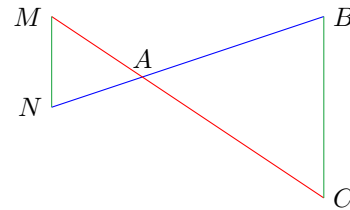
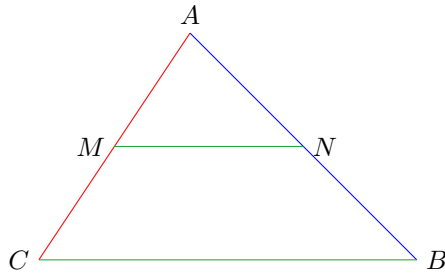
Deux triangles sont semblables *si, et seulement si* leurs côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles. Autrement dit, deux triangles sont semblables *si, et seulement si* l'un est un agrandissement/une réduction de l'autre.

En nommant les triangles semblables ABC et $A'B'C'$, on obtient la relation de proportionnalité :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

**Théorème 13 (de Thalès)**

Dans les configurations suivantes, $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = \frac{BC}{MN}$ *si, et seulement si* les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Autrement dit, ABC et AMN sont semblables *si, et seulement si* (BC) et (MN) sont parallèles.



Démonstration : Cela découle du théorème des angles alternes-internes et la caractérisation des triangles semblables par les paires d'angles égaux. ■

3 – Triangles remarquables, droites remarquables d'un triangle

Dans tout ce paragraphe, ABC désigne un triangle.

Définition 14

- ▶ Si les trois côtés de ABC sont de même longueur, alors on dit que ABC est *équilatéral*.
- ▶ Si $AB = AC$, alors on dit que ABC est *isocèle en A*. Le point A est appelé *sommet* du triangle, et $[BC]$ est appelée *base* du triangle.
- ▶ Si $\widehat{BAC} = 90^\circ$, alors on dit que ABC est *rectangle en A*.

Propriété 15

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure.

Propriété 16

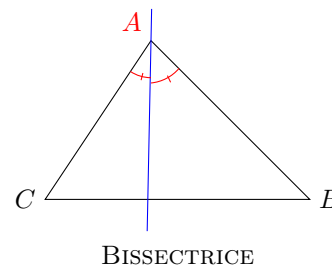
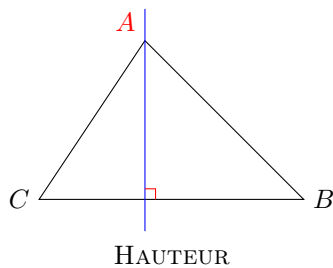
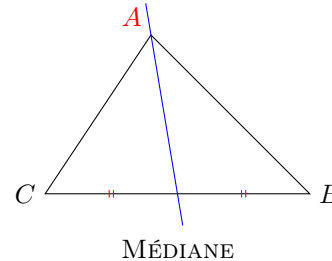
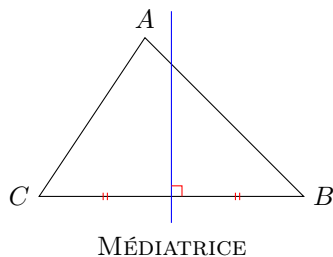
Les angles d'un triangle équilatéral ont tous pour mesure 60° .

Propriété 17

Les angles à la base d'un triangle isocèle et rectangle ont pour mesure 45° .

Définition 18 (droites remarquables d'un triangle)

- ▶ La *médiatrice* du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par le milieu de $[AB]$.
- ▶ La *médiane issue de A* est la droite passant par A et le milieu du côté opposé, qui est $[BC]$.
- ▶ La *hauteur issue de A* est la droite passant par A perpendiculaire au côté opposé, qui est $[BC]$.
- ▶ La *bissectrice issue de A* est la droite passant par A qui divise l'angle en A en 2 angles de mesures égales.



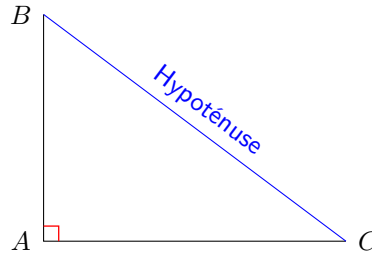
Intersections des droites remarquables...

4 – Triangles rectangles

4.1. Le théorème de Pythagore

Définition 19

Soit ABC un triangle. On dit que ABC est *rectangle en A* si l'angle $\widehat{BAC}$ a une mesure de 90° . Le côté $[BC]$, opposé à l'angle droit en A , est alors appelé *hypoténuse* de ABC .



