

Mathématiques 6ème

E. Suong

1^{er} avril 2024

Table des matières

I	Nombres et calculs	4
1	Nombres entiers	5
1	Numération décimale de position	5
2	Règles d'orthographe pour les nombres entiers	6
3	Comparaison, encadrement et représentation des nombres entiers	7
4	Arithmétique	9
2	Fractions	11
1	Introduction à la notion de fraction comme partage d'une quantité	12
2	Opérations sur les fractions	14
3	Décomposition, encadrement, comparaison de fractions	15
4	Les fractions comme quotient de deux nombres	16
3	Nombres décimaux	17
1	Numération décimale de position	17
2	Comparaison, encadrement et représentation des nombres décimaux	19
4	Calcul posé ou instrumenté, règles de calcul	21
1	Propriétés opératoires	22
2	Astuces de calcul	25
3	Calcul posé	28
4	Ordres de grandeur	31
5	Pourcentages, proportionnalité	33
1	Situation de proportionnalité	33
2	Pourcentages	33
6	Organisation et gestion des données	34
1	Classer et représenter les données	34
II	Espace et géométrie	35
1	Droites, polygones et cercles	36
1	Les outils du géomètre	37
2	Distances et cercles	38
3	Triangles	39
4	Droites	40
5	Angles	40
2	Périmètre et aire	42
1	Périmètre	43
2	Aire	43
3	Échelle, agrandissement et réduction d'une figure	43
3	Symétrie axiale	44
1	Axe de symétrie d'une figure	44

4	Solides et volume	45
1	Notion de solide, vocabulaire	46
2	Représentation d'un solide en perspective cavalière	48
3	Patron d'un solide	49
4	Solides usuels	50
5	Volume d'un solide	54

Première partie

Nombres et calculs

1 Nombres entiers

1	Numération décimale de position	5
2	Règles d'orthographe pour les nombres entiers	6
3	Comparaison, encadrement et représentation des nombres entiers	7
4	Arithmétique	9

Compétences

- Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient.
- Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.
- Comprendre et appliquer les règles de la numération décimale de position aux grands nombres entiers (jusqu'à 12 chiffres).
- Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.

1 – Numération décimale de position

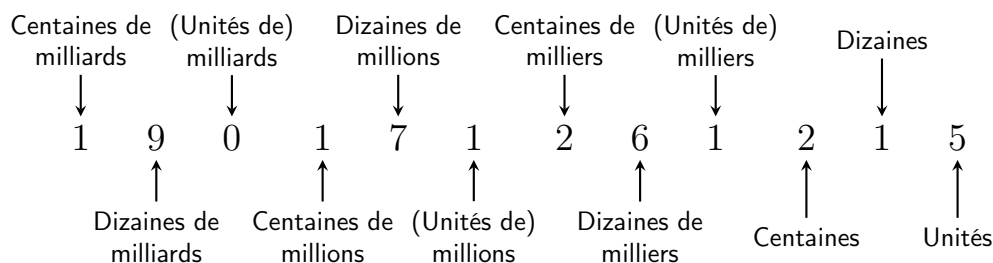
Définition 1

Les *nombres entiers* sont ceux qui interviennent lorsqu'on veut compter des objets. Ils s'écrivent avec les chiffres de 0 à 9, d'où l'adjectif «décimale» dans «numération décimale de position».

Remarque 2

Les *chiffres* sont aux *nombres* ce que les lettres sont aux mots : les chiffres sont les symboles qui permettent d'écrire des nombres, et les nombres sont les objets mathématiques qui ont une valeur, tout comme les lettres sont les symboles qui permettent d'écrire des mots, et les mots sont ce qui a du sens.

Lorsqu'on écrit un nombre entier, la position de chaque chiffre renseigne sur son poids dans le nombre (c'est pour cela qu'on parle de numération *de position*) ⁽¹⁾ : le chiffre le plus à droite renseigne le nombre de "paquets" de 1 (c'est-à-dire le nombre d'*unités*), le deuxième en partant de la droite renseigne le nombre de "paquets" de 10 (c'est-à-dire le nombre de *dizaines*), le troisième en partant de la droite renseigne le nombre de "paquets" de 100 (c'est-à-dire le nombre de *centaines*), etc.



(1). «Les hommes sont comme les chiffres, qui n'acquièrent de valeur que par leur position» – Napoléon Bonaparte

Remarque 3

Sur un exemple, ce système d'écriture traduit l'égalité suivante :

$$4062 = 4 \times 1000 + 0 \times 100 + 6 \times 10 + 2 \times 1$$

C'est pour cette raison qu'on n'écrit pas de 0 à gauche !

Proposition 4

- ▶ Un millier est égal à mille unités.
- ▶ Un million est égal à mille milliers.
- ▶ Un milliard est égal à mille millions.
- ▶ Un milliard est égal à un million de milliers.

Remarque 5

Dans 214, le chiffre des unités est 4, le chiffre des dizaines est 1 et le chiffre des centaines est 2. Cependant, 214 contient 214 unités, 21 dizaines et 2 centaines (si on a 214 billes, alors on a 214 (unités de) billes, 21 paquets de 10 billes, et 2 paquets de 100 billes).

Pour faciliter la lecture des grands nombres entiers, on regroupe leurs chiffres par paquets de trois en partant des unités. Autrement dit, on groupe les chiffres selon les mots qu'on utilise pour les désigner : on groupe les unités, dizaine et centaines, puis les (unités de) milliers, dizaines de milliers et centaines de milliers, puis les (unités de) millions, dizaines de millions et centaines de millions, etc. On dit qu'on *regroupe les chiffres par milliers*.

Exemple 6

- ▶ 5 s'écrit 5 (pas de changement puisqu'on a moins de trois chiffres)
- ▶ 15 s'écrit 15 (pas de changement puisqu'on a moins de trois chiffres)
- ▶ 215 s'écrit 215 (pas de changement puisqu'on a trois chiffres)
- ▶ 1215 s'écrit 1 215
- ▶ 61215 s'écrit 61 215
- ▶ 261215 s'écrit 261 215
- ▶ 1261215 s'écrit 1 261 215
- ▶ 71261215 s'écrit 71 261 215
- ▶ 171261215 s'écrit 171 261 215
- ▶ 90171261215 s'écrit 90 171 261 215
- ▶ 190171261215 s'écrit 190 171 261 215

Pour lire un nombre entier, on nomme les groupes de trois chiffres du plus important au moins important. Par exemple, 190 171 261 215 se lit (et s'écrit) «cent-quarte-vingt-dix-milliards-cent-soixante-et-onze-millions-deux-cent-soixante-et-un-mille-deux-cent-quinze».

2 – Règles d'orthographe pour les nombres entiers

Règles d'orthographe

Trois règles pour écrire un nombre en toutes lettres :

- ▶ Si un nombre est constitué de plusieurs mots, alors ceux-ci sont reliés par des traits d'union.
- ▶ «Vingt» et «cent» se terminent par un s quand ils sont multipliés et terminent le nombre.
- ▶ «Million» et «milliard» s'accordent toujours en nombre.

Exceptions

- ▶ « Mille » est invariable
- ▶ Lorsque qu'un nombre est utilisé pour numéroté (une page, une date, une ligne de bus, une adresse, ...), il est invariable.

Exemple 7

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| ▶ 155 : "cent-cinquante-cinq" | ▶ 85 : "quatre-vingt-cinq" |
| ▶ 190 : "cent-quatre-vingt-dix" | ▶ 80 : "quatre-vingts" |
| ▶ 171 : "cent-soixante-et-onze" | ▶ 280 : "deux-cent-quatre-vingts" |
| ▶ 261 : "deux-cent-soixante-et-un" | ▶ 285 : "deux-cent-quatre-vingt-cinq" |
| ▶ 200 : "deux-cents" | |

Exceptions :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| ▶ 1000 : "mille" | ▶ Page 80 : "Page quatre-vingt" |
| ▶ 2000 : "deux-mille" | ▶ Bus 200 : "Bus deux-cent" |
| ▶ 2023 : "deux-mille-vingt-trois" | ▶ Année 280 : "Année deux-cent-quatre-vingt" |

3 – Comparaison, encadrement et représentation des nombres entiers

Définition 8

- ▶ *Comparer* deux nombres, c'est déterminer lequel est le plus grand, le plus petit, ou s'ils sont égaux.
- ▶ Ranger des nombres dans l'ordre *croissant*, c'est les ranger du plus petit au plus grand.
- ▶ Ranger des nombres dans l'ordre *décroissant*, c'est les ranger du plus grand au plus petit.

Exemple 9

- ▶ 5 est *inférieur ou égal* à 8, ce que l'on note $5 \leq 8$.
- ▶ 7 est *supérieur ou égal* à 3, ce que l'on note $7 \geq 3$.
- ▶ 1 est *strictement inférieur* à 9, ce que l'on note $1 < 9$.
- ▶ 6 est *strictement supérieur* à 4, ce que l'on note $6 > 4$.

Remarque 10

12 est supérieur ou égal 10, mais aussi strictement supérieur. En revanche, 11 est inférieur ou égal à 11, mais pas strictement inférieur.

De manière générale, si un nombre est strictement supérieur/inférieur à un autre, alors il est aussi supérieur/inférieur ou égal à ce-dernier, mais la réciproque est fausse.

Expliquons comment comparer deux nombres entiers (c'est-à-dire déterminer lequel est le plus grand et lequel est le plus petit des deux) sur des exemples :

- ▶ Comparons 4 156 204 et 12 213. On compare d'abord l'importance de leurs chiffres le plus à gauche : ici, dans 4 156 204, le chiffre le plus à gauche est le chiffre des millions, et dans 12 213, le chiffre le plus à gauche est celui des dizaines de milliers. Comme un million est plus grand qu'une dizaine de milliers (on rappelle que un million vaut 1000 milliers, donc 100 dizaines de milliers). Ainsi, $4\,156\,204 \geq 12\,213$, et même $4\,156\,204 > 12\,213$.

- Comparons 53 101 201 et 67 191 167. Cette fois-ci, leurs chiffres les plus à gauche ont la même importance (c'est le chiffre des dizaines de millions). On compare alors leurs valeurs : comme 5 est *strictement* inférieur à 6, on en déduit que $53\,101\,201 \leq 67\,191\,167$, et même $53\,101\,201 < 67\,191\,167$.
- Comparons 123 234 103 et 123 234 203. Cette fois-ci, leurs chiffres les plus à gauche ont la même importance (c'est le chiffre des centaines de millions). On compare alors leurs valeurs : comme elles sont égales, on doit comparer le deuxième chiffre. Là encore, ils sont égaux, donc on continue avec le troisième chiffre, et ainsi de suite tant que les chiffres sont égaux. Ici, c'est au septième chiffre (celui des centaines) qu'on peut conclure que $123\,234\,103 \leq 123\,234\,203$ (et même $123\,234\,103 < 123\,234\,203$).

Exercice 11

Complétez avec le symbole $\leq$ ou $\geq$:

a► $987\,465\,312 \dots 798\,465\,312$

c► $4\,312\,678 \dots 43\,126\,789$

b► $8\,974\,651\,320 \dots 8\,984\,983\,652$

d► $897\,465\,879 \dots 897\,465\,312$

Exercice 12

Rangez les nombres entiers suivants dans l'ordre croissant (c'est-à-dire du plus petit au plus grand) :

a► 894 651

d► 123 546 879

g► 465 312 465

b► 987 465 312

e► 31 254 687

h► 465 879 465 312

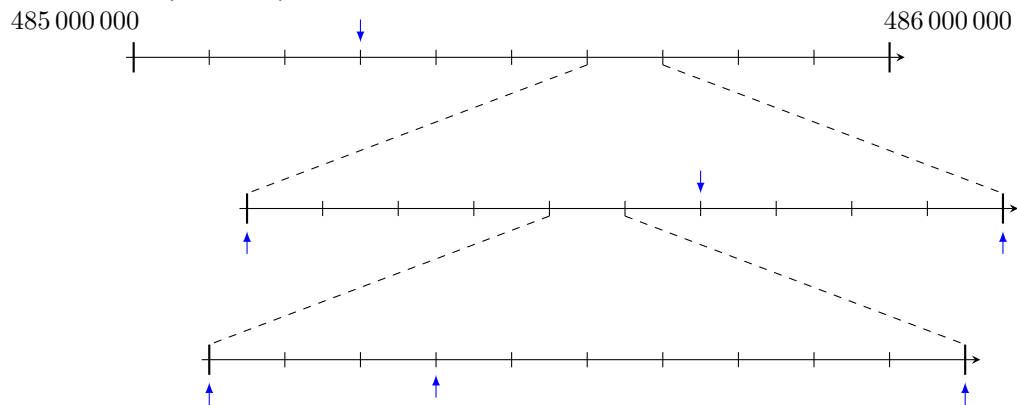
c► 8 465 312

f► 312 564 879

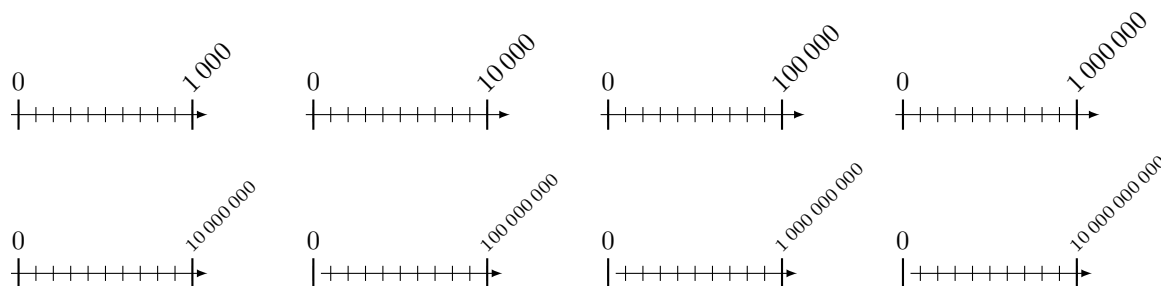
i► 8 465 312

Exercice 13

À l'aide des graduations (régulières), déterminer les nombres pointés par les flèches.



Exercice 14



En choisissant l'échelle la plus pertinente (en mètres) parmi celles ci-dessus, placez approximativement les grandeurs suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a► Rayon de la Terre : 6 371 000m | h► Distance entre Menton et Porspoder (communes les plus éloignées de France métropolitaine) : 1 083 000m |
| b► Distance Terre-Lune : 384 400 000m | i► Altitude de vol des avions : 10 000m |
| c► Rayon du Soleil : 696 340 000m | j► Altitude de l'orbite des satellites GPS : 20 200 000m |
| d► Hauteur du mont Everest : 8 849m | k► Altitude de l'orbite de la station spatiale internationale : 408 000m |
| e► Hauteur du Mont-Blanc : 4 809m | |
| f► Hauteur du Burj Khalifa : 828m | |
| g► Hauteur de la Tour Eiffel : 300m | |

4 – Arithmétique

Proposition 15

Un nombre entier est divisible par :

- 2 *si, et seulement si* son chiffre des unités est pair, c'est-à-dire 0, 2, 4, 6 ou 8.
- 3 *si, et seulement si* la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- 5 *si, et seulement si* son chiffre des unités est 0 ou 5.
- 9 *si, et seulement si* la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- 10 *si, et seulement si* son chiffre des unités est 0.

Proposition 16

Si deux nombres entiers sont tous deux divisibles par un certain nombre entier d , alors leur somme, leur différence et leur produit est aussi divisible par d .

Exercice 17

En utilisant la Proposition précédente et les critères de divisibilité, étudier la cohérence des résultats des calculs suivants :

- | | | |
|----------------------|--------------------------|-------------------------|
| a► $58 + 92 = 451$ | c► $120 \times 42 = 256$ | e► $425 - 310 = 3\,095$ |
| b► $321 - 123 = 128$ | d► $135 + 243 = 588$ | f► $110 + 36 = 3\,960$ |

Exercice 18

La *preuve par 9* est une méthode qui permet de vérifier la cohérence d'un calcul impliquant des nombres entiers. Elle procède comme suit : on remplace chaque nombre du calcul par la somme de ses chiffres, et on effectue le même calcul avec les nombres remplacés ainsi. Si le calcul ne peut pas être fait de tête, on remplace encore les nombres par la somme de leurs chiffres. On poursuit le déroulement du calcul et le remplacement des nombres par la somme de leurs chiffres jusqu'à arriver à un nombre entre 0 et 9. Si on tombe sur 9, on le remplace par 0. On remplace de même le résultat qu'on veut contrôler par la somme de ses chiffres. Si on ne tombe pas sur le même chiffre à la fin, on est assuré que le résultat est faux. Sinon, on ne peut rien dire de plus.

