

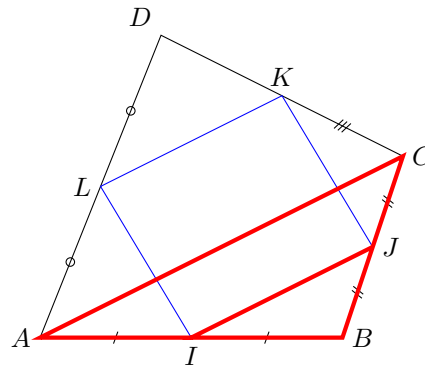
Corrigé du devoir maison 7

Cas 1 : quadrilatère non croisé

Pour démontrer le théorème de Varignon, on doit démontrer que $IJKL$, défini dans l'énoncé du théorème, est un parallélogramme. Pour cela, on va montrer que les côtés opposés sont deux à deux parallèles, c'est-à-dire que $(IJ) \parallel (KL)$ et $(IK) \parallel (JL)$.

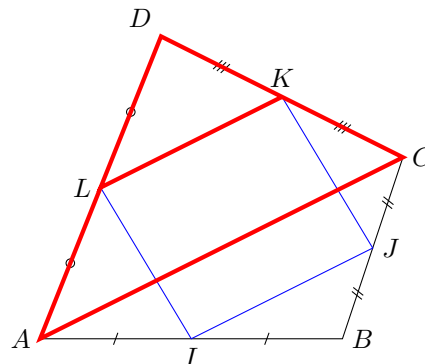
Commençons par le premier : de la figure, on extrait la sous-figure constituée des triangles emboîtés ABC et BIJ .

Comme I est le milieu de $[AB]$, la longueur BA est le double de la longueur BI , autrement dit $BA = 2 \times BI$, et donc $\frac{BA}{BI} = 2$. De la même manière, $\frac{BC}{BJ} = 2$. Ainsi, B , I , et A sont alignés dans cet ordre, B , J et C sont alignés dans cet ordre, et $\frac{BA}{BI} = \frac{BC}{BJ}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AC) et (IJ) sont parallèles.

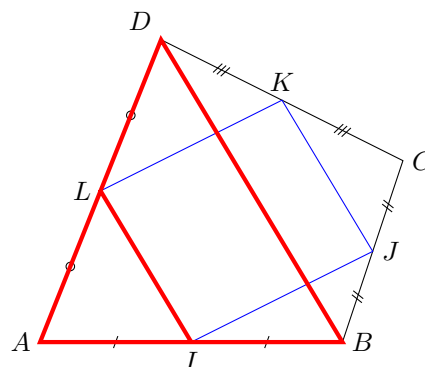
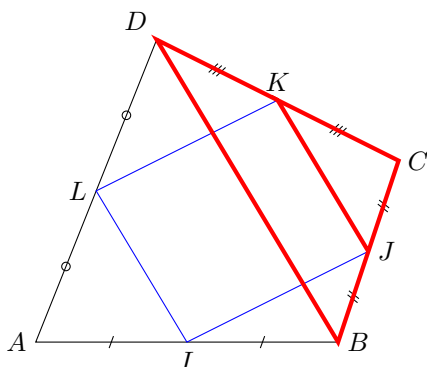


En déroulant un raisonnement similaire dans les triangles emboîtés DAC et DLK , on montre que (AC) et (LK) sont parallèles.

Ainsi, (IJ) et (LK) sont toutes deux parallèles à (AC) , par conséquent elles sont parallèles entre elles.

