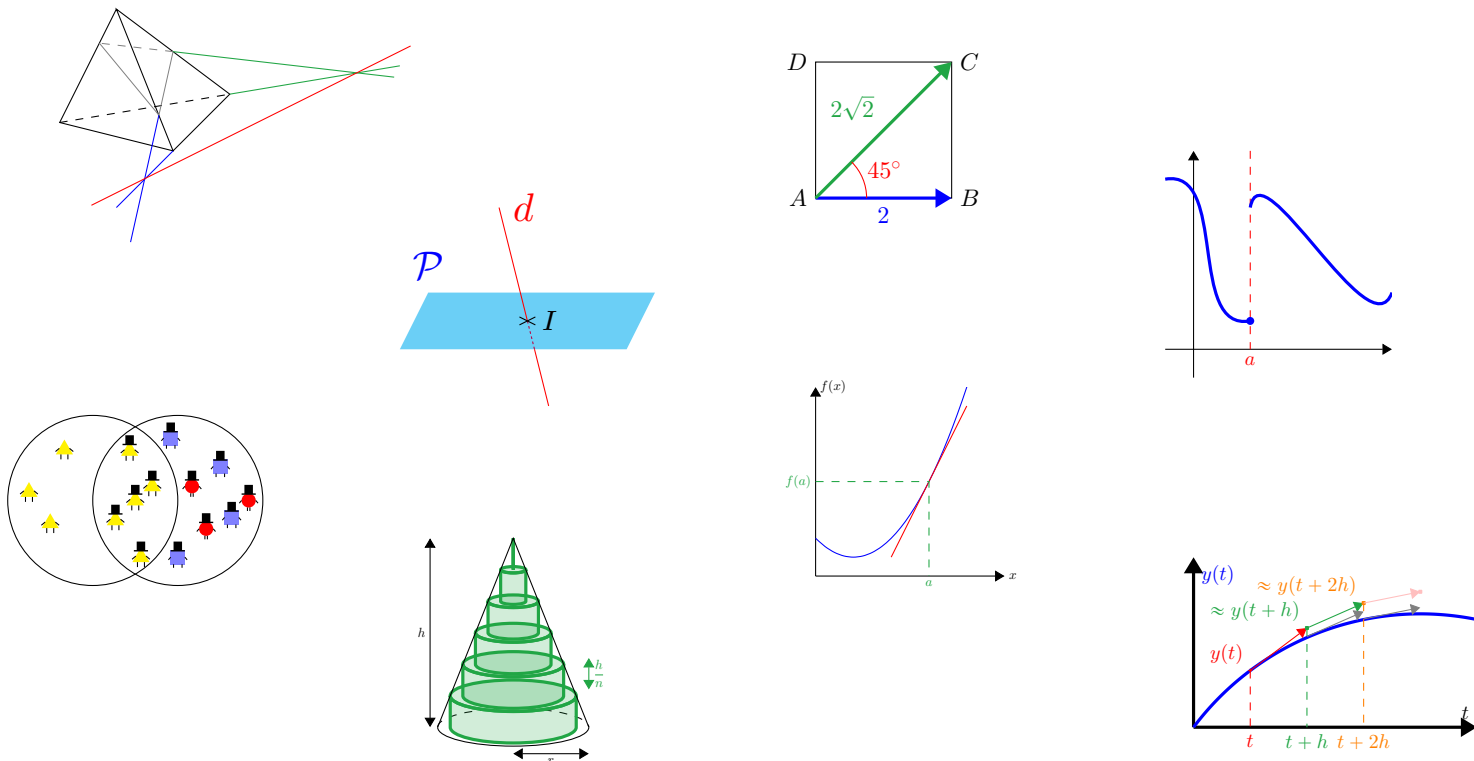
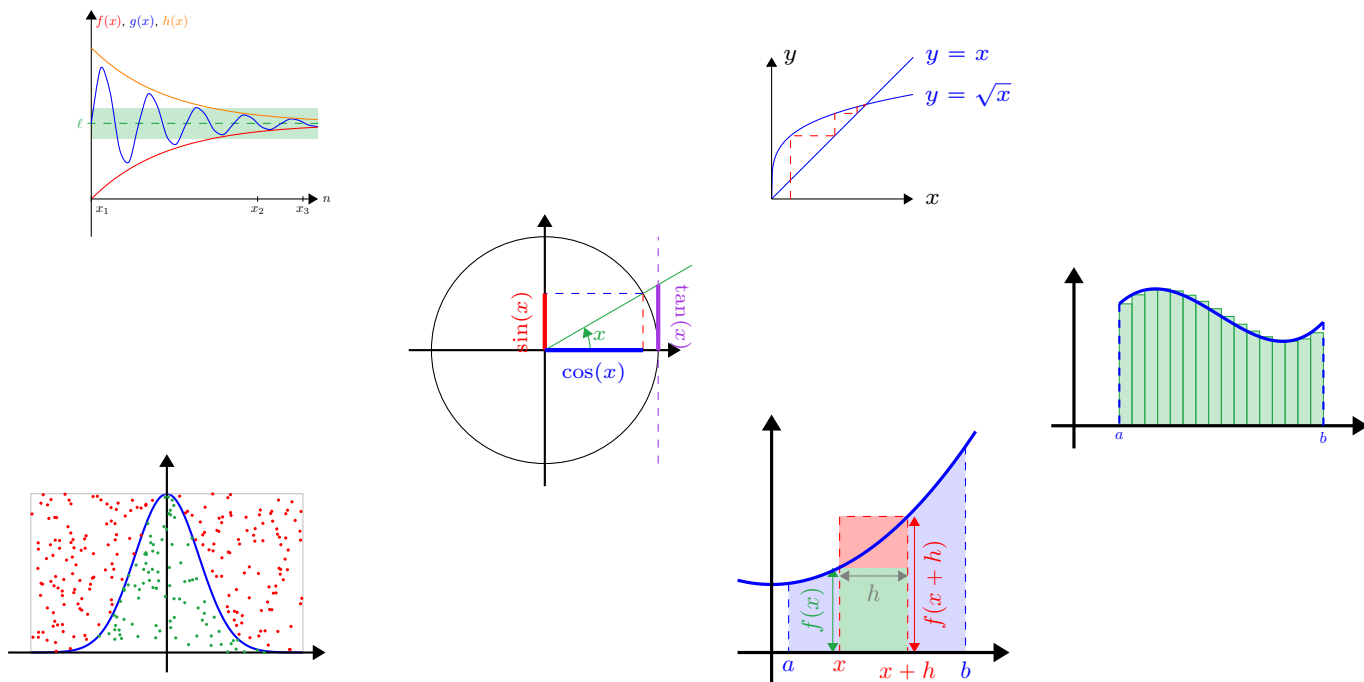




Mathématiques

Terminale spécialité – Cours complet



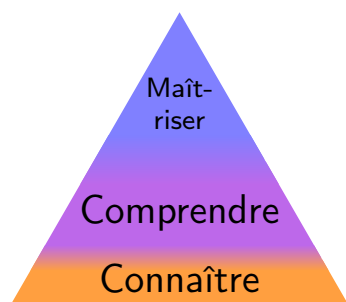
Conseils de travail

« Apprenez votre leçon ! »

Telle est l'injonction lancée par toutes et tous les enseignant·e·s de France et de Navarre, à peu près trois fois par heure. Mais qu'est-ce que ça veut dire, « apprendre sa leçon » ? Qu'est-ce que les enseignant·e·s (de mathématiques) attendent des élèves, précisément ?

Les étapes de l'apprentissage

L'apprentissage respecte la pyramide de l'acquisition des savoirs :



⚠ Important : dans la description suivante des étages de la pyramide, on parle d'« étapes ». Or comme l'illustration ci-contre le suggère, la pyramide n'a pas d'étages bien définis, chaque « étage » se mêle au suivant : en effet, les étapes sont liées entre elles, elles se superposent.

Pour faire un parallèle, c'est comme pour l'apprentissage d'une langue. Vous commencez par apprendre des mots de vocabulaire, puis vous apprenez à construire des phrases, puis vous apprenez à construire un texte. Mais ce n'est pas parce que vous commencez à construire des phrases que vous arrêtez d'apprendre de nouveaux mots, et ce n'est pas parce que vous commencez à construire un texte complet que vous arrêtez d'apprendre à construire de nouveaux types de phrases. Au contraire ! En apprenant certains mots, vous débloquez de nouveaux types de phrases, qui développent de nouvelles structures dans vos textes !

- La première étape est de *connaître* sa leçon : cela signifie mémoriser son contenu. Retenir purement et simplement les phrases et les formules qui y sont écrites.

Pour faire une analogie, c'est comme un apprenti chef cuisinier qui reproduit les recettes et les gestes de son mentor, encore et encore jusqu'à ne plus avoir besoin d'un modèle. De même, pour mémoriser quelque chose, il faut le relire, le revoir, le réécrire, jusqu'à ce qu'on puisse le répéter sans avoir à prendre le temps de fouiller sa mémoire.

Les exercices de type « application » sont ceux qui permettent de contrôler la connaissance de la leçon.

- La deuxième étape est de *comprendre* sa leçon : cela signifie comprendre les liens entre les notions, l'origine des formules, être capable de disséquer leur structure... C'est aussi l'occasion de se questionner de manière un peu plus « métaphysique » sur le cours, se mettre à la place du professeur : pourquoi a-t-il écrit ce théorème à cet endroit là, pas avant ? Probablement parce que ce théorème utilise la définition qui est avant ; etc.

Pour filer l'analogie précédente, c'est comme si l'apprenti chef cuisinier commençait à se questionner sur les recettes. Pourquoi on met de la farine, en telle quantité, à tel moment de la recette ? Il explore les différentes recettes qu'il a mémorisées, il expérimente en modifiant les ingrédients, leurs quantités, la manière de les mélanger... afin de comprendre les effets de chacun.

Les exercices de type « s'exercer » sont ceux qui permettent de commencer à comprendre la leçon. Souvent, ils se ressemblent : c'est en répétant les mêmes gestes, avec cette fois un peu plus de techniques, que l'on commence à reconnaître des structures, des *patterns*, ...

- La dernière étape est de *maîtriser* la leçon : cela signifie être capable d'utiliser ses connaissances et sa compréhension de la leçon dans des contextes inédits et inhabituels. Finis les exercices guidés, les exercices monothématiques et autres indications, vous devez être capable de tracer votre propre plan de route : en analysant un exercice, vous devez être capable d'identifier les attentes, les relier à vos expériences passées, et en déduire la marche à suivre.

Pour terminer l'analogie précédente, si l'apprenti veut devenir chef à son tour, il doit être capable, à partir de ses connaissances et de son expérience, de créer de nouvelles recettes, de prédire le résultat qu'il obtiendrait en mélangeant certains ingrédients, et ce sans même avoir besoin de le faire réellement.

Les exercices de type « s'entraîner » et les problèmes sont ceux qui mènent vers la maîtrise du cours. Ils sont un amalgame de situations connues, ou proches de situations connues, mais qui ensemble constituent une situation inédite.

Pour apprendre à travailler efficacement les exercices, lisez la préface du manuel de Corrections.

Une méthode pour mémoriser

Avant toute chose, il existe plus d'une méthode pour mémoriser des informations, et il n'en existe aucune qui soit universelle, adaptée à tout le monde.

En revanche, la recherche scientifique décrit un facteur commun à la réussite de la mémorisation, quelle que soit la méthode : les piqûres de rappel.

Quelle que soit votre méthode, veillez à respecter l'échelle des trois temps : 1 jour, 1 semaine, 1 mois.

- ▶ On revoit la notion à mémoriser le lendemain de la première rencontre avec celle-ci,
- ▶ On consolide la notion une semaine après l'avoir revue,
- ▶ On réactive la notion un mois après l'avoir consolidée.

Une mise en œuvre de cette méthode que j'apprécie particulièrement repose sur l'utilisation de *flashcards*. Visionnez la vidéo de ScienceEtonnante sur le sujet pour en apprendre davantage.

 (YouTube) [MIEUX APPRENDRE & ÉTUDIER: Les \(vraies\) techniques scientifiques](#) (ScienceEtonnante)

Un mot sur les fiches (et les mindmaps)

Les fiches sont souvent perçues comme le Saint Graal de l'apprentissage : le simple fait de *posséder* une bonne fiche serait synonyme de réussite. Il s'agit là d'une terrible méprise sur la méthode de la fiche : ce n'est pas le résultat qui compte, c'est le processus.

Imaginons que vous avez comme objectif de terminer un marathon en moins de quatre heures. Pour cela, c'est très simple : prenez une voiture et faites le trajet dedans. Vous avez terminé le marathon, non ? Avec les fiches, c'est la même chose : si vous trouvez une fiche toute faite, en effet vous disposez d'une belle fiche, mais vous n'aurez rien accompli de plus.

Lorsqu'un marathonien se fixe un objectif, il va s'entraîner, échouer plusieurs fois avant de réussir le jour J. Pour les fiches, c'est pareil : ce qui compte, c'est tout ce qui se passe entre le moment où la feuille est vierge, et celui où vous finissez de la remplir. Pour caricaturer légèrement, une fois la fiche terminée, jetez-la à la poubelle et refaites-la. Répétez l'opération jusqu'à ce que vous puissiez reproduire la fiche sans aide. À ce moment-là seulement, la fiche aura rempli son objectif. Gardez-la, et relisez-la dans un mois.

La méthode des fiches, lorsqu'elle est correctement réalisée, travaille la compréhension et la connaissance en même temps : en effet, la mémorisation vient de la répétition, et la compréhension vient du fait que composer une fiche requiert un effort de synthèse, c'est-à-dire se demander ce qui est essentiel, et ce qui ne l'est pas. En effet, une bonne fiche n'est pas une fiche complète, c'est une fiche qui va droit au but sans fioritures. Par ailleurs – et c'est une raison de plus contre le fait de s'inspirer des fiches d'autrui – ne doivent figurer sur votre fiche que les notions qui vous font défaut. En effet, si vous maîtrisez parfaitement le théorème de Pythagore, il est inutile de le mettre sur votre fiche, là où quelqu'un d'autre qui a plus de mal y trouvera un intérêt.

Cours de terminale générale

1	Dérivation	25
1	Rappels : définition, dérivées usuelles, opérations	26
2	Rappels : dérivation et étude de fonctions	29
3	Dérivation d'une fonction composée	30
	Exercices	33
2	Suites et récurrence	35
1	Notations et modes de génération d'une suite	35
2	Représentation graphique, variations d'une suite	36
3	Croissance linéaire : les suites arithmétiques	39
4	Croissance exponentielle : les suites géométriques	43
5	Problème de seuil	47
6	Le raisonnement par récurrence	49
7	Suites arithmético-géométriques	52
	Exercices	53
3	Combinatoire et dénombrement	57
1	Vocabulaire ensembliste	59
2	Principes additif et multiplicatif	60
3	Parties d'un ensemble	62
4	Permutations, combinaisons, arrangements – le coefficient binomial	63
5	Propriétés du coefficient binomial, Triangle de Pascal	66
	Exercices	69
4	Équations différentielles	73
1	Primitive d'une fonction	75
2	Équations différentielles	77
	Exercices	81
5	Limites de suites	87
1	Convergence d'une suite	88
2	Opérations sur les limites	91
3	Limites et comparaison	93
	Exercices	98
6	Géométrie et repérage dans l'espace	103
1	Vecteurs de l'espace et repérage	104
2	Droites et plans de l'espace	111
	Exercices	120
7	Limites de fonctions	129
1	Limite d'une fonction en l'infini	130
2	Limite d'une fonction en un point	133
3	Opérations sur les limites et théorèmes de comparaison	136
	Exercices	142
8	Continuité	147
1	Continuité d'une fonction numérique	148
2	Continuité et convergence de suites	151

3	Théorème des valeurs intermédiaires	152
	Exercices	155
9	Loi binomiale	161
1	Épreuve, loi et schéma de Bernoulli	162
2	Loi binomiale	163
	Exercices	168
10	Logarithme	171
1	Construction du logarithme à partir de l'exponentielle	172
2	Définition et premiers exemples d'utilisation	173
3	Propriétés algébriques	174
4	Propriétés analytiques	176
	Exercices	179
11	Orthogonalité dans l'espace	187
1	Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace	189
2	Géométrie analytique de l'espace	191
3	Projection orthogonale dans l'espace	196
	Exercices	200
12	Intégration	207
1	Un peu d'histoire : la méthode des rectangles de Riemann	209
2	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	212
3	Applications du calcul intégral	220
	Exercices	222
13	Variables aléatoires	231
1	Somme de variables aléatoires	233
2	Notion d'échantillon	236
3	Inégalités probabilistes	238
4	Loi faible des grands nombres	240
	Exercices	242
14	Convexité	251
0	Quelques définitions préliminaires	252
1	Convexité, concavité d'une fonction numérique	252
2	Points d'inflexion	255
	Exercices	257
15	Trigonométrie	261
1	Le cercle trigonométrique	262
2	Les fonctions trigonométriques	263
	Exercices	267

Programme de terminale générale

Préambule

Intentions majeures

L'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe terminale générale est conçu à partir des intentions suivantes :

- ▶ permettre à chaque élève de consolider les acquis de l'enseignement de spécialité de première, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- ▶ développer des interactions avec d'autres enseignements de spécialité ;
- ▶ préparer aux études supérieures.

Le programme de mathématiques définit un ensemble de connaissances et de compétences, réaliste et ambitieux, qui s'appuie sur le programme de la spécialité de première dans un souci de cohérence, en réactivant les notions déjà étudiées et y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles notions, à étudier de manière suffisamment approfondie.

L'enseignement de spécialité en classe terminale concerne les élèves ayant confirmé ce choix parmi les trois spécialités suivies en classe de première. À ce titre, dans le cadre des six heures hebdomadaires et dans une logique d'exigence disciplinaire et de préparation à l'enseignement supérieur, les élèves sont amenés à approfondir leurs connaissances et à développer un solide niveau de compétences.

Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les six grandes compétences :

- ▶ chercher, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- ▶ modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- ▶ représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...), changer de registre ;
- ▶ raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- ▶ calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- ▶ communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

Diversité de l'activité de l'élève

La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci, les travaux écrits faits hors du temps scolaire (exercices réguliers d'entraînement ou devoirs à la maison) permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités d'initiative, tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité des élèves.

Le calcul est un outil essentiel pour la résolution de problèmes. Il importe de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul numérique et du calcul littéral, sous ses diverses formes : mentale, écrite, instrumentée.

Utilisation de logiciels

L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, favorise l'interaction entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.

L'utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :

- ▶ par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- ▶ par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques en classe, à l'occasion de la résolution d'exercices ou de problèmes ;
- ▶ dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

Évaluation des élèves

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : devoirs surveillés avec ou sans calculatrice, devoirs en temps libre, rédaction de travaux de recherche individuels ou collectifs, travaux pratiques pouvant s'appuyer sur des logiciels, exposé oral d'une solution.

Place de l'oral

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales à travers notamment la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs... L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

Si ces considérations sont valables pour tous les élèves, elles prennent un relief particulier pour ceux qui ont choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité en terminale et qui doivent donc préparer l'épreuve orale terminale du baccalauréat. Il convient que les travaux proposés aux élèves y contribuent.

Les approfondissements proposés par le programme ont aussi pour objectif de donner des pistes exploitables par les élèves pour choisir le thème de leur projet pour l'épreuve orale terminale.