Exemples :

$$\begin{array}{rcl}
 1946 & \times & 8645 = 52\,456 \\
 \downarrow 1+9+4+6 & & \downarrow 8+6+4+5 \quad \downarrow 5+2+4+5+6 \\
 20 & \times & 23 = 22 \\
 \downarrow 2+0 & & \downarrow 2+3 \quad \downarrow 2+2 \\
 2 & \times & 5 = 4 \\
 & \downarrow & \\
 & 10 & = 4 \\
 & \downarrow 1+0 & \\
 & 1 & = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 4029 & \times & 5323 = 78\,765 \\
 \downarrow 4+0+2+9 & & \downarrow 5+3+2+3 \quad \downarrow 7+8+7+6+5 \\
 15 & \times & 13 = 33 \\
 \downarrow 1+5 & & \downarrow 1+3 \quad \downarrow 3+3 \\
 6 & \times & 4 = 6 \\
 & \downarrow & \\
 & 24 & = 6 \\
 & \downarrow 2+4 & \\
 & 6 & = 6
 \end{array}$$

Dans le calcul de gauche, on est assuré que l'on a fait une erreur de calcul. Dans celui de droite, on ne peut pas affirmer que l'on a fait une erreur de calcul (il faut vérifier par un autre moyen).

Contrôlez la cohérence des calculs de l'exercice précédent à l'aide de la preuve par 9.

2 Fractions

1	Introduction à la notion de fraction comme partage d'une quantité	12
2	Opérations sur les fractions	14
3	Décomposition, encadrement, comparaison de fractions	15
4	Les fractions comme quotient de deux nombres	16

Le mot «fraction» vient du latin *fractio*, signifiant «rompu». En mathématiques, une fraction traduit l'idée du découpage d'une quantité en parts égales. C'est aussi un type de nombre, la plupart du temps non entier, qui possède des propriétés et des règles de calcul.

Compétences

- ▶ Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $1 + \frac{1}{3}$; $4 \times \frac{1}{3}$)
- ▶ Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par $\frac{1}{2}$).
- ▶ Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs. Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.
- ▶ Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs. Comparer deux fractions de même dénominateur.
- ▶ Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- ▶ Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$) Utiliser des fractions pour exprimer un quotient.
- ▶ Ajouter des fractions (décimales ou non) de même dénominateur.
- ▶ Utiliser des fractions pour exprimer un quotient. Comprendre que $\frac{a}{b} \times b = a$.

1 – Introduction à la notion de fraction comme partage d'une quantité

Définition 1

Soient n et d deux nombres *entiers* avec d différent de 0.

- ▶ Le nombre noté $\frac{1}{d}$, lu «1 sur d », désigne le résultat du partage d'une unité en d parts égales.
- ▶ Le nombre noté $\frac{n}{d}$, lu « n sur d », désigne n parts d'une unité partagées en d parts égales.

Dans la fraction $\frac{n}{d}$, le nombre n en haut est appelé *numérateur* de la fraction, et le nombre d en bas est appelé *dénominateur* de la fraction.

Remarque 2

Quand on écrit une fraction, la barre de fraction doit être tracée *sur la ligne*. En particulier, un symbole $=$ et une barre de fraction doivent être alignés : on écrit $\dots = \frac{1}{2}$ et non $\dots = \frac{1}{2}$ ou $\dots = \frac{1}{2}$.

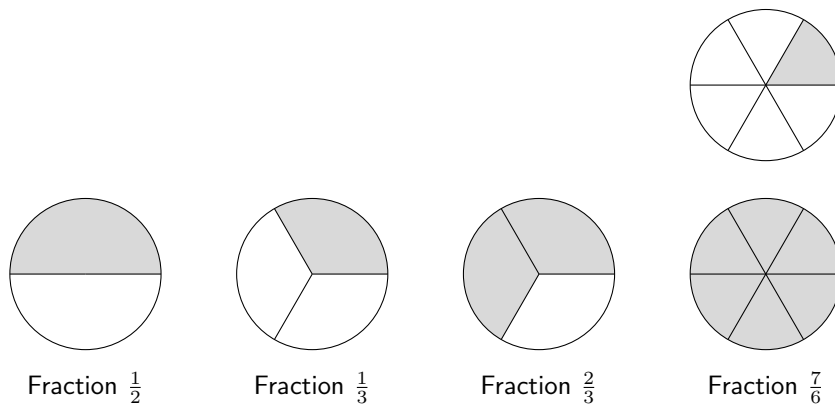
Remarque 3

La fraction $\frac{n}{d}$ (que n vaille 1 ou non) peut aussi se lire (et s'écrire) « n d -ième(s)», à l'exception de $d = 2$, $d = 3$ et $d = 4$. On dira ainsi :

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| ▶ $\frac{1}{2}$: «un demi» | ▶ $\frac{1}{5}$: «un cinquième» | ▶ $\frac{12}{8}$: «douze huitièmes» |
| ▶ $\frac{5}{3}$: «cinq tiers» | ▶ $\frac{3}{6}$: «trois sixièmes» | ▶ $\frac{0}{9}$: «zéro neuvième» |
| ▶ $\frac{3}{4}$: «trois quarts» | ▶ $\frac{7}{7}$: «sept septièmes» | ▶ etc. |

Exemple 4

Il est très courant de prendre des gâteaux ou des tablettes de chocolat comme illustration. Si un gâteau représente une unité, alors la fraction $\frac{1}{2}$ représente son partage en 2 parts égales, la fraction $\frac{1}{3}$ représente son partage en 3 parts égales, etc. La fraction $\frac{2}{3}$ représente 2 parts prises du partage du gâteau en 3 parts égales, et la fraction $\frac{7}{6}$ représente 7 parts prises du partage du gâteau en 6 parts égales. Remarquez que dans ce dernier cas, il faut couper plus d'un gâteau en 6 parts égales pour pouvoir en prendre 7. Cette remarque conduit à la proposition suivante.



Proposition 5

Pour tout nombre entier n , le fraction $\frac{n}{1}$ est égale à n , c'est-à-dire $\frac{n}{1} = n$. (Découper n gâteaux en 1 part égale, c'est prendre les n gâteaux en entier.)

Proposition 6

Soient n et d deux nombres entiers avec d différent de 0. On a l'égalité :

$$\frac{n}{d} = n \times \frac{1}{d}$$

Cela traduit l'idée naturelle selon laquelle si je veux la fraction $\frac{n}{d}$ d'un gâteau, je peux d'abord couper le gâteau en d parts égales (donc je calcule $\frac{1}{d}$ du gâteau), puis je prends n copies d'une part, c'est à dire n parts de taille $\frac{1}{d}$ (autrement dit n fois $\frac{1}{d}$ du gâteau). Cette proposition permet de simplifier certaines écritures.

Proposition 7

Soient n et d deux nombres entiers, avec d différent de 0.

- ▶ La fraction $\frac{n}{d}$ est strictement plus petite que 1 si, et seulement si $n < d$.
- ▶ La fraction $\frac{n}{d}$ est strictement plus grande que 1 si, et seulement si $n > d$.
- ▶ La fraction $\frac{n}{d}$ est égale à 1 si, et seulement si $n = d$.

Remarque 8

En termes de gâteaux, cette proposition se réécrit :

- ▶ Il reste du gâteau si, et seulement si on prend moins de parts qu'on en découpe.
- ▶ On mange plus d'un gâteau si, et seulement si on prend plus de parts qu'on en découpe sur un gâteau.
- ▶ On mange pile un gâteau si, et seulement si on prend autant de parts qu'on en découpe.

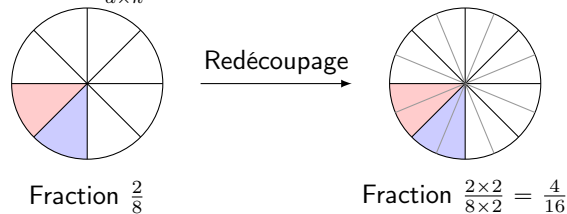
Proposition 9

Soient n et d deux nombres entiers, avec d différent de 0.

Pour tout nombre entier k différent de 0, les fractions $\frac{n}{d}$ et $\frac{n \times k}{d \times k}$ sont égales, c'est-à-dire $\frac{n}{d} = \frac{n \times k}{d \times k}$.
On dit parfois abusivement qu'on «multiplie $\frac{n}{d}$ par k en haut et en bas».

Remarque 10

Essayons de l'illustrer en termes de gâteaux. Considérons un gâteau coupé en d parts égales (remarque : sur le dessin, on considère le cas où $n < d$, c'est-à-dire qu'on ne coupe qu'un seul gâteau, mais c'est pareil dans les autres cas), mettons-en n de côté. Si on coupe toutes les parts de ce gâteau en k petites parts égales, on obtient un découpage du gâteau initial en $d \times k$ parts égales plus petites. Les n parts mises de côté initialement sont alors devenues $n \times k$ parts plus petites. Comme la quantité de gâteau (ou pourrait-on dire, la *fraction* du gâteau) que l'on a mis de côté n'a pas changé pour autant, on a égalité des deux fractions, qui dans le premier découpage est $\frac{n}{d}$, et dans le deuxième découpage est $\frac{n \times k}{d \times k}$.

**Exercice 11**

À l'aide de la représentation par découpage de gâteaux, comparer les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1+2}{2+2}$. Que peut-on en conclure sur le fait d'ajouter une même quantité au numérateur et au dénominateur d'une fraction ?

Exercice 12 (Fractions égales usuelles)

À l'aide de découpages de gâteaux ou de tablettes de chocolat, déterminer les fractions qui sont égales parmi les

suivantes : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{6}$.

Définition 13

On appelle *fraction décimale* une fraction dont le dénominateur est 10, ou 100, ou 1000, ou 10 000, etc.

Exemple 14

Les fractions $\frac{5}{10}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{365}{1000}$ sont des fractions décimales.

2 – Opérations sur les fractions

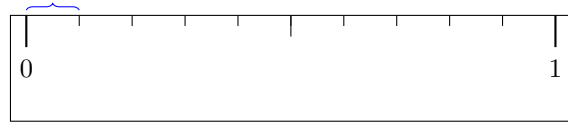
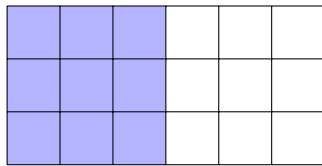
Propriété 15

«Prendre la moitié» d'une quantité n revient à calculer $\frac{n}{2}$.

Plus généralement, soit d un nombre entier différent de 0. «Prendre un d -ième» d'une quantité n revient à calculer $\frac{n}{d}$.

Exemple 16

- Prendre la moitié d'une tablette de chocolat de 18 carrés revient à prendre $\frac{18}{2} = 9$ carrés.
- Prendre un dixième de 1 centimètre, c'est prendre 1 millimètre, car 1 millimètre correspond au partage de 1 centimètre en 10 parts égales.

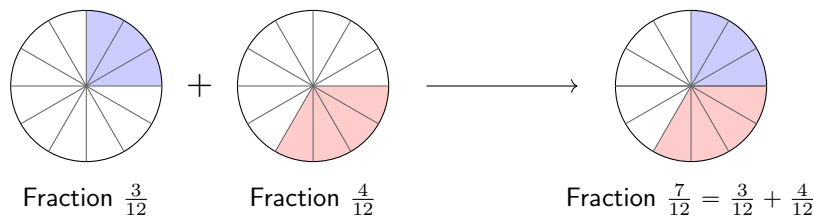
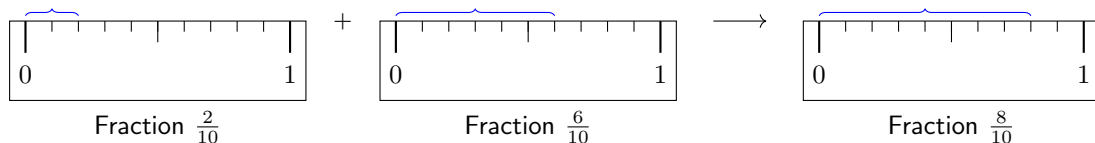


Méthode 17 (Addition des fractions de même dénominateur)

Pour calculer la somme de deux fractions de même dénominateur, on conserve le dénominateur et on ajoute les numérateurs.

Exemple 18

- Les fractions $\frac{2}{10}$ et $\frac{6}{10}$ ont le même dénominateur (ici, 10), donc $\frac{2}{10} + \frac{6}{10} = \frac{2+6}{10} = \frac{8}{10}$.
- Les fractions $\frac{3}{12}$ et $\frac{4}{12}$ ont le même dénominateur (ici, 12), donc $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.



3 – Décomposition, encadrement, comparaison de fractions

Proposition 19

Toute fraction peut s'écrire comme somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure (strictement) à 1.

Méthode 20 (*Décomposition d'une fraction*)

Soient n et d deux nombres entiers, avec d différent de 0.

Soient q et r les quotient et reste de la division euclidienne de n par d . On rappelle que $n = d \times q + r$ et $r < d$.

En vertu de la règle d'addition des fractions et de la Proposition 9 sur l'égalité de fractions,

$$\frac{n}{d} = \frac{d \times q + r}{d} = \frac{d \times q}{d} + \frac{r}{d} = \frac{d \times q}{d \times 1} + \frac{r}{d} = \frac{q}{1} + \frac{r}{d} = q + \frac{r}{d}$$

et dans cette écriture, q est un nombre entier et $\frac{r}{d} < 1$.

Proposition 21

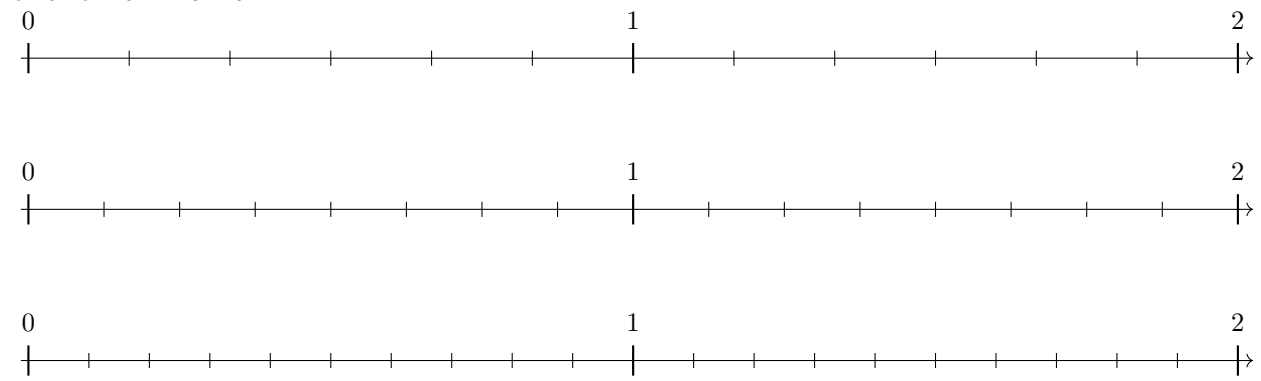
Toute fraction est comprise entre deux nombres entiers successifs.

Méthode 22 (*Encadrement d'une fraction*)

Pour trouver de tels nombres entiers, on utilise la méthode précédente.

Exercice 23

Pour chacune des fractions suivantes, décomposez-la en la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1, puis placez-la sur une demi-droite avec une graduation adaptée parmi les demi-droites graduées ci-dessous : $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{15}{10}$.



Méthode 24 (*Comparaison de fractions de même dénominateur*)

Pour comparer deux fractions de même dénominateur, on compare leurs numérateurs.

Remarque 25

Anecdote : dans les années 1980, pour concurrencer le burger "Quarter pounder" de Mc Donalds (un burger dont le steak pèse un quart de livre), la chaîne de fast food A&W a sorti un burger "Third pounder" (un burger dont le steak pèse un tiers de livre) au même prix. Malheureusement, les américains de l'époque ont cru que c'était une arnaque, pensant que $\frac{1}{3}$ était plus petit que $\frac{1}{4}$...

4 – Les fractions comme quotient de deux nombres

Propriété 26

Soient n et d deux nombres entiers, avec d différent de 0.

