

Sujet du devoir maison 3

À rendre le lundi 15 janvier.

Vous avez le droit de demander l'aide nécessaire (cahier, parent, camarade, ...), sans pour autant copier sur vos camarades ! Rendez votre devoir sur une ou plusieurs copies : pensez à inscrire votre nom, votre prénom et votre classe sur chacune de vos copies (privilégiez des copies doubles).

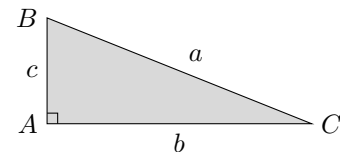
Toute trace de recherche sera évaluée. La propreté de la copie sera évaluée.

Ce devoir maison est une introduction à l'exercice de la démonstration mathématique en autonomie. Les étapes du raisonnement sont décomposées en questions, comme une démonstration à trous à compléter.

Écrire une démonstration, c'est partir de ce que l'on sait et en déduire de nouvelles choses, ainsi de suite jusqu'à arriver au résultat voulu. La qualité de la rédaction est donc capitale.

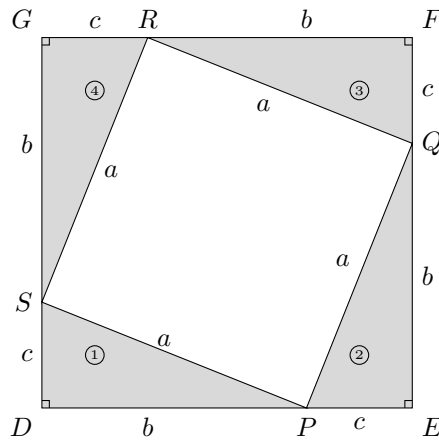
Démonstration du théorème de Pythagore

On veut montrer que n'importe quel triangle rectangle vérifie l'égalité de Pythagore. On considère un triangle ABC rectangle en A , dont les côtés sont de longueurs quelconques a , b et c .



On dispose 4 copies de ABC comme sur la figure ci-dessous. On imagine les placer comme des pièces en bois : on place les pièces ①, ②, ③ et ④ sommets contre sommet, de façon à former un carré.

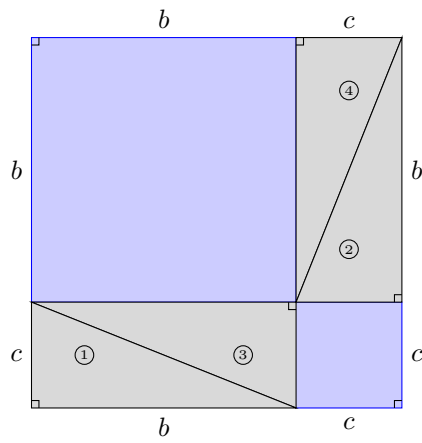
Pour rappel, on ne peut pas croire ce que l'on voit ! Rien ne garantit que la grande figure est vraiment un carré, c'est-à-dire que les sommets sur chaque côté sont bien alignés (si ça se trouve il y a un écart minuscule et invisible... comme dans le paradoxe de Lewis Carroll).



- 1► Que vaut la somme des trois angles d'un triangle ?
- 2► En déduire que D , S et G sont alignés, que G , R et F sont alignés, que F , Q et E sont alignés, et que E , P et D sont alignés.
- 3► En déduire que $DEFG$ est un carré.
- 4► Donnez la longueur des côtés de $DEFG$ en fonction de b et de c . En déduire son aire en fonction de b et c (inutile de développer l'expression).
- 5► Justifiez que :

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(PQRS) = a^2$$

On place maintenant les 4 copies de ABC comme ci-dessous, de manière à faire apparaître à nouveau un grand carré.



- 6► Justifier que l'aire du grand carré dans cette figure est la même que le grand carré dans la figure précédente.
- 7► Exprimez les aires des deux carrés bleus en fonction de b et de c .
- 8► Justifier que :

$$(b + c)^2 - 4 \times \text{Aire}(ABC) = b^2 + c^2$$

- 9► Conclure : expliquer comment ce jeu d'aires permet de démontrer le théorème de Pythagore.