Trace écrite

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, éventuellement enrichie par des exemples ou des schémas, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin, tout au long du cycle terminal. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité (mathématique et rédactionnelle) des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés : conjecture, définition, propriété (admise ou démontrée) démonstration, théorème.

Travail personnel des élèves

Si la classe est le lieu privilégié pour la mise en activité mathématique des élèves, les travaux hors du temps scolaire sont indispensables pour consolider les apprentissages. Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, ces travaux sont essentiels à la formation des élèves. Individuels ou en groupe, évalués à l'écrit ou à l'oral, ces travaux sont conçus de façon à prendre en compte la diversité des élèves et permettent le développement des qualités d'initiative tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences.

Quelques lignes directrices pour l'enseignement

Le professeur veille à créer dans la classe de mathématiques une atmosphère de travail favorable aux apprentissages, combinant bienveillance et exigence. Il faut développer chez chaque élève des attitudes positives à l'égard des mathématiques et sa capacité à résoudre des problèmes stimulants.

L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

Les problèmes proposés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques, être issus des autres disciplines ou du monde réel, en prenant garde que la simple inclusion de références au monde réel ne suffit pas toujours à transformer un exercice de routine en un bon problème. Dans tous les cas, ils doivent être bien conçus et motivants, afin de développer les connaissances et compétences mathématiques du programme.

Le professeur doit veiller à établir un équilibre entre divers temps d'apprentissage :

- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;
- les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
- les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
- les exercices et problèmes, allant progressivement de l'application la plus directe au thème d'étude ;
- les rituels, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

Organisation du programme

Le programme s'organise en quatre grandes parties : « Algèbre et géométrie », « Analyse », « Probabilités » et « Algorithmique et programmation ». Ce découpage n'est pas un plan de cours et il est essentiel d'exploiter les possibilités d'interaction entre ces parties.

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoir à la maison...

Le programme propose un certain nombre d'approfondissements possibles, mais en aucun cas obligatoires. Ils permettent une différenciation pédagogique et offrent des pistes pour l'épreuve orale terminale.

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut, s'il le désire, s'appuyer sur l'étude de textes historiques.

Programme

Algèbre et géométrie

Objectifs

Le titre de cette partie souligne les interactions entre l'algèbre et la géométrie.

Elle commence par une section sur la combinatoire et le dénombrement dont l'objectif est double :

- ▶ manipuler quelques notions ensemblistes, notamment celles de produit cartésien, de couple, de liste ou k -uplet, qui interviennent dans toutes les parties du programme ;
- ▶ dénombrer quelques objets combinatoires de base (listes d'éléments, combinaisons, permutations) pouvant être représentés diversement : parties d'un ensemble, mots, chemins dans un arbre.

Il s'agit ainsi d'enrichir le vocabulaire ensembliste des élèves et d'offrir une initiation aux mathématiques discrètes, qui jouent un rôle important dans le développement de l'informatique.

Cette partie donne également l'occasion de travailler le raisonnement par récurrence et de prolonger le travail engagé en classe de première sur les aspects algébriques ou combinatoires des suites.

Dans les sections suivantes, l'objectif est que l'étude de la géométrie dans l'espace, outre son intérêt propre, soit l'occasion de travailler les notions vectorielles afin de préparer l'étude de l'algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur.

Il importe que l'élève se dote de représentations mentales solides susceptibles d'être réinvesties lors de la poursuite d'études : un vecteur non nul engendre une direction de droites, deux vecteurs non colinéaires engendrent une direction de plan, trois vecteurs non coplanaires engendrent les vecteurs de l'espace ; si une droite et un plan sont sécants, un vecteur directeur de cette droite et deux vecteurs non colinéaires de la direction de ce plan forment une base de l'espace.

La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre linéaire.

L'étude générale des systèmes linéaires n'est pas un objectif du programme mais des exemples seront traités dans le contexte de la géométrie repérée : décomposition de vecteurs, intersections de plans, etc.

Histoire des mathématiques

Véritable porte d'entrée sur l'infini, le raisonnement par récurrence a été formalisé comme principe fondamental de raisonnement par Pascal, et surtout par Peano et ses collaborateurs et avait été anticipé comme mode de démonstration par les mathématiciens anciens (nombres latéraux et diagonaux), médiévaux (al-Karaji, As-Samaw'al, Fibonacci) et renaissants (Maurolico).

Des propriétés arithmétiques du Triangle de Pascal étaient présentes dans les travaux combinatoires des mathématiques indiennes et chinoises. La combinatoire était un objet de prédilection des récréations mathématiques dès l'Antiquité et est encore présente chez des arithméticiens du XIXe siècle (Lucas, Delannoy, Laisant). Il est par ailleurs pertinent de souligner le développement récent des « mathématiques discrètes », motivé notamment par l'informatique et l'intelligence artificielle.

Les concepts sous-jacents à la notion de vecteur apparaissent comme modèles physiques dynamiques longtemps avant leur formalisation. On trouve un concept de force et la composition des forces chez Newton ; ces notions, comme celles de vitesse, sont présentes dans le calcul géométrique de Leibniz. Au XIXe siècle, la notion de vecteur va émerger comme objet algébrique et géométrique, comme transformation ou comme outil de repérage. Hamilton construit les vecteurs par une approche algébrique. Dans sa théorie des forces et des marées de 1839, Grassmann propose une approche géométrique qui étend à l'espace la notion de vecteur et lui associe des règles de calcul algébrique, notamment un « produit linéaire » utilisant la projection orthogonale et qui deviendra notre produit scalaire. À la fin du siècle, des auteurs proches des mathématiques comme de la physique (Maxwell, Gibbs, Heaviside ou Peano)

dégagent les principes du calcul vectoriel à trois dimensions ou plus, lui donnant une dimension dynamique tout en établissant la structure d'espace vectoriel.

Combinatoire et dénombrement

Les ensembles considérés dans cette section sont finis mais on introduit dans le cas général (ensembles quelconques) les notions suivantes : couple, triplet, k -uplet (ou k -liste) ; produit cartésien de deux, trois, k ensembles ; ensemble A^k des k -uplets d'éléments d'un ensemble A .

Contenus

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k -uplets (ou k -listes) d'un ensemble à n éléments.
- Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n -uplets de $\{0, 1\}$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.
- Nombre des k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$ Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- Pour $0 \leq k \leq n$, formules : $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
- Explicitation pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

Capacités attendues

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

Démonstrations

- Démonstration par dénombrement de la relation : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
- Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).

Approfondissement possible

- Combinaisons avec répétitions.

Exemples d'algorithme

- Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal.
- Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation.
- Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini.

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

Cette section introduit d'emblée le calcul vectoriel dans l'espace, avec les notions qui l'accompagnent : translations, combinaisons linéaires de vecteurs, indépendance linéaire, directions de droites et de plans. Il s'agit de s'appuyer sur la perception de l'espace pour mettre en place une géométrie reliée au calcul vectoriel et adaptée aux besoins des autres disciplines.

Les figures formées à partir des solides usuels (cube, pavé, tétraèdre) rencontrés au collège sont des supports privilégiés pour manipuler les notions vectorielles et appréhender la position relative de droites et de plans. Il est important de développer les représentations des objets géométriques, notamment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, afin de permettre à l'élève d'exercer son regard et de développer sa vision dans l'espace.

Contenus

- Vecteurs de l'espace. Translations.
- Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.

- ▶ Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- ▶ Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
- ▶ Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- ▶ Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

Capacités attendues

- ▶ Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- ▶ Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- ▶ Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- ▶ Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
- ▶ Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- ▶ Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

Approfondissements possibles

- ▶ Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
- ▶ Fonction vectorielle de Leibniz.

Orthogonalité et distances dans l'espace

L'extension à l'espace du produit scalaire de deux vecteurs donne un outil efficace pour les problèmes de distance et d'orthogonalité. Dans cette section, on continue de combiner les outils algébriques (vecteurs, produit scalaire) et la vision géométrique de l'espace, notamment autour de l'orthogonalité : orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite, projection orthogonale sur un plan ou sur une droite.

Contenus

- ▶ Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie.
- ▶ Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
- ▶ Base orthonormée, repère orthonormé.
- ▶ Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.
- ▶ Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, formules de polarisation.
- ▶ Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.
- ▶ Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$.
- ▶ Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.

Capacités attendues

- ▶ Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- ▶ Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- ▶ Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- ▶ Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

Démonstration

- ▶ Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .

Approfondissements possibles

- ▶ Intersection d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère en un point.
- ▶ Sphère circonscrite à un tétraèdre.
- ▶ Fonction scalaire de Leibniz.

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

L'objectif de cette section est de montrer comment la donnée d'un repère, qu'on supposera orthonormé, permet d'établir un lien entre la géométrie de l'espace et les calculs algébriques dans $\mathbb{R}^3$. L'objectif majeur est une bonne maîtrise des représentations paramétriques de droites et des équations de plans.

Contenus

- Représentation paramétrique d'une droite.
- Équation cartésienne d'un plan.

Capacités attendues

- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
- Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions

Démonstration

- Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A .

Approfondissements possibles

- Déterminer l'intersection de deux plans.
- Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
- Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon.
- Intersection d'une sphère et d'une droite.

Analyse

Objectifs

L'analyse est une part centrale des mathématiques et, comme outil de modélisation et de calcul, elle joue un rôle essentiel dans l'étude de phénomènes issus des autres disciplines.

Les buts essentiels du programme de la classe terminale sont de donner aux élèves une bonne intuition des notions fondamentales : convergence, limites, dérivées, intégrales et une solide pratique des calculs afférents.

Les difficultés de mise en forme des concepts sont évoquées, sans constituer le but central de l'enseignement. Le programme s'articule autour des notions de suite et de fonction. Ces deux notions sont intimement liées et le dialogue discret-continu mérite d'être évoqué régulièrement.

En classe de première, l'étude des suites est abordée sous un angle essentiellement algébrique. En classe terminale, on commence l'étude de la convergence.

La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant notamment sur la vision géométrique et sur l'écriture décimale. On explicite ensuite les définitions mais la maîtrise complète du formalisme n'est pas attendu.

Les objectifs sont plutôt d'installer une pratique solide des aspects opératoires (détermination de limites) et d'introduire la problématique des théorèmes d'existence, notamment la convergence d'une suite croissante majorée.

Lors de l'étude d'une suite, on distingue les aspects globaux des aspects asymptotiques. Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

Les suites interagissent avec les autres parties du programme. Outre leurs interventions en analyse, de nombreux problèmes de probabilités conduisent naturellement à étudier un modèle probabiliste dépendant d'un entier n .

En classe terminale, le thème des fonctions s'enrichit avec la notion de fonction convexe, l'étude des fonctions trigonométrique, l'introduction du logarithme et un travail autour des notions de limite et de continuité.

Le travail sur les limites, de même nature que celui mené sur les suites, combine présentation intuitive et pratique d'exemples élémentaires. À travers le théorème des valeurs intermédiaires, l'étude de la continuité permet de préciser les arguments assurant qu'une équation du type $f(x) = k$ a des solutions.

Le dernier volet du programme d'analyse porte sur les équations différentielles et le calcul intégral.

On introduit d'abord la notion de primitive d'une fonction continue f , que l'on présente comme «problème inverse» de celui de la dérivation ou, de façon équivalente, comme résolution de l'équation différentielle $y' = f$. On étudie ensuite les équations différentielles linéaires de la forme $y' = ay + b$, d'importance fondamentale pour des questions de modélisation.

L'intégrale est introduite à partir de la notion intuitive d'aire, sur laquelle on ne soulève aucune difficulté théorique. On fait ensuite le lien avec la notion de primitive, et on présente la technique d'intégration par parties, qui enrichit considérablement les calculs possibles.

La méthode des rectangles fournit des encadrements pertinents de sommes pour lesquelles on ne dispose pas de formule exacte ; c'est l'occasion de faire dialoguer simultanément analyse et géométrie, discret et continu.

Histoire des mathématiques

Le calcul infinitésimal, qui contient les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux.

On trouve des anticipations du calcul intégral chez Archimède (longueur du cercle, quadrature de la parabole, cubature des solides), Liu-Hui (volume d'un cylindre), Ibn al-Haytham (volume d'un paraboloïde) puis, bien plus tard, chez Grégoire de Saint-Vincent (méthode d'exhaustion) ou encore chez Galilée ou Cavalieri (méthode des indivisibles).

Les procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé le logarithme et les fonctions trigonométriques illustrent les liens entre discret et continu et fournissent une source féconde d'activités. On peut mentionner les méthodes de Ptolémée et d'Al Kashi, la méthode de Briggs ou l'utilisation de développements en série. Ces travaux, dont certains ont été anticipés hors d'Europe, par exemple en Inde par l'école du Kerala, indiquent une perception intuitive claire des questions de convergence.

Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique mathématique au XVII^e siècle. Parmi les initiateurs, Fermat, Huygens, Pascal et Barrow reconnaissent que le problème des aires (le calcul intégral) est le problème inverse de celui des tangentes (la dérivation) ; ce thème peut être abordé à partir des travaux sur la quadrature de l'hyperbole.

Les travaux de Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Des fondations solides sont proposées dans le Cours d'Analyse de Cauchy (1821, 1823), qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse. Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques elles-mêmes, se structurent notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) et illustrent là encore les ponts entre le discret et le continu.

Suites

Contenus

- ▶ La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- ▶ La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- ▶ Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- ▶ Opérations sur les limites.

- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n) , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de π , e , $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\ln(2)$, etc.

Approfondissements possibles

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron.

Limites des fonctions

Les opérations sur les limites sont admises. L'utilisation de la composition des limites se fait en contexte.

Contenus

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
- Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.
- Limites et comparaison.
- Opérations sur les limites.

Capacités attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

Démonstration

- Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et $\exp$ en $+\infty$.

Approfondissements possibles

- Asymptotes obliques. Branches infinies.

Compléments sur la dérivation

L'étude de la dérivation, commencée en classe de première, est étendue par l'étude de la dérivée d'une fonction composée et l'introduction de la dérivée seconde.

L'étude des fonctions convexes permet de réinvestir et d'enrichir le travail entamé en classe de première sur les dérivées. Elles donnent l'occasion de raisonner en diversifiant les registres : représentations graphiques, tableaux de variations, expressions symboliques.

Contenus

- ▶ Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- ▶ Dérivée seconde d'une fonction.
- ▶ Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f' , la positivité de f'' .
- ▶ Point d'inflexion.

Capacités attendues

- ▶ Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- ▶ Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- ▶ Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- ▶ Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f , de f' ou de f'' .
- ▶ Lire sur une représentation graphique de f , de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstration

- ▶ Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Approfondissements possibles

- ▶ Courbe de Lorenz.
- ▶ Dérivée n -ième d'une fonction.
- ▶ Inégalité arithmético-géométrique.

Continuité des fonctions d'une variable réelle

La justification de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un objectif du programme. Hormis pour la fonction exponentielle, l'étude de la réciproque d'une fonction continue n'est pas au programme.

Contenus

- ▶ Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- ▶ Image d'une suite convergente par une fonction continue.
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

Capacités attendues

- ▶ Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- ▶ Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples d'algorithme

- ▶ Méthode de dichotomie.
- ▶ Méthode de Newton, méthode de la sécante.

Approfondissements possibles

- ▶ Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires.
- ▶ Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y
- ▶ Prolongement par continuité.

Fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est introduite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle étudiée en classe de première. Les élèves s'appuient sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme.

Contenus

- Fonction logarithme népérien, notée $\ln$, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

Capacités attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Démonstration

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- Limite en 0 de $x \mapsto x \ln(x)$.

Exemple d'algorithme

- Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

Approfondissements possibles

- Pour α dans $\mathbb{R}$, fonction $x \mapsto x^\alpha$.
- Pour x dans $\mathbb{R}$, limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Fonctions sinus et cosinus

Contenus

- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

Capacités attendues

- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum

Approfondissement possible

- Fonction tangente.

Primitives, équations différentielles

Cette section introduit la notion d'équation différentielle sur des cas simples. Les élèves découvrent en situation le concept d'équation dont l'inconnue est une fonction. L'équation $y' = f$ est l'occasion de définir la notion de primitive. Par définition, la recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation, ce qui permet de traiter les cas usuels par lecture inverse du tableau des dérivées. Il est utile d'admettre ici que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, résultat qui est démontré dans la section sur le calcul intégral. On note aussi que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite.

L'équation $y' = ay + b$ est l'occasion de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle. Lorsque $b = 0$, on remarque que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Pour travailler le concept d'équation différentielle, on peut donner d'autres exemples d'équations différentielles, dont on peut donner des solutions sans en faire de résolution complète : $y' = y^2$, $y'' + \omega^2 y = 0$. Aucune connaissance n'est exigible sur ces exemples.

Contenus

- ▶ Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- ▶ Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- ▶ Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues

- ▶ Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- ▶ Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- ▶ Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstrations

- ▶ Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- ▶ Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Approfondissements possibles

- ▶ Autres exemples d'équations différentielles, éventuellement en lien avec une modélisation, par exemple l'équation logistique.

Exemple d'algorithme

- ▶ Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$.

Calcul intégral

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives.

On met en regard les écritures $\int_a^b f(x) \, dx$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

Contenus

- ▶ Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f . Notation $\int_a^b f(x) \, dx$.
- ▶ Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- ▶ Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f . Notation $[F(x)]_a^b$.
- ▶ Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- ▶ Définition par les primitives de $\int_a^b f(x) \, dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b .
- ▶ Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- ▶ Valeur moyenne d'une fonction.
- ▶ Intégration par parties.

Capacités attendues

- ▶ Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- ▶ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- ▶ Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- ▶ Calculer l'aire entre deux courbes.

- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations

- Pour une fonction positive croissante f sur $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . Pour toute primitive F de f , relation $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.

Approfondissements possibles

- Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes.
- Encadrement de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ par des intégrales.

Exemples d'algorithme

- Méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo.
- Algorithme de Brouncker pour le calcul de $\ln(2)$.

Probabilités

Objectifs

Dans cette partie, on diversifie et on approfondit les modèles probabilistes rencontrés, en exploitant des situations où interviennent les probabilités conditionnelles, l'indépendance, les variables aléatoires. Un axe majeur est l'étude de la succession d'un nombre quelconque d'épreuves aléatoires indépendantes.

Le schéma de Bernoulli est fondamental : succession de n épreuves identiques indépendantes à deux issues. L'univers est formalisé par $\{0, 1\}^n$ (ou $\{a, b\}^n$) mais il importe d'exploiter la représentation à l'aide d'arbres, et de conserver l'intuition des situations concrètes familières : tirage avec remise dans une urne de Bernoulli, lancers de pièce, etc. L'indépendance des expériences se traduit par la propriété multiplicative : la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités des résultats.

On l'introduit en s'appuyant sur le programme de la classe de première, avant d'enrichir cette approche par de nouveaux outils. Une première étape est la traduction du schéma de Bernoulli en termes de variables aléatoires, ce qui conduit à introduire la notion de variables aléatoires indépendantes, l'indépendance étant prise ici au sens d'indépendance mutuelle.

Les deux premiers indicateurs relatifs à une variable aléatoire, l'espérance et la variance, ont été introduits en classe de première. On en approfondit l'étude dans le cadre des variables aléatoires finies. La linéarité de l'espérance donne un outil très puissant permettant de déterminer l'espérance d'une variable aléatoire sans avoir à en déterminer la loi. L'additivité de la variance pour les variables indépendantes est présentée dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. Elle permet d'établir l'expression de la variance de la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire.

