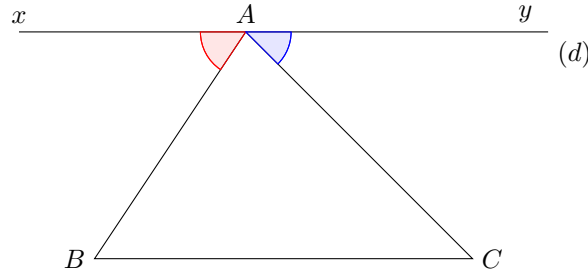


Corrigé du devoir maison 4

Démonstration : somme des angles d'un triangle

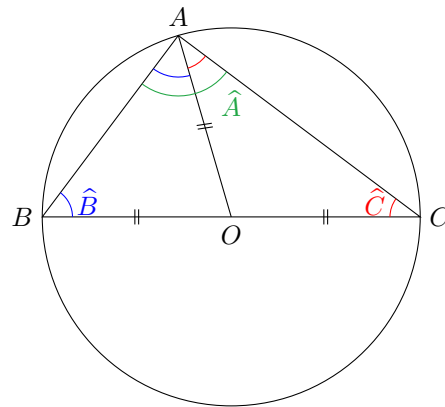


- 1► $\widehat{xAy} = 180^\circ$ (c'est un angle plat)
- 2► Les droites (d) et (BC) sont parallèles et non confondues, et (AB) intersecte ces deux droites. D'après le théorème des angles alternes-internes, $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ABC}$ ont même mesure.
- 3► Les droites (d) et (BC) sont parallèles et non confondues, et (AC) intersecte ces deux droites. D'après le théorème des angles alternes-internes, $\widehat{yAC}$ et $\widehat{ACB}$ ont même mesure.
- 4► $\widehat{xAy} = \widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAy}$
- 5► Dans l'égalité précédente, on remplace $\widehat{xAy}$ par 180° (question 1►), on remplace $\widehat{xAB}$ par $\widehat{ABC}$ (question 2►), et on remplace $\widehat{CAy} = \widehat{yAC}$ par $\widehat{ACB}$ (question 3►). Cela donne $180^\circ = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$. Or les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont les trois angles de ABC , ce qui montre bien que la somme des trois angles de ABC vaut 180° . Comme on n'a pas imposé de contrainte sur le choix de ABC , on a montré que la somme des angles de n'importe quel triangle vaut 180° .

Application

- 2► Les longueurs BO , OA et OC sont égales, car ce sont des rayons du cercle.
- 3► Les mesures des angles à la base d'un triangle isocèle sont égales.
- 4► Le triangle OAB est isocèle en O , donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$. Le triangle OCA est isocèle en O , donc $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$. On en déduit que :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAO} + \widehat{OAC} = \widehat{OBA} + \widehat{OCA}$$



- 5► On applique le théorème précédent dans ABC :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180^\circ$$

On remarque que $\widehat{ACB} = \widehat{ACO} = \widehat{OCA}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{OBA}$. Cela permet de réécrire l'égalité précédente :

$$\widehat{BAC} + \widehat{OCA} + \widehat{OBA} = 180^\circ$$

On utilise alors la question 4► : $\widehat{BAC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$, autrement dit $2 \times \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Ainsi, $\widehat{BAC} = 90^\circ$, c'est-à-dire que ABC est rectangle en A .