Remarque 20

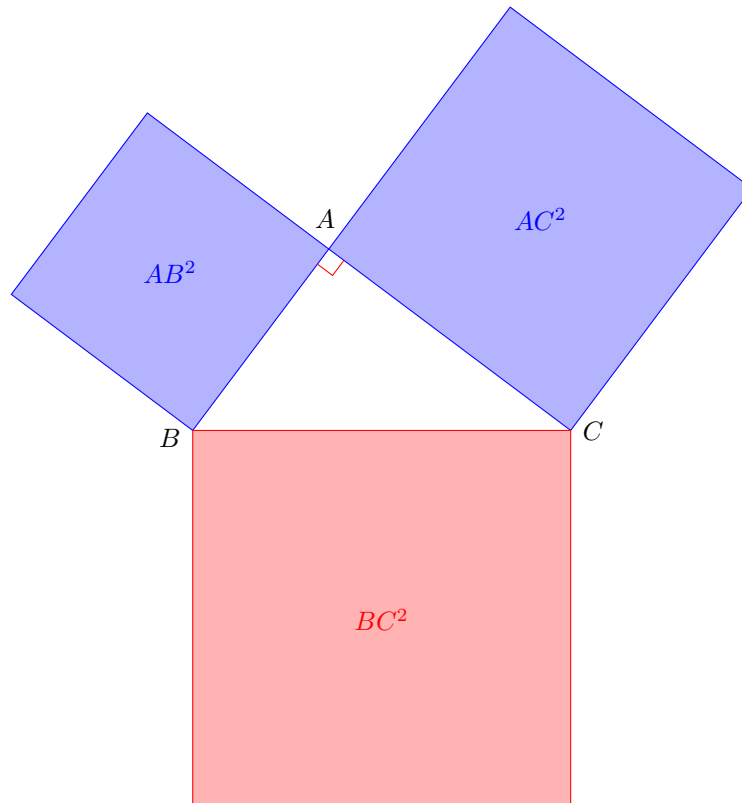
Le mot «hypoténuse» vient du grec *hypo* (sous) et *teinô* (tendre) : c'est le côté qui «sous-tend» l'angle droit.

Théorème 21 (de Pythagore)

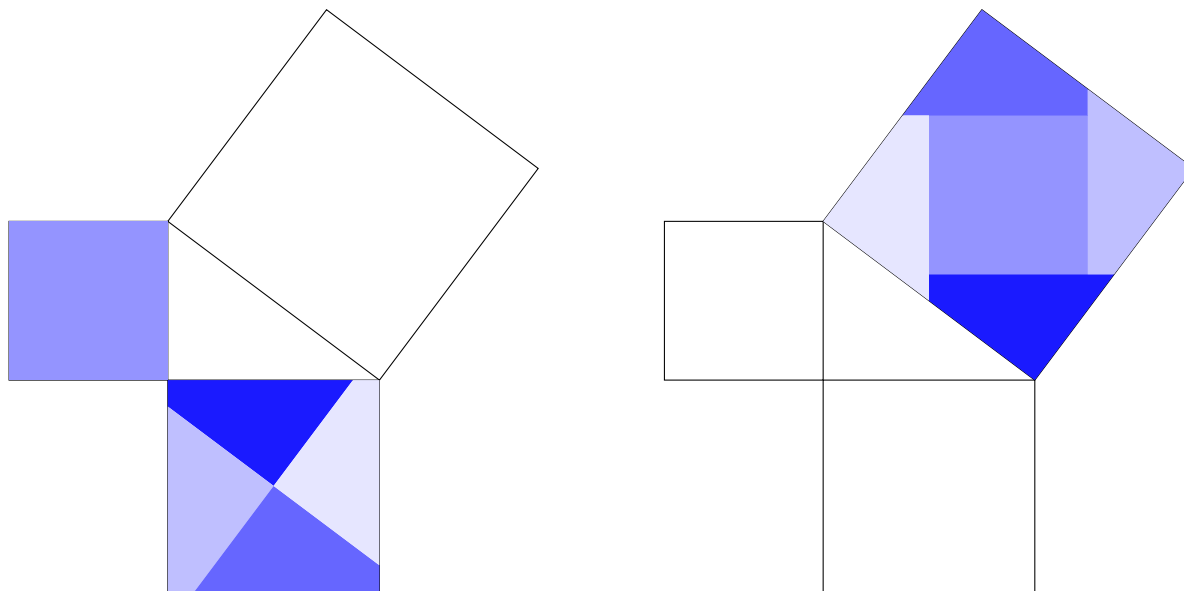
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si un triangle ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Le carré d'une longueur est une surface. Plus précisément, le carré d'une longueur ℓ est la surface d'un carré de côté ℓ . Pour cette raison, on représente souvent le théorème de Pythagore de la manière suivante :



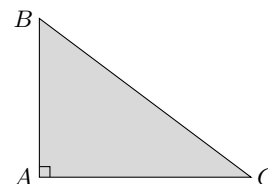
On peut constater l'égalité de Pythagore avec une maquette du style tangram. En effet, après découpe et réarrangement :



Cela donne une bonne sensation, mais ce n'est en rien une démonstration : en effet, ce tangram montre que l'égalité de Pythagore est vraie pour ce triangle, alors que le théorème de Pythagore dit qu'elle est vraie pour *tout* triangle rectangle... Un autre découpage, qui se prête mieux à la généralisation, permet de montrer le théorème de Pythagore :

Démonstration :

On considère un triangle ABC rectangle en A . On considère 4 copies de ce triangle, que l'on arrange des deux manières suivantes :

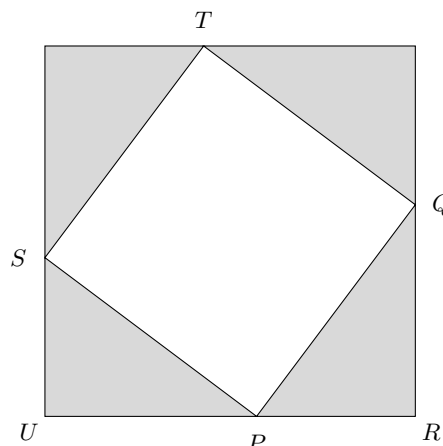


Comme ABC est rectangle en A , la grande figure formée est un carré de côté de longueur $AC + AB$.