Dans la troisième section, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev explicite le rôle de la variance comme indicateur de dispersion. Tous ces outils se conjuguent pour établir l'inégalité de concentration pour la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire, qui justifie l'apparition du facteur $1/\sqrt{n}$ en théorie de l'estimation, aperçue expérimentalement en classe de seconde, et permet d'aboutir à la démonstration de la loi des grands nombres.

Histoire des mathématiques

La parution de l'Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli (1713), reprenant notamment d'anciens travaux de Huygens, marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne.

Un résultat majeur de cet ouvrage est son « théorème d'or », la loi des grands nombres, qui relie fréquences et probabilité, valide le principe de l'échantillonnage et est le premier exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités. Le mathématicien français Bienaymé (en 1853, publication en 1867) et le mathématicien russe Tchebychev

(en 1867) démontrent l'inégalité qui porte leur nom, en parlant de fréquences d'échantillons plutôt que de variables aléatoires. Ils fournissent ainsi la possibilité d'une démonstration plus simple de la loi des grands nombres.

Au début du XIX^e siècle, la modélisation des erreurs de mesure va devenir centrale pour faire de la statistique une science à part entière. Lagrange et Laplace développent une approche probabiliste de la théorie des erreurs. Gauss (1809, 1821), après Legendre (1805), imagine une méthode des moindres carrés qu'il applique avec succès à la prédiction de la position d'un astéroïde. Il y propose de comprendre l'écart-type comme une « erreur moyenne à craindre ».

L'introduction de méthodes statistiques en sociologie est l'œuvre du mathématicien et astronome belge Quételet dans les années 1830. Il réfléchit à la distribution de données autour de la moyenne, ce qui sera approfondi notamment par l'Anglais Galton.

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Contenus

- ▶ Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i . Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- ▶ Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- ▶ Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- ▶ Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Capacités attendues

- ▶ Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- ▶ Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- ▶ Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- ▶ Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X , calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(k \leq X \leq k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$.

Démonstration

- ▶ Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Exemples d'algorithme

- ▶ Simulation de la planche de Galton.
- ▶ Problème de la surréservation. Étant donné une variable aléatoire binomiale X et un réel strictement positif α , détermination du plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq \alpha$.
- ▶ Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.

Approfondissements possibles

- ▶ Loi géométrique.
- ▶ Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (événements rares).

Sommes de variables aléatoires

Cette section prolonge le programme de la classe de première sur les variables aléatoires en considérant des modèles probabilistes où interviennent deux ou plusieurs variables aléatoires, l'intérêt se portant sur leur somme, et notamment sur l'espérance et la variance de cette somme.

Les élèves ont déjà eu l'occasion, dans les classes antérieures, de rencontrer des exemples qui entrent dans ce cadre : lancers de deux dés, tirage de boules numérotées dans une urne (avec ou sans remise), roues de loterie, etc. En classe terminale, le schéma de Bernoulli est un exemple fondamental, où le nombre de succès peut être représenté comme somme de variables de Bernoulli indépendantes de même loi ; plus généralement, le modèle de la succession d'épreuves indépendantes fournit naturellement des exemples de variables aléatoires indépendantes.

L'objectif est de rendre l'élève capable d'utiliser la linéarité de l'espérance pour des variables aléatoires quelconques et l'additivité de la variance pour des variables indépendantes dans diverses situations. Il s'agit de développer l'intuition probabiliste, les compétences de calcul et de raisonnement sur les variables aléatoires.

La démonstration de la linéarité de l'espérance nécessite de formaliser les variables aléatoires comme des fonctions sur l'univers et d'utiliser l'expression de l'espérance comme moyenne pondérée sur l'ensemble des issues. Le professeur peut choisir de l'admettre, ou de la justifier sur un exemple.

Les variables indépendantes considérées dans le programme sont toujours envisagées dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. L'hypothèse d'indépendance étant constitutive du modèle considéré, toute question visant à justifier l'indépendance de variables aléatoires données a priori est en dehors des objectifs du programme.

L'additivité de la variance pour la somme de deux variables indépendantes est admise. La relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ pour des variables indépendantes n'est pas un attendu du programme.

Contenus

- ▶ Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.
- ▶ Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Relation $V(aX) = a^2V(X)$.
- ▶ Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- ▶ Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n/n$.

Capacités attendues

- ▶ Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- ▶ Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- ▶ Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Démonstrations

- ▶ Espérance et variance de la loi binomiale.

Approfondissements possibles

- ▶ Relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ pour des variables aléatoires indépendantes X, Y . Application à la variance de $X + Y$.

Concentration, loi des grands nombres

L'objectif de cette section est d'une part d'approfondir le sens de l'écart-type comme mesure de dispersion, d'autre part de couronner la partie « Probabilités » par la loi des grands nombres, qui est le premier résultat fondamental de la théorie des probabilités et dont les implications sont considérables.

Pour cela, l'outil employé est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dont l'idée fondamentale est mise en valeur : l'écart type σ d'une variable aléatoire X est l'unité naturelle pour étudier la dispersion de X autour de son espérance μ ; par construction, il est naturel d'observer des écarts de X à μ en deçà ou au-delà de σ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre qu'en revanche des écarts de X à μ de quelques σ deviennent improbables. Ce résultat, d'une importance majeure en lui-même, permet de plus d'établir la loi des grands nombres, selon laquelle l'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Il est utile de faire remarquer aux élèves que le caractère universel de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev a pour contrepartie le fait qu'elle est loin d'être optimale : ainsi, elle montre qu'un écart à μ supérieur à 2σ est de probabilité inférieure ou égale à $1/4$ alors que les élèves ont découvert par simulation que cette probabilité est souvent majorée par 0,05. En avoir conscience ne diminue pas l'intérêt théorique de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et permet de mettre en évidence des cas de raisonnement par conditions suffisantes, par exemple la recherche d'une taille d'échantillon pour majorer une probabilité.

Contenus

- ▶ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V , et quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.
- ▶ Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V , alors pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$.
- ▶ Loi des grands nombres.

Capacité attendue

- ▶ Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

Exemples d'algorithme

- ▶ Calculer la probabilité de $(|S_n - pn| > \sqrt{n})$, où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- ▶ Simulation d'une marche aléatoire.
- ▶ Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ . Calculer l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\sigma/\sqrt{n}$. Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks , ou à $k\sigma/\sqrt{n}$, pour $k = 1, 2, 3$.

Approfondissements possibles

- ▶ Estimation.
- ▶ Marche aléatoire.
- ▶ Exemples d'application issus d'autres disciplines pour diverses valeurs de n : sondage (par exemple $n = 1000$), étude du sex ratio (par exemple $n = 10^6$), demi-vie d'atomes radioactifs ($n = 10^{23}$).

Algorithmique et programmation

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, en mathématiques et en technologie, les élèves ont appris à écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. Les classes de seconde et de première ont permis de consolider les acquis du collège (notion de variable, type, de variables, affectation, instruction conditionnelle, boucle notamment), d'introduire et d'utiliser la notion de fonction informatique et de liste. En algorithmique et programmation, le programme reprend les programmes de seconde et de première sans introduire de notion nouvelle, afin de consolider le travail des classes précédentes.

Les algorithmes peuvent être écrits en langage naturel ou utiliser le langage Python. On utilise le symbole « $\leftarrow$ » pour désigner l'affectation dans un algorithme écrit en langage naturel. L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples.

L'algorithmique trouve naturellement sa place dans toutes les parties du programme et aide à la compréhension et à la construction des notions mathématiques.

Histoire des mathématiques

De nombreux textes témoignent d'une préoccupation algorithmique au long de l'Histoire. Lorsqu'un texte historique a une visée algorithmique, transformer les méthodes qu'il présente en un algorithme, voire en un programme, ou inversement, est l'occasion de travailler des changements de registre qui donnent du sens au formalisme mathématique.

Notion de liste

La génération des listes en compréhension et en extension est mise en lien avec la notion d'ensemble. Les conditions apparaissant dans les listes définies en compréhension permettent de travailler la logique. Afin d'éviter des confusions, on se limite aux listes sans présenter d'autres types de collections.

Capacités attendues

- ▶ Générer une liste (en extension, par ajouts successifs ou en compréhension).
- ▶ Manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer...) et leurs indices.

- ▶ Parcourir une liste.
- ▶ Itérer sur les éléments d'une liste.

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in, \subset, \cap, \cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils connaissent également la notion de couple, de triplet et plus généralement de n -uplet et celle de produit cartésien.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E , on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$, ou la notation $E \setminus A$.

La notion de fonction, que les élèves manipulent depuis le cycle 4, est mise en évidence dans les diverses parties du programme : fonctions d'une variable réelle, suites, variables aléatoires, exemples en géométrie. La notion de bijection est rencontrée naturellement en analyse, en géométrie (notamment bijection entre le plan et $\mathbb{R}^2$, l'espace et $\mathbb{R}^3$), en dénombrement. La composition de deux fonctions est utilisée principalement dans le cadre des fonctions d'une variable réelle.

Le symbole de somme $\sum$ peut être introduit et utilisé pour écrire certaines expressions de façon concise, mais la manipulation de ce symbole pour démontrer des égalités n'est pas un objectif du programme.

Les élèves apprennent en situation à :

- ▶ reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- ▶ lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- ▶ formuler la négation de propositions simples, pouvant contenir un ou deux quantificateurs ;
- ▶ mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- ▶ formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- ▶ formuler la réciproque d'une implication, ou sa contraposée ;
- ▶ lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) ;
- ▶ raisonner par disjonctions des cas, par l'absurde, par contraposée ;
- ▶ raisonner par équivalence, utiliser une propriété caractéristique ;
- ▶ distinguer condition nécessaire et condition suffisante ;
- ▶ démontrer une propriété par récurrence.

1 Dérivation

Table des matières

1	Rappels : définition, dérivées usuelles, opérations	26
2	Rappels : dérivation et étude de fonctions	29
3	Dérivation d'une fonction composée	30
	Exercices	33

Programme

Compléments sur la dérivation

L'étude de la dérivation, commencée en classe de première, est étendue par l'étude de la dérivée d'une fonction composée.

Contenus

- ▶ Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.

Capacités attendues

- ▶ Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- ▶ Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.

Dans tout le chapitre, f , u et v désignent des fonctions définies sur un intervalle *ouvert* I , et a désigne un réel de I .

1 – Rappels : définition, dérivées usuelles, opérations

Définition 1

Dérivabilité en un point

On dit que f est *dérivable en a* si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

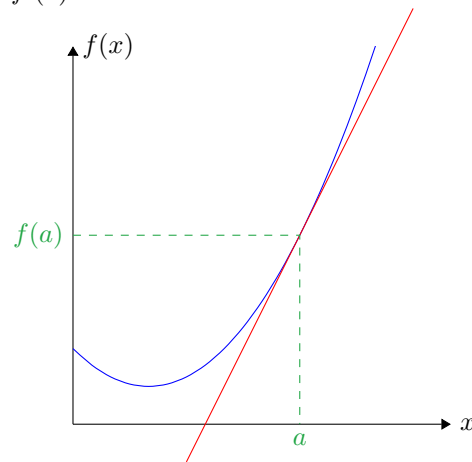
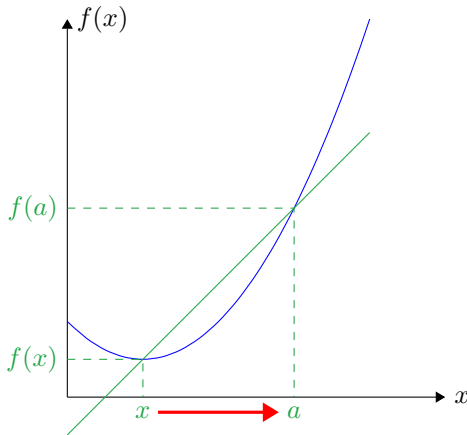
existe **ET** est finie. On note alors $f'(a)$ sa valeur, appelée *nombre dérivé de f en a* .

Remarque 2

Pour x différent de a , la fraction $\tau_f(x, a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelée *taux d'accroissement de f entre x et a* .

Il correspond à la pente de la sécante à la courbe de f passant par les points d'abscisses x et a . Prendre la limite quand x tend vers a du taux d'accroissement revient à rapprocher de plus en plus les points définissant la sécante, jusqu'à ce qu'ils soient confondus.

La sécante devient alors une *tangente*, et sa pente est égale à $f'(a)$.



Proposition 3

Équation de la tangente

Si f est dérivable en a , alors la tangente T_a à la courbe de f en a a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration. Comme f est dérivable en a , la tangente en ce point est une droite de pente $f'(a)$. Il existe donc $p \in \mathbb{R}$ tel que T_a a pour équation $T_a : y = f'(a)x + p$. Comme la tangente intersecte la courbe de f au point de coordonnées $(a; f(a))$, celui-ci vérifie l'équation de T_a , donc $f(a) = f'(a) \times a + p$, donc $p = -f'(a)a + f(a)$, donc :

$$T_a : y = f'(a)x - f'(a)a + f(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

□

Exercices conseillés : 1, 2

La réécriture suivante du taux d'accroissement et de sa limite est à la fois pratique pour les démonstrations et souvent utilisée lorsque la fonction f modélise un phénomène dépendant du temps : l'écart h représente un petit écart temporel,

et ce point de vue s'étend notamment lorsqu'on cherche à faire une simulation numérique en *discrétisant* le problème (voir le chapitre sur les équations différentielles et la méthode d'Euler explicite pour plus de détails sur le sujet).

Proposition 4**Dérivation en un point, forme alternative**

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition 5**Dérivabilité sur un intervalle**

Lorsque f est dérivable en tout point de I , on dit que f est *dérivable sur I* , et on dispose de la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$, appelée (fonction) *dérivée* de f .

Proposition 6**Dérivées usuelles**

Les fonctions usuelles sont dérivables sur les domaines où les expressions suivantes sont valides :

Expression	Dérivée
$c \ (c \in \mathbb{R})$	0
$kx \ (k \in \mathbb{R})$	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Expression	Dérivée
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Expression	Dérivée
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

La dérivée de l'exponentielle découle de sa définition. Pour les autres formules, il faut réussir à écrire le taux d'accroissement (la version avec $f(a+h)$ est plus aisée à manipuler) et déterminer sa limite. Pour les fonctions puissances, cela nécessite l'utilisation de la formule du binôme de Newton.

Remarque 7

La racine carrée n'est pas dérivable en 0 car la tangente y est verticale. C'est un exemple de cas où la limite du taux d'accroissement est infinie. L'autre cas de non dérivabilité est lorsque la limite n'existe tout simplement pas, c'est-à-dire quand les limites à droite et à gauche sont distinctes ou non définies. Typiquement, cela arrive lorsque le graphe de la fonction présente une pointe, de part et d'autre de laquelle les tangentes ne sont pas confondues.

Remarque 8 (Une formule pour les gouverner toutes)

Il suffit de retenir deux formules pour pouvoir retrouver tout ce tableau. La première, c'est la dérivée de l'exponentielle, qui est un cas à part. La seconde, c'est celle de la puissance, qui couvre en fait toutes les autres, pour des raisons que l'on évoquera dans le chapitre sur la fonction logarithme :

- ▶ $\frac{1}{x} = x^{-1}$: en appliquant la formule pour $n = -1$, on trouve $nx^{n-1} = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.
- ▶ $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$: en appliquant la formule avec $-n$, on trouve $-nx^{n-1} = -nx^{-(n+1)} = -n \times \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$.
- ▶ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$: en appliquant la formule pour $n = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$nx^{n-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Opérations sur les dérivées

Proposition 9

Si u et v sont dérivables, alors les fonctions suivantes sont dérivables :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$ku \ (k \in \mathbb{R})$	ku'
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$

Fonction	Dérivée
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstration. ▶ Somme et produit par un scalaire :

$$\begin{aligned} \frac{(u + kv)(a + h) - (u + kv)(a)}{h} &= \frac{u(a + h) - kv(a + h) - u(a) - kv(a)}{h} \\ &= \frac{u(a + h) - u(a)}{h} + k \frac{v(a + h) - v(a)}{h} \\ &\longrightarrow u'(a) + kv'(a) \end{aligned}$$

▶ Produit : remarquons que $\lim_{h \rightarrow 0} u(a + h) = u(a)$ car u est dérivable, donc continue en a .

$$\begin{aligned} &\frac{(u \times v)'(a + h) - (u \times v)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a + h)v(a + h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{v(a)[u(a + h) - u(a)] - v(a)u(a + h) + u(a + h)[v(a + h) - v(a)] + u(a + h)v(a)}{h} \\ &= v(a) \frac{v(a + h) - v(a)}{h} + u(a + h) \frac{v(a + h) - v(a)}{h} + \frac{-u(a + h)v(a) + u(a + h)v(a)}{h} \\ &\longrightarrow v(a)u'(a) + u(a)v'(a) \end{aligned}$$

▶ Quotient (et donc inverse pour $u = 1$) : remarquons que $\lim_{h \rightarrow 0} u(a + h) = u(a)$ car u est dérivable, donc continue en a ; idem pour v .

D'une part

$$\frac{u}{v}(a + h) - \frac{u}{v}(a) = \frac{u(a + h)}{v(a + h)} - \frac{u(a)}{v(a)} = \frac{u(a + h)v(a) - u(a)v(a + h)}{v(a)v(a + h)}$$

Or :

$$u(a + h)v(a) - u(a)v(a + h) = v(a)[u(a + h) - u(a)] + \cancel{v(a)u(a)} - u(a)[v(a + h) - v(a)] - \cancel{u(a)v(a)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{u}{v}(a + h) - \frac{u}{v}(a)}{h} &= \frac{v(a)[u(a + h) - u(a)] - u(a)[v(a + h) - v(a)]}{hv(a)v(a + h)} \\ &= \frac{1}{v(a)v(a + h)} \left[v(a) \frac{u(a + h) - u(a)}{h} - u(a) \frac{v(a + h) - v(a)}{h} \right] \\ &\longrightarrow \frac{1}{v(a)^2} [v(a)u'(a) - u(a)v'(a)] = \frac{u'v - uv'}{v^2}(a) \end{aligned}$$

□

Exemple 10

Dériver les fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\triangleright f(x) = 8x\sqrt{x}$$

$$\triangleright h(x) = \frac{8}{8x-1}$$

$$\triangleright g(x) = (3x+4)(5x-2)$$

$$\triangleright i(x) = \frac{3x^2 - x + 6}{2x+3}$$

Solution

$\triangleright f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = 8x$ et $v(x) = \sqrt{x}$, donc :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 8\sqrt{x} + 8x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 8\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 12\sqrt{x}$$

$\triangleright g(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = 3x+4$ et $v(x) = 5x-2$, donc :

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3(5x-2) + 5(3x+4) = 30x+14$$

(On aurait bien sûr aussi pu développer, ça aurait été plus simple...)

$\triangleright h(x) = 8 \times \frac{1}{v(x)}$ où $v(x) = 8x-1$ donc :

$$h'(x) = 8 \frac{-v'(x)}{v(x)^2} = 8 \times \frac{-8}{(8x-1)^2} = \frac{-64}{(8x-1)^2}$$

$\triangleright i(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = 3x^2 - x + 6$ et $v(x) = 2x+3$, donc :

$$i'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(6x-1)(2x+3) - (3x^2 - x + 6) \times 2}{(2x+3)^2} = \frac{9x^2 + 17x - 9}{(2x+3)^2}$$

Exercice conseillé : 5

2 – Rappels : dérivation et étude de fonctions

Dérivation et variations**Théorème 11**

Si f est dérivable sur l'intervalle I , et si...