La fraction $\frac{n}{d}$ est l'unique nombre dont le produit par d vaut n , c'est-à-dire $\frac{n}{d} \times d = d \times \frac{n}{d} = n$. Autrement dit, c'est le résultat de la division de n par d .

TODO : exercices

3 Nombres décimaux

1	Numération décimale de position	17
2	Comparaison, encadrement et représentation des nombres décimaux	19

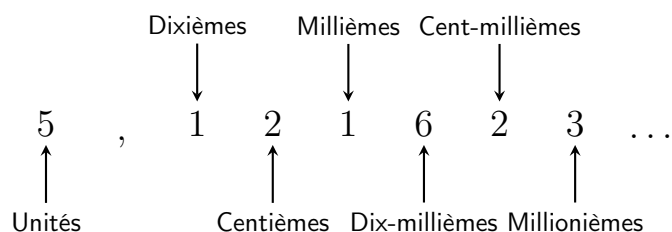
Compétences

- ▶ Connaître les unités de la numération décimale (unités simples, dixièmes, centièmes, millièmes) et les relations qui les lient.
- ▶ Comprendre et appliquer aux nombres décimaux les règles de la numération décimale de position (valeurs des chiffres en fonction de leur rang).
- ▶ Connaître et utiliser diverses désignations orales et écrites d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule, décompositions additives et multiplicatives).
- ▶ Utiliser les nombres décimaux pour rendre compte de mesures de grandeurs.
- ▶ Connaître le lien entre les unités de numération et les unités de mesure (par exemple : dixième à dm/dg/dL, centième à cm/cg/cL/centimes d'euro).
- ▶ Repérer et placer un nombre décimal sur une demi-droite graduée adaptée. Comparer, ranger des nombres décimaux.
- ▶ Encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers, par deux nombres décimaux.
- ▶ Trouver des nombres décimaux à intercaler entre deux nombres donnés.
- ▶ Mobiliser les faits numériques mémorisés au cycle 2, notamment les tables de multiplication jusqu'à 9. Connaître les multiples de 25 et de 50, les diviseurs de 100.
- ▶ Utiliser des nombres décimaux de plus de quatre décimales.

1 – Numération décimale de position

Les nombres décimaux sont ceux que l'on rencontre le plus fréquemment dans la vie de tous les jours, souvent associés à une unité : une température de 37,5°C, une distance de 2,6km, une masse de 63,1kg, un prix de 1,48€...

Ceux-ci s'écrivent un nombre entier, suivi d'une virgule, suivi d'autres chiffres, de 0 à 9 toujours, d'où la qualification «*décimale*» dans *numération décimale de position*. Comme pour les nombres entiers, la position des chiffres de part et d'autre de la virgule renseigne sur leur poids, d'où la qualification «*de position*» dans *numération décimale de position*. Comme les nombres entiers, à chaque position est associée un nom, comme montré sur le schéma ci-dessous.



Définition 1

Les chiffres à droite de la virgule d'un nombre sont appelés *décimales* de ce nombre.
 Un *nombre décimal* est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Rappelons le vocabulaire fractionnaire : la fraction $\frac{1}{10}$ est appelée *un dixième*, $\frac{1}{100}$ est appelée *un centième*, $\frac{1}{1000}$ est appelée *un millième*, etc., d'où les noms des unités. Avec ce système d'écriture :

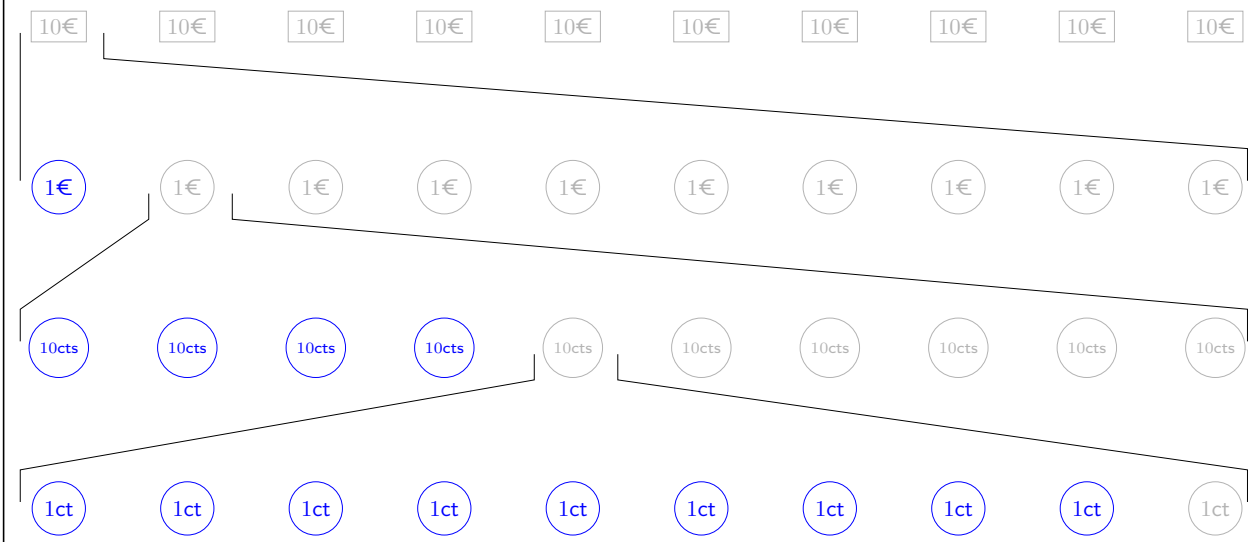
$$5,121623 = 5 + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 1 \times \frac{1}{1000} + 6 \times \frac{1}{10000} + 2 \times \frac{1}{100000} + 3 \times \frac{1}{1000000}$$

que l'on peut encore écrire :

$$5,121623 = \frac{5}{1} + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{3}{1000000}$$

Exemple 2

Par exemple, 1,48€ désigne 1 euro plus 4 dixièmes d'euros, c'est-à-dire 4×10 centimes, plus 8 centièmes d'euros, c'est à dire 8×1 centime.

**Remarque 3**

Cette notation à virgule ne s'est imposée qu'à partir du XVII^e siècle, mais les nombre décimaux étaient déjà connus des égyptiens antiques 3000 ans plus tôt ! Entre temps, que ce soient les grecs, les babyloniens ou les arabes, tous avaient une notation différente. Par exemple, la notation du mathématicien Stevin était originale : le nombre 9,107 s'écrivait 9@1@0@2@7@3 avec sa notation.

Propriété 4

Un *nombre décimal* est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction décimale.

(En réalité, il s'agit de la vraie définition d'un nombre décimal.)

Méthode 5

Pour trouver une écriture en fraction décimale d'un nombre décimal, il suffit d'écrire la fraction dont le numérateur est le nombre décimal sans la virgule, et dont le dénominateur est $100 \dots 00$ avec autant de 0 que le nombre décimal a de chiffres à droite de sa virgule.

Exemple 6

D'après la méthode ci-dessus, $3,14 = \frac{314}{100}$. Essayons de le démontrer avec les outils dont on dispose à ce point :

$$\begin{aligned}
 3,14 &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} && \text{(d'après ce qu'on a vu plus haut)} \\
 &= \frac{3 \times 100}{1 \times 100} + \frac{1 \times 10}{10 \times 10} + \frac{4}{100} && \text{(on réduit les fraction au même dénominateur)} \\
 &= \frac{300}{100} + \frac{10}{100} + \frac{4}{100} && \text{(on simplifie les expressions)} \\
 &= \frac{300 + 10 + 4}{100} && \text{(d'après la règle d'addition des fractions)} \\
 &= \frac{314}{100} && \text{(après calcul de la somme)}
 \end{aligned}$$

Pour faciliter la lecture des nombres avec beaucoup de décimales, on regroupe leurs décimales par paquets de trois en partant des dixièmes.

Exemple 7

- | | |
|----------------------------|--|
| ▶ 1,5 s'écrit 1,5 | ▶ 1,261215 s'écrit 1,261 215 |
| ▶ 2,15 s'écrit 2,15 | ▶ 7,1261215 s'écrit 7,126 121 5 |
| ▶ 1,215 s'écrit 1,215 | ▶ 1,71261215 s'écrit 1,712 612 15 |
| ▶ 6,1215 s'écrit 6,121 5 | ▶ 9,0171261215 s'écrit 9,017 126 121 5 |
| ▶ 2,61215 s'écrit 2,612 15 | ▶ 1,90171261215 s'écrit 1,901 712 612 15 |

Exercice 8

Écrire les nombres décimaux suivants sous forme d'une fraction décimale :

- a▶ 65,124 b▶ 4,845 c▶ 465,13 d▶ 894,231 e▶ 1,465 315 5

2 – Comparaison, encadrement et représentation des nombres décimaux

La méthode pour comparer deux nombres décimaux est exactement la même que les nombres entiers. Attention cependant, le nombre de chiffres peut être trompeur ! Par exemple, bien qu'ayant plus de chiffres, 1,456 123 est plus petit que 3,2 ! Il faut bien comparer les chiffres de même importance, de gauche à droite.

Exercice 9

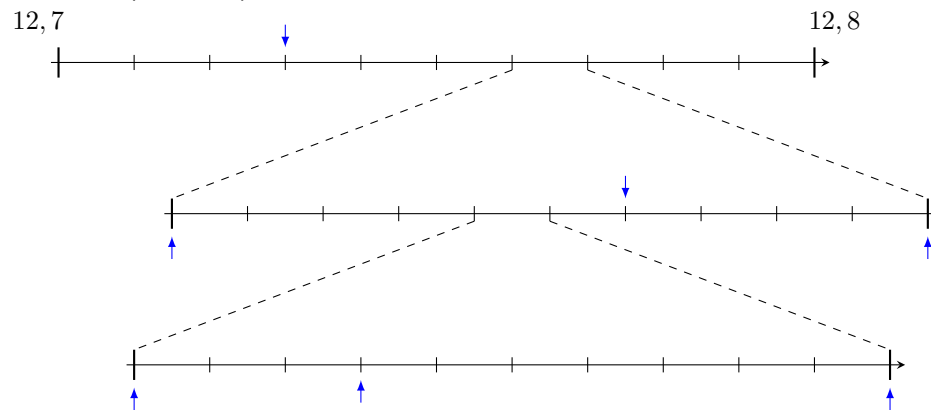
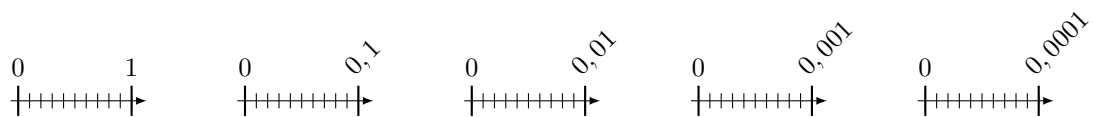
a▶ Rangez les nombres décimaux suivants dans l'ordre croissant :

- | | | | |
|-----------------|--------------------|--------------------|--------------|
| ▶ 87 513,784 66 | ▶ 87 513,879 46 | ▶ 8 974 651,746 13 | ▶ 451,846 05 |
| ▶ 451,806 2 | ▶ 8 974 051,746 53 | ▶ 45 907,369 705 | ▶ 0,846 05 |

b▶ Encadrez chacun des nombres décimaux précédents entre deux nombres entiers consécutifs.

Exercice 10

À l'aide des graduations (régulières), déterminer les nombres pointés par les flèches.

**Exercice 11**

En choisissant l'échelle la plus pertinente (en grammes) parmi celles ci-dessus, placez les grandeurs suivantes :

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a► Masse d'un grain de sable moyen : 0,00005g | c► Masse d'un grain de blé : 0,05g |
| b► Masse d'un grain de riz : 0,3g | d► Masse d'une petite fourmi : 0,002g |

4 Calcul posé ou instrumenté, règles de calcul

1	Propriétés opératoires	22
2	Astuces de calcul	25
3	Calcul posé	28
4	Ordres de grandeur	31

Compétences

Calcul mental ou en ligne :

- ▶ Connaître des procédures élémentaires de calcul, notamment :
 - ▶ multiplier ou diviser un nombre décimal par 10, par 100, par 1000
 - ▶ rechercher le complément à l'entier supérieur
 - ▶ multiplier par 5, par 25, par 50
- ▶ Multiplier un nombre (décimal ou non) par 0,1 ou 0,5.
- ▶ Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, et notamment :

▶ $12 + 199 = 199 + 12$

▶ $3,2 \times 25 \times 4 = 3,2 \times 100$

▶ $23 \times 7 + 23 \times 3 = 23 \times 10$

▶ $5 \times 21 = 21 \times 5$

▶ $45 \times 21 = 45 \times 20 + 45$

▶ $27,9 + 1,2 + 0,8 = 27,9 + 2$

▶ $6 \times 18 = 6 \times 20 - 6 \times 2$
- ▶ Connaître les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10.
- ▶ Utiliser ces propriétés et procédures pour élaborer et mettre en œuvre des stratégies de calcul.
- ▶ Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant un ordre de grandeur.
- ▶ Dans un calcul en ligne, utiliser des parenthèses pour indiquer ou respecter une chronologie dans les calculs. Organiser un calcul en une seule ligne avec des parenthèses si nécessaire.
- ▶ Utiliser la distributivité simple dans les deux sens.

Calcul posé :

- ▶ Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer :
 - ▶ l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers ou décimaux ;
 - ▶ la division euclidienne d'un entier par un entier ;
 - ▶ la division d'un nombre décimal (entier ou non) par un nombre entier.
- ▶ Multiplier deux nombres décimaux.

Calcul instrumenté :

- ▶ Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.
- ▶ Utiliser une calculatrice pour introduire la priorité de la multiplication sur l'addition et la soustraction.

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions, des nombres décimaux et le calcul

- ▶ Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.
 - ▶ Sens des opérations.
 - ▶ Problèmes à une ou plusieurs étapes relevant des structures additive et/ou multiplicative.

1 – Propriétés opératoires

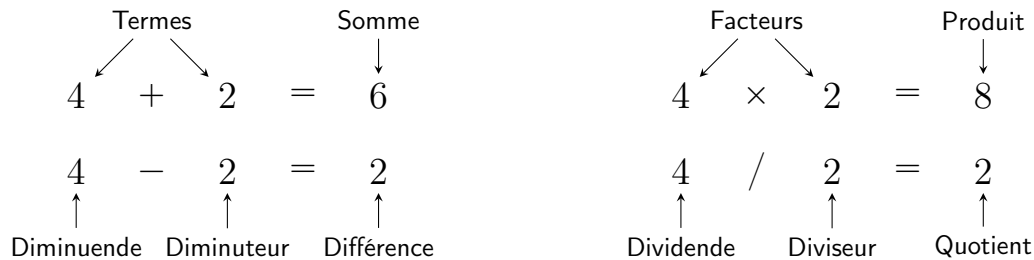
Commençons par quelques rappels de vocabulaire :

Définition 1

- ▶ Les deux opérands de l'addition sont appelées *termes* de l'addition, et le résultat de l'addition des deux termes est appelé *somme*.
- ▶ Dans la soustraction, le nombre auquel on soustrait un autre est appelé *diminuende*, le nombre qui soustrait est appelé *diminuteur*, et le résultat est appelé *différence*.
- ▶ Les deux opérands de la multiplication sont appelées *facteurs* de la multiplication, et le résultat de la multiplication des deux facteurs est appelé *produit*.
- ▶ Dans la division, le nombre que l'on divise est appelé *dividende*, le nombre qui divise est appelé *diviseur*, et le résultat est appelé *quotient*.

Remarque 2

En vertu de la Propriété 7, les deux opérands de l'addition et de la multiplication jouent le même rôle, et donc portent le même nom. *A contrario*, dans la soustraction et la division, les deux opérands ne sont pas interchangeables, et donc portent des noms différents. Néanmoins, on verra parfois les opérands de la soustraction appelées «termes», car les mots «diminuende» et «diminuteur» sont généralement assez méconnus.



Propriété 3 (Priorités des opérations)

Dans une ligne de calcul, on ne peut en général pas appliquer les opérations dans n'importe quel ordre. Il faut respecter l'ordre de priorités suivant :

- 1▶ On calcule d'abord ce qui est entre **P**arenthèses,
- 2▶ On calcule ensuite les **M**ultiplications et les **D**ivisions, *de gauche à droite*,
- 3▶ Enfin, on calcule les **A**dditions et les **S**oustractions, *de gauche à droite*.