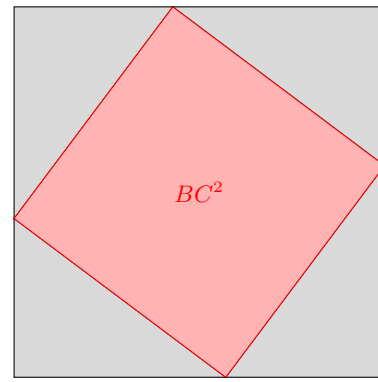
Justifions que $PQRS$ est un carré : c'est un quadrilatère dont les côtés sont les hypoténuses des copies de ABC . En particulier, ses 4 côtés sont de même longueur, c'est donc un losange. Pour justifier que c'est un carré, il suffit de justifier que c'est un rectangle, c'est-à-dire que ses 4 angles sont droits. On a :

$$180^\circ = \widehat{UPR} = \widehat{UPS} + \widehat{SPQ} + \widehat{RPQ}$$

Or $\widehat{SPQ}$ et $\widehat{RPQ}$ sont les deux angles non droits de ABC , donc leur somme vaut 90° (puisque la somme des angles d'un triangle vaut 180°). Ainsi, $180^\circ = \widehat{SPQ} + 90^\circ$, donc $\widehat{SPQ} = 90^\circ$. On montre de même que les autres angles sont droits. Ainsi, $PQRS$ est bien un carré.

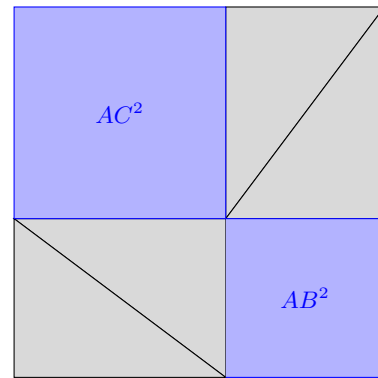


Comme $PQRS$ est un carré de côté de longueur BC , son aire est BC^2 , donc l'aire de la figure est $BC^2 + 4 \times \text{Aire}(ABC)$.



$AC + AB$

En positionnant les 4 copies de ABC de cette nouvelle manière, on recrée un grand carré de côté $AB + AC$. À l'intérieur, les deux zones sont des carrés de côté AB et de côté AC , qui sont donc d'aire AB^2 et C^2 . (Remarque : tous ces carrés sont bien des carrés car ABC est rectangle en A) L'aire totale de cette figure, avec ce découpage, s'écrit $AC^2 + BC^2 + 4 \times \text{Aire}(ABC)$.



$AC + AB$

On a découpé un même carré de deux manières différentes, ce qui donne cette égalité sur les aires :

$$BC^2 + 4 \times \text{Aire}(ABC) = AC^2 + BC^2 + 4 \times \text{Aire}(ABC)$$

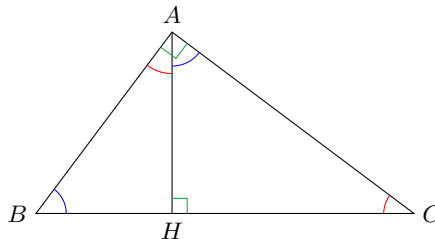
On peut enlever le $4 \times \text{Aire}(ABC)$ de part et d'autre du signe $=$, ce qui donne finalement :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

■

Cette preuve est géométrique, on peut également démontrer le théorème de Pythagore de manière plus abstraite avec la notion de triangles semblables :

Démonstration : Soit ABC un triangle rectangle en A , on note H le pied de la hauteur issue de A .



Le triangle AHC est rectangle en H , et son angle en C est le même que celui de ABC en C : ils partagent deux angles, ont ABC et AHC sont semblables, d'après la Proposition 11. D'après la Proposition 12, on dispose alors de la relation :

$$\frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \left(= \frac{AB}{AH} \right).$$

En multipliant cette (première) égalité par AC et HC et en simplifiant alors les fractions, on obtient l'égalité $AC^2 = BC \times HC$.

De même, le triangle AHB est rectangle en H , et son angle en B est le même que celui de ABC en B : ils partagent deux angles, donc ABC et AHB sont semblables, d'après la Proposition 11. D'après la Proposition 12, on dispose alors de la relation :

$$\left(\frac{AC}{AH} = \right) \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{HB}.$$

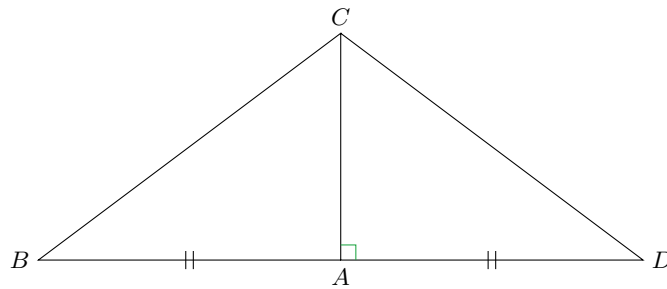
En multipliant cette (seconde) égalité par AB et HB et en simplifiant alors les fractions, on obtient l'égalité $AB^2 = BC \times HB$. Ainsi,

$$AC^2 + AB^2 = BC \times HC + BC \times HB = BC \times (HC + HB) = BC \times BC = BC^2$$

Théorème 22 (de Pythagore réciproque)

Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore, alors il est rectangle.
Plus précisément, si un triangle ABC vérifie $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .

Démonstration : Soit ABC un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On construit un triangle ABD , partageant le côté AB de ABC , tel que $AD = AC$ et $\widehat{BAD}$ est droit.