- $\triangleright \dots \forall x \in I, f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- $\triangleright \dots \forall x \in I, f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

Ce théorème est admis, sa démonstration étant bien trop technique. Elle utilise notamment une construction dichotomique.

Remarque 12

Attention, cette propriété ne fonctionne pas si I n'est pas un intervalle : prenons par exemple la fonction inverse. Sa dérivée est négative sur son domaine de définition, pourtant la fonction inverse n'est pas décroissante... en effet, $-1 \leq 1$ mais $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$ (l'inégalité n'est pas renversée).

Remarque 13

Si la dérivée est strictement positive/négative sur l'intervalle, sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante/décroissante.

Exemple 14 (Exemple-type)

Soit $f : x \mapsto x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1► Calculer la dérivée de f .
- 2► Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
- 3► Dresser le tableau de variations de f .

Solution

- 1► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12 = 3(x^2 + 3x - 4) = 3(x - 1)(x - 4)$
- 2► $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 4]$ (f' est un polynôme de degré 2, sa courbe est orientée vers le haut, ses racines sont 1 et 4).
- 3► Tableau de variations :

x	$-\infty$	1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow -1,5$		$\searrow 93$		$\nearrow +\infty$

Exercice conseillé : 3

3 – Dérivation d'une fonction composée

Fonction composée**Définition 15**

La fonction qui à x associe $v(u(x))$ est appelée *composée de v par u* , notée $v \circ u$, lu « v rond u » :

$$v \circ u : x \mapsto v(u(x))$$

Exemple 16

- Écrire $f : x \mapsto \sqrt{x-4}$ comme la composée de deux fonctions.
- Écrire l'expression de la fonction g définie par $g(x) = u \circ v(x)$ où $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Solution

- $f = a \circ b$ où $b(x) = x - 4$ et $a(x) = \sqrt{x}$.
- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Remarque 17

Un diagramme fléché, ou un programme de calcul, est une méthode efficace pour (se) représenter les fonctions

composées avec beaucoup d'étages. Prenons par exemple $f(x) = (e^{\sqrt{x+3}} - 1)^5$. Quand on veut en calculer la valeur pour un x donné, on procède de l'intérieur vers l'extérieur :

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1► On part d'un réel x , | 4► On prend l'exponentielle du résultat, |
| 2► On prend la racine de x , | 5► On lui soustrait 1, |
| 3► On lui ajoute 3, | 6► On élève le résultat à la puissance 5. |

Ce qui, résumé sur un dessin, donne l'enchaînement suivant :

$$x \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{x} \xrightarrow{+3} \sqrt{x} + 3 \xrightarrow{\exp} e^{\sqrt{x}+3} \xrightarrow{-1} e^{\sqrt{x}+3} - 1 \xrightarrow{\square^5} (e^{\sqrt{x}+3} - 1)^5$$

Exercice recommandé : 6

Théorème 18

Dérivation d'une fonction composée

Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$, alors $v \circ u$ est dérivable en a , de nombre dérivé :

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a))$$

Démonstration. La démonstration repose sur l'astuce suivante. Sous réserve d'existence,

$$\frac{(v \circ u)(a+h) - (v \circ u)(a)}{h} = \frac{v(u(a+h)) - v(u(a))}{h} = \frac{v(u(a+h)) - v(u(a))}{u(a+h) - u(a)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Le deuxième quotient tend vers $u'(a)$ quand h tend vers 0, par définition du nombre dérivé. Pour le premier, comme u est dérivable en a , elle est continue en a , donc $u(a+h)$ tend vers $u(a)$. De même, comme v est dérivable en $u(a)$, elle est continue en $u(a)$ donc $\lim_{x \rightarrow u(a)} v(y) = v(u(a))$, donc par composition de limites, $v(u(a+h))$ tend vers $v(u(a))$ quand h tend vers 0. On effectue alors le changement de variable $y = u(a+h) \rightarrow u(a)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(u(a+h)) - v(u(a))}{u(a+h) - u(a)} = \lim_{y \rightarrow u(a)} \frac{v(y) - v(u(a))}{y - u(a)} = v'(u(a)) = v' \circ u(a)$$

□

Corollaire 19 (Dérivation d'une fonction composée)

Si u et v sont dérivables, alors $v \circ u$ est dérivable, de dérivée :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

Exemple 20

Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto e^{x^2+1}$.

Solution

Remarquons que $f = v \circ u$ où $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2x \times e^{x^2+1}$$

Proposition 21

Fonction	Dérivée
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$

Remarque 22

On retrouve avec la dernière ligne le fait que la dérivée de $x \mapsto e^{kx}$ ($k \in \mathbb{R}$) est $x \mapsto ke^{kx}$.

Exemple 23

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

► $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$

► $g : x \mapsto (2x^2 + 3x - 3)^4$

► $h : x \mapsto 2e^{1/x}$

Solution

► $f = \sqrt{u}$ où $u(x) = 3x^2 + 4x - 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{6x + 4}{2\sqrt{3x^2 + 4x - 1}}$.

► $g = u^4$ où $u(x) = 2x^2 + 3x - 3$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$.

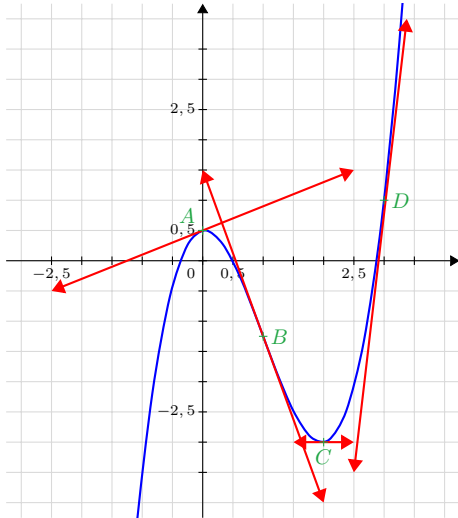
► $h = e^u$ où $u(x) = \frac{1}{x}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

Exercices conseillés : 7, 8, 9

Exercices

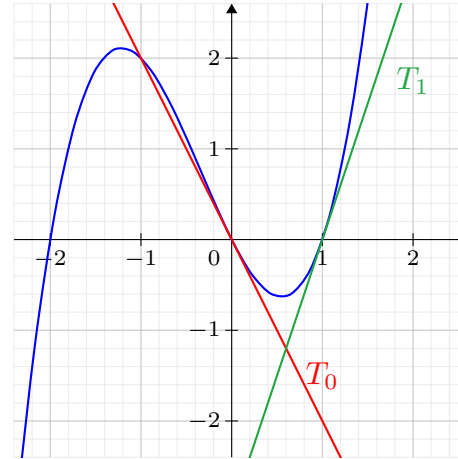
Je maîtrise les bases

Exercice 1



Lire graphiquement les images et les nombres dérivés de f définie par la courbe ci-contre en 0, 1, 2 et 3.

Exercice 2



Lire graphiquement les images et les nombres dérivés de g définie par la courbe ci-contre en 0 et 1. Déterminer graphiquement les abscisses pour lesquelles le nombre dérivé est nul.

Exercice 3

- 1► Soit $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 2.
- 2► Soit $g : x \mapsto e^x$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g en 0.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{9}(x^3 + 3x^2 - 24x + 7)$.

- 1► Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2► Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en -1 .
- 3► Déterminer les abscisses des points où la tangente est horizontale.

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

► $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt{x}$

► $g(x) = xe^x$

► $h(x) = 4x - \frac{7}{x}$

► $i(x) = \frac{x^2e^x + 3}{x + 5}$

Je connais mon cours

Exercice 6

Pour chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\triangleright f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\triangleright h(x) = e^{1/x}$$

$$\triangleright g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\triangleright i(x) = \sqrt{\frac{e^x + 1}{x}}$$

- 1► La décomposer en un programme de calcul,
- 2► En déduire une écriture comme une composée de fonctions simples,
- 3► Donner son ensemble de définition,

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$\triangleright a(x) = e^{-x+2}$$

$$\triangleright e(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\triangleright h(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{e^{-x^2+1}}$$

$$\triangleright b(x) = \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\triangleright f(x) = (\sqrt{3x-5})^3$$

$$\triangleright i(x) = (2x+5)e^{3x-4}$$

$$\triangleright c(x) = (4e^{-x} + 1)^3$$

$$\triangleright g(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$$

$$\triangleright j(x) = \sqrt{3x-6}(x^2-2x)^4$$

$$\triangleright d(x) = (x^2 - 5x + 3)^2$$

Je comprends le cours

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right)^2$.

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de f et sa fonction dérivée.
- 2► Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3► Déterminer les abscisses des points où la tangente est horizontale.
- 4► Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et ses tangentes horizontales.

Exercice 9

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2► Déterminer la fonction dérivée de f sur $I =]0; +\infty[$.
- 3► Quel est le minimum de f sur I ?
- 4► En déduire que pour tous réels a et b strictement positifs, $\sqrt{a+b} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$.

2 Suites et récurrence

Table des matières

1	Notations et modes de génération d'une suite	35
2	Représentation graphique, variations d'une suite	36
3	Croissance linéaire : les suites arithmétiques	39
A	Définition explicite, définition récurrente	39
B	Représentation graphique, variations	42
4	Croissance exponentielle : les suites géométriques	43
A	Définition explicite, définition récurrente	43
B	Représentation graphique, variations	46
5	Problème de seuil	47
6	Le raisonnement par récurrence	49
7	Suites arithmético-géométriques	52
	Exercices	53

1 – Notations et modes de génération d'une suite

Définition 1

Suite numérique

Une *suite numérique* est une fonction qui à tout nombre entier naturel à partir d'un certain entier p associe un nombre : $u : n \mapsto u(n)$.
 Pour $n \geq p$, l'image de n par (u_n) est aussi notée u_n , lue « u indice n », et est appelée *terme de rang n de la suite (u_n)* .
 Le terme $u(p)$ (ou u_p) est appelé *premier terme* ou *terme initial* de la suite (u_n) .

Remarque 2

La notation $u(n)$ est appelée *notation fonctionnelle*, et la notation u_n est appelée *notation indicielle*.
 Pour désigner la suite de terme général u_n , on utilise souvent la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, voire $(u_n)_n$, voire plus simplement (u_n) . Attention à bien faire la différence entre u_n qui est un nombre et (u_n) qui est une suite. Pour faire une analogie, u_n désigne une paire de chaussettes et (u_n) désigne le tiroir qui contient toutes les paires de chaussettes.

Définition 3

Définition explicite d'une suite

Une suite peut être définie en donnant l'expression en fonction de n du terme de rang n : on dit que cette suite est définie *explicitement*.

Exemple 4

La suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_n = 2n + 1$ est définie explicitement.
 Son terme de rang 12 est $u_{12} = 2 \times 12 + 1 = 25$.

Définition par récurrence d'une suite**Définition 5**

Une suite peut être définie en donnant son terme initial et l'expression du terme d'un certain rang en fonction des termes de rangs précédents : on dit que cette suite est définie *par récurrence*.

Exemple 6

La suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la *relation de récurrence* pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2$, est définie par récurrence.

Ses premiers termes sont $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + 2 = 3$, $u_2 = u_1 + 2 = 5$, $u_3 = u_2 + 2 = 7$, $u_4 = u_3 + 2 = 9$, ...

Remarque 7

Dans une définition par récurrence, on n'est pas obligé d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n : on peut également exprimer u_n en fonction de u_{n-1} !

Par exemple, la suite (u_n) définie par son terme initial $u_1 = 1$ et la relation de récurrence pour $n \geq 2$, $u_n = n \times u_{n-1}$ est définie par récurrence.

Définition 8

Expliciter une suite, ou *déterminer son terme général*, c'est trouver sa définition explicite à partir de sa définition par récurrence.

Exercices conseillés : 1, 2, 6

2 – Représentation graphique, variations d'une suite**Variations d'une suite****Définition 9**

- ▶ On dit que (u_n) est *croissante* lorsque chaque terme de (u_n) est supérieur ou égal au précédent, c'est-à-dire lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- ▶ On dit que (u_n) est *décroissante* lorsque chaque terme de (u_n) est inférieur ou égal au précédent, c'est-à-dire lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- ▶ On dit que (u_n) est *constante*, ou *stationnaire*, lorsque chaque terme de (u_n) est égal au précédent (et donc à tous les autres), c'est-à-dire lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
- ▶ Une suite qui est soit croissante soit décroissante est dite *monotone*. On parle alors de la *monotonie* d'une suite.

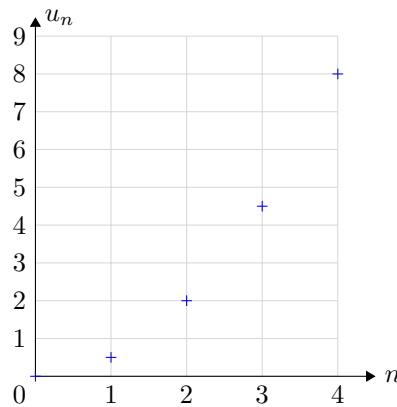
Remarque 10

On parle également de (dé)croissance *stricte* lorsque les inégalités de la définition sont strictes.

Dans un repère, on représente graphiquement une suite par un nuage de points, dont les points sont de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \geq p$ si le terme initial est de rang p).

Exemple 11

Considérons la suite (u_n) définie explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2} \times n^2$. Ses premiers termes sont $u_0 = 0$, $u_1 = 0,5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4,5$, $u_4 = 8$, ... Sa représentation graphique est la suivante :



Chaque terme est (strictement) plus grand que le précédent, donc cette suite est (strictement) croissante.

Méthode 12 (Sens de variation d'une suite)

Pour connaître le sens de variation d'une suite, on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$ à n'importe quel rang n :

- ▶ Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est croissante.
- ▶ Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple 13

- ▶ Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \geq 0$, donc (u_n) est croissante.
- ▶ Soit (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 2n - 5$. En particulier, $u_{n+1} - u_n = -2n - 5 \leq 0$, donc (u_n) est décroissante.

Méthode 14 (Sens de variation d'une suite – cas positif)

Dans le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on peut déterminer son sens de variation de la manière suivante :

- ▶ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante.
- ▶ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple 15

- ▶ Soit (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = n^2$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \geq 1^2 = 1$$

(en effet, $n+1 \geq n > 0$, donc $\frac{n+1}{n} \geq 1$ et on conclut avec la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.) Ainsi, (u_n) est croissante.

- ▶ Soit (u_n) strictement positive vérifiant pour tout $n \geq 1$ la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n/n$. En particulier, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n} \leq 1$, donc (u_n) est décroissante.

Méthode 16 (Sens de variation d'une suite explicite)

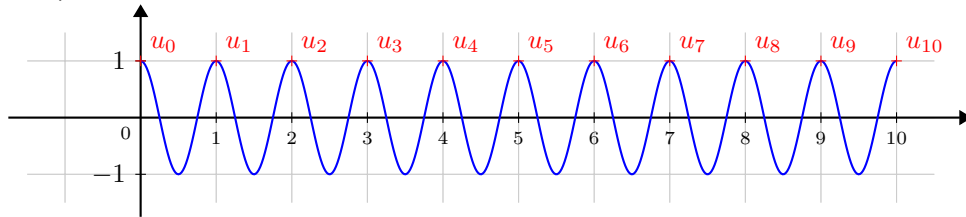
Si (u_n) est définie explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation explicite $u_n = f(n)$, alors les variations de f donnent les variations de (u_n) .

Exemple 17

- Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto x^2$. On sait que f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc (u_n) est croissante.
- Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$. On sait que f est décroissante sur $[0; +\infty[$, donc (u_n) est décroissante.

Remarque 18

La réciproque est fausse. Contre-exemple : prenons la fonction f représentée ci-dessous, et (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, donc (u_n) est croissante et décroissante (car stationnaire), alors que f n'est ni croissante ni décroissante.



Exercices conseillés : 3, 4, 5, 11

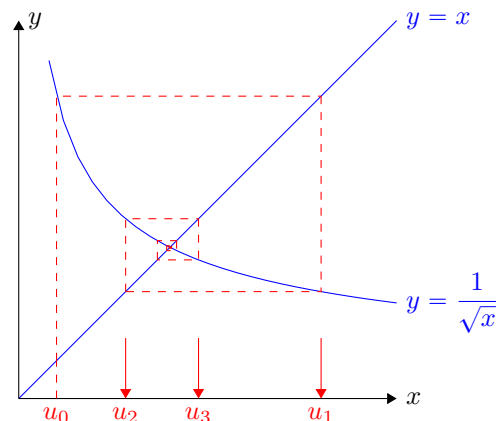
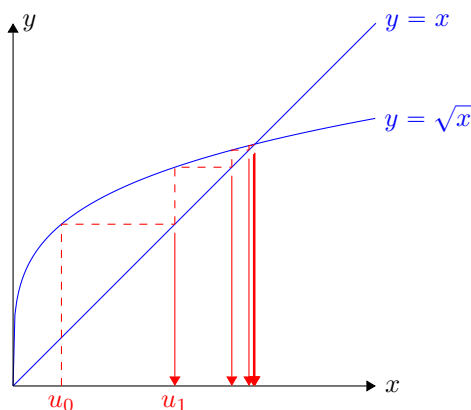
Remarque 19

Pour les suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, ce n'est pas aussi simple. On peut justifier que si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est *monotone*, c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante (le sens de variation est alors déterminé par le signe de $u_1 - u_0$).

Méthode 20 (Représentation graphique des suites récurrentes)

On considère une suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour représenter graphiquement (u_n) , on construit successivement ses valeurs le long de la courbe de f comme suit :

- On trace la courbe de f ,
- On trace la droite d'équation $y = x$,
- Sur l'axe des abscisses, on place u_0 ,
- On remonte sa valeur sur la courbe de f ,
- On reporte l'ordonnée obtenue sur la droite : cela donne en abscisse la valeur de u_1 ,
- On continue, ainsi de suite, en « rebondissant » entre les deux courbes.



3 – Croissance linéaire : les suites arithmétiques

A – Définition explicite, définition récurrente

Définition 21

Suites arithmétiques

Une *suite arithmétique* est une suite qui satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où $r \in \mathbb{R}$ est appelé *raison* de la suite (u_n) .

Remarque 22

Une suite arithmétique modélise une situation dans laquelle l'évolution d'un pas à l'autre se fait en *ajoutant* toujours la même quantité.

Exemple 23

La suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2$, est une suite arithmétique de raison 2.

Remarque 24

La suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + n$ n'est pas une suite arithmétique : la quantité ajoutée à chaque étape n'est pas constante, elle change en fonction du rang.

On peut schématiser une suite arithmétique de la manière suivante :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} u_5 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n$$

De la définition par récurrence, on ne connaît que le terme initial ; pour expliciter la suite, on doit exprimer le terme général de rang n à partir de cette seule information, en exploitant la relation de récurrence. Cherchons une logique pour le passage de u_0 aux autres termes :

- De u_0 à u_1 , on ajoute 1 fois r , autrement dit on ajoute $1 \times r$.
- De u_0 à u_2 , on ajoute 2 fois r , autrement dit on ajoute $2 \times r$.
- De u_0 à u_3 , on ajoute 3 fois r , autrement dit on ajoute $3 \times r$.
- De u_0 à u_4 , on ajoute 4 fois r , autrement dit on ajoute $4 \times r$.
- De u_0 à u_5 , on ajoute 5 fois r , autrement dit on ajoute $5 \times r$.