Cette règle est souvent résumée par l'acronyme «PMDAS»

Remarque 4

- ▶ On remplace parfois les parenthèses par des crochets par souci de lisibilité (souvent quand les parenthèses sont imbriquées), mais ceci ne change rien aux règles de priorité des opérations.
- ▶ La barre de fraction joue un rôle de parenthèse : l'expression $\frac{\text{machin}}{\text{truc}}$ est équivalente à $(\text{machin})/(\text{truc})$.
- ▶ La barre oblique / de la division est parfois remplacé par l'obélus $\div$, qui tombe en désuétude, voir les deux points : (mais qui ont une autre signification dans les pays anglophones).
- ▶ On peut parfois ajouter des parenthèses inutiles, c'est-à-dire que l'opération reste la même avec ou sans ces parenthèses, pour améliorer la lisibilité. Par exemple, on peut écrire $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8) + (9 \times 10 \times 11)$ au lieu de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 + 9 \times 10 \times 11$ pour mettre en valeur le fait que cette opération est une somme de deux produits.

Remarque 5

Dans une opération, les symboles $+$, $-$, $\times$ et $/$ sont appelés *opérateurs*, et les nombres auxquels on applique les opérateurs sont appelés *opérandes*. La notation que l'on utilise pour les opérations, avec les opérateurs au milieu de leurs opérandes, est appelée *notation affixe*. Ce n'est pas la seule notation qui existe ! La *notation suffixe*, ou *notation polonaise inversée* était par exemple utilisée par les vieilles calculatrices HP. L'opération $1 + 10 \times (2 + 10 \times (5 + 10 \times 3))$ avec la notation affixe s'écrit $3 \ 10 \times 5 + 10 \times 2 + 10 \times 1 +$ en notation polonaise inversée. L'intérêt de cette notation est qu'elle ne nécessite aucune parenthèse, ce qui accélère grandement le temps calcul par un ordinateur.

Exercice 6

Calculer $1 + (8 \times 9 - 5 \times (4 + 2 \times 3) + 6) \times 2$.

Propriété 7

- Dans une addition, on peut échanger les deux termes sans changer le résultat.
- Dans une multiplication, on peut échanger les deux facteurs sans changer le résultat.
- Dans une soustraction ou une division, on **ne peut pas** effectuer un tel échange.

Remarque 8

Avec des lettres, cela se réécrit :

Pour tous nombres a et b , $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$.

Propriété 9

- Lorsqu'on doit calculer une somme avec plus de deux termes, on peut grouper les termes et calculer les sommes intermédiaires comme on veut.
- Lorsqu'on doit calculer un produit avec plus de deux facteurs, on peut grouper les facteurs et calculer les produits intermédiaires comme on veut.

Remarque 10

Avec des lettres, cela se réécrit :

Pour tous nombres a , b et c , $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$ (de même avec la multiplication).

Exemple 11

- $1 + 2 + 3 = (1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6$ et $1 + 2 + 3 = 1 + (2 + 3) = 1 + 5 = 6$.
- $2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 6 \times 4 = 24$ et $2 \times 3 \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$.

Propriété 12 (*Distributivité simple*)

Pour tous nombres a , b et c , $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Remarque 13

Ce n'est pas une formule qu'il faut apprendre par cœur : il faut la voir, avec ses yeux. Il est courant de la représenter de la manière suivante, qui donne sens au nom «*distributivité simple*» : on *distribue* de facteur a aux termes dans la parenthèse.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Remarque 14

Il faut savoir lire cette identité dans tous les sens :

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$$

$$a \times c + b \times c = (a + b) \times c$$

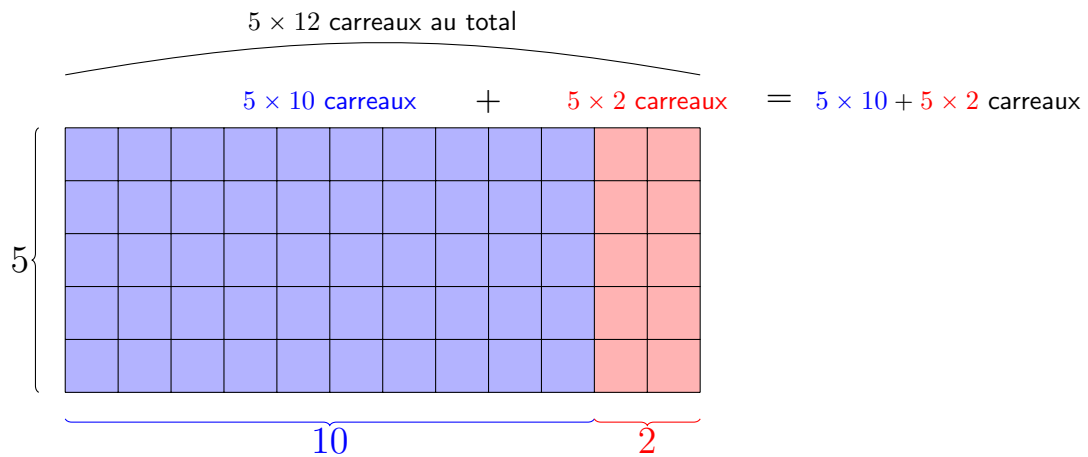
On dit que la multiplication est *distributive* sur l'addition.

Quand on effectue la transformation de la forme de gauche à la forme de droite dans la Propriété, on dit qu'on *développe le produit*, et dans l'autre sens, on dit qu'on *factorise la somme*.

Cette propriété donne quelques méthodes de calcul mental.

Remarque 15

On peut également voir cette formule avec un dessin. Par exemple, pour illustrer l'égalité $5 \times (10 + 2) = 5 \times 10 + 5 \times 2$:

**Remarque 16**

La distributivité simple permet aussi d'écrire que, pour tous nombres a , b , c et d , $a \times (b + c + d) = a \times b + a \times c + a \times d$, et ainsi de suite avec autant de termes de la somme que l'on veut.

En effet, en ajoutant des parenthèses autour de $c + d$ pour voir celui-ci comme un seul terme, correspondant au premier symbole $+$:

$$a \times (b + c + d) = a \times (b + [c + d]) = a \times b + a \times [c + d] = a \times b + a \times c + a \times d$$

Exemple 17

- Pour calculer 23×12 , on peut écrire $23 \times 12 = 23 \times (10 + 2) = 23 \times 10 + 23 \times 2$ et utiliser les Astuces de calcul usuelles plus bas.
- Pour calculer $23 \times 7 + 23 \times 3$, on peut écrire $23 \times 7 + 23 \times 3 = 23 \times (7 + 3) = 23 \times 10$ et utiliser les Astuces de calcul usuelles plus bas.

2 – Astuces de calcul

Méthode 18

Multiplier un nombre entier par 10 revient à lui ajouter 1 zéro à droite, multiplier un nombre entier par 100 revient à lui ajouter 2 zéros à droite, multiplier un nombre entier par 1000 revient à lui ajouter 3 zéros à droite, etc.

De manière générale, multiplier un nombre entier $100 \dots 00$ revient à lui ajouter à droite autant de 0 qu'il y en a dans le facteur $100 \dots 00$.

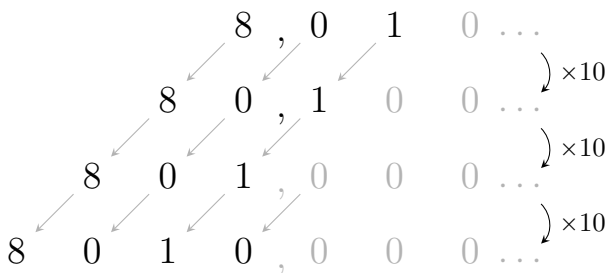
Quid des nombres décimaux qui ne sont pas des nombres entiers ? Grâce aux chapitres sur les fractions et sur les nombres décimaux, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 5,121 \times 100 &= \left(5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} \right) \times 100 = 5 \times 100 + \frac{1}{10} \times 100 + \frac{2}{100} \times 100 + \frac{1}{1000} \times 100 \\ &= 5 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1 + \frac{1}{10} = 512,1 \end{aligned}$$

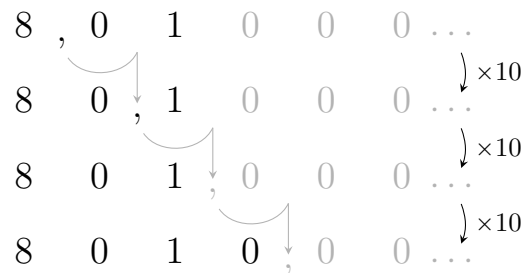
Tout se passe comme si on avait décalé la virgule de deux crans vers la droite. Essayons un autre exemple :

$$\begin{aligned} 30,05 \times 1000 &= \left(3 \times 10 + 0 \times 1 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} \right) \times 1000 = 3 \times 10\,000 + 0 \times 1\,000 + \frac{0}{10} \times 1\,000 + \frac{5}{100} \times 1\,000 \\ &= 3 \times 10\,000 + 0 \times 1\,000 + 0 \times 100 + 5 \times 10 = 30\,050 \end{aligned}$$

Ici aussi, tout se passe comme si on avait décalé la virgule vers la droite de trois crans, en ajoutant un 0 quand on a épuisé la partie à droite de la virgule. C'est presque ce qui se passe : quand on multiplie par 10, les unités deviennent des dizaines, les dizaines deviennent des centaines, les centaines deviennent des milliers, etc., et les millièmes deviennent des centièmes, les centièmes deviennent des dixièmes, et les dixièmes deviennent des unités. Ce n'est donc pas exactement la virgule qui se déplace vers la droite entre les chiffres, mais les chiffres qui se déplacent (vers la gauche) par rapport à la virgule, car dans la notation décimale de position, comme son nom l'indique, la position indique le poids d'un chiffre. Dans le second exemple où on finit par ajouter un 0, il faut se souvenir qu'on n'écrit pas de zéros à droite (ou à gauche) d'un nombre car ceux-ci sont inutiles, puisqu'ils n'apportent aucune information sur sa valeur, mais dans le cas présent, il faut se souvenir qu'on peut tout de même les ajouter !

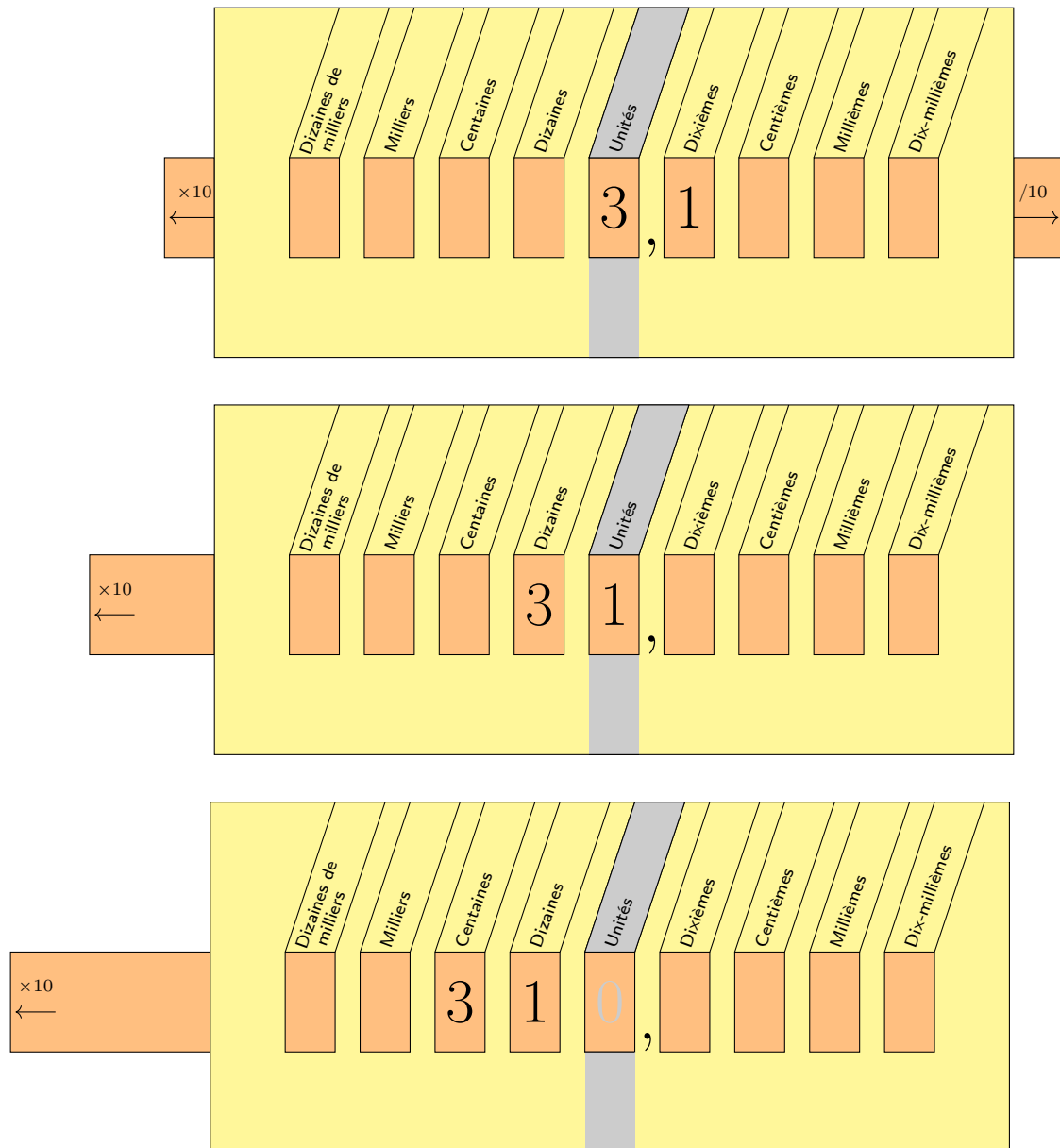


(a) Multiplication par 10, point de vue des chiffres



(b) Multiplication par 10, point de vue de la virgule

Avec un peu de papier, on peut fabriquer un *glisse-nombre*, qui permet de visualiser ce décalage des chiffres quand on multiplie par 10 :



Calcul de $3,1 \times 100 = 310$ en glissant de deux crans vers la gauche

Remarque 19

Au deuxième cran, les chiffres sont tellement décalés qu'il n'y a plus rien dans la colonne des unités. Or lorsqu'on écrit un chiffre, on doit toujours faire apparaître le chiffre des unités (c'est la référence de positionnement pour les chiffres). Dans ce cas, on ajoute un zéro dans la colonne des unités, et autant de zéros que nécessaire entre les unités et le reste des chiffres.

Méthode 20

Multiplier un nombre décimal par 10 revient à décaler sa virgule de 1 cran vers la droite quitte à ajouter des zéros à droite, multiplier un nombre décimal par 100 revient à décaler sa virgule de 2 crans vers la droite quitte à ajouter des zéros à droite, multiplier un nombre décimal par 1 000 revient à décaler sa virgule de 3 crans vers la droite quitte à ajouter des zéros à droite, etc.

De manière générale, multiplier un nombre entier $100 \cdots 00$ revient à décaler sa virgule vers la droite d'autant de

crans qu'il y a de 0 dans le facteur $100 \dots 00$, quitte à ajouter des zéros à droite.