D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ACD rectangle en A ,

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 = AC^2 + AB^2 = BC^2$$

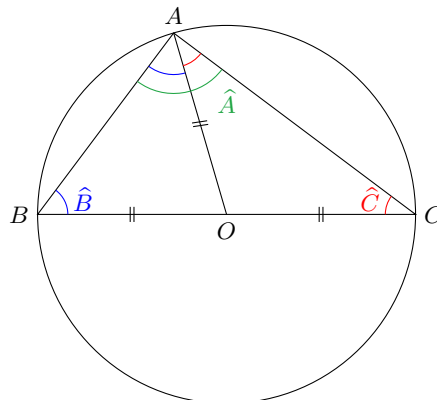
et donc $CD = BC$ (car CD et BC sont des longueurs, donc des nombres positifs). Mais alors ABC et ACD partagent les 3 mêmes longueurs, ils sont donc égaux. Par conséquent, leurs angles correspondent deux à deux, et en particulier $\widehat{CAB} = \widehat{CAD} = 90^\circ$, ce qui montre que ABC est rectangle en A .

4.2. Triangles rectangles et cercles

Proposition 23

Soit ABC inscrit dans un cercle.
Si $[BC]$ est un diamètre de ce cercle, alors ABC est rectangle en A .

Démonstration : On note O le milieu de $[BC]$, et $\hat{A}$ la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Traçons le rayon $[OA]$ du cercle :



Le triangle OAB est isocèle en O , donc les angles à sa base (sur le dessin en bleu) sont égaux – on note $\hat{B}$ leur mesure commune. Le triangle OAC est isocèle en O , donc les angles à sa base (sur le dessin en rouge) sont égaux – on note $\hat{C}$ leur mesure commune. En particulier, $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$. Or $180^\circ = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{A} + 2\hat{A}$, donc $\hat{A} = 90^\circ$, c'est-à-dire que ABC est rectangle en A . ■

4.3. Cosinus d'un angle

Définition 24

Soit ABC un triangle rectangle en A . On note $\hat{B}$ l'angle de ABC de sommet B .

Le *cosinus* de $\hat{B}$, et on note $\cos(\hat{B})$, le nombre $\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC}$.

Le côté AB est appelé le côté *adjacent* à $\hat{B}$, et AC est appelé le côté *opposé* à $\hat{B}$.

Le *cosinus d'un angle* est le rapport des longueurs de son côté adjacent par l'hypoténuse.

Méthode 25

Pour calculer une valeur approchée de la mesure d'un angle d'un triangle rectangle, on peut utiliser la touche $\cos^{-1}$ ou arccos de la calculatrice : avec la calculatrice, pour trouver la mesure d'un angle $\hat{B}$ quand on connaît son cosinus, on utilise la relation $\arccos(\cos(\hat{B})) = \hat{B}$.

4 Espace et volumes

1	Unités de volume, conversions	60
2	Solides usuels	62
3	Pyramides et cônes	65

Compétences

Représenter l'espace

- Connaissances
 - Abscisse, ordonnée, altitude.
 - Latitude, longitude.
- Compétences associées
 - (Se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède rectangle, sur une sphère.
 - Reconnaître des solides (pavé droit, cube, prisme, cylindre, pyramide, cône, boule).
 - Construire et mettre en relation des représentations de ces solides (vues en perspective cavalière, de face, de dessus, sections planes, patrons, etc.).
 - Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour représenter des solides.

Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées

- Connaissances
 - Notion de grandeur produit et de grandeur quotient.
 - Volume d'un prisme, d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône, d'une boule.
 - Correspondance entre unités de volume et de contenance ($1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, $1\,000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$).
- Compétences associées
 - Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, exprimer les résultats dans les unités adaptées.
 - Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités.
 - Effectuer des conversions d'unités.

Comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques

- Connaissances
 - Effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les angles, les aires et les volumes.
- Compétences associées
 - Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes) pour calculer des longueurs, des aires, des volumes.

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé et automatisé les formules donnant les longueurs, aires, volumes des figures et solides figurant au programme, ainsi que les procédures de conversion d'unités.

1 – Unités de volume, conversions

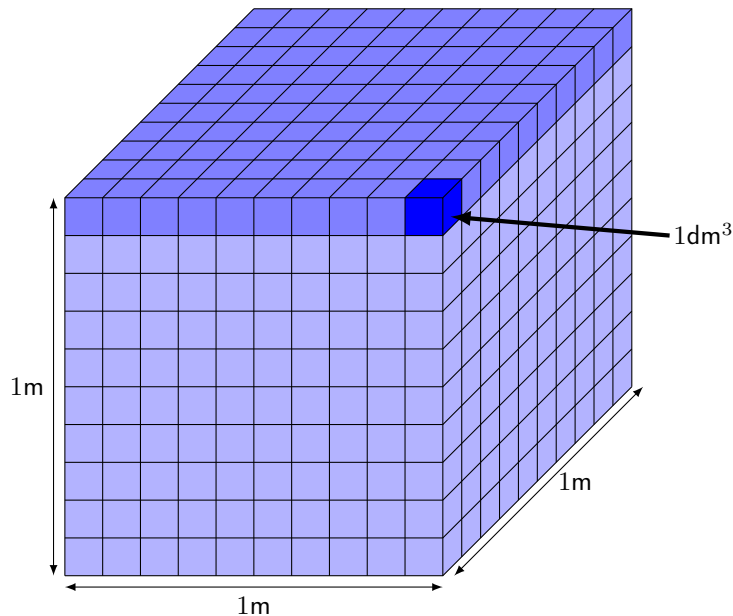
Définition 1

Le *volume* d'un solide est une mesure de l'espace occupé par ce solide.

L'unité du volume est le *mètre cube* (m^3). D'autres multiples de cette unité sont fréquemment utilisés : le *décimètre cube* (dm^3), le *centimètre cube* (cm^3) et le *millimètre cube* (mm^3).