On devine alors que pour passer de u_0 à u_n , on ajoute n fois r , autrement dit on ajoute $n \times r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} u_5 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n$$

$+nr$

Proposition 25

Explicitation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 (attention, le premier rang est 0 !) et de raison r . L'expression explicite du terme général de (u_n) est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = nr + u_0$$

Exemple 26

La suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = 3$ et de raison 6 :

- ▶ Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$,
- ▶ S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n + 3$

La suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = 0,4$ et de raison -9 :

- ▶ Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 9$,
- ▶ S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -9n + 0,4$

Exercice conseillé : 7

Remarque 27

Si le rang initial n'est pas 0, alors l'expression explicite change. Il suffit de répéter le raisonnement précédent. Par exemple, si le premier rang est 1 :

- ▶ De u_1 à u_2 , on ajoute 1 fois r .
- ▶ De u_1 à u_3 , on ajoute 2 fois r .
- ▶ De u_1 à u_4 , on ajoute 3 fois r .

On devine alors que pour passer de u_1 à u_n , on ajoute $n - 1$ fois r , autrement dit on ajoute $(n - 1) \times r$.

$$u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \cdots \xrightarrow{+r} u_n$$

$+(n-1) \times r$

De manière générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq p$, $u_n = (n - p) \times r + u_p$.

Lemme 28

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Notons $S = 1 + 2 + \cdots + n$. Notons que S est une somme de n termes.

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ + & S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Présenté de cette manière, on constate que $S + S$ peut s'écrire comme la somme de n termes identiques égaux à $n + 1$, autrement dit $2S = n(n + 1)$, donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Remarque 29

Il existe une notation mathématique pour remplacer les points de suspension dans une somme comme celle-ci : par exemple, $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k$, autrement dit on ajoute toutes les valeurs k pour k parcourant les entiers de 1 à n .

Autre exemple : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$, autrement dit on ajoute toutes les valeurs de u_k pour k parcourant les entiers de 0 à n .

Proposition 30**Somme des termes d'une suite arithmétique**

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= u_0 + (u_0 + 1r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \\ &= \underbrace{(u_0 + u_0 + \cdots + u_0)}_{n+1 \text{ fois}} + r(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1) \left[u_0 + r \frac{n}{2} \right] \\ &= (n+1) \frac{2u_0 + rn}{2} \\ &= (n+1) \frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} \\ &= (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} \end{aligned}$$

□

Application 31

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 5}$ définie par $u_{n+1} = u_n - 7$ et $u_5 = 6$.
Explicitez $(u_n)_{n \geq 5}$ puis calculez $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$.

Méthode 32 (Montrer qu'une suite est arithmétique ou non)

Soit (u_n) une suite.

- Pour justifier que (u_n) est arithmétique, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est une constante indépendante de n (c'est alors la raison).
- Pour justifier que (u_n) n'est pas arithmétique, on montre que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ (autrement dit que l'écart entre deux termes successifs n'est pas constant).

Exemple 33

- Montrons que (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+5}{8}$ est arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+5}{8} - \frac{3n+5}{8} = \frac{3n+3+5-(3n+5)}{8} = \frac{3}{8}$$

Comme $\frac{3}{8}$ est une constante indépendante de n , on conclut que (u_n) est arithmétique (de raison $\frac{3}{8}$).

- Montrons que (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique : d'une part, $u_2 - u_1 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$, d'autre part $u_1 - u_0 = 1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$. Ainsi, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, donc (u_n) n'est pas arithmétique.

B – Représentation graphique, variations

Propriété 34

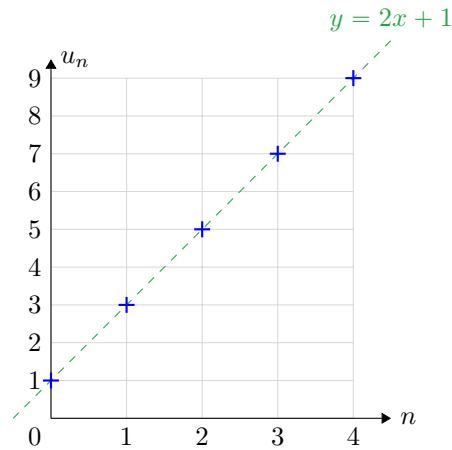
Les points du nuage de points représentant la suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r sont tous alignés, le long de la droite d'équation $y = rx + u_0$.

En effet, cette suite s'écrit explicitement $u_n = rn + u_0$, ou $u_n = rn + u(0)$ en notation fonctionnelle : autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points de coordonnées $(n; u_n)$ vérifient l'équation de droite $y = rx + u_0$ (en notation fonctionnelle : $y = rx + u(0)$).

C'est pour cette raison que l'on dit que les suites arithmétiques modélisent des situations de croissance *linéaire*.

Exemple 35

Représentation graphique de la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison 2 :

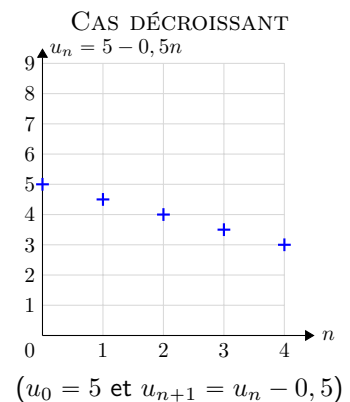
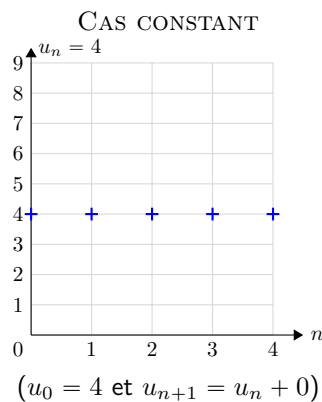
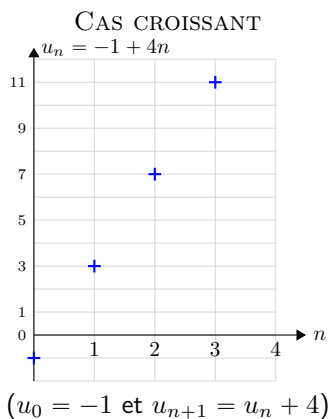


Proposition 36

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- ▶ Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.
- ▶ Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- ▶ Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.

Exemple 37

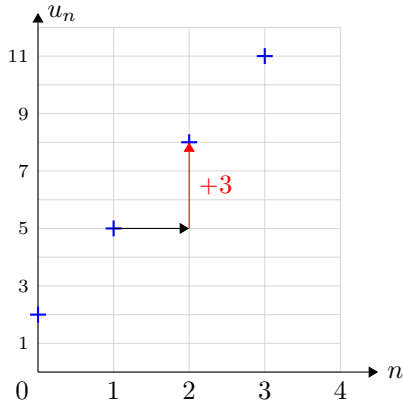


Méthode 38 (Déterminer l'expression d'une suite arithmétique à partir de sa représentation graphique)

Si tous les points sont alignés sur une droite horizontale, alors la suite est constante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est égal à l'ordonnée de ces points.

Sinon, deux cas de figure : soit (u_n) est croissante, c'est-à-dire que plus n est grand, plus les points « montent », soit (u_n) est décroissante, c'est-à-dire que plus n est grand, plus les points « descendent ».

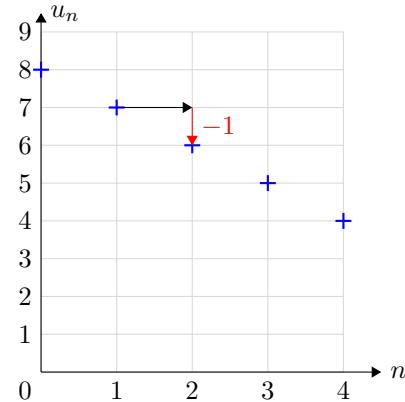
CAS CROISSANT



- 1► Le terme initial est l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0 : ici, on lit $u_0 = 2$.
- 2► On mesure l'accroissement entre deux points successifs : ici, d'un point au suivant, on monte de 3, donc la raison est +3.

Ainsi, l'expression explicite de la suite est, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 2$.

CAS DÉCROISSANT



- 1► Le terme initial est l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0 : ici, on lit $u_0 = 8$.
- 2► On mesure l'accroissement entre deux points successifs : ici, d'un point au suivant, on descend de 1, donc la raison est -1.

Ainsi, l'expression explicite de la suite est, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1n + 8 = 8 - n$.

4 – Croissance exponentielle : les suites géométriques**A – Définition explicite, définition récurrente***Suites géométriques***Définition 39**

Une *suite géométrique* est une suite qui satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

où $q \in \mathbb{R}$ est appelé *raison* de la suite (u_n) .

Remarque 40

Une suite géométrique modélise une situation dans laquelle l'évolution d'un pas à l'autre se fait en *multipliant* toujours la même quantité. Typiquement, un taux (fixe) d'évolution se modélise par une suite géométrique.

Exemple 41

La suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$, est une suite géométrique de raison 2.

Remarque 42

La suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = n \times u_n$ n'est pas une suite géométrique : la quantité multipliée à chaque étape n'est pas constante, elle change en fonction du rang.

On peut schématiser une suite géométrique de la manière suivante :

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \xrightarrow{\times q} \dots \xrightarrow{\times q} u_n$$

De la définition par récurrence, on ne connaît que le terme initial ; pour expliciter la suite, on doit exprimer le terme général de rang n à partir de cette seule information, en exploitant la relation de récurrence. Cherchons une logique pour le passage de u_0 aux autres termes :

- ▶ De u_0 à u_1 , on multiplie 1 fois par q , autrement dit on multiplie par q .
- ▶ De u_0 à u_2 , on multiplie 2 fois par q , autrement dit on multiplie par $q \times q = q^2$.
- ▶ De u_0 à u_3 , on multiplie 3 fois par q , autrement dit on multiplie par $q \times q \times q = q^3$.
- ▶ De u_0 à u_4 , on multiplie 4 fois par q , autrement dit on multiplie par $q \times q \times q \times q = q^4$.
- ▶ De u_0 à u_5 , on multiplie 5 fois par q , autrement dit on multiplie par $q \times q \times q \times q \times q = q^5$.

On devine alors que pour passer de u_0 à u_n , on multiplie n fois q , autrement dit on multiplie q^n .

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \xrightarrow{\times q} \dots \xrightarrow{\times q} u_n$$

$\times q^n$

Proposition 43**Explicitation d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_0 (attention, le premier rang est 0!) et de raison q . L'expression explicite du terme général de (u_n) est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = q^n \times u_0$$

Exemple 44

La suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 3$ et de raison 6 :

- ▶ Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6 \times u_n$,
- ▶ S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6^n \times 3$

La suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 0,4$ et de raison $\frac{1}{9}$:

- ▶ Vérifie la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{9}$,
- ▶ S'exprime explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \times 0,4$

Remarque 45

Si le rang initial n'est pas 0, alors l'expression explicite change. Il suffit de répéter le raisonnement précédent. Par exemple, si le premier rang est 1 :

- ▶ De u_1 à u_2 , on multiplie 1 fois par q .
- ▶ De u_1 à u_3 , on multiplie 2 fois par q .
- ▶ De u_1 à u_4 , on multiplie 3 fois par q .

On devine alors que pour passer de u_1 à u_n , on multiplie $n - 1$ fois q , autrement dit on multiplie par q^{n-1} .

$$u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \cdots \xrightarrow{\times q} u_n$$

$\times q^{n-1}$

De manière générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq p$, $u_n = q^{n-p} \times u_p$.

Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 46

Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison $q \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + u_0q + u_0q^2 + \cdots + u_0q^n = u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

il suffit de montrer que $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$\begin{array}{rcll} S & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \cdots & + & q^{n-1} & + & q^n \\ -qS & = & & - & q & - & q^2 & - & \cdots & - & q^{n-1} & - & q^n & - & q^{n+1} \\ \hline S - qS & = & 1 & & & & & & & & & & - & q^{n+1} \end{array}$$

Ainsi, $S - qS = 1 - q^{n+1}$, mais $S - qS = S(1 - q)$, donc $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, en particulier $1 - q \neq 0$, donc $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. □

Application 47

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ et $v_1 = 4$.

Explicitez $(v_n)_{n \geq 1}$ puis calculez $R = v_1 + v_2 + \cdots + v_{10}$.

Méthode 48 (Montrer qu'une suite est géométrique ou non)

Soit (u_n) une suite qui ne prend pas de valeurs nulles.

- ▶ Pour justifier que (u_n) est géométrique, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante indépendante de n (c'est alors la raison).
- ▶ Pour justifier que (u_n) n'est pas géométrique, on montre que $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ (autrement dit que l'écart multiplicatif entre deux termes successifs n'est pas constant).

Exemple 49

- Montrons que (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2}{3^n}$ est géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{\cancel{2} \times 3^n}{\cancel{2} \times 3 \times 3^n} = \frac{\cancel{3^n}}{3 \times \cancel{3^n}} = \frac{1}{3}$$

Comme $\frac{1}{3}$ est une constante indépendante de n , on conclut que (u_n) est géométrique (de raison $\frac{1}{3}$).

- Montrons que (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = n^2$ n'est pas géométrique : d'une part, $\frac{u_3}{u_2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$, d'autre part $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2^2}{1^2} = 2$. Ainsi, $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$, donc (u_n) n'est pas géométrique.

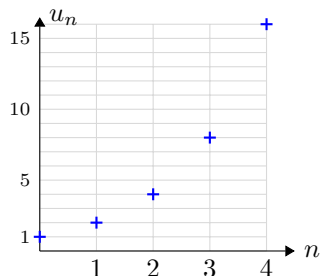
Exercices conseillés : 10, 12

B – Représentation graphique, variations

Dans cette section, on considère une suite (u_n) de terme initial $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

Exemple 50

Représentation graphique de la suite géométrique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison 2 :

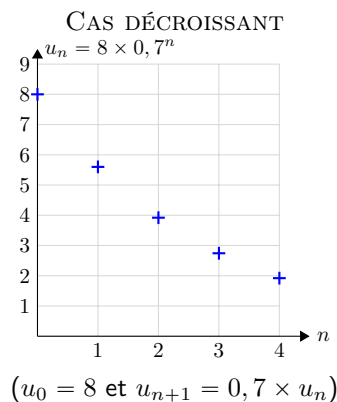
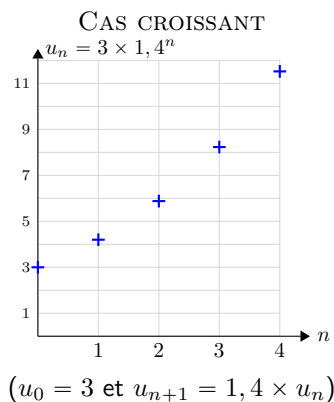


Proposition 51

Soit (u_n) une suite géométrique (positive) de raison q .

- Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors (u_n) est constante.
- Si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.

Exemple 52



Méthode 53 (Déterminer l'expression d'une suite géométrique à partir de sa représentation graphique)

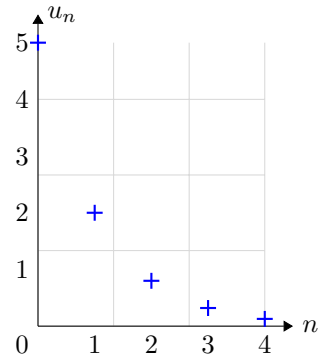
Pour déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique à partir de sa représentation graphique,

- 1► On lit le terme initial à l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0,
- 2► On lit les ordonnées de deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} ,
- 3► Comme $u_{n+1} = q \times u_n$, on retrouve la raison par la formule $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple 54

Considérons la suite géométrique dont la représentation graphique est la suivante :

On lit $u_0 = 5$ et $u_1 = 2$. Comme $u_1 = q \times u_0$, on en déduit que $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{5} = 0,4$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,4^n \times 5$.



5 – Problème de seuil

Problème de seuil

Définition 55

Un *problème de seuil* est la question suivante : étant donnée une suite croissante (respectivement décroissante), à partir de quel rang passe-t-elle au-dessus (respectivement en-dessous) d'une certaine valeur ?

Méthode 56 (Cas arithmétique explicite : avec une inéquation)

► Considérons la suite arithmétique croissante (u_n) de terme général donné pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 6n + 1$. On veut savoir à partir de quel rang (u_n) passe au-dessus de la valeur 120.

Or le rang n est un nombre entier : il faut donc prendre le rang qui suit le nombre 19,83 : en effet, (u_n) est croissante, donc pour $n < 19,83$, on a $u_n < 120$, et pour $n > 19,83$, on a $u_n > 120$. Le rang qui suit 19,83 est 20 : ainsi, (u_n) dépasse la valeur 120 à partir du rang 20.

► Considérons la suite arithmétique décroissante (u_n) de terme général donné pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n + 500$. On veut savoir à partir de quel rang (u_n) passe en-dessous de la valeur 10.

(Attention, multiplier ou diviser une inéquation par un nombre négatif renverse son sens !)

Ainsi, (u_n) passe en-dessous de 10 à partir du rang 164.

$$6n + 1 \geq 120$$

$$6n + 1 - 1 \geq 120 - 1$$

$$6n \geq 119$$

$$6n \div 6 \geq 119 \div 6$$

$$n \geq 119 \div 6 \approx 19,83$$

$$-3n + 500 \leq 10$$

$$-3n + 500 - 500 \leq 10 - 500$$

$$-3n \leq -490$$

$$-3n \div (-3) \geq -490 \div (-3)$$

$$n \geq 490 \div 3 \approx 163,33$$

Méthode 57 (Avec un tableur – cas par récurrence)

Considérons la suite arithmétique croissante (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et de raison 4. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 4$. On cherche à savoir quand la suite (u_n) dépasse la valeur 40.

- 1► Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).
- 2► Dans la colonne B, on inscrit le terme initial, puis on transcrit la formule de récurrence dans la cellule suivante. On étend ensuite cette formule.
- 3► On parcourt la colonne B pour chercher le moment où la suite (u_n) dépasse le seuil (ici, quand elle dépasse la valeur 40) : il suffit alors de lire le rang correspondant dans la colonne A (ici, (u_n) dépasse 40 à partir du rang 10).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	=B2+4
4	2	18
5	3	22
6	4	26
7	5	30
8	6	34
9	7	38
10	8	42

Méthode 58 (Avec un tableur – cas explicite)

Considérons la suite géométrique décroissante (u_n) de terme général donné pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0,8^n \times 200$. On veut savoir à partir de quel rang (u_n) passe en-dessous de la valeur 100.

- 1► Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).
- 2► Dans la colonne B, on inscrit l'expression qui définit u_n en fonction de n . On étend ensuite cette formule.
- 3► On parcourt la colonne B pour chercher le moment où la suite (u_n) dépasse le seuil (ici, quand elle passe en-dessous de la valeur 100) : il suffit alors de lire le rang correspondant dans la colonne A (ici, (u_n) passe en-dessous de 100 à partir du rang 4).

Remarque 1 : L'exponentiation dans un tableur se fait avec le symbole $\wedge$ (accent circonflexe).

Remarque 2 : Les machines ne peuvent pas traiter des nombres avec une précision infinie, et doivent faire des arrondis : ici, par exemple, les premiers termes de (u_n) sont 200, 160 et 128, mais on constate que ce tableur souffre d'erreurs d'arrondis (les erreurs sont exagérées pour l'exemple...).