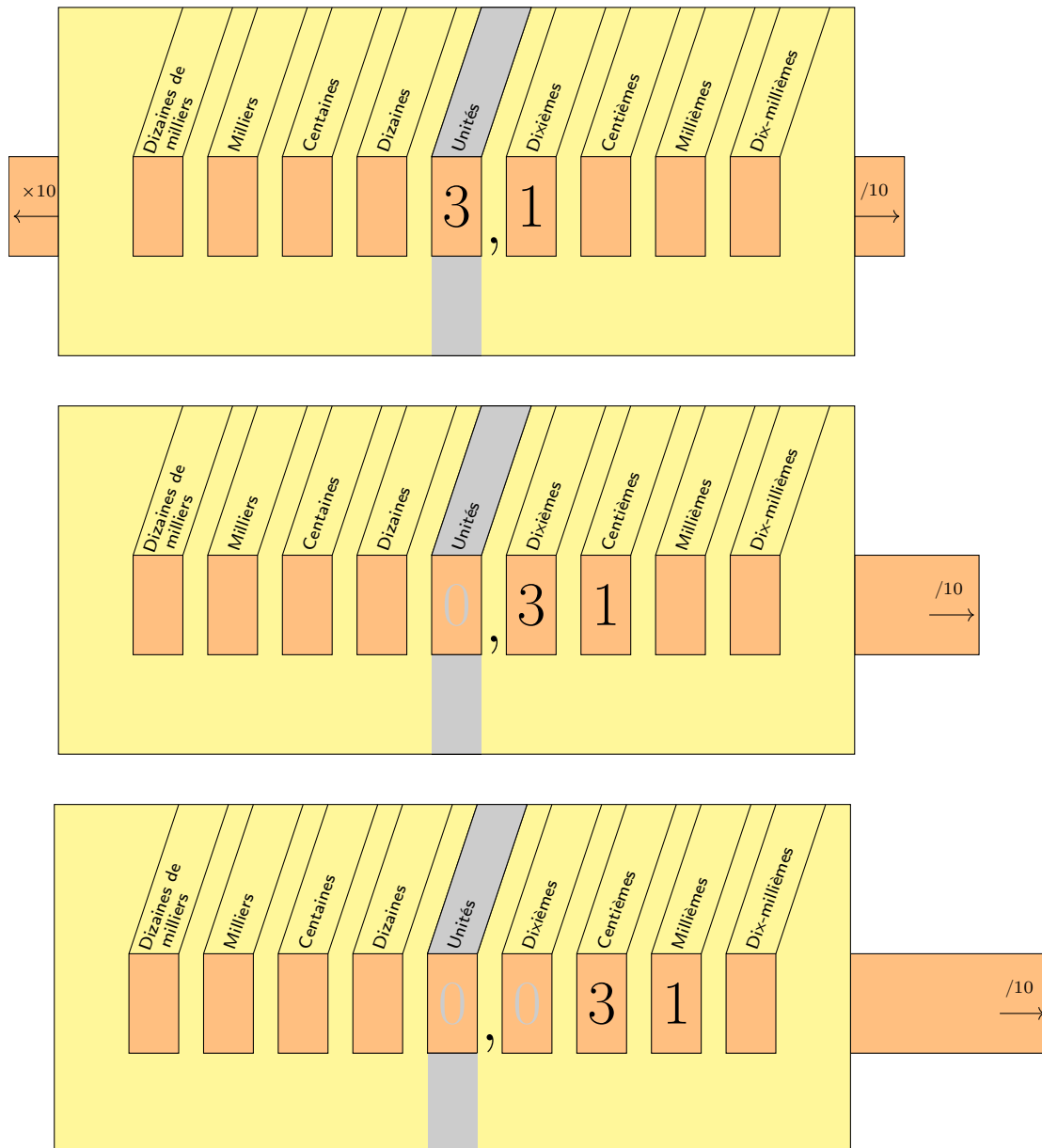
Comme la division par 10 est l'opération inverse de la multiplication par 10, le même raisonnement à l'envers donne la méthode suivante :

Méthode 21

Diviser un nombre décimal par 10 revient à décaler sa virgule de 1 cran vers la gauche quitte à ajouter des zéros à gauche, diviser un nombre décimal par 100 revient à décaler sa virgule de 2 crans vers la gauche quitte à ajouter des zéros à gauche, diviser un nombre décimal par 1 000 revient à décaler sa virgule de 3 crans vers la gauche quitte à ajouter des zéros à gauche, etc.

De manière générale, diviser un nombre entier $100 \dots 00$ revient à décaler sa virgule vers la gauche d'autant de crans qu'il y a de 0 dans le facteur $100 \dots 00$, quitte à ajouter des zéros à gauche.

On peut aussi utiliser le glisse-nombre :



Calcul de $3,1/100 = 0,031$ en glissant de deux crans vers la droite

Exercice 22

Calculer les produits et quotients par 10, 100, 1 000 et 10 000 de nombres décimaux suivants :

a► $0,142$

c► $0,000\,152$

e► $1,267\,126$

g► 54

b► $105,241$

d► $246\,125,003$

f► $2\,500$

h► 1

Méthode 23

- Pour multiplier par 5, on peut multiplier par 10 et diviser par 2 (car $5 = 10/2$)
- Pour multiplier par 25, on peut multiplier par 100 et diviser par 4 (car $25 = 100/4$)
- Pour diviser par 4, on peut diviser deux fois par 2 (car $4 = 2 \times 2$)
- Pour multiplier par 50, on peut multiplier par 100 et diviser par 2 (car $50 = 100/2$) ou multiplier par 5 et par 10 (car $50 = 5 \times 10$)
- Multiplier par 0,1 revient à diviser par 10 (car $0,1 = \frac{1}{10}$)
- Multiplier par 0,5 revient à diviser par 2 (car $0,5 = \frac{1}{2}$)

Exercice 24

Calculer :

a► $5 \times 1,2$

d► $25 \times 0,008$

g► $13,65 \times 50$

j► $20 \times 0,1$

b► $0,5 \times 5$

e► $12,6/4$

h► $50 \times 0,07$

k► $0,5 \times 13$

c► $6,44 \times 25$

f► $0,04/4$

i► $0,1 \times 125$

l► $0,056 \times 0,5$

a► $5 \times 0,1 \times 162 \times 0,5$

b► $2 \times 0,000\,161 \times 25 \times 2$

3 – Calcul posé

Méthode 25 (Algorithme d'addition)

Pour calculer la somme de deux nombres décimaux, on les écrit l'un au-dessus de l'autre, en alignant les chiffres de même poids (les unités au-dessus des unités, etc.) On ajoute autant de zéros que nécessaire à droite et à gauche des deux termes pour que ceux-ci aient le même nombre de chiffres. On procède ensuite de droite à gauche : on calcule la somme des deux chiffres superposés, on écrit les unités de la somme en-dessous et le nombre de dizaines (s'il y en a) au-dessus de la colonne juste à gauche (ce qu'on appelle une *retenue*, et on dit qu'on *propage la retenue*). S'il y a déjà une retenue sur la colonne en cours de calcul, on la prend en compte dans la somme des chiffres de la colonne. Si les termes sont des nombres décimaux non entiers, on trace la virgule de la somme en-dessous de la virgule des termes.

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \\
 1 \quad 2 \quad , \quad 6 \quad 0 \\
 + \quad 0 \quad 7 \quad , \quad 5 \quad 8 \\
 \hline
 2 \quad 0 \quad , \quad 1 \quad 8
 \end{array}$$

Exercice 26

¹ Calculer $12,05 + 3,491$.

Méthode 27 (Algorithme de soustraction)

Pour calculer la différence de deux nombres décimaux, on les écrit l'un au-dessus de l'autre, en alignant les chiffres de même poids (les unités au-dessus des unités, etc.) On ajoute autant de zéros que nécessaire à droite et à gauche des deux termes pour que ceux-ci aient le même nombre de chiffres. On suppose que le diminuende est plus petit que le diminueur, c'est-à-dire que le nombre en haut est plus grand que le nombre en-dessous. On procède ensuite de droite à gauche : si le chiffre du bas est plus petit que le chiffre du haut dans la colonne en cours de calcul, on écrit la différence de ces deux chiffres en-dessous. Sinon, si le chiffre du bas est plus grand que le chiffre du haut dans la colonne en cours de calcul, on ajoute 10 au chiffre du haut et on écrit un 1 dans la colonne juste à gauche pour compenser (voir la Figure) (ce qu'on appelle une *retenue*, et on dit qu'on *propage la retenue*). On écrit ensuite la différence de 10+ le chiffre d'en haut pas le chiffre d'en bas en-dessous. S'il y a déjà une retenue sur la colonne en cours de calcul, on la soustrait à la différence des chiffres de la colonne, en propageant une autre retenue si nécessaire. Si les nombres sont décimaux non entiers, on trace la virgule de la différence en-dessous de la virgule des diminuende et diminueur.

$$\begin{array}{r}
 12,6 \\
 - 07,58 \\
 \hline
 05,02
 \end{array}$$

Detailed description: The diagram shows a subtraction problem: 12,6 minus 07,58. The numbers are aligned by their decimal points. The minuend (12,6) has a 1 in the tens place, a 2 in the units place, and a 6 in the tenths place. The subtrahend (07,58) has a 0 in the tens place, a 7 in the units place, a 5 in the tenths place, and an 8 in the hundredths place. A horizontal line separates the two numbers. Below the line, the result 05,02 is written. The digits are aligned: 0 in the tens place, 5 in the units place, 0 in the tenths place, and 2 in the hundredths place. Dashed arrows indicate borrowing: one from the 2 in the units place to the 6 in the tenths place, and another from the 1 in the tens place to the 7 in the units place. Small boxes with the number 1 are placed below the 7 and the 1, indicating the borrowed units.

Exercice 28

Calculer $12,05 - 3,491$.

Méthode 29 (Algorithme de multiplication)

Pour multiplier deux nombres décimaux, on commence par calculer leur produit comme s'ils n'avaient pas de virgule (avec l'algorithme de multiplication de deux nombres entiers). La dernière étape consiste à placer la virgule : elle doit être placée de sorte que le produit a autant de décimales que les deux facteurs réunis. Par exemple, si les facteurs ont respectivement 1 et 2 décimales, alors leur produit en aura $1 + 2 = 3$.

$$\begin{array}{r}
 12,6 \\
 \times 7,58 \\
 \hline
 1008 \quad 421 \\
 + 6300 \quad 31 \\
 + 88200 \quad 41 \\
 \hline
 95508
 \end{array}$$

Detailed description: The diagram shows a multiplication problem: 12,6 multiplied by 7,58. The numbers are aligned by their decimal points. The product is calculated in three steps, each shifted one place to the left. The first step is 12,6 multiplied by 8, resulting in 100,8 with a carry of 4, 2, and 1. The second step is 12,6 multiplied by 5, resulting in 63,0 with a carry of 3 and 1. The third step is 12,6 multiplied by 7, resulting in 88,2 with a carry of 4 and 1. The final product is 95,508, with the decimal point placed after the 5, resulting in 955,08.

Exercice 30

Calculer $12,05 \times 3,91$.

Théorème 31 (Division euclidienne)

Soient a et b deux nombres entiers, avec b différent de 0. Il existe deux uniques nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$.

$$\begin{array}{r}
 581 \overline{) 4} \\
 \underline{- 4} \\
 18 \\
 \underline{- 16} \\
 21 \\
 \underline{- 20} \\
 1
 \end{array}$$

Remarque 32

Le nombre a est appelé *dividende* de la division euclidienne, le nombre b est appelé *diviseur* de la division euclidienne, le nombre q est appelé *quotient* de la division euclidienne, et le nombre r est appelé *reste* de la division euclidienne.

Exercice 33

Combien font 609h en semaines, jours et heures ? Combien font 34 990s en heures, minutes et secondes ?

Méthode 34 (Division décimale)

On peut poursuivre l'algorithme de division euclidienne en ajoutant ,00... au dividende, et une virgule au quotient. Le reste de l'algorithme se déroule comme si les virgules n'étaient pas là. On peut également diviser un nombre décimal par un nombre entier de cette manière, avec les mêmes considérations pour la virgule.

$$\begin{array}{r}
 581,00 \overline{) 4} \\
 \underline{- 4} \\
 18 \\
 \underline{- 16} \\
 21 \\
 \underline{- 20} \\
 10 \\
 \underline{- 8} \\
 20 \\
 \underline{- 20} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 659,38 \overline{) 8} \\
 \underline{- 0} \\
 65 \\
 \underline{- 64} \\
 19 \\
 \underline{- 16} \\
 33 \\
 \underline{- 32} \\
 18 \\
 \underline{- 16} \\
 2
 \end{array}$$

Remarque 35

On peut également poursuivre une division décimale en ajoutant des zéros à droite pour améliorer la précision du quotient et, avec un peu de chance, éliminer le reste.

6	5	9	3	8	0	0	8
— 0	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 8 2, 4 2 2 5
6	5						
— 6 4	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	9						
— 1 6	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	3	3					
— 3 2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	1	8					
— 1 6	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	2	0					
— 1 6	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	4	0					
— 4 0	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	0						

1	0	0	0	0	0	0	3
— 0	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0, 3 3 3 3 3 3
1	0						
— 9	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	0						
— 9	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	1	0					
— 9	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	1	0					
— 9	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	1	0					
— 9	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	1	0					
— 9	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	1						

Exercice 36

À l'aide d'une division décimale, déterminer les deux premières décimales de $\frac{22}{7}$ et les six premières décimales de $\frac{355}{113}$.

4 – Ordres de grandeur

Proposition 37

- ▶ Tout nombre entier ou décimal plus grand que 1 peut s'écrire comme produit d'un nombre entre 1 (inclus) et 10 (exclu) (que l'on appelle *mantisse* de ce nombre) par un nombre de la forme 1, 10, 100, 1000...
On dit que ce nombre est *de l'ordre de* 1, 10, 100, 1000, ... selon le facteur correspondant.
- ▶ Tout nombre entier ou décimal plus petit que 1 peut s'écrire comme quotient d'un nombre entre 0 (inclus) et 10 (exclu) (que l'on appelle *mantisse* de ce nombre) par un nombre de la forme 10, 100, 1000...
On dit que ce nombre est *de l'ordre de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... selon le diviseur correspondant.

Exemple 38

- ▶ $121,267 = 1,21267 \times 100$ et $0 \leq 1,21267 < 10$, donc 121,267 est de l'ordre de 100.
- ▶ $54\,835,2 = 5,48352 \times 10\,000$ et $0 \leq 5,48352 < 10$, donc 54 835,2 est de l'ordre de 10 000.
- ▶ $0,791 = \frac{7,91}{10}$ et $0 \leq 7,91 < 10$, donc 0,791 est de l'ordre de $\frac{1}{10}$.
- ▶ $0,00958 = \frac{9,58}{1000}$ et $0 \leq 9,58 < 10$, donc 0,00958 est de l'ordre de $\frac{1}{1000}$.

Remarque 39

Dans certaines situations, un ordre de grandeur d'un nombre décimal est un nombre entier proche, qui n'est pas forcément 1, 10, 100, 1000... Par exemple, on dit que le poids d'un bébé à la naissance est de l'ordre de 4kg, que la taille de la tour Eiffel est de l'ordre de 300m, que la distance Paris-Bordeaux est de l'ordre de 600km...

Le tableau suivant résume quelques multiples d'unités usuels et les liens qui les lient. On note u une unité quelconque : ça peut être des mètres (m), des grammes (g), ...

Nom	Milli- u	Centi- u	Déci- u	/	Déca- u	Hecto- u	Kilo- u
Symbole	mu	cu	du	u	$da u$	hu	ku
Valeur	$\frac{1}{1\,000}u$	$\frac{1}{100}u$	$\frac{1}{10}u$	$1u$	$10u$	$100u$	$1\,000u$

Exemple 40

- ▶ Une cellule animale mesure environ $20\mu\text{m}$. La taille d'une cellule animale est donc de l'ordre de la dizaine de micromètres, c'est-à-dire de l'ordre du cent-millième de mètre, ou du dixième de millimètre.
- ▶ La distance Terre-Lune est en moyenne $384\,400\text{km}$, elle est donc de l'ordre de $100\,000\text{km}$, c'est-à-dire de l'ordre du dixième de mégamètre.
- ▶ Le poids d'une baleine adulte est en moyenne $140\,000\text{kg}$, c'est-à-dire de l'ordre de $100\,000\text{kg}$.
- ▶ Le poids d'une banane est en moyenne de 120g , donc de l'ordre de la centaine de grammes, on encore du dixième de kilogramme.
- ▶ Selon une estimation, $915\,000\,000\,000$ gigaoctets (c'est-à-dire $915\,000\,000$ To) de données ont été publiés sur Internet en 2018. C'est de l'ordre de la dizaine de millions de téraoctets. (En guise de comparaison, la capacité de stockage d'un ordinateur personnel est de l'ordre du téraoctet.)

5 Pourcentages, proportionnalité

1	Situation de proportionnalité	33
2	Pourcentages	33

Compétences

Proportionnalité

- Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité.
- Appliquer un pourcentage.
- Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs à partir du sens de la situation. Résoudre un problème de proportionnalité impliquant des grandeurs.