Propriété 2

- ▶ Un mètre cube est le volume d'un cube de 1m de côté.
- ▶ Un décimètre cube est le volume d'un cube de 1dm de côté.
- ▶ Un centimètre cube est le volume d'un cube de 1cm de côté.
- ▶ Un millimètre cube est le volume d'un cube de 1mm de côté.



Si on coupe le côté d'un cube d'un mètre de côté en 10, on obtient des plus petits cubes d'un décimètre de côté. Ce faisant, on découpe le cube en 10 couches de $10 \times 10 = 100$ petits cubes de 1dm^3 . Ainsi, on a découpé le cube de 1m^3 en 1000 cubes de 1dm^3 . Par le même découpage avec des cubes différents, on en déduit :

Proposition 3

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| ▶ $1\text{m}^3 = 1\,000\text{dm}^3$ | ▶ $1\text{cm}^3 = 1\,000\text{mm}^3$ | ▶ $1\text{dm}^3 = 1\,000\,000\text{mm}^3$ |
| ▶ $1\text{dm}^3 = 1\,000\text{cm}^3$ | ▶ $1\text{m}^3 = 1\,000\,000\text{cm}^3$ | ▶ $1\text{m}^3 = 1\,000\,000\,000\text{mm}^3$ |

Remarque 4

Attention aux unités : en effet, pour calculer un volume, il faut d'abord que les grandeurs soient dans la même unité ! On ne peut pas multiplier des m avec des cm, ou des dm^2 avec des mm ! On peut cependant multiplier des m avec des m, ou des cm avec des cm^2 .

Pour désigner le volume à l'intérieur d'un récipient, on parle plutôt de *contenance*, et on utilise une unité plus pratique pour les contenances de la vie de tous les jours : le litre (L).

Définition 5

On définit $1\text{L} = 1\text{dm}^3$.

Remarque 6

Le mètre cube et le litre ne sont pas utilisés dans le même contexte : on utilise des mètres cubes quand on s'intéresse aux dimensions du contenant, et on utilise les litres quand seul le volume en lui-même du contenant nous intéresse. La raison pour cela découle de la conversion de ces unités, que l'on détaille ci-dessous.

Méthode 7 (Conversion des volumes)

Pour convertir des volumes en m^3 , dm^3 , cm^3 , ... , on utilise la Proposition 3, qui se traduit avec le tableau suivant :

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		

Par exemple, essayons de convertir $23,1\text{dm}^3$ en cm^3 .

- 1► On commence par écrire le 3 unités de décimètre dans la première colonne des décimètres, puisqu'étant la colonne des unités de décimètre.
- 2► On écrit le reste du nombre en écrivant les autres chiffres dans les colonnes adjacentes. Il ne faut pas recopier la virgule du nombre à convertir.
- 3► En effet, on place maintenant la virgule à droite de la colonne (entre cette colonne et la suivante) de l'unité qui est la destination de la conversion. Ici, on place la virgule à droite de la colonne des unités de cm^3 , puisqu'on cherche à convertir en cm^3 .
- 4► On ajoute autant de 0 que nécessaire entre le nombre et la virgule qu'on vient de placer jusqu'à ce qu'il y ait un 0 à droite de la virgule.
- 5► Le nombre converti est alors celui qui est écrit. Ici, on a obtenu l'égalité $23,1\text{dm}^3 = 23\,100\text{cm}^3$.

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
				2	3	1	0	0	,		

Autre exemple : convertissons $23,1\text{dm}^3$ en m^3 grâce à cette même méthode :

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		0	,	0	2	3	1				

Ce qui donne l'égalité : $23,1\text{dm}^3 = 0,0231\text{m}^3$.

Remarque 8

Chaque unité regroupe 3 colonnes dans le tableau. Pour convertir des aires (en m^2), c'est la même méthode mais avec seulement 2 colonnes. Pour convertir des longueurs (en m), on peut également représenter le procédé avec un tableau, dans lequel chaque unité regroupe 1 seule colonne. Pour résumer : chaque unité regroupe autant de colonnes que l'exposant de la puissance de l'unité : 3 colonnes pour les m^3 , 2 colonnes pour les m^2 , 1 colonne pour les $\text{m}^1 = \text{m}$.

Les litres (L) quand à eux portant un exposant 1 (c'est-à-dire pas d'exposant), il n'est pas nécessaire d'utiliser un tableau comme celui-ci. Il suffit de les convertir comme on convertit des distances en mètres.

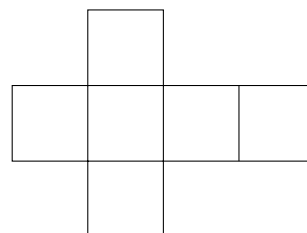
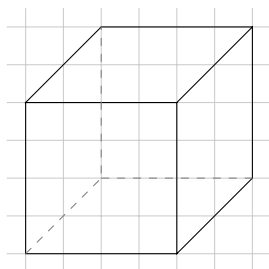
Remarque 9

Une autre manière d'effectuer les conversions est la suivante : pour convertir $23,1\text{dm}^3$ en cm^3 , on écrit :

$$23,1\text{dm}^3 = 23,1 \times (1\text{dm}^3) = 23,1 \times (1\,000\text{cm}^3) = 23,1 \times 1\,000\text{cm}^3 = 23\,100\text{cm}^3.$$