	A	B
1	n	u_n
2	0	=0,8 ^{A2} *200
3	1	160
4	2	128
5	3	102,4
6	4	81,92
7	5	65,54
8	6	52,43
9	7	41,94
10	8	33,56

Remarque 59

Le problème de seuil dans le cas géométrique par inéquation nécessite la fonction *logarithme*, qui fait l'objet d'un autre chapitre.

Méthode 60 (Avec Python – cas par récurrence)

Considérons la suite géométrique croissante (u_n) de terme initial $u_0 = 2$ et de raison 1,5. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,5 \times u_n$. On cherche à savoir quand la suite (u_n) dépasse la valeur 100.

Le principe est le suivant : on stocke la valeur courante de u_n dans une variable, initialisée à u_0 , que l'on met à jour dans une boucle. On souhaite mettre à jour la valeur de u_n tant que l'on n'a pas dépassé le seuil, tout en gardant trace du rang.

```

1  seuil ← 100
2  u ← 2
3  n ← 0
4  TANT QUE u < seuil:
5      u ← 1,5 * u
6      n ← n + 1
7  FIN TANT QUE
8  AFFICHER n

```

```

1  seuil = 100
2  u = 2
3  n = 0
4  while u < seuil:
5      u = 1.5*u
6      n = n+1
7  print(n)

```

Méthode 61 (Avec Python – cas explicite)

Considérons la suite arithmétique décroissante (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2000 - 9n$. On cherche le rang à partir duquel (u_n) passe en-dessous de 0.

Le principe est le suivant : on teste chaque rang n un par un, *tant que* la valeur de u_n calculée à partir de n est au-dessus du seuil.

```

1  seuil ← 0
2  n ← 0
3  TANT QUE 2000 - 9*n > seuil:
4      n ← n + 1
5  FIN TANT QUE
6  AFFICHER n

```

```

1  seuil = 100
2  n = 0
3  while 2000 - 9*n > seuil:
4      n = n+1
5  print(n)

```

Exercice conseillé : 11

6 – Le raisonnement par récurrence

Définition 62

Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier naturel n , soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si :

- ▶ $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie,
- ▶ Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ (on dit que la proposition $\mathcal{P}_n$ est *héréditaire*),

alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

C'est ce qu'on appelle le *principe de récurrence*. Il s'utilise quand on veut montrer qu'une proposition est vraie pour tout entier naturel (éventuellement à partir d'un certain rang).

Remarque 63

Le principe de récurrence est comme une formalisation mathématique de l'idée des dominos : si on pousse le premier domino et que chaque domino entraîne le suivant, alors tous les dominos tomberont.

Une démonstration par récurrence se déroule toujours en 4 temps :

- 1▶ *Initialisation* : on montre que la proposition est vraie au premier rang,
- 2▶ *Hypothèse de récurrence* : on suppose que la proposition est vraie à un rang n quelconque,
- 3▶ *Hérédité* : on montre que la proposition est héréditaire,
- 4▶ *Conclusion* : on conclut la démonstration en invoquant le principe de récurrence.

Exemple 64 (Rédaction-type)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{HR}_n$ la proposition « $u_n = 3 - 2^n$ ».

INIT $\mathcal{HR}_0$ est vraie car $u_0 = 2 = 3 - 2^0$.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

HÉRÉDITÉ

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 2u_n - 3 && \text{(d'après la relation de récurrence de } (u_n)) \\
 &= 2(3 - 2^n) - 3 && \text{(d'après } \mathcal{HR}_n) \\
 &= 6 - 2^{n+1} - 3 \\
 &= 3 - 2^{n+1}
 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.

Exemple 65

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{HR}_n$ la proposition « Pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

INIT Montrons $\mathcal{HR}_0$. Soit $x > -1$. D'une part, $(1+x)^0 = 1$, d'autre part $1+0x = 1$. Ainsi, $\mathcal{HR}_0$ est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie, montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$ est alors aussi vraie.

HÉRÉDITÉ Soit $x > -1$. D'après $\mathcal{HR}_n$, on sait que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Comme $x > -1$, en particulier $1+x \geq 0$, et donc :

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+x^2 = 1+(n+1)x+x^2 \geq 1+(n+1)x \\
 &\text{car } x^2 \geq 0. \text{ Cela démontre que } \mathcal{HR}_{n+1} \text{ est vraie.}
 \end{aligned}$$

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Proposition 66**Inégalité de Bernoulli**

Pour tout $x > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice conseillé : 13

Remarque 67

L'initialisation est tout aussi importante que l'hérédité ! En effet, une proposition peut être héréditaire, mais toujours fausse... Par exemple, $\mathcal{P}_n$: « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire, mais évidemment toujours fausse.

Exemple 68

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$. Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 3$.

Pour $n \geq 1$, on appelle $\mathcal{HR}_n$ la proposition « $0 < u_n < 3$ ».

INIT $\mathcal{HR}_1$ est vraie car $u_1 = \sqrt{5} \approx 2,24 \in]0; 3[$.

HYP Soit $n \geq 1$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{HR}_n$, $0 < u_n < 3$, donc $5 < u_n + 5 < 8$, donc $(0 <) \sqrt{5} < \sqrt{u_n + 5} < \sqrt{8} (\approx 2,83 < 3)$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$. Or $\sqrt{u_n + 5} = u_{n+1}$, donc $0 < u_{n+1} < 3$, donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_1$ est vraie et que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, $\mathcal{HR}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$, autrement dit pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 3$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{HR}_n$ la proposition « $u_{n+1} > u_n$ ».

INIT $\mathcal{HR}_0$ est vraie car $u_1 = \sqrt{5} \approx 2,24 > u_0 = 0$.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{HR}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{HR}_n$, $u_{n+1} > u_n$, donc $u_{n+1} + 5 > u_n + 5$, mais $u_n + 5 > 0$ d'après ce qui précède, donc $\sqrt{u_{n+1} + 5} > \sqrt{u_n + 5}$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$. Finalement, $u_{n+2} > u_{n+1}$, donc $\mathcal{HR}_{n+1}$ est vraie.

CCL On a montré que $\mathcal{HR}_0$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ entraîne $\mathcal{HR}_{n+1}$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{HR}_n$ est vraie, autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, autrement dit (u_n) est strictement croissante.

Exercices conseillés : 14 à 23

7 – Suites arithmético-géométriques

La technique développée dans ce paragraphe sera justifiée dans le chapitre 8.

Définition 69

Une suite *arithmético-géométrique* est une suite (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Application 70 (Explicitation d'une suite arithmético-géométrique)

- 1► Commençons sur un exemple concret : considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
 - a► On commence par réécrire la relation de récurrence de (u_n) en remplaçant u_n et u_{n+1} par la lettre ℓ : cela donne l'équation $\ell = 3\ell - 2$. Vérifiez que $\ell = 1$ en est la solution.
 - b► On définit la suite v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell = u_n - 1$. Vérifiez que v est géométrique de raison $a = 3$.
 - c► Explicitiez v .
 - d► Exprimez v_0 en fonction de u_0 et ℓ .
 - e► Déduisez-en l'expression explicite de (u_n) .
- 2► Traitons maintenant le cas général avec les notations de la définition.
 - a► On commence par réécrire la relation de récurrence de (u_n) en remplaçant u_n et u_{n+1} par la lettre ℓ : cela donne l'équation $\ell = a\ell + b$. Exprimez la solution de cette équation en fonction de a et b , en justifiant la validité de vos opérations.
 - b► On définit la suite v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$. Vérifiez que (v_n) est géométrique de raison a .
 - c► Exprimez v_0 en fonction de u_0 et ℓ .
 - d► Explicitiez (v_n) .
 - e► Déduisez-en l'expression explicite de (u_n) .

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_5 .

- 1► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 5$
- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$
- 3► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$
- 4► $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 7$
- 5► $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, exprimer t_{n+1} , t_{n-1} , t_{2n} et t_{3n-2} en fonction de n .

- 1► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2n + 4$
- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = n^2 - n + 1$
- 3► Pour tout entier $n \geq 1$, $t_n = \frac{n-2}{n+1}$

Exercice 3

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$.

- 1► $v_n = 4n - 5$
- 2► $v_n = 1 + \frac{2}{n}$
- 3► $v_n = \frac{2^n}{n}$

Exercice 4

On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n par $p_n = n^2 - 7n + 12$. Étudier les variations de la suite (p_n) .

Exercice 5

Déterminer les variations des suites suivantes :

- 1► $u_n = -3n + 1$
- 2► $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
- 3► $u_n = 2^n$
- 4► $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 6

Modélisez les situations suivantes...

- 1► ...avec une suite définie explicitement :
 - Alice étudie une colonie de bactéries. Elle place 1 bactérie dans une boîte de pétri. Chaque heure, le nombre de bactéries double.
 - Bob compte le nombre de passagers dans des trains successifs numérotés 1, 2, 3, etc. Le nombre de passagers est égal au numéro du train multiplié par 3, auquel on ajoute 50.
- 2► ...avec une suite définie par récurrence :
 - En 2020, Carole possède 1000€ sur son compte d'épargne. Chaque année, son épargne lui rapporte 2% du montant de l'année précédente.
 - David s'entraîne pour un marathon. Le premier jour, il court 1,5km. Chaque jour, il progresse, et court 2km de plus que la veille.
- 3► ...avec une suite dont vous donnerez une expression explicite et une expression par récurrence :
 Dans la suite d'allumettes suivante, quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour réaliser chaque étape ?



ÉTAPE 1



ÉTAPE 2



ÉTAPE 3

Je comprends mon cours

Exercice 7

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$. Calculer u_{20} .

Exercice 8 (Vrai/faux)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites croissantes.

- 1► **Proposition 1** : « La suite (w_n) de terme général $w_n = u_n + v_n$ est croissante. »
- 2► **Proposition 2** : « La suite (w_n) de terme général $w_n = u_n \times v_n$ est croissante. »

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- 1► Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
- 2► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 6$.
 - a► Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques (premier terme et raison).
 - b► Exprimer, pour tout entier n , v_n en fonction de n .
 - c► Exprimer, pour tout entier n , u_n en fonction de n .

Exercice 10

Un apiculteur a constaté qu'entre 2015 et 2019 le nombre d'abeilles adultes de sa ruche a diminué d'environ 10% chaque année. Il avait acheté une colonie de 50 000 abeilles en 2015.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le terme d'une suite modélisant le nombre d'abeilles dans la ruche en l'an 2015 + n .

- 1► Montrer que $u_1 = 45\,000$ et $u_2 = 40\,500$.
- 2► a► Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n .

- b► En déduire la nature de la suite (u_n) .
- c► Exprimer u_n en fonction de n .

- 3► Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- 4► Déterminer le nombre d'abeilles qu'il y aura dans sa ruche en 2025 selon ce modèle si l'évolution se maintient.
- 5► Estimer, avec ce modèle, en quelle année la population initiale de la colonie d'abeilles aura diminué de moitié.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^3 - n + 4$.

- 1► Déterminer les trois premiers termes de la suite.
- 2► Exprimer, pour tout entier naturel n , u_{n+1} en fonction de n . Développer et réduire.
- 3► Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = 3n(n+1)$
- 4► Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

```

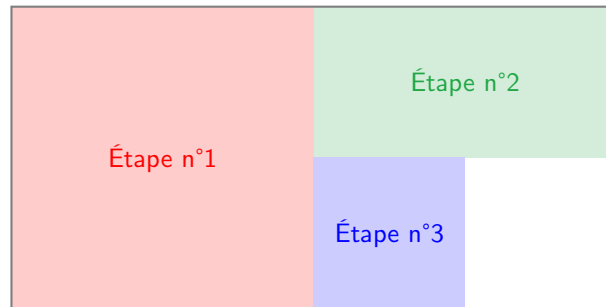
1  def u(n):
2      return n**3 - n + 4
3
4  def seuil(A):
5      n = 0
6      while u(n) < A:
7          n = n + 1
8      return n

```

- 5► L'algorithme ci-contre contient une fonction `seuil` qui doit permettre de déterminer un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à un nombre réel A .
 - a► Quel est le rôle de la fonction `u` placée avant la fonction `seuil` ?
 - b► Programmer cet algorithme et exécuter la fonction `seuil` en prenant $A = 100$; $A = 100\,000$ et $A = 10^{10}$ successivement. Que renvoie-t-elle à chaque fois ?
 - c► La suite (u_n) semble-t-elle disposer d'une valeur maximale ?

Exercice 12 (Chercher)

On colorie la surface d'un rectangle de 1 mètre de largeur et de 2 mètres de longueur de la façon suivante : on commence par colorier la moitié de la surface du rectangle, puis la moitié de la surface restante, puis la moitié de la nouvelle surface restante et ainsi de suite.



- 1► À long terme, de quelle valeur l'aire de la surface coloriée semble-t-elle se rapprocher ?
- 2► Déterminer à partir de quelle étape l'aire coloriée représente 99,5% de cette valeur limite.

Exercice 13

Alice doit démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 Sur le point de terminer sa démonstration, son chaton a sauté sur son bureau et a renversé du correcteur blanc !
 Aidez Alice à réécrire les parties manquantes de sa rédaction ci-dessous.

Pour n un entier supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition

« ».

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par récurrence.

Initialisation : D'une part,

D'autre part,

On a ainsi montré que est vraie.

Hérédité : Soit n

On suppose vraie ; autrement dit

Démontrons que ; autrement dit que

Par hypothèse de récurrence : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dots$, donc :

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \\
 &= \\
 &= \\
 &=
 \end{aligned}$$

en factorisant par $n + 1$.

Donc est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence, on en déduit que

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 15

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,4$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \geq 0,8.$$

Exercice 16

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$ et $v_0 = 10$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3 \leq v_n \leq 10.$$

Exercice 17

Soient a et r deux réels. On considère la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = a$ et de raison r . (On rappelle que pour tout entier naturel n , on a alors $u_{n+1} = u_n + r$.)
Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = a + rn$$

Exercice 18

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Exercice 19

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $n \leq u_n \leq n + 3$.

Exercice 20

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Objectif Bac

Exercice 22

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$.
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.

Exercice 23 (BAC 2022)

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1,9a_n(1 - a_n)$.

- 1► On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - a► Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 1]$.
 - b► En déduire que, si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 0,5]$.
- 2► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 0,5$.

3 Combinatoire et dénombrement

Table des matières

1	Vocabulaire ensembliste	59
2	Principes additif et multiplicatif	60
	A Union	60
	B Produit cartésien	61
3	Parties d'un ensemble	62
4	Permutations, combinaisons, arrangements – le coefficient binomial	63
5	Propriétés du coefficient binomial, Triangle de Pascal	66
	Exercices	69

Dans l'imaginaire collectif, quelqu'un qui sait compter, c'est quelqu'un qui sait faire des maths. Mais l'art de compter n'est qu'une branche parmi tant d'autres des mathématiques ! C'est justement cette branche que l'on étudie dans ce chapitre : nous allons donc apprendre à compter !

Programme

Les ensembles considérés dans cette section sont finis mais on introduit dans le cas général (ensembles quelconques) les notions suivantes : couple, triplet, k -uplet (ou k -liste) ; produit cartésien de deux, trois, k ensembles ; ensemble A^k des k -uplets d'éléments d'un ensemble A .

Contenus

- ▶ Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- ▶ Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k -uplets (ou k -listes) d'un ensemble à n éléments.
- ▶ Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n -uplets de $\{0, 1\}$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.
- ▶ Nombre des k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$ Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- ▶ Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- ▶ Pour $0 \leq k \leq n$, formules : $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
- ▶ Explicitation pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

Capacités attendues

- ▶ Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- ▶ Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

Démonstrations

- ▶ Démonstration par dénombrement de la relation : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
- ▶ Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).

Approfondissement possible

- ▶ Combinaisons avec répétitions.

Exemples d'algorithme

- ▶ Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal.
- ▶ Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation.
- ▶ Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini.

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in, \subset, \cap, \cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils connaissent également la notion de couple, de triplet et plus généralement de n -uplet et celle de produit cartésien.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E , on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$, ou la notation $E \setminus A$.

La notion de fonction, que les élèves manipulent depuis le cycle 4, est mise en évidence dans les diverses parties du programme : fonctions d'une variable réelle, suites, variables aléatoires, exemples en géométrie. La notion de bijection est rencontrée naturellement en analyse, en géométrie (notamment bijection entre le plan et $\mathbb{R}^2$, l'espace et $\mathbb{R}^3$), en dénombrement. La composition de deux fonctions est utilisée principalement dans le cadre des fonctions d'une variable réelle.

Le symbole de somme $\sum$ peut être introduit et utilisé pour écrire certaines expressions de façon concise, mais la manipulation de ce symbole pour démontrer des égalités n'est pas un objectif du programme.

Histoire

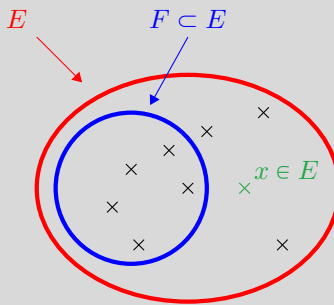
"Des propriétés arithmétiques du Triangle de Pascal étaient présentes dans les travaux combinatoires des mathématiques indiennes et chinoises. La combinatoire était un objet de prédilection des récréations mathématiques dès l'Antiquité et est encore présente chez des arithméticiens du XIX^e siècle (Lucas, Delannoy, Laisant). Il est par ailleurs pertinent de souligner le développement récent des « mathématiques discrètes », motivé notamment par l'informatique et l'intelligence artificielle." (Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale)

1 – Vocabulaire ensembliste

Vocabulaire

Définition 1

- Un *ensemble* est une collection d'objets distincts qu'on appelle *éléments* de cet ensemble.
- Si x est un élément de E , alors on dit que x *appartient* à E , et on note $x \in E$.
- Une *partie* (ou un *sous-ensemble*) de E est un ensemble F dont tous les éléments appartiennent aussi à E . On dit que F est *inclus dans* E , et on note $F \subset E$.
- Le *cardinal* de E , noté $\text{card}(E)$, est le nombre (éventuellement infini) d'éléments dans E . Un ensemble est dit *fini* s'il contient un nombre fini d'éléments, il est dit *infini* dans le cas contraire. Formellement, on dit que E est de cardinal n si on peut numéroter les éléments de E de 1 à n .
- Un ensemble à 1 élément est appelé un *singleton*. Un ensemble à 2 éléments est appelé une *paire*.



Remarque 2

Quand on donne explicitement la liste des éléments d'un ensemble, on note ceux-ci entre accolades.

Exemple 3

- L'ensemble $E = \{a, b, c\}$ est fini (de cardinal 3). L'ensemble $F = \{a\}$ en est un sous-ensemble.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels est un ensemble infini. L'ensemble des entiers naturels pairs en est une partie.

Définition 4

Ensemble vide

Un ensemble peut ne contenir aucun élément, auquel cas on dit qu'il est *vide*. On note $\emptyset$ l'ensemble vide.

Exemple 5

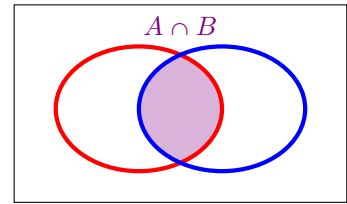
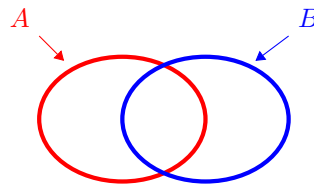
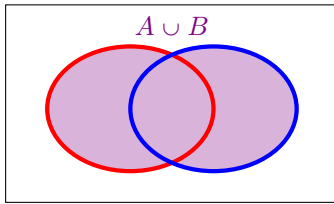
- L'ensemble des nombres à la fois pairs et impairs est vide.
- L'ensemble des poules qui ont des dents est vide, parce que les poules n'ont pas de dents...