1 – Situation de proportionnalité

2 – Pourcentages

6 Organisation et gestion des données

1	Classer et représenter les données	34
---	--	----

Compétences

Organisation et gestion de données

- ▶ Prélever des données numériques à partir de supports variés. Produire des tableaux, diagrammes et graphiques organisant des données numériques.
- ▶ Exploiter et communiquer des résultats de mesures. Lire ou construire des représentations de données :
 - ▶ tableaux (en deux ou plusieurs colonnes, à double entrée) ;
 - ▶ diagrammes en bâtons, circulaires ou semi-circulaires ;
 - ▶ graphiques cartésiens.
- ▶ Organiser des données issues d'autres enseignements (sciences et technologie, histoire et géographie, éducation physique et sportive, etc.) en vue de les traiter.

1 – Classer et représenter les données

Deuxième partie

Espace et géométrie

1 Droites, polygones et cercles

1	Les outils du géomètre	37
1.1	La règle	37
1.2	L'équerre	37
1.3	Le compas	38
2	Distances et cercles	38
3	Triangles	39
4	Droites	40
5	Angles	40

Compétences

Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques

- ▶ Reconnaître, nommer, décrire, coder des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) :
 - ▶ triangles, dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral) ;
 - ▶ quadrilatères, dont les quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, première approche du parallélogramme) ;
 - ▶ cercle (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné), disque.
- ▶ Vocabulaire associé à ces objets et à leurs propriétés : côté, sommet, angle, diagonale, polygone, centre, rayon, diamètre, milieu, hauteur solide, face, arête.
- ▶ Reproduire, représenter, construire :
 - ▶ des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) ;
- ▶ Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction d'une figure plane.
- ▶ Réaliser une figure plane simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques

- ▶ Définition de l'alignement de 3 points, de l'appartenance à une droite
- ▶ Relations de perpendicularité et de parallélisme
 - ▶ Tracer avec l'équerre la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.
 - ▶ Tracer avec la règle et l'équerre la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.
 - ▶ Déterminer le plus court chemin entre un point et une droite.
 - ▶ Alignement, appartenance.
 - ▶ Perpendicularité, parallélisme.
 - ▶ Segment de droite. Milieu d'un segment.
 - ▶ Distance entre deux points, entre un point et une droite
- ▶ Médiatrice d'un segment :
 - ▶ définition : droite perpendiculaire au segment en son milieu ;
 - ▶ caractérisation : ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs

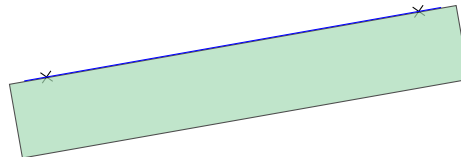
- ▶ Longueur et périmètre
 - ▶ Notion de longueur : cas particulier du périmètre.
 - ▶ Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération.
- ▶ Angles
 - ▶ Comparer des angles, en ayant ou non recours à leur mesure (par superposition, avec un calque). Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit.
 - ▶ Estimer qu'un angle est droit, aigu ou obtus.
 - ▶ Utiliser l'équerre pour vérifier qu'un angle est droit, aigu ou obtus, ou pour construire un angle droit.
 - ▶ Utiliser le rapporteur pour :
 - ▶ déterminer la mesure en degré d'un angle ;
 - ▶ construire un angle de mesure donnée en degrés.
 - ▶ Notion d'angle.
 - ▶ Lexique associé aux angles : angle droit, aigu, obtus.
 - ▶ Mesure en degré d'un angle.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux

- ▶ Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure.
- ▶ Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions.

1 – Les outils du géomètre

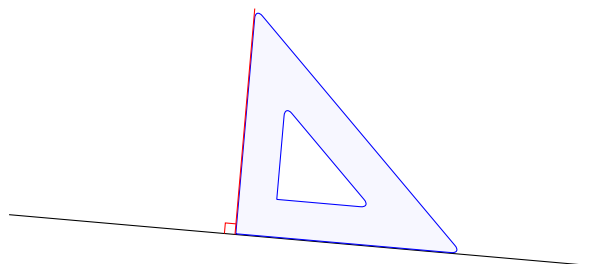
1.1. La règle



Elle sert à :

- ▶ Tracer un segment entre deux points,
- ▶ Tracer une droite passant par deux points,
- ▶ Si elle est graduée, alors elle permet de mesurer la distance entre deux points, autrement dit la longueur d'un segment.

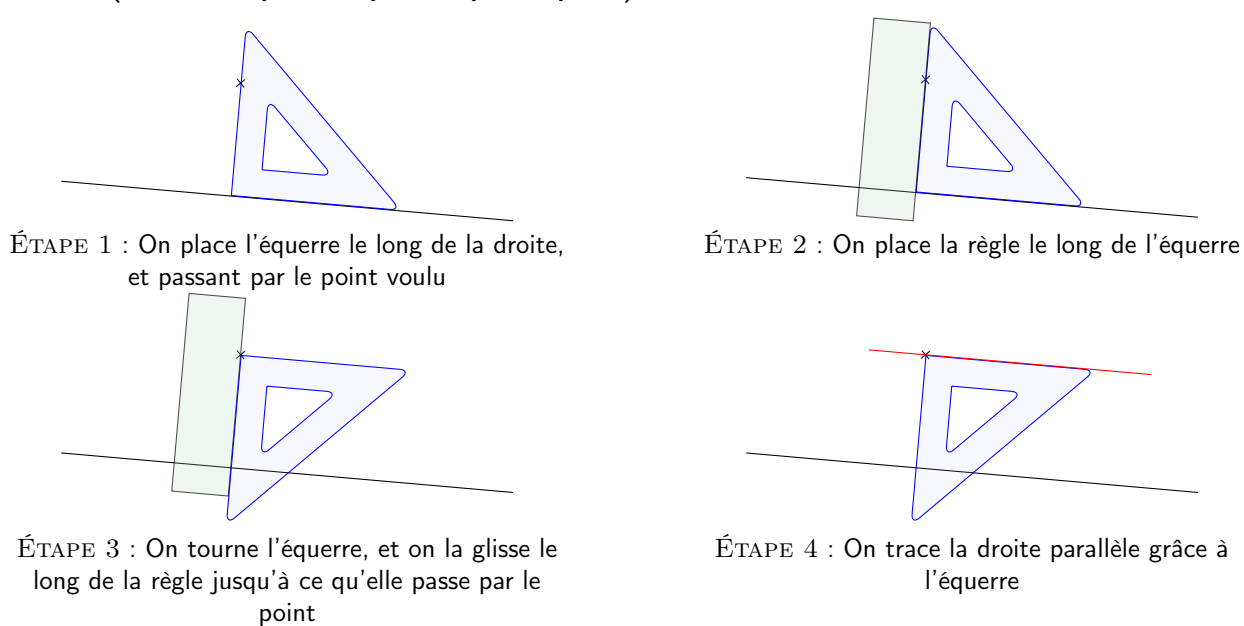
1.2. L'équerre



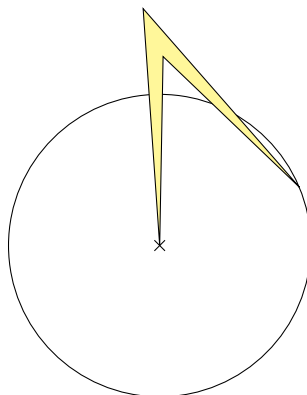
Elle sert à :

- ▶ Tracer une droite perpendiculaire à une autre,
- ▶ En l'utilisant avec une règle, elle permet de tracer des droites parallèles.

Méthode 1 (*Tracer une parallèle passant par un point*)



1.3. Le compas



Il sert à :

- ▶ Tracer des cercles,
- ▶ Reporter des longueurs.

2 – Distances et cercles

Définition 2

Soient A , B et C trois points.

On dit que C appartient à $[AB]$, et on note $C \in [AB]$, si le point C est sur le segment $[AB]$.

Sinon, on dit que C n'appartient pas à $[AB]$, et on note $C \notin [AB]$.

Le symbole $\in$ ("appartient à") peut aussi être utilisé dans d'autres contextes : un point qui appartient à un disque, à un triangle, à une droite, ...

Méthode 3

Dans une figure, pour indiquer que deux longueurs sont les mêmes, on peut les *coder* avec un même symbole. *Les apparences sont parfois trompeuses, on ne peut rien croire à part le codage d'une figure !*

Définition 4

La *distance* entre deux points A et B est la longueur du segment $[AB]$. On la note AB .

Définition 5

Le *milieu* d'un segment $[AB]$ est le point $I \in [AB]$ qui est à la même distance de A et de B .

Méthode 6

Pour tracer un segment, on utilise une règle. Si la règle est graduée, on peut s'en servir pour mesurer la longueur du segment.

Définition 7

Soient O un point et r un nombre positif.

Le *cercle* de *centre* O et de *rayon* r est l'ensemble des points à distance r du point O .

Le *disque* de *centre* O et de *rayon* r est l'ensemble des points à distance inférieure ou égale à r du point O .

Méthode 8

Pour tracer un cercle, on utilise un compas :

- 1► On écarte la pointe et la mine du compas d'une distance égale au rayon du cercle que l'on veut tracer,
- 2► On plante la pointe du compas au centre du cercle que l'on veut tracer,
- 3► On fait tourner la mine autour de la pointe (qui ne doit pas bouger), sans modifier l'écartement des bras du compas, en tenant le compas grâce à la petite poignée en haut de celui-ci.

Méthode 9

Soient A et B deux points.

Si je veux tracer un point à distance r de A , je dois choisir ce point sur le cercle de centre A et de rayon r .

Si je veux tracer un point à distance r de A et à distance s de B , je dois choisir ce point à la fois sur le cercle de centre A et de rayon r et sur le cercle de centre B et de rayon s (c'est-à-dire à l'*intersection* de ces deux cercles).

Définition 10

La *médiatrice* d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Proposition 11

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points à égale distance de A et de B .

Méthode 12

Pour tracer la médiatrice d'un segment $[AB]$, on peut tracer deux cercles de même rayon (pas trop petit) de centres A et B , et tracer la droite passant par leurs deux points d'intersection.

3 – Triangles

Définition 13

Un *polygone* est une figure fermée dont les côtés sont des segments. Les extrémités de ces segments sont appelées *sommets* du polygone.

Un polygone à trois côtés est appelé *triangle*.

Dans tout ce paragraphe, ABC désigne un triangle.

Définition 14

- ▶ Si les trois côtés de ABC sont de même longueur, alors on dit que ABC est *équilatéral*.
- ▶ Si ABC possède deux côtés de même longueur, on dit qu'il est *isocèle*. Plus précisément, si $AB = AC$, alors on dit que ABC est *isocèle en A*. Le point A est appelé *sommet principal* du triangle, et $[BC]$ est appelée *base* du triangle.
- ▶ Si l'un des angles de ABC est droit, alors on dit que ABC est un triangle *rectangle*. Plus précisément, si l'angle en A est droit, alors on dit que ABC est *rectangle en A*.

Remarque 15

Un triangle équilatéral est isocèle (en chacun de ses sommets), et il existe des triangles à la fois isocèles et rectangles, que l'on dit alors *isocèles rectangles*.

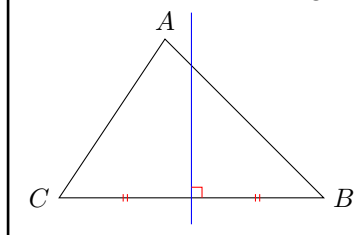
Méthode 16

Si on connaît les longueurs des côtés de ABC , on peut le tracer de la manière suivante :

- 1▶ On trace $[AB]$ avec une règle graduée,
- 2▶ Le point C est à distance AC de A : il se trouve donc sur le cercle de centre A et de rayon AC , que l'on trace.
- 3▶ Le point C est aussi à distance BC de B : il se trouve donc sur le cercle de centre B et de rayon BC , que l'on trace aussi.
- 4▶ Le point C est l'un des points d'intersection des deux cercles : pour terminer, on trace $[AC]$ et $[BC]$ à la règle.

Définition 17

Les *médiatrices* d'un triangle sont les médiatrices de ses côtés.

**Exercice 18**

Intersection des médiatrices et cercle circonscrit

Exercice 19

Médianes et centre de gravité

4 – Droites**5 – Angles**

Propriété 20

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont de même mesure.

Propriété 21

Les angles d'un triangle équilatéral ont tous pour mesure 60° .

Propriété 22

Les angles à la base d'un triangle isocèle et rectangle ont pour mesure 45° .

2 Périmètre et aire

1	Périmètre	43
2	Aire	43
3	Échelle, agrandissement et réduction d'une figure	43

Compétences

Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques

- ▶ Reconnaître, nommer, décrire, coder des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) :
 - ▶ triangles, dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral) ;
 - ▶ quadrilatères, dont les quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, première approche du parallélogramme) ;
 - ▶ cercle (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné), disque.
- ▶ Réaliser une figure plane simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques

- ▶ Proportionnalité
 - ▶ Reproduire une figure en respectant une échelle donnée.
 - ▶ Agrandissement ou réduction d'une figure.

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle. Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs

- ▶ Longueur et périmètre
 - ▶ Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure (par exemple en utilisant une ficelle, ou en reportant les longueurs des côtés d'un polygone sur un segment de droite avec un compas).
 - ▶ Notion de longueur : cas particulier du périmètre.
 - ▶ Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération.
 - ▶ Calculer le périmètre d'un polygone en ajoutant les longueurs de ses côtés.
 - ▶ Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant une formule.
 - ▶ Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle.
 - ▶ Formule de la longueur d'un cercle.
- ▶ Aires
 - ▶ Comparer des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure, par superposition ou par découpage et recollement.
 - ▶ Différencier périmètre et aire d'une figure.
 - ▶ Estimer la mesure d'une aire et l'exprimer dans une unité adaptée.
 - ▶ Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule.
 - ▶ Unités usuelles d'aire et leurs relations : multiples et sous-multiples du m^2 .
 - ▶ Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux

- ▶ Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure.
- ▶ Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions.
- ▶ Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.
- ▶ Formules donnant :
 - ▶ le périmètre d'un carré, d'un rectangle, la longueur d'un cercle ;
 - ▶ l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque ;

1 – Périmètre**2 – Aire****3 – Échelle, agrandissement et réduction d'une figure**

3 Symétrie axiale

1	Axe de symétrie d'une figure	44
---	--	----

Compétences

Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques

- ▶ Symétrie axiale
 - ▶ Compléter une figure par symétrie axiale.
 - ▶ Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite par rapport à un axe donné.
 - ▶ Construire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné.
 - ▶ Figure symétrique, axe de symétrie d'une figure, figures symétriques par rapport à un axe.
 - ▶ Propriétés de conservation de la symétrie axiale.
 - ▶ Médiatrice d'un segment :
 - ▶ définition : droite perpendiculaire au segment en son milieu ;
 - ▶ caractérisation : ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

1 – Axe de symétrie d'une figure

4 Solides et volume

1	Notion de solide, vocabulaire	46
2	Représentation d'un solide en perspective cavalière	48
3	Patron d'un solide	49
4	Solides usuels	50
5	Volume d'un solide	54

Compétences

Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques

- ▶ Reconnaître, nommer, décrire des solides simples ou des assemblages de solides simples : cube, pavé droit, prisme droit, pyramide, cylindre, cône, boule.
- ▶ Vocabulaire associé à ces objets et à leurs propriétés : côté, sommet, angle, diagonale, polygone, centre, rayon, diamètre, milieu, hauteur solide, face, arête.
- ▶ Reproduire, représenter, construire :
 - ▶ des solides simples ou des assemblages de solides simples sous forme de maquettes ou de dessins ou à partir d'un patron (donné, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou à construire dans le cas d'un pavé droit).
 - ▶ un cube, un pavé droit
 - ▶ à l'aide de patrons (donnés pour les prismes et pyramides), une maquette d'un assemblage de solides simples (cube, pavé droit, prisme droit, pyramide)

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs

- ▶ Volumes et contenances
 - ▶ Relier les unités de volume et de contenance.
 - ▶ Estimer la mesure d'un volume ou d'une contenance par différentes procédures (transvasements, appréciation de l'ordre de grandeur) et l'exprimer dans une unité adaptée.
 - ▶ Déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités (cubes de taille adaptée) ou en utilisant une formule.
 - ▶ Unités usuelles de contenance (multiples et sous multiples du litre).
 - ▶ Unités usuelles de volume (cm^3 , dm^3 , m^3), relations entre ces unités.
 - ▶ Formules du volume d'un cube, d'un pavé droit.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux

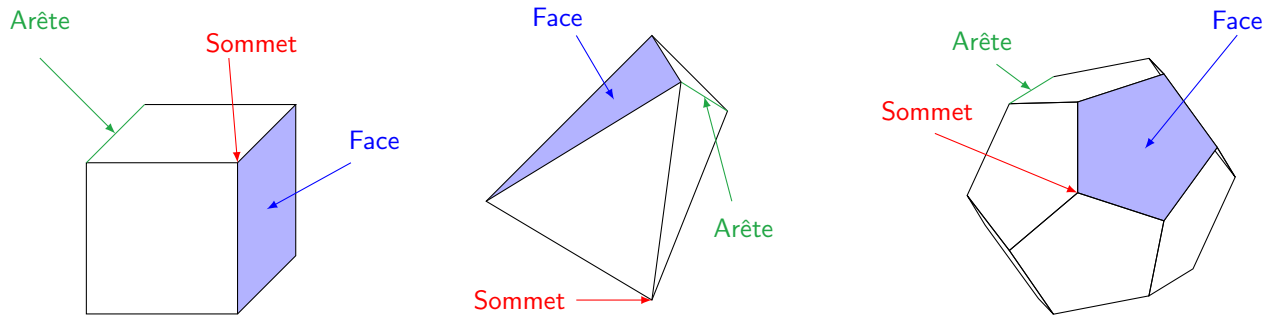
- ▶ Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure.
- ▶ Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions.
- ▶ Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.
- ▶ Formules donnant :
 - ▶ le volume d'un cube, d'un pavé droit.