Exercice 10

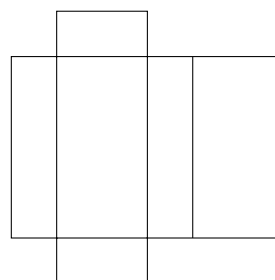
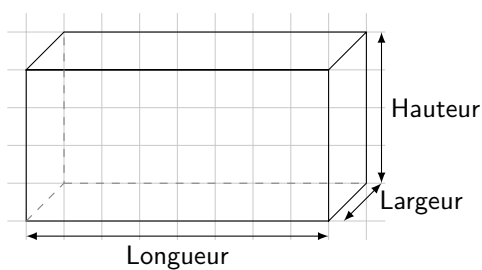
Convertissez :

a► $23,1\text{m}^3$ en cm^3 b► $0,5\text{dm}^3$ en cm^3 c► 25cm^3 en Ld► 1cL en cm^3 **2 – Solides usuels****Définition 11**Un (solide) *polyèdre* est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

CUBE

- Nombre de sommets : 8
- Nombre d'arêtes : 12

- Faces : 6 carrés
- C'est un polyèdre

Proposition 12Le volume d'un cube de côté a est $a^3 = a \times a \times a$.

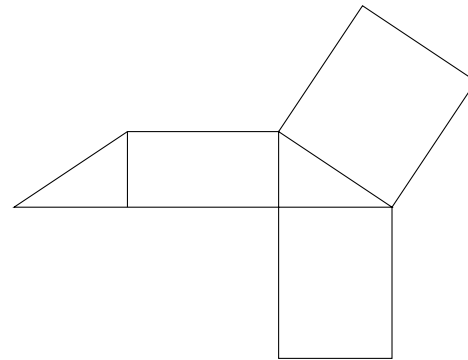
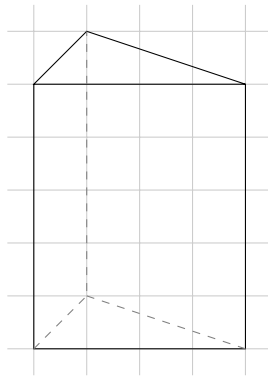
PAVÉ DROIT

- Nombre de sommets : 8
- Nombre d'arêtes : 12

- Faces : 6 rectangles
- C'est un polyèdre

Proposition 13Le volume d'un pavé droit de longueur L , de largeur ℓ et de hauteur h est $L \times \ell \times h$.**Remarque 14**

Un cube est un type particulier de pavé droit, dont les faces sont des carrés.

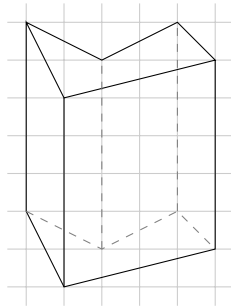


PRISME DROIT (À BASE TRIANGULAIRE)

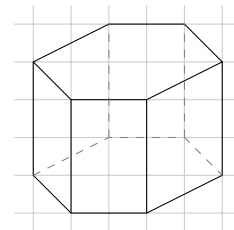
- ▶ Nombre de sommets : 6
- ▶ Nombre d'arêtes : 9
- ▶ Faces : 2 triangles et 3 rectangles
- ▶ C'est un polyèdre

Définition 15

De manière générale, un *prisme droit* est un solide obtenu en prenant un polygone, en élevant une copie de ce même polygone au-dessus du premier, et en reliant les côtés correspondants de ces deux polygones par des rectangles.



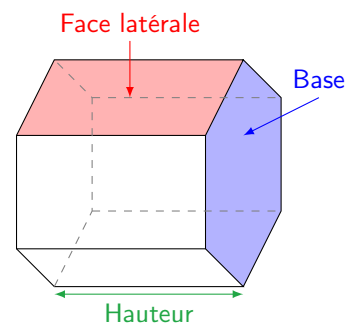
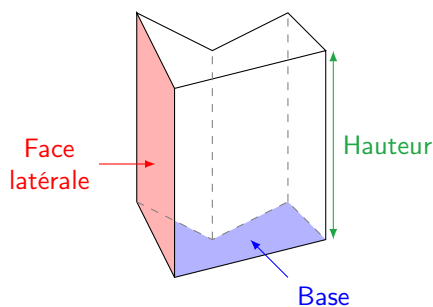
PRISME DROIT À BASE PENTAGONALE



PRISME DROIT À BASE HEXAGONALE

Définition 16

- ▶ La *base* d'un prisme droit est le polygone qui permet de le construire. (Ainsi, deux faces peuvent être désignées comme «base» d'un prisme droit).
- ▶ La *hauteur* d'un prisme droit est la distance entre les deux faces qui sont des bases du prisme.
- ▶ Les *faces latérales* d'un prisme droit sont les faces (rectangulaires) qui ne sont pas des bases.

**Proposition 17**

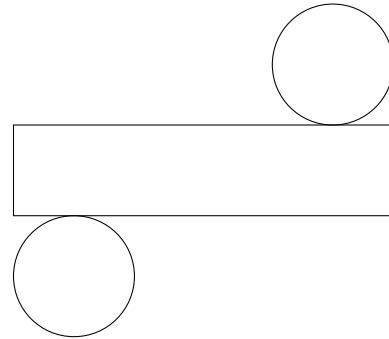
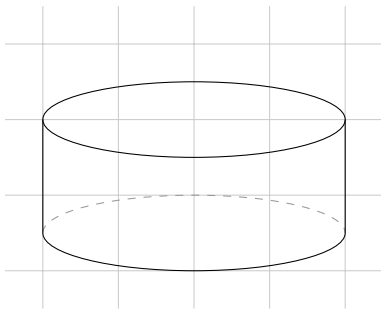
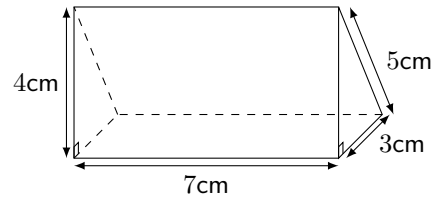
Le volume d'un prisme droit de hauteur h et dont la base est d'aire $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B} \times h$.