Définition 6

Union et intersection

- L'*union* (ou *réunion*) de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont soit dans A , soit dans B . On la note $A \cup B$, lue « A union B ».
- L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont simultanément dans A et dans B . On la note $A \cap B$, lue « A inter B ».
- Deux ensembles dont l'intersection est vide sont dits *disjoints*.

On peut représenter l'union et l'intersection de deux ensembles de la manière suivante :



2 – Principes additif et multiplicatif

Dans cette section, E , F et G sont des ensembles finis.

A – Union

Proposition 7

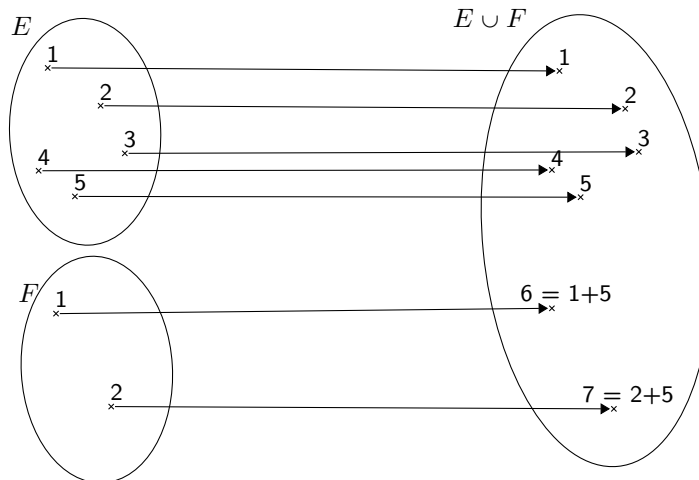
Principe additif

Si E et F sont disjoints, alors $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.

Exemple 8

Dans la classe d'Alice, 6 élèves sont blonds, 2 élèves sont roux, et les 12 autres élèves sont bruns. Si on note *Blonds*, *Roux*, et *Bruns* respectivement l'ensemble des élèves blonds, roux et bruns, on a alors $\text{card}(\text{Blonds}) = 6$, $\text{card}(\text{Roux}) = 2$, et $\text{card}(\text{Bruns}) = 12$. Comme *Blonds* et *Roux* sont disjoints, la proposition nous affirme que $\text{card}(\text{Blonds} \cup \text{Roux}) = 6 + 2 = 8$. Il y a donc 8 élèves blonds ou roux.

Démonstration. (non exigible) Voici une idée de démonstration (les objets mathématiques nécessaire à la démonstration rigoureuse ne sont pas au programme). Notons n le cardinal de E et m le cardinal de F . Cela signifie que l'on peut numéroté les éléments de E de 1 à n , et les éléments de F de 1 à m . Quitte à ajouter n à chaque numéro des éléments de F , on peut numéroté les éléments de F de $n + 1$ à $n + m$. Ainsi, on numérote les éléments de $E \cup F$ de 1 à $n + m$, et on n'a pas numéroté deux fois un même élément car E et F sont disjoints. Donc $E \cup F$ est de cardinal $n + m$.

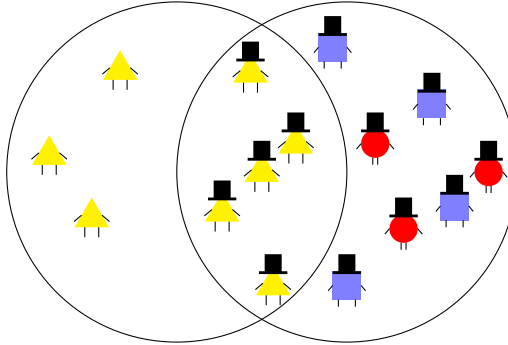


Numérotation de $E \cup F$

□

Remarque 9

Cette propriété est très fautive si E et F ne sont pas disjoints ! Prenons un (contre-)exemple : dans le pays d'Algérie, certains habitants sont des triangles, et certains portent des chapeaux. Mais l'un n'empêche pas l'autre ! Sur le schéma ci-dessous, il y a 8 triangles, 12 individus portant un chapeau, pourtant il n'y a pas $8 + 12 = 20$ individus au total ! Il y a en 15, ce que l'on retrouve en appliquant correctement la formule du crible : il y a 5 individus triangles portant un chapeau, et bien $8 + 12 - 5 = 15$ individus au total.

**Application 10**

À l'aide de patatoïdes, expliquer pourquoi en général, la formule est la suivante :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

Toujours à l'aide de patatoïdes, déterminer une formule pour $\text{card}(E \cup F \cup G)$.

Exercices conseillés : 19, 38, 39, 40

B – Produit cartésien

Définition 11**Produit cartésien**

On appelle *produit cartésien* de E et F l'ensemble :

$$E \times F = \{(e, f) : e \in E, f \in F\}$$

On note $E^2 = E \times E$, et en général $E^k = \underbrace{E \times \cdots \times E}_k \text{ fois}$.

Un élément de E^n est appelé *n-uplet* (ou *n-liste*) de E .

Remarque 12

Un 2-uplet est appelé *couple*, un 3-uplet est appelé *triplet*.

Un couple de réels correspond à des coordonnées dans le plan, un triplet de réels correspond à des coordonnées dans l'espace.

Exemple 13

Si $A = \{1; 2\}$ et $B = \{3; 4\}$ alors $A \times B = \{(1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4)\}$.

Proposition 14**Principe multiplicatif**

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

La notation $\times$ du produit cartésien prend donc tout son sens : le cardinal du produit (cartésien), c'est le produit des cardinaux !

Démonstration. Voici une idée de démonstration (non exigible). Notons n le cardinal de E et m le cardinal de F . Pour construire un élément de $E \times F$, il faut choisir un élément de E (il y a n choix) et un élément de F (il y a m choix) : il y a donc $n \times m$ choix pour les éléments de $E \times F$. Pour illustrer ce raisonnement, on peut dire qu'on peut représenter les éléments de $E \times F$ dans un tableau à double entrée, avec les éléments de E en colonne et les éléments de F en ligne. Ce tableau comporte donc $n \times m$ cases.

Illustration du principe de la démonstration :

	e_1	e_2	$\cdots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\cdots$	(e_n, f_1)
f_2	(e_1, f_2)	(e_2, f_2)	$\cdots$	(e_n, f_2)
$\vdots$				
f_m	(e_1, f_m)	(e_2, f_m)	$\cdots$	(e_n, f_m)

Il y a une autre manière de présenter cette démonstration : il faut remarquer que $E \times F$ est la réunion disjointe des ensembles $\{(e, f) : f \in F\}$ pour chaque $e \in E$. Or le cardinal de ces ensembles est $\text{card}(F)$, donc d'après le paragraphe précédent $\text{card}(E \times F) = \underbrace{\text{card}(F) + \cdots + \text{card}(F)}_{\text{card}(E) \text{ fois}} = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$. $\square$

Exercices conseillés : 5, 8, 10, 12, 20, 22, 29, 32

3 – Parties d'un ensemble

Définition 15**Ensemble des parties d'un ensemble**

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E , et on l'appelle *ensemble des parties de E* .

Remarque 16

C'est un ensemble d'ensembles !

Exemple 17

Déterminons $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$: parmi les sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$, on retrouve les sous-ensembles de cardinal 1, à savoir $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$, mais aussi les sous-ensembles de cardinal 2, à savoir $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 3\}$. Il ne faut pas oublier le sous-ensemble de cardinal 3, à savoir $\{1, 2, 3\}$ lui-même, mais également le sous-ensemble de cardinal 0, à savoir $\emptyset$. Ainsi :

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

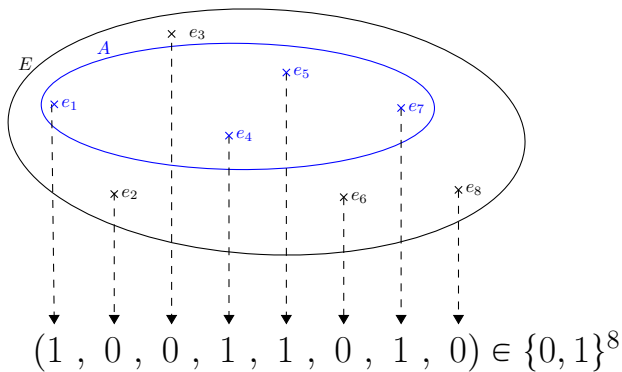
C'est un ensemble de cardinal $8 = 2^3$.

Proposition 18**Cardinal de l'ensemble des parties**

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

Démonstration. (non exigible) Pour démontrer cette formule, nous n'allons pas le montrer directement comme nous avons pu le faire jusqu'à présent, nous allons plutôt montrer que cet ensemble a le même cardinal qu'un ensemble dont on connaît justement déjà le cardinal. Notons n le cardinal de E . Effectivement, nous allons montrer que $\mathcal{P}(E)$ et $\{0, 1\}^n$ ont le même cardinal. Comme on sait déjà que $\text{card}(\{0, 1\}^n) = 2^n$, ceci démontrera la propriété.

Pour montrer que deux ensembles ont le même cardinal, il faut montrer qu'ils ont le même nombre d'éléments. Pour cela, il faut trouver un moyen de faire correspondre un à un les éléments des deux ensembles (c'est-à-dire trouver une bijection entre ces deux ensembles). On commence par numéroter les éléments de E de 1 à n . On considère ensuite un sous-ensemble A de E , c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(E)$. On va faire correspondre A à un et un seul élément de $\{0, 1\}^n$ en l'encodant de la manière suivante (voir la Figure ci-dessous) : on lui associe le n -uplet tel que la i -ième coordonnée vaut 1 si le i -ième élément de E appartient à A , et 0 sinon. Ce n -uplet est bien un élément de $\{0, 1\}^n$, et à tout sous-ensemble A de E correspond un n -uplet de $\{0, 1\}^n$ construit comme expliqué juste avant. Réciproquement, ce même encodage permet de faire correspondre à tout n -uplet de $\{0, 1\}^n$ un et un unique sous-ensemble de E . Nous avons donc établi une bijection, comme attendu.



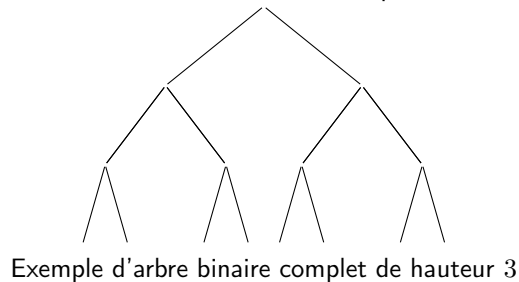
(Exemple de l'encodage dans un cas simple : cas de $\{1, 2, 3\}$)

Partie A	$1 \in A ?$	$2 \in A ?$	$3 \in A ?$	Encodage
$\emptyset$	×	×	×	$(0, 0, 0)$
$\{1\}$	✓	×	×	$(1, 0, 0)$
$\{2\}$	×	✓	×	$(0, 1, 0)$
$\{3\}$	×	×	✓	$(0, 0, 1)$
$\{1, 2\}$	✓	✓	×	$(1, 1, 0)$
$\{1, 3\}$	✓	×	✓	$(1, 0, 1)$
$\{2, 3\}$	×	✓	✓	$(0, 1, 1)$
$\{1, 2, 3\}$	✓	✓	✓	$(1, 1, 1)$

□

Application 19

Déterminer le nombre total de chemins dans un arbre binaire complet de hauteur n (voir la Figure suivante).



Exercice conseillé : 14

4 – Permutations, combinaisons, arrangements – le coefficient binomial

Avant de lire cette section, allez voir la vidéo [Deux \(deux ?\) minutes pour... les nombres de Catalan](#) de El jj sur YouTube.

Alice et Bob sont assignés au rangement de la bibliothèque de la classe. Ils se demandent combien il y a de manières de ranger leurs n livres.

Ranger les livres, c'est choisir l'ordre dans lequel Alice et Bob vont placer les livres sur l'étagère. Ils commencent donc par placer un premier livre : ils ont n choix de livres pour le premier emplacement. Pour le deuxième, ils n'ont plus que $n - 1$ choix, puisqu'un livre est déjà rangé. Pour le troisième, ils n'ont plus que $n - 2$ choix, puisque 2 livres

sont déjà rangés. Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que 2 choix pour l'avant dernier emplacement, et 1 seul choix pour le dernier. Il y a donc au total $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ choix pour le rangement des n livres. Ce produit décroissant est un outil très important en mathématiques, qui donne lieu à la définition suivante :

Définition 20**Factorielle**

Pour un entier naturel n , on appelle *factorielle de n* (ou « n factorielle») l'entier naturel défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

À l'aide de cette notion, nous pouvons formaliser le problème du rangement de livres :

Définition 21**Permutation**

Soit E un ensemble de cardinal n .

On appelle *permutation de E* une manière d'ordonner les éléments de E .

Proposition 22**Nombre de permutations**

Un ensemble à n éléments possède $n!$ permutations.

L'idée de la démonstration est strictement la même que le cas du rangement des livres expliqué ci-dessus.

Exercices conseillés : 1, 2, 6, 11, 17

Corsons l'exercice : Alice et Bob ont toujours n livres à ranger, mais cette fois l'étagère est trop petite et ils ne peuvent y ranger qu'un nombre $k \leq n$ de livres. Combien y a-t-il maintenant de manières de ranger les livres ? Alice propose de procéder comme précédemment : il y a n possibilités pour le premier emplacement, puis $n-1$ pour le deuxième, jusqu'au k -ième emplacement pour lequel il y a $n-(k-1)$ choix, puisque $k-1$ livres ont déjà été rangés. Il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ possibilités de rangement. Remarquons que nous pouvons réécrire ce nombre avec des factorielles : en effet,

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) &= n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Définition 23**Arrangements**

Soit E un ensemble fini de cardinal n , soit $k \leq n$.

On appelle *k -arrangement de E* un k -uplet d'éléments distincts de E .

Proposition 24**Nombre d'arrangements**

Le nombre de k -arrangements de n éléments est $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Remarque 25

Attention, dans la notation, le n est en bas et le k est en haut ! La notation A_n^k se lit « A n k ».

Exercices conseillés : 7, 15, 16, 18, 28

Bob propose une autre méthode que celle d'Alice : il choisit d'abord k livres parmi les n , puis comme précédemment il range les k livres. On sait déjà qu'il y a $k!$ possibilités pour le rangement de k -livres, mais combien y a-t-il de manières de choisir k livres parmi n ? Ce problème motive ce qui suit.

Combinaisons**Définition 26**

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

On appelle k -combinaison de E une partie de E de cardinal k .

Coefficient binomial**Définition 27**

On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k , et on lit « k parmi n », le nombre de k -combinaisons d'un ensemble à n éléments.

Autrement dit, c'est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n . Les nombres de la forme $\binom{n}{k}$ sont appelés *coefficients binomiaux*.

Exemple 28

Comme vu dans un exemple précédent, $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. On peut alors trouver les coefficients binomiaux pour $n = 3$: il y a 1 partie à 0 éléments et 1 partie à 3 éléments, donc $\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$, il y a 3 parties à 1 élément et 3 parties à 2 éléments, donc $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$.

Remarque 29

La remarque que voici est une propriété importante que l'on appelle parfois "convention" : pour tout $k < 0$, on a $\binom{n}{k} = 0$: en effet, un ensemble (à n éléments) ne possède pas de parties avec un nombre négatif d'éléments... Il y a donc 0 choix de parties à $k < 0$ éléments.

De même, pour tout $k > n$, on a $\binom{n}{k} = 0$: en effet, les parties d'un ensemble à n éléments ont au plus n éléments. Il y a donc 0 choix de parties à $k > n$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Les méthodes d'Alice et Bob sont équivalentes, donc elles permettent d'exprimer un même nombre de deux manières différentes, ce qui nous permettra de trouver une formule pour $\binom{n}{k}$. Grâce à Alice et Bob, on sait que

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!. \text{ Nous avons ainsi l'expression donnée dans la propriété suivante.}$$

Coefficient binomial**Propriété 30**

Soient k et n deux entiers naturels.

► Si $0 \leq k \leq n$, alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

► Sinon, lorsque $k < 0$ ou $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Exercices conseillés : 3, 4, 9, 33, 34, 36

5 – Propriétés du coefficient binomial, Triangle de Pascal

Les coefficients binomiaux sont un outil très puissant, qui est fort de nombreuses propriétés. Dans cette section, nous explorons justement quelques unes de ces propriétés.

Dans cette section, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 (sauf mention contraire), et k est un entier entre 0 et n (sauf mention contraire).

Symétrie du coefficient binomial

Propriété 31

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration. (non exigible, mais bonne à savoir!) Il est possible de démontrer cette propriété en comparant directement les expressions avec les factorielles :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Mais il est appréciable de savoir le visualiser : tout simplement, choisir k éléments parmi n , ça revient exactement à ne pas choisir $n-k$ éléments parmi n . $\square$

Valeurs extrémales

Propriété 32

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Démonstration. (non exigible, mais à comprendre!) Pour rappel, $\binom{n}{0}$ est le nombre de sous-ensembles de cardinal 0 d'un ensemble de cardinal n . Or $\emptyset$ est l'unique ensemble de cardinal 0, et $\emptyset$ est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. Ainsi, $\binom{n}{0} = 1$.

En ce qui concerne $\binom{n}{1}$, comme choisir un ensemble de cardinal 1 revient à choisir 1 élément, et comme il y a n possibilités pour cela, on a bien $\binom{n}{1} = n$.

Pour les deux autres coefficients binomiaux, la propriété de symétrie fait le travail, mais il est utile de s'habituer à renverser le point de vue d'une situation donnée. Détaillons donc les deux autres raisonnements.

Dans l'autre sens, $\binom{n}{n} = 1$ puisque la seule possibilité pour choisir un ensemble de cardinal n , c'est de choisir tous les éléments de l'ensemble, et il n'y a qu'une seule possibilité.

En ce qui concerne $\binom{n}{n-1}$, comme choisir un ensemble de cardinal $n-1$ revient à choisir 1 élément *qui ne sera pas dans ce sous-ensemble*, et comme il y a n possibilités pour cela, on a bien $\binom{n}{n-1} = n$. $\square$

Application 33

Montrer que $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Solution

Choisir un sous-ensemble de cardinal 2 d'un ensemble de cardinal n c'est choisir 2 éléments de cet ensemble : il faut donc choisir le premier élément x_1 (il y a n choix), puis le second élément x_2 distinct de x_1 (il y a $n - 1$ choix). Mais nous avons introduit un ordre artificiellement : en effet, nous aurions pu choisir x_2 en premier, puis x_1 en second. Nous avons donc compté 2 fois chaque sous-ensemble de cardinal 2, il faut donc diviser le résultat par 2. Ainsi, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. On utilise enfin la propriété de symétrie.

Exercices conseillés : 13, 15, 16, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 35, 37

La propriété suivante intervient souvent dans les récurrences qui impliquent des coefficients binomiaux.

Propriété 34

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration. (2 version exigibles) La rédaction des cas limites ($k < 0$ et $k \geq n$) qui rentrent dans le cadre des conventions est laissée en **exercice**. Concentrons-nous donc sur le cas **à savoir** où $0 \leq k < n$ (en particulier $0 \leq k+1 \leq n+1$).