1 – Notion de solide, vocabulaire

Définition 1

- ▶ Un *solide* est une forme géométrique qui correspond à la forme d'un objet de la vie réelle.
- ▶ Une *arête* d'un solide est un bord du solide, une démarcation que l'on pourrait sentir avec les doigts.
- ▶ Une *face* d'un solide est une surface lisse à l'extérieur du solide : c'est une surface que l'on peut caresser avec le doigt, et dont les bords sont les sommets du solide. Autrement, si on se baladait à la surface du solide, une arête est le lieu de passage d'une face à une autre.
- ▶ Un *sommet* d'un solide est un coin du solide, une pointe que l'on pourrait sentir avec le doigt. Un sommet est donc le point de rencontre de plusieurs arêtes.

Exemple 2

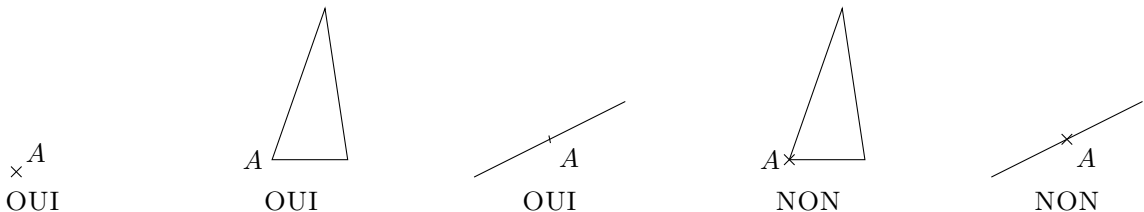


Propriété 3

- ▶ Les sommets d'un solide sont des points.
- ▶ Les arêtes *droites* d'un solide sont des segments.

Notations :

- ▶ Un point est le point de rencontre de deux segments : si besoin, on représente un point avec une croix, voire juste un trait si ce point est sur un segment. Généralement, on nomme les points avec des lettres majuscules.
- ▶ Le segment qui relie deux points A et B est noté $[AB]$.



Remarque 4

Attention à ne pas dessiner un rond pour désigner un point !

Définition 5

La *nature* d'une face d'un solide est sa forme.

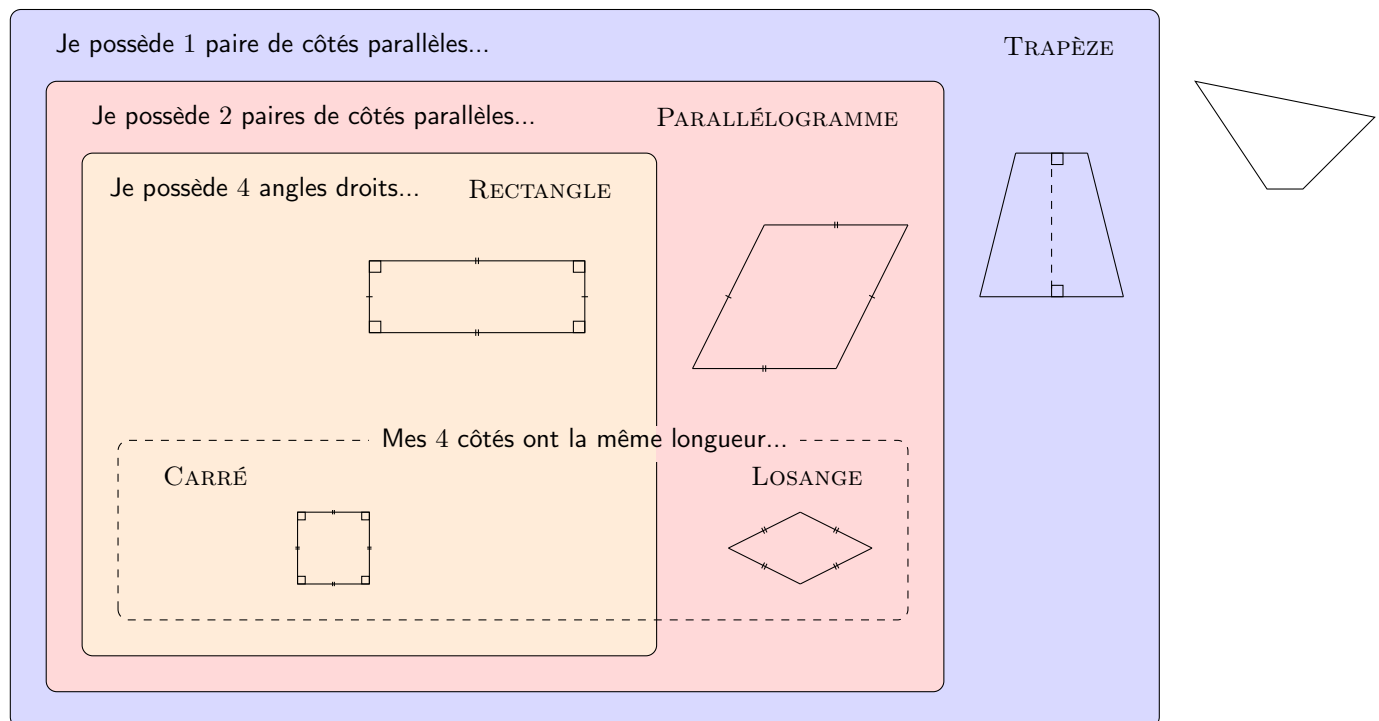
Exemple 6

Dans l'Exemple 2, si on demande la nature des faces en bleu, la réponse est, de gauche à droite : un carré, un triangle, un pentagone.

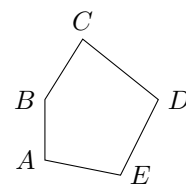
Rappel : quadrilatères particuliers

Un quadrilatère (non croisé)...

- ... possédant une paire de côtés parallèles est un *trapèze*.
- ... possédant deux paires de côtés parallèles est un *parallélogramme*.
- ... possédant deux paires de côtés parallèles et un angle droit est un *rectangle*.
- ... possédant 4 côtés de même longueur est un *losange*.
- ... possédant 4 côtés de même longueur et un angle droit est un *carré*.

**Rappel** : Nommer des polygones

Pour nommer un polygone, on lit le nom de ses sommets et tournant dans un sens ou dans l'autre. Par exemple, le polygone ci-contre peut être nommé *ABCDE*, ou *BAEDC* par exemple.

**Définition 7**

Un (solide) *polyèdre* est un solide dont les faces sont des polygones.

Exemple 8

Les solides de l'exemple précédent sont des polyèdres. Les faces visibles sont des carrés, des triangles et des pentagones.

Remarque 9

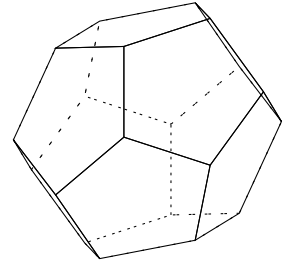
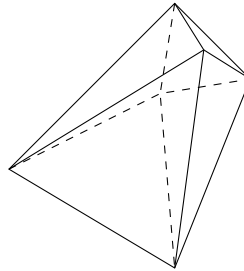
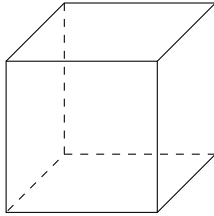
De même que «polygone» vient du grec *polús* («nombreux») et de *gônia* («angle»), le mot «polyèdre» vient du grec *polús* («nombreux») et *hedra* («face»). Attention à ne pas s'y méprendre, les faces d'un polyèdre doivent être des polygones.

2 – Représentation d'un solide en perspective cavalière

Méthode 10 (*Perspective cavalière*)

La *perspective cavalière* est une méthode de représentation des solides. Le parallélisme est conservé entre la réalité et le dessin. Les arêtes qui sont cachées par des faces sont représentées en pointillés.

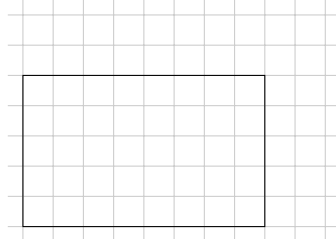
Exemple 11



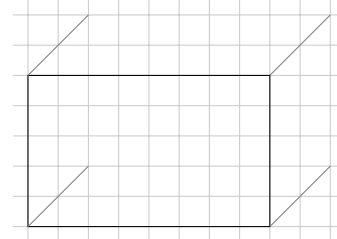
Remarque 12

La perspective cavalière respecte le parallélisme, mais par les formes : en effet, par exemple, la face supérieure d'un cube est un carré, mais quand on la dessine en perspective cavalière, on trace un parallélogramme qui n'est pas un carré.

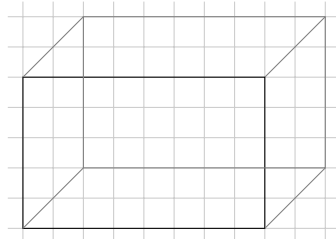
Méthode 13 (*Tracé d'un pavé droit en perspective cavalière*)



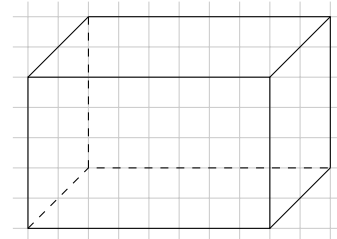
ÉTAPE 1 : On trace la face avant en taille réelle



ÉTAPE 2 : **Au crayon à papier**, on trace les arêtes dites *fuyantes*, celles qui partent en profondeur. **Elles doivent être parallèles et de même longueur⁽¹⁾**. Pour assurer le parallélisme, on utilise les carreaux de la feuille si possible, sinon on utilise un rapporteur.



ÉTAPE 3 : **Au crayon à papier**, on relie les sommets des arêtes fuyantes de sorte à tracer la face arrière.⁽²⁾



ÉTAPE 4 : **Au stylo**, on repasse en traits pleins les arêtes visibles et en traits pointillés les arêtes cachées. On efface ensuite les traits de construction tracés au crayon à papier.⁽³⁾

(1) : La perspective cavalière ne respecte pas la longueur des arêtes fuyantes, donc en principe on peut les faire de n'importe quelle longueur. Cependant, il est coutume de les tracer à la moitié de leur longueur réelle, pour donner un aspect plus réaliste au dessin final en termes de proportions.

(2) : La face arrière est aussi en taille réelle. Si la face arrière n'est pas une copie déplacée de la face avant, c'est qu'on s'est trompé dans le dessin des arêtes fuyantes.

(3) : Astuce : attendez quelques secondes que l'encre du stylo sèche, sinon le passage de la gomme risque de créer des bavures !

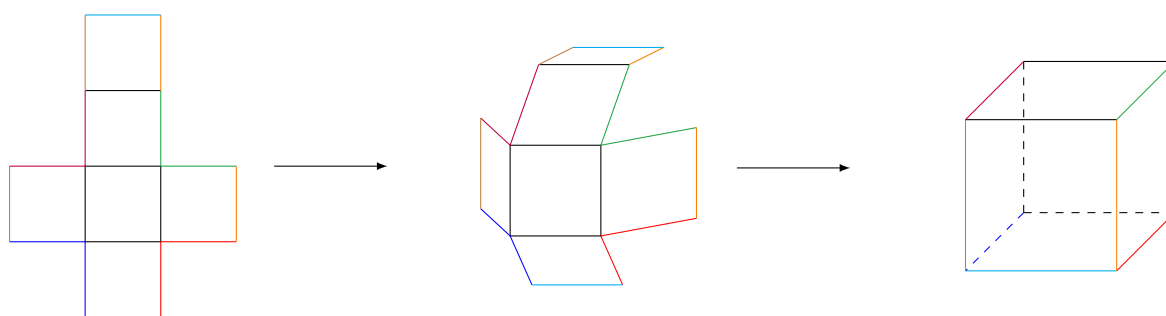
3 – Patron d'un solide

Définition 14

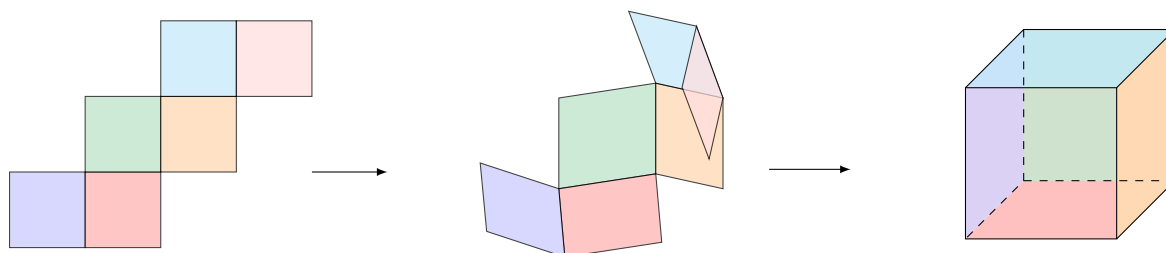
Un *patron* d'un solide est une représentation plane de ce solide dans laquelle les faces sont représentées en taille réelle. En pliant le patron le long des segments correspondant aux sommets du solide, on obtient le solide d'origine.

Exemple 15

La figure plane suivante est le patron d'un cube : en effet, on détaille ci-dessous le processus de pliage. Le segments du patron sont colorés de sorte que deux segments d'une même couleur correspondent à la même arête du solide.



Voici un autre patron, mais cette fois-ci ce sont les faces qui sont colorées :

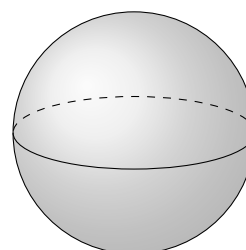


Remarque 16

Comme le montre l'exemple précédent, un même solide peut avoir plusieurs patrons.

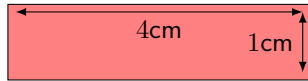
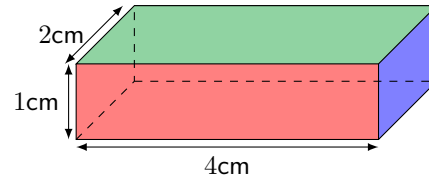
Remarque 17

Tous les solides polyèdres possèdent au moins un patron, mais les solides non polyèdres ne possèdent pas tous de patron. En effet, par exemple, la sphère ne possède pas de patron. C'est l'une des raisons pour lesquelles les cartes du monde ne représentent pas fidèlement la taille des pays !