Remarque 18

Un pavé droit est un type particulier de prisme droit, à base rectangulaire.

Exercice 19

Calculez le volume du prisme ci-contre :



CYLINDRE (DE RÉVOLUTION)

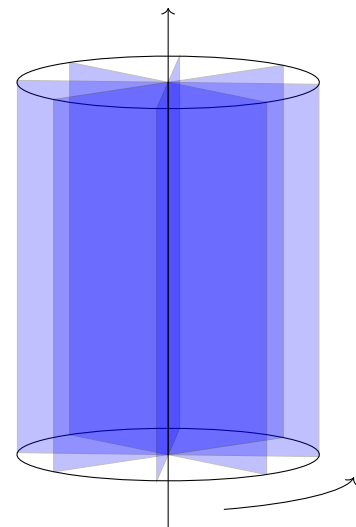
- ▶ Nombre de sommets : 0
- ▶ Nombre d'arêtes : 2
- ▶ Faces : 2 disques et 1 face courbe
- ▶ Ce n'est pas un polyèdre

Définition 20

- ▶ La *base* d'un cylindre de révolution désigne l'une des deux faces qui sont des disques.
- ▶ La *hauteur* d'un cylindre de révolution est la distance entre les deux disques.
- ▶ La *face latérale* d'un cylindre de révolution est sa face courbe.

Remarque 21

On parle de cylindre *de révolution* car c'est un solide obtenu par *révolution* d'un objet, c'est-à-dire que le cylindre de révolution est l'ensemble des points balayés par une forme géométrique lorsque cette dernière tourne autour d'un axe donné. Plus précisément, un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r est obtenu par révolution d'un rectangle de dimensions h et r autour d'un axe passant par l'un des côtés de longueur h de ce rectangle.

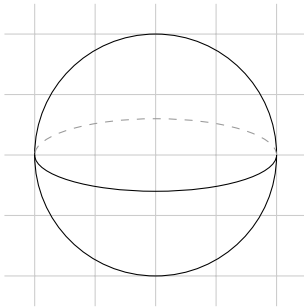
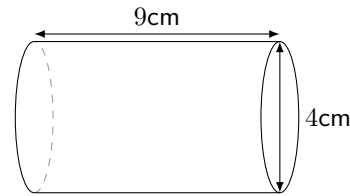


Proposition 22

Le volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et dont la base est d'aire $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B} \times h$.
Autrement dit, le volume d'un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon r est $\pi \times r^2 \times h$.

Exercice 23

Calculez le volume du cylindre ci-contre :



Pas de patron

BOULE/SPHÈRE

- ▶ Nombre de sommets : 0
- ▶ Nombre d'arêtes : 0
- ▶ Faces : 1 face courbe
- ▶ Ce n'est pas un polyèdre

Définition 24

Une *sphère* est l'ensemble des points à distance donnée (appelée *rayon* de la sphère) d'un certain point (appelé *centre* de la sphère). Une *boule* est l'ensemble des points à distance inférieure ou égale à une distance donnée (appelée *rayon* de la boule) d'un certain point (appelé *centre* de la boule).

Remarque 25

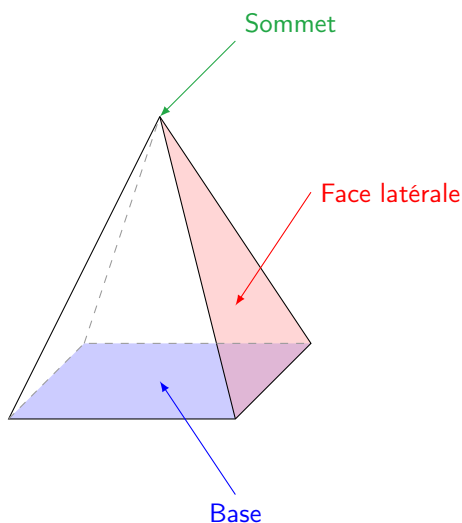
- ▶ Une sphère est l'équivalent du cercle dans l'espace.
- ▶ Une boule est l'équivalent d'un disque dans l'espace.
- ▶ Une sphère est la surface d'une boule. Une boule est pleine, et une sphère est d'intérieur vide.

3 – Pyramides et cônes

Définition 26

Une *pyramide* est un solide construit de la manière suivante :

- 1▶ On choisit un polygone, que l'on appelle *base de la pyramide*.
- 2▶ On choisit un point de l'espace, appelé *sommet de la pyramide*. La distance entre le sommet et la base est appelée *hauteur de la pyramide*.
- 3▶ On relie les côtés de la base au sommet de la pyramide, de façon à former des faces triangulaires.

**Définition 27**

On dit qu'un polygone est *régulier* si tous ses côtés et tous les angles sont identiques. Les sommets d'un polygone régulier sont inscrits dans un cercle, dont le centre est appelé *centre du polygone*.

