

Corrigé du devoir maison 3

- 1► La somme des (mesures des) trois angles d'un triangle vaut toujours 180° .
- 2► Écrivons le raisonnement avec D , S et G , les 3 autres étant similaires.

L'angle $\widehat{DSG}$ peut se décomposer comme $\widehat{DSG} = \widehat{DSP} + \widehat{PSR} + \widehat{RSG}$. Comme on a disposé les pièces de sorte que $PQRS$ est un carré, on a $\widehat{PSR} = 90^\circ$. Comme les quatre pièces sont identiques, $\widehat{RSG} = \widehat{DPS}$. Ainsi, $\widehat{DSG} = 90^\circ + \widehat{DSP} + \widehat{DPS}$. Or la somme des trois angles de DPS vaut 180° et $\widehat{SDP} = 90^\circ$ (puisque DPS est rectangle en D), donc $\widehat{DSP} + \widehat{DPS} = 180^\circ - \widehat{PDS} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Finalement, $\widehat{DSG} = 90^\circ + \widehat{DSP} + \widehat{DPS} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Autrement dit, $\widehat{DSG}$ est plat, donc D , S et G sont alignés.

- 3► Comme D , S et G sont alignés, $DG = DS + SG = c + b$ (attention, c'est très faux s'il n'y a pas d'alignement !). Par le même raisonnement sur les trois autres côtés, on montre que $DG = GF = FE = ED = b + c$. Ainsi, $DEFG$ est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur (c'est donc un losange jusque là, reste à montrer que ses angles sont droits).

Toujours en vertu de l'alignement, $\widehat{EDG} = \widehat{PDS} = 90^\circ$. On montre de la même manière que les trois autres angles sont droits. Ainsi, $DEFG$ est bien un carré.

- 4► On a vu précédemment que $DEFG$ est un carré de côté $b + c$, donc son aire vaut $(b + c)^2$.
- 5► L'aire de $DEFG$ peut se décomposer en la somme des aires des 4 pièces triangulaires et de l'aire de la zone centrale. Chaque pièce triangulaire étant une copie de ABC , elles ont la même aire que ABC que l'on note $\text{Aire}(ABC)$. La zone centrale est le carré $PQRS$ qui est de côté a , donc $\text{Aire}(PQRS) = a^2$. Ainsi,

$$\text{Aire}(DEFG) = 4 \times \text{Aire}(ABC) + \text{Aire}(PQRS)$$

et donc, en remplaçant ce qu'on connaît avec a , b et c :

$$(b + c)^2 = 4 \times \text{Aire}(ABC) + a^2$$

En soustrayant les deux membres de cette égalité par $4 \times \text{Aire}(ABC)$, on obtient :

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = \cancel{4 \times \text{Aire}(ABC)} + a^2 - \cancel{4 \times \text{Aire}(ABC)}$$

ce qui donne en simplifiant :

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = a^2$$

- 6► Dans cette figure, le grand carré est de côté $b + c$ comme dans la précédente figure, donc ils ont la même aire.
- 7► Les carrés bleus sont de côté b pour l'un et c pour l'autre, donc ils sont d'aires b^2 et c^2 .
- 8► L'aire du grand carré (qui vaut $(b + c)^2$) peut se décomposer comme l'aire des pièces triangulaires ($4 \times \text{Aire}(ABC)$) et l'aire en bleu ($b^2 + c^2$) :

$$(b + c)^2 = 4 \times \text{Aire}(ABC) + b^2 + c^2$$

en soustrayant de chaque côté par $4 \times \text{Aire}(ABC)$ et en simplifiant, on obtient

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = b^2 + c^2$$

- 9► On a montré d'une part que :

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = a^2$$

et d'autre part que :

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = b^2 + c^2$$

donc :

$$a^2 = (b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = b^2 + c^2$$

autrement dit $a^2 = b^2 + c^2$. Comme $a = BC$, $b = AC$ et $c = BA$, on en déduit le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$