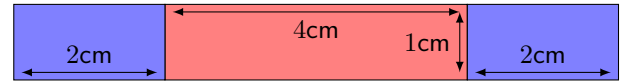


Méthode 18 (Patron du pavé droit)

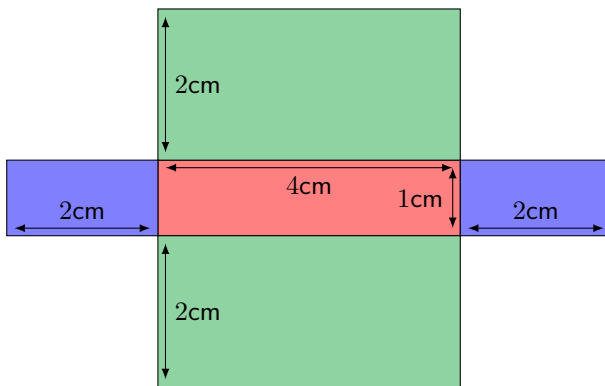
On veut tracer un patron du pavé droit ci-contre, dont les paires faces opposées ont été colorées de la même couleur pour aider à la visualisation :



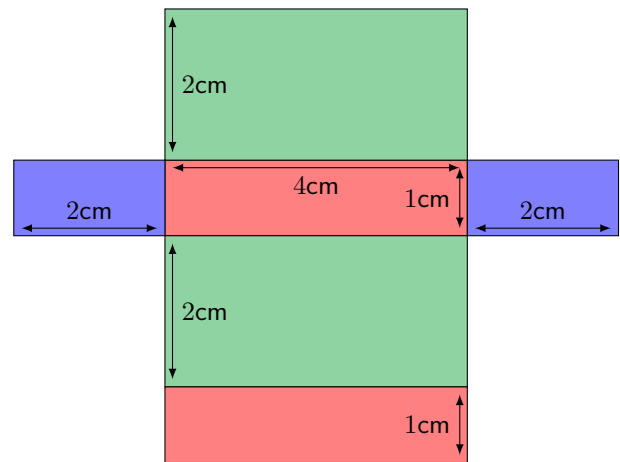
ÉTAPE 1 : On trace la face avant en taille réelle



ÉTAPE 2 : On ajoute à droite et à gauche du rectangle que l'on vient de tracer les faces droite et gauche du pavé droit, en taille réelle, en respectant les côtés partagés entre ces différents rectangles



ÉTAPE 3 : On ajoute en haut et en bas du rectangle correspondant à la face avant les faces du dessus et du dessous en taille réelle



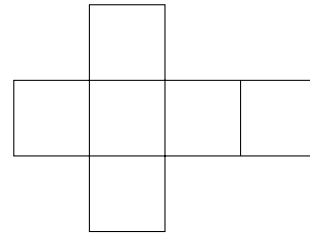
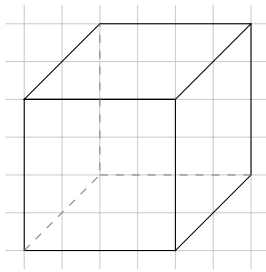
ÉTAPE 4 : On ajoute le rectangle correspondant à la face arrière accolé à l'un des rectangles correspondant aux faces du dessus ou du dessous et taille réelle

4 – Solides usuels**Définition 19**

On classe les faces des solides en deux catégories : les *faces planes*, qui sont des figures géométriques contenues dans un plan, et les *faces courbes*. Autrement dit, les faces courbes sont celles qui ont du relief quand on les caresse avec le doigt.

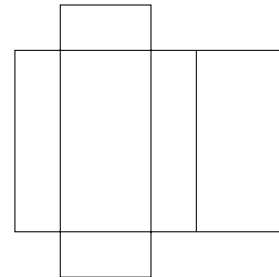
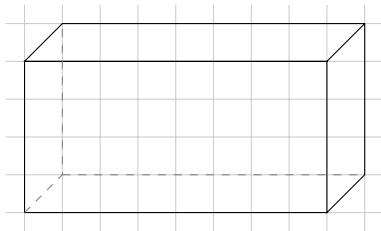
Exemple 20

Par définition, les faces des polyèdres sont des faces planes. La face d'une boule est une face courbe.



CUBE

- ▶ Nombre de sommets : 8
- ▶ Nombre d'arêtes : 12
- ▶ Faces : 6 carrés
- ▶ C'est un polyèdre

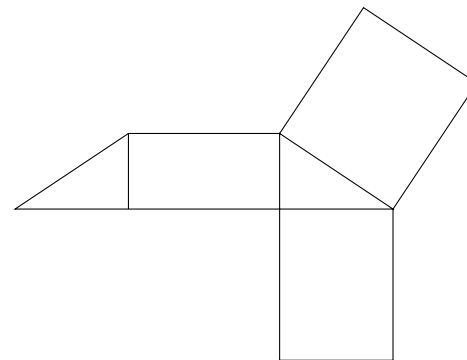
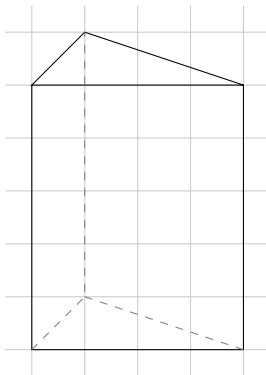


PAVÉ DROIT

- ▶ Nombre de sommets : 8
- ▶ Nombre d'arêtes : 12
- ▶ Faces : 6 rectangles
- ▶ C'est un polyèdre

Remarque 21

Un cube est un type particulier de pavé droit, dont les faces sont des carrés.

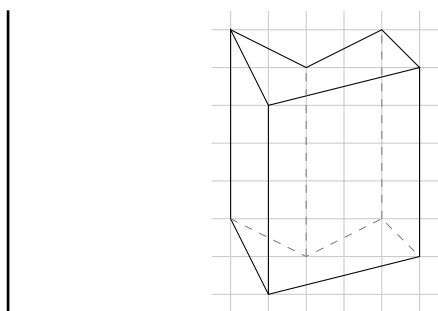


PRISME DROIT (À BASE TRIANGULAIRE)

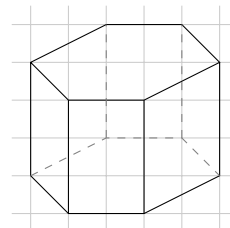
- ▶ Nombre de sommets : 6
- ▶ Nombre d'arêtes : 9
- ▶ Faces : 2 triangles et 3 rectangles
- ▶ C'est un polyèdre

Définition 22

De manière générale, un *prisme droit* est un solide obtenu en prenant un polygone, appelé *base* du prisme droit, en élevant une copie de ce même polygone au-dessus du premier, et en reliant les côtés correspondants de ces deux polygones par des rectangles.



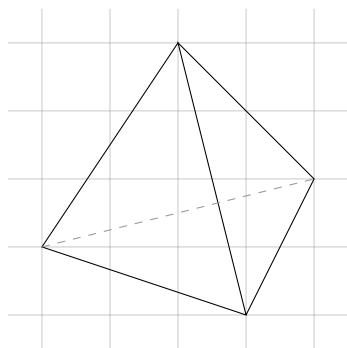
PRISME DROIT À BASE PENTAGONALE



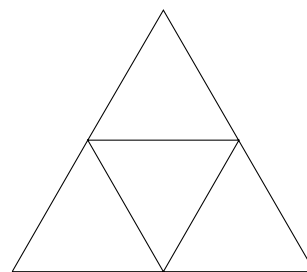
PRISME DROIT À BASE HEXAGONALE

Remarque 23

Un pavé droit est un type particulier de prisme droit, à base rectangulaire.

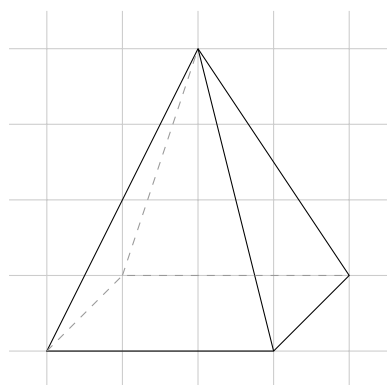


TÉTRAÈDRE RÉGULIER

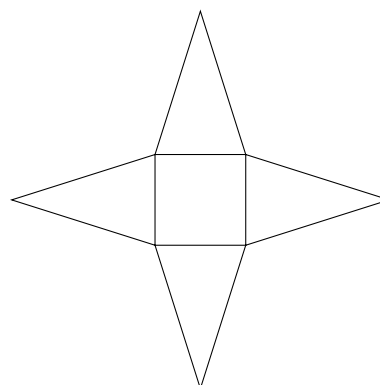


- Nombre de sommets : 4
- Nombre d'arêtes : 6

- Faces : 4 triangles équilatéraux
- C'est un polyèdre



PYRAMIDE À BASE CARRÉE



- Nombre de sommets : 5
- Nombre d'arêtes : 8

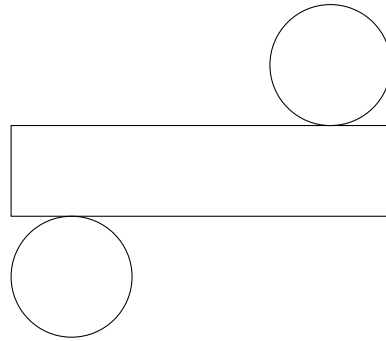
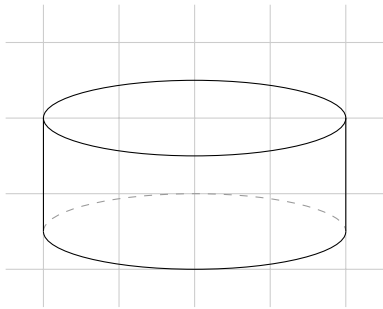
- Faces : 4 triangles et 1 carré
- C'est un polyèdre

Définition 24

De manière générale, une *pyramide* est un solide obtenu en prenant un polygone, appelé *base* de la pyramide, et en reliant ses côtés à un autre point, appelé *sommet* de la pyramide, pour former des faces triangulaires.

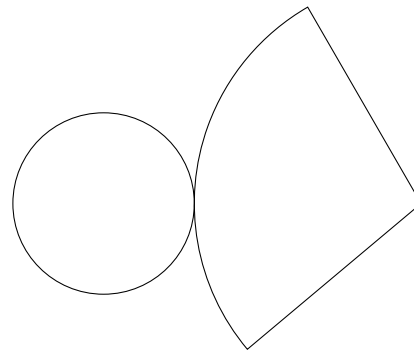
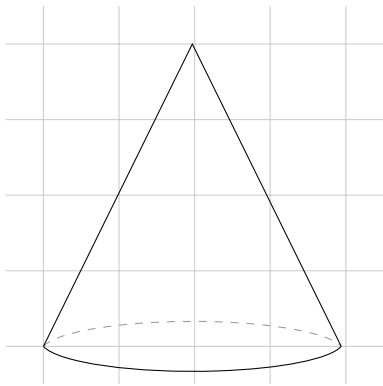
Remarque 25

Un tétraèdre régulier est un type particulier de pyramide (à base triangulaire).



CYLINDRE (DE RÉVOLUTION)

- ▶ Nombre de sommets : 0
- ▶ Nombre d'arêtes : 2
- ▶ Faces : 2 disques et 1 face courbe
- ▶ Ce n'est pas un polyèdre



CÔNE (DE RÉVOLUTION)

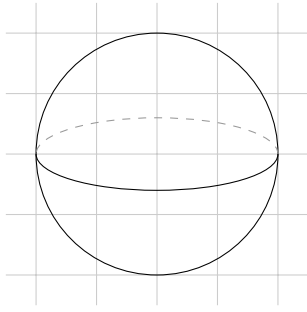
- ▶ Nombre de sommets : 0
- ▶ Nombre d'arêtes : 1
- ▶ Faces : 1 disque et 1 face courbe
- ▶ Ce n'est pas un polyèdre

Définition 26

Une *sphère* est l'ensemble des points à distance donnée (appelée *rayon* de la sphère) d'un certain point (appelé *centre* de la sphère). Une *boule* est l'ensemble des points à distance inférieure ou égale à une distance donnée (appelée *rayon* de la boule) d'un certain point (appelé *centre* de la boule).

Remarque 27

- ▶ Une sphère est l'équivalent du cercle dans l'espace.
- ▶ Une boule est l'équivalent d'un disque dans l'espace.
- ▶ Une sphère est la surface d'une boule. Une boule est pleine, et une sphère est d'intérieur vide.



Pas de patron

BOULE/SPHÈRE

- ▶ Nombre de sommets : 0
- ▶ Nombre d'arêtes : 0
- ▶ Faces : 1 face courbe
- ▶ Ce n'est pas un polyèdre

5 – Volume d'un solide

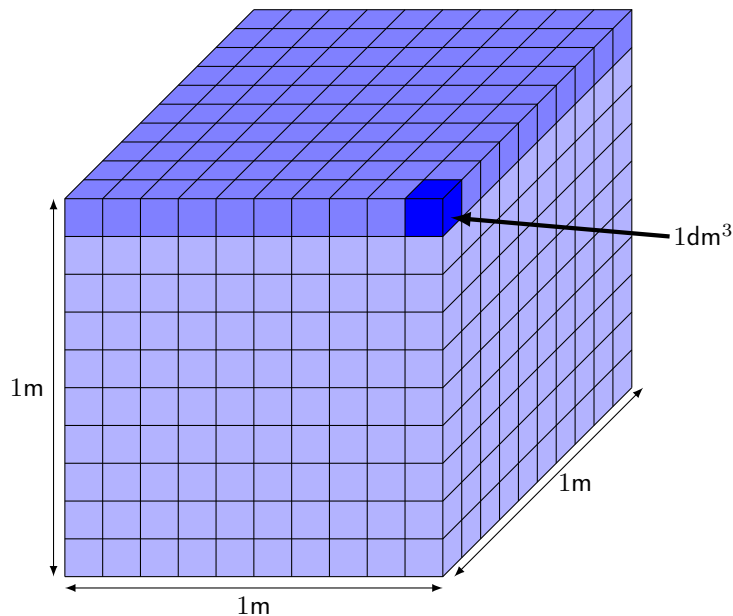
Définition 28

Le *volume* d'un solide est une mesure de l'espace occupé par ce solide.

L'unité du volume est le *mètre cube* (m^3). D'autres multiples de cette unité sont fréquemment utilisés : le *décimètre cube* (dm^3), le *centimètre cube* (cm^3) et le *millimètre cube* (mm^3).

Propriété 29

- ▶ Un mètre cube est le volume d'un cube de 1m de côté.
- ▶ Un décimètre cube est le volume d'un cube de 1dm de côté.
- ▶ Un centimètre cube est le volume d'un cube de 1cm de côté.
- ▶ Un millimètre cube est le volume d'un cube de 1mm de côté.



Si on coupe le côté d'un cube d'un mètre de côté en 10, on obtient des plus petits cubes d'un décimètre de côté. Ce faisant, on découpe le cube en 10 couches de $10 \times 10 = 100$ petits cubes de 1dm^3 . Ainsi, on a découpé le cube de 1m^3 en 1000 cubes de 1dm^3 . Par le même découpage avec des cubes différents, on en déduit :

Proposition 30

$$\triangleright 1\text{m}^3 = 1\,000\text{dm}^3$$

$$\triangleright 1\text{dm}^3 = 1\,000\text{cm}^3$$

$$\triangleright 1\text{cm}^3 = 1\,000\text{mm}^3$$

$$\triangleright 1\text{m}^3 = 1\,000\,000\text{cm}^3$$

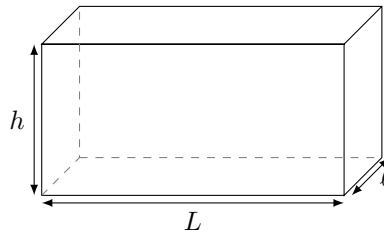
$$\triangleright 1\text{dm}^3 = 1\,000\,000\text{mm}^3$$

$$\triangleright 1\text{m}^3 = 1\,000\,000\,000\text{mm}^3$$

Pour désigner le volume à l'intérieur d'un récipient, on parle plutôt de *contenance*, et on utilise une unité plus pratique pour les contenances de la vie de tous les jours : le litre (L).

Définition 31

$$1\text{L} = 1\text{dm}^3$$

Proposition 32

Le volume d'un pavé droit est le produit de ses dimensions : un pavé droit de longueur L , de largeur ℓ et de hauteur h a un volume $L \times \ell \times h$.

En particulier, le volume d'un cube de côté a est $a \times a \times a$.

Remarque 33

Attention aux unités : en effet, pour calculer un volume, il faut d'abord que les trois longueurs soient dans la même unité ! On ne peut pas multiplier des m avec des cm !