Définition 28

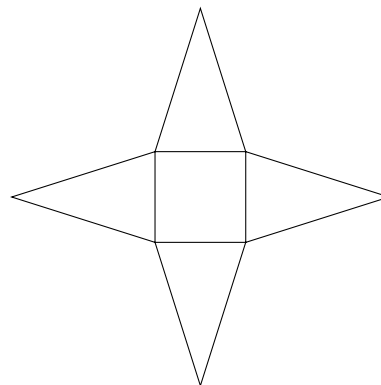
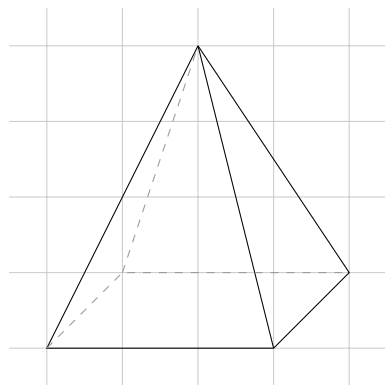
On dit qu'une pyramide est *régulière* si sa base est un polygone régulier et si son sommet est au-dessus du centre de sa base.

Propriété 29

Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles identiques de sommets le sommet de la pyramide.

Proposition 30

Le patron d'une pyramide se construit en dessinant, en taille réelle, la base de la pyramide, puis ses faces tout autour de la base.



PYRAMIDE À BASE CARRÉE

- Nombre de sommets : 5
- Nombre d'arêtes : 8

- Faces : 4 triangles et 1 carré
- C'est un polyèdre

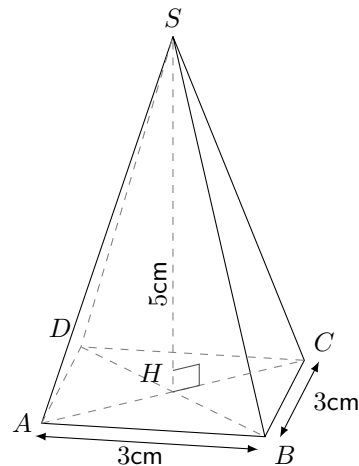
Proposition 31

Le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide de hauteur h et dont la base est d'aire $\mathcal{B}$, est :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

Exercice 32

Calculez le volume de la pyramide ci-contre :

**Remarque 33**

Le volume d'une pyramide ne dépend que de l'aire de sa base et de sa hauteur ! En particulier, si on change la forme de la base sans en changer l'aire, alors on ne change pas le volume, ou encore, si on déplace le sommet en conservant sa hauteur, alors on ne change pas non plus le volume.

Remarque 34

Pour démontrer cette formule, il faut faire appel à des outils plutôt sophistiqués. Mais on peut aussi vérifier cette propriété avec de l'eau, du sable ou du riz : en effet, on peut verser 3 fois le contenu d'une pyramide de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h dans un pavé droit de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h !

Définition 35

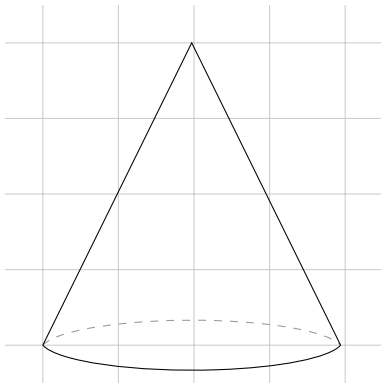
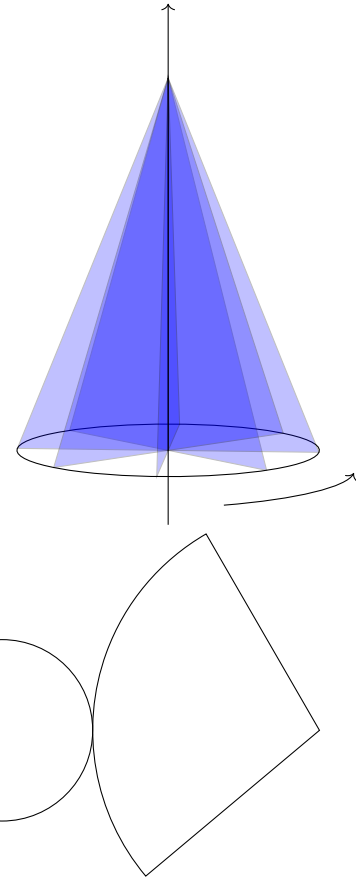
Un *cône de révolution* est un solide obtenu par le procédé suivant :

- 1► On considère un triangle SHM rectangle en H .
- 2► On fait tourner SHM autour de l'axe (SH) . La région de l'espace balayée par SHM est le *cône de révolution*⁽¹⁾.

Le point S est appelé *sommet du cône*, le cercle de centre H balayé par $[HM]$ lors de la rotation du triangle est appelé *base du cône*, et la longueur SH est appelée *hauteur du cône*. Le segment $[MS]$ est appelée une *génératrice du cône*.

Remarque 36

On parle de cône *de révolution* car c'est un solide obtenu par *révolution* d'un objet, c'est-à-dire que le cône de révolution est l'ensemble des points balayés par une forme géométrique lorsque cette dernière tourne autour d'un axe donné. Plus précisément, un cône de révolution de hauteur h et de rayon r est obtenu par révolution d'un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires sont de longueur h et r , autour d'un axe passant par le côté de longueur h de ce triangle.



CÔNE (DE RÉVOLUTION)

- ▶ Nombre de sommets : 0
- ▶ Nombre d'arêtes : 1
- ▶ Faces : 1 disque et 1 face courbe
- ▶ Ce n'est pas un polyèdre

Propriété 37

Le volume $\mathcal{V}$ d'un cône de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h est :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

Remarque 38

C'est la même formule qu'une pyramide, et ça ne sort pas de nulle part. En un sens, un cône est une pyramide dont la base est un polygone (régulier) avec une infinité de côtés. Bien sûr, un polygone avec une infinité de côtés, ça n'existe pas, mais c'est une manière de l'imaginer.