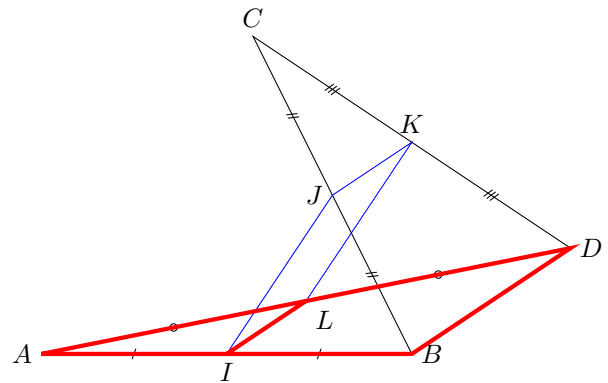
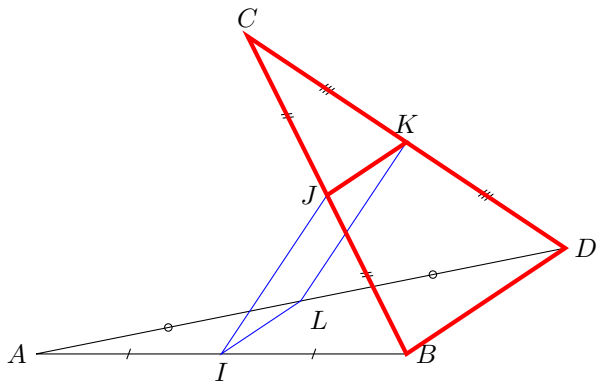
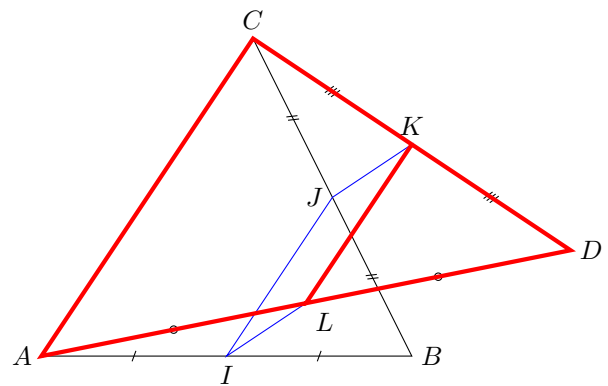
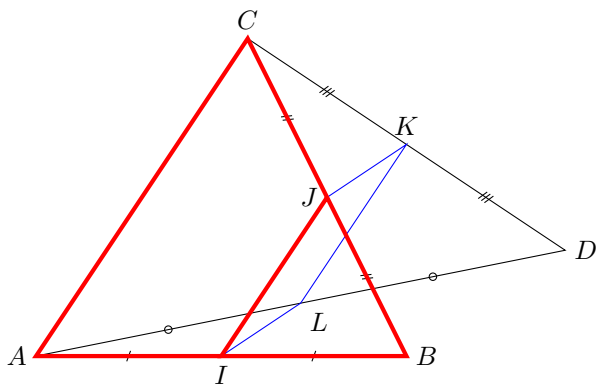
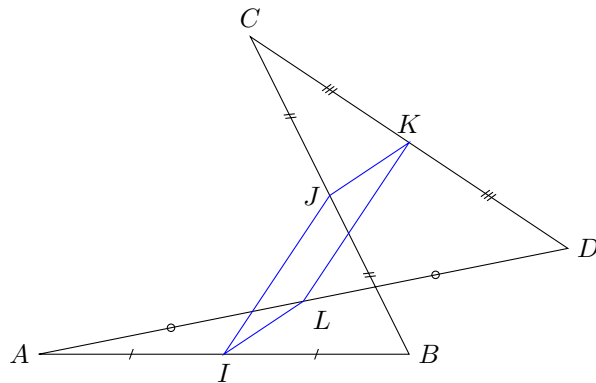


De la même manière, on montre que (KJ) et (LI) sont parallèles à (BD) , et donc parallèles entre elles. Pour cela on utilise les deux configurations de triangles emboîtés représentées ci-dessous.



Cas 2 : $ABCD$ croisé

Le raisonnement est exactement le même que dans le cas précédent : en effet, remarquez que l'on n'a pas utilisé dans la démonstration précédente que le quadrilatère est non croisé, on a uniquement utilisé les relations d'alignement et de longueur qui découlent de la position de I , J , K , et L aux milieux des côtés de $ABCD$.



Cas 3... ?

Le raisonnement est exactement le même que dans les cas précédents : en effet, remarquez que l'on n'a pas utilisé dans la démonstration précédente que le quadrilatère croisé ou non, ou qu'il a un creux ou non ; on a uniquement utilisé les relations d'alignement et de longueur qui découlent de la position de I , J , K , et L aux milieux des côtés de $ABCD$.