Version par dénombrement : Soit $E = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. C'est un ensemble de cardinal $n+1$.

- 1► $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de parties de E à $k+1$ éléments.
- 2► Les parties de E à $k+1$ éléments se divisent en deux groupes :
 - Les parties qui ne contiennent pas 1 : il y en a $\binom{n}{k+1}$ (il faut choisir les $k+1$ dans E sans prendre 1, c'est-à-dire $k+1$ éléments parmi n choix)
 - Les parties qui contiennent 1 : il y en a $\binom{n}{k}$ (il faut choisir les k autres dans E sans prendre 1 (puisqu'on l'a déjà pris), c'est-à-dire k éléments parmi n choix)

Il y a donc $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ possibilités.

Ainsi, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Version par calcul :

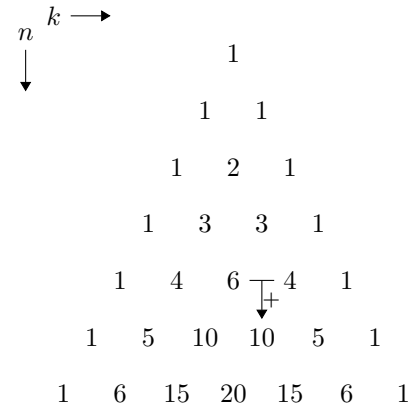
$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{(k+1)} \right] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{(k+1) + (n-k)}{(n-k)(k+1)} \right] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left[\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \right] = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

□

Remarque 35

On peut aussi interpréter la formule de Pascal dans le contexte d'un schéma de Bernoulli : d'un côté $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de manières d'avoir $k+1$ succès parmi $n+1$ épreuves. D'un autre côté, on peut distinguer deux cas : soit on gagne la première épreuve, auquel cas pour avoir $k+1$ succès au total, il nous en manque k parmi les n épreuves suivantes (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités), soit on échoue à la première épreuve, auquel cas il nous faut réussir $k+1$ épreuves parmi les n restantes (il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités).

Le triangle de Pascal est une manière de présenter les coefficients binomiaux, et même de les calculer de manière algorithmique, grâce à la formule de Pascal ci-dessus. En effet, chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus, comme illustré ci-contre.

**Remarque 36**

Cela marche aussi pour les 1 sur les côtés du triangle : en effet, le nombre manquant en dehors du triangle est en fait un 0, comme nous l'avons dit plus haut.

Remarque 37

On retrouve la propriété de symétrie du coefficient binomial avec la symétrie du triangle de Pascal.

Proposition 38**Somme des coefficients binomiaux**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration. (Exigible)

Soit E un ensemble à n éléments. On sait que $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E , contient 2^n élément.

Essayons de dénombrer $\mathcal{P}(E)$ d'une autre manière : choisir un élément de $\mathcal{P}(E)$, c'est choisir une partie de E . Quand on choisit une partie de E , elle est soit de cardinal 0, soit de cardinal 1, soit 2, etc.. jusqu'à n . Notons k le cardinal d'une sous partie de E . Ainsi, $0 \leq k \leq n$.

Combien y a-t-il de parties de E de cardinal k ? Pour choisir une telle partie, il faut choisir k éléments de E parmi les n au total : il y a donc $\binom{n}{k}$ manières de choisir une partie de cardinal k .

Finalement, le nombre de parties de E est égal au nombre de parties de cardinal 0, plus le nombre de parties de cardinal 1, plus le nombre de parties de cardinal 2, etc. jusqu'au nombre de parties de cardinal n . Cela correspond à la formule :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \quad \text{autrement dit} \quad 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

□

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Simplifier les écritures suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{A} \triangleright \frac{(n+1) \times n!}{(n+2)!} & \text{C} \triangleright \frac{(n+5)!}{(n+7)!} \\ \text{B} \triangleright \frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)} & \end{array}$$

Exercice 2

Écrire les nombres suivants à l'aide de factorielles :

$$\begin{array}{ll} \text{A} \triangleright \frac{1}{3 \times 2 \times 1} & \text{C} \triangleright 5 \times 4 \times 3 \times 2 \\ \text{B} \triangleright 8 \times 7 \times 6 & \text{D} \triangleright \frac{1}{13 \times 14} \end{array}$$

Exercice 3

Calculer à la main :

$$\begin{array}{cccc} \triangleright \binom{10}{1} & \triangleright \binom{64}{63} & \triangleright \binom{50}{1} & \triangleright \binom{6}{3} \\ \triangleright \binom{48}{47} & \triangleright \binom{20}{2} & \triangleright \binom{12}{2} & \triangleright \binom{8}{4} \\ \triangleright \binom{55}{0} & \triangleright \binom{30}{29} & \triangleright \binom{14}{14} & \triangleright \binom{11}{5} \end{array}$$

Exercice 4

En utilisant la formule du coefficient binomial, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 5

On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats.

Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

Exercice 6

Quel est le nombre de manières de placer cinq personnes sur un canapé comptant cinq places ?

Exercice 7

On note $A = \{b; i; e; n\}$.

- 1► Donner tous les arrangements à deux éléments de l'ensemble A .
- 2► Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble A ?

Exercice 8

Soient A et B deux ensembles disjoints tels que $\text{card}(A) = 11$ et $\text{card}(B) = 8$. Calculer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A \times B)$.

Exercice 9

On considère l'ensemble $F = \{a; b; c; d; e\}$.

- 1► Donner toutes les parties de F de cardinal 3.
- 2► En déduire la valeur de $\binom{5}{3}$.

Exercice 10

L'adresse IP est un numéro qui identifie chaque appareil connecté à internet. Une adresse de type IPv4 est composée de quatre nombres compris entre 0 et 255 inclus.

- 1► Est-ce suffisant pour identifier cinq milliards d'appareils de manière unique ?
- 2► De nouvelles adresses, dites IPv6, utilisant huit nombres hexadécimaux, voient le jour. Chaque nombre a 4 chiffres en hexadécimal, c'est-à-dire que chaque chiffre a 16 valeurs possibles. Combien d'adresses IPv6 existe-t-il ? Arrondir à 10^{10} .

Exercice 11

Vrai ou faux ? Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$$

Exercice 12

En informatique, un octet est composé de huit valeurs qui sont soit 0 soit 1.

Combien y a-t-il d'octets possibles ? Contenant exactement quatre 1 ?

Je comprends mon cours

Exercice 13

Quinze personnes se rencontrent : chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Combien y a-t-il de poignées de main échangées ?

Exercice 14

On considère l'ensemble $A = \{7 ; 8 ; 9\}$. Énumérer toutes les parties de A .

Exercice 15

Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. Combien de comités différents peut-elle élire ?

Exercice 16

Déterminer le nombre de façons de ranger quatre livres sur deux étagères.

Exercice 17

Au championnat du monde d'athlétisme, la finale de saut à la perche se joue entre huit athlètes. Combien y a-t-il de classements possibles sans ex-æquo ? Justifier.

Exercice 18

Dix coureuses participent à la finale du 100 mètres. Toutes arrivent et il n'y a pas d'ex-æquo. Combien y a-t-il de podiums possibles ? Justifier.

Exercice 19

Un lycée compte 150 élèves en terminale. Parmi eux, 90 sont des filles, dont 70 suivent la spécialité maths. Par ailleurs, 20 garçons ne la suivent pas. Déterminer le nombre de garçons qui suivent la spécialité maths en terminale.

Exercice 20

En France, les préfixes des numéros de téléphone sont attribués à des opérateurs téléphoniques. Orange possède tous les numéros commençant par 06 7 et 06 8. Combien cela représente-t-il de numéros ?

Exercice 21

Sur une grille de seize cases, on souhaite placer six pions, indiscernables les uns des autres. Une case ne peut comporter qu'un seul pion au maximum. De combien de manières peut-on procéder ?

Exercice 22

Combien existe-t-il de codes, de quatre chiffres, pour une carte bancaire ?

(Bonus : exclure les codes à quatre chiffres identiques, ou les suites de quatre chiffres consécutifs, croissantes ou décroissantes.)

Exercice 23

Au jeu du 421, on jette trois dés simultanément. Le but est de réaliser des combinaisons qui rapportent un certain nombre de points. Le plus grand score est obtenu avec un 4, un 2 et un 1, et le plus petit avec un 2, un autre 2 et un 1. Un brelan est l'obtention de 3 dés identiques.

- 1► De combien de façons peut-on obtenir le plus grand score ?
- 2► De combien de façons peut-on obtenir le plus petit score ?
- 3► De combien de façons peut-on obtenir un brelan ?

Exercice 24

Combien peut-on former d'anagrammes du mot « LAITUE » ? et du mot « FEMMES » ?

Objectif Bac

Exercice 25 (BAC 2024)

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

- 1► Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
- 2► Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
- 3► On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 . Déterminer la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 .

Exercice 26

Chaque semaine, un jeu de Loto sportif propose une grille avec 15 rencontres de football. Le jeu consiste à pronostiquer les résultats des 7 premiers matchs de la liste (jeu à 7) ou des 15 matchs (jeu à 15). Pour chaque match, trois réponses sont possibles : l'équipe 1 gagne (réponse « 1 »), les équipes 1 et 2 font match nul (réponse « N »), l'équipe 2 gagne (réponse « 2 »). Le parieur coche une seule des trois cases pour chaque match.

- 1► De combien de façons différentes peut-on remplir une grille pour le jeu à 7 ? pour le jeu à 15 ?
- 2► Pour le jeu à 7, on « gagne » à partir de 6 réponses exactes et pour le jeu à 15 à partir de 12. Combien y a-t-il de grilles gagnantes pour le jeu à 7 ? pour le jeu à 15 ?
- 3► En répondant au hasard, quelles sont les probabilités de gagner au jeu à 7 ? Et au jeu à 15 ? Arrondir au premier chiffre significatif.

Exercice 27

On constitue une main de 8 cartes à partir d'un jeu de 32 cartes. Combien peut-on faire de mains contenant au moins une carte de pique ?

Exercice 28

On dispose des chiffres "0", "1", "2" et "3".

- 1► Combien de nombres à quatre chiffres distincts peut-on construire à partir de ces quatre chiffres :

- a► en autorisant le "0" en première position ?
- b► en interdisant le "0" en première position ?

- 2► Combien de nombres à trois chiffres distincts peut-on constituer à partir de ces quatre chiffres :

- a► en interdisant le chiffre "0" en première position ?
- b► en autorisant le chiffre "0" en première position et en obligeant le nombre obtenu à être multiple de 3 ?

Exercice 29

L'entrée d'un immeuble est commandée par un digicode qui possède 10 chiffres et 4 lettres. Un code comporte cinq éléments : trois chiffres suivis de deux lettres.

- 1► Combien y a-t-il de codes possibles ?
- 2► Combien de codes commencent par le chiffre 0 ?
- 3► Combien de codes commencent par trois chiffres identiques ?
- 4► Combien de codes ont deux lettres identiques ?

Exercice 30

Lors de l'oral d'un concours, un candidat choisit deux sujets aléatoirement dans une banque publique de 80 sujets.

- 1► Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- 2► Dans le cas où le candidat a préparé 10 des 80 sujets, quel est le nombre de tirages possibles comportant au moins l'un des sujets qu'il a préparé ?
- 3► Quel est le nombre minimal de sujets qu'il aurait dû préparer pour que plus de neuf tirages sur dix contiennent au moins l'un des sujets révisés ?

Exercice 31

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

- 1► Combien de façons y a-t-il de constituer ce groupe ?
- 2► Combien y en a-t-il ne comportant que des hommes ?
- 3► Combien y en a-t-il ne comportant que des personnes de même sexe ?
- 4► Combien y en a-t-il comportant au moins une femme et au moins un homme ?

Vers le supérieur

Exercice 32

Soit $A = \{M; A; T; H; S\}$ et $B = \{0; 1\}$.

- 1► Énumérer tous les éléments de $A \times B$.
- 2► En déduire $\text{card}(A \times B)$.

Exercice 33

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2n}{k}$ est maximal pour $k = n$. (Indication : étudier le quotient de $\binom{2n}{k}$ par $\binom{2n}{n}$.)

Exercice 35

Un sac contient cinq jetons blancs et trois noirs. On tire trois jetons simultanément dans le sac. Quelle est la probabilité de tirer trois jetons de la même couleur ?

Exercice 36

Soient k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k < n$. Montrer que :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Exercice 37

Le sélectionneur de l'équipe de France de football doit choisir les onze joueurs qui débiteront un match. Il a 23 joueurs à sa disposition.

- 1► Sans prendre en compte le poste de chaque joueur, combien d'équipes peut-il former ?
- 2► Parmi les 23 joueurs, on trouve trois gardiens, huit défenseurs, cinq milieux de terrain et sept attaquants. Sachant que l'équipe sera composée d'un gardien, de quatre défenseurs, de trois milieux de terrain et de trois attaquants, combien d'équipes le sélectionneur peut-il former avec ces nouvelles contraintes ?

Exercice 38

Soient A et E deux ensembles finis tels que $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble $E \setminus A$, parfois noté $\overline{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E , et qui regroupe tous les éléments de E qui ne sont pas dans A .

- 1► Justifier que $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- 2► Justifier que $A \cup \overline{A} = E$.
- 3► Démontrer que :

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

Exercice 39

Soient A et B deux ensembles finis. La *différence* de A et B est l'ensemble noté $A \setminus B$ qui contient tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B .

- 1► Faire un dessin représentant deux ensembles A et B qui s'intersectent. Sur ce dessin, représenter $A \cap B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.
- 2► Que vaut $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$?
- 3► En déduire que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Exercice 40

Soient A et B deux ensembles finis. La *différence symétrique* de A et B est l'ensemble noté $A \Delta B$ qui contient tous les éléments qui sont soit dans A , soit dans B , mais pas dans les deux à la fois.

- 1► Faire un dessin représentant deux ensembles A et B qui s'intersectent. Sur ce dessin, représenter $A \Delta B$.
- 2► Justifier que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- 3► En déduire une définition de $A \Delta A$.
- 4► Démontrer que $\text{card}(A \Delta B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\text{card}(A \cap B)$.

4 Équations différentielles

Table des matières

1	Primitive d'une fonction	75
2	Équations différentielles	77
A	Définitions	77
B	Équations de type $y' = f$	78
C	Équations de type $y' = ay$	78
D	Équations de type $y' = ay + b$	79
E	Équations de type $y' = ay + f$	80
	Exercices	81

Programme

Primitives, équations différentielles

Cette section introduit la notion d'équation différentielle sur des cas simples. Les élèves découvrent en situation le concept d'équation dont l'inconnue est une fonction. L'équation $y' = f$ est l'occasion de définir la notion de primitive. Par définition, la recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation, ce qui permet de traiter les cas usuels par lecture inverse du tableau des dérivées. Il est utile d'admettre ici que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, résultat qui est démontré dans la section sur le calcul intégral. On note aussi que, pour certaines fonctions, on ne dispose pas de primitive explicite.

L'équation $y' = ay + b$ est l'occasion de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle. Lorsque $b = 0$, on remarque que la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions.

Pour travailler le concept d'équation différentielle, on peut donner d'autres exemples d'équations différentielles, dont on peut donner des solutions sans en faire de résolution complète : $y' = y^2$, $y'' + \omega^2 y = 0$. Aucune connaissance n'est exigible sur ces exemples.

Contenus

- ▶ Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- ▶ Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- ▶ Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- ▶ Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues

- ▶ Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- ▶ Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- ▶ Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstrations

- ▶ Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Approfondissements possibles

- Autres exemples d'équations différentielles, éventuellement en lien avec une modélisation, par exemple l'équation logistique.

Exemple d'algorithme

- Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$.

Histoire des mathématiques

Le calcul infinitésimal, qui contient les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux.

On trouve des anticipations du calcul intégral chez Archimède (longueur du cercle, quadrature de la parabole, cubature des solides), Liu-Hui (volume d'un cylindre), Ibn al-Haytham (volume d'un paraboloïde) puis, bien plus tard, chez Grégoire de Saint-Vincent (méthode d'exhaustion) ou encore chez Galilée ou Cavalieri (méthode des indivisibles).

Les procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé le logarithme et les fonctions trigonométriques illustrent les liens entre discret et continu et fournissent une source féconde d'activités. On peut mentionner les méthodes de Ptolémée et d'Al Kashi, la méthode de Briggs ou l'utilisation de développements en série. Ces travaux, dont certains ont été anticipés hors d'Europe, par exemple en Inde par l'école du Kerala, indiquent une perception intuitive claire des questions de convergence.

Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique mathématique au XVII^e siècle. Parmi les initiateurs, Fermat, Huygens, Pascal et Barrow reconnaissent que le problème des aires (le calcul intégral) est le problème inverse de celui des tangentes (la dérivation) ; ce thème peut être abordé à partir des travaux sur la quadrature de l'hyperbole.

Les travaux de Newton et Leibniz révèlent deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal. La justification de telles méthodes nécessitait une mise au point de la notion de limite. Des fondations solides sont proposées dans le Cours d'Analyse de Cauchy (1821, 1823), qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse. Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques elles-mêmes, se structurent notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) et illustrent là encore les ponts entre le discret et le continu.

Dans tout le chapitre, I est un intervalle et f est une fonction *continue* sur I .

1 – Primitive d'une fonction

Primitive d'une fonction

Définition 1

Une *primitive* de f est une fonction F telle que $F' = f$.

Remarque 2

Trouver une primitive de f , c'est donc trouver une fonction dont la dérivée est f . À ce titre, les mathématiciens anglophones parlent d'« anti-dérivée »...

Exemple 3

Soit $f : x \mapsto 2x + 3$. La fonction $F : x \mapsto x^2 + 3x - 1$ en est une primitive : en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$, et donc $F' = f$.

Application 4

Dans chaque cas, dire si F est une primitive de f :

a► $f(x) = x$ et $F(x) = \frac{x^2}{2}$

b► $f(x) = e^x(x + 1)$ et $F(x) = xe^x$

Théorème 5

Théorème fondamental de l'analyse : existence d'une primitive

Toute fonction continue ^a sur un intervalle admet au moins une primitive.

a. C'est-à-dire dont on peut tracer la courbe sans lever le crayon.

Ce théorème sera démontré dans le chapitre 12 sur le calcul intégral. La continuité est l'objet du chapitre 8.

Remarque 6

Ce théorème d'existence ne donne pas d'expression pour une éventuelle primitive. Mieux encore : il existe des fonctions dont il est mathématiquement impossible d'exprimer les primitives, bien qu'elles existent. L'exemple le plus célèbre est la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$.

Lemme 7

Si F et G sont deux primitives de f , alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $F = G + c$.

Démonstration. (Exigible)

Soient F et G deux primitives de f . On rappelle que f est supposée continue sur l'intervalle I . Posons $\varphi = F - G$, montrons que φ est une fonction constante.

En tant que primitives, F et G sont dérivables, donc φ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I , et $\varphi' = F' - G' = f - f = 0$. Ainsi la dérivée de φ est nulle *sur un intervalle*, donc φ est constante : il existe donc $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$, $\varphi(x) = c$, c'est-à-dire $F(x) = G(x) + c$. $\square$

Exemple 8

Soit $f : x \mapsto x$. Les fonctions $F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $G : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 5$ sont toutes deux des primitives de f .

Théorème 9

Théorème fondamental de l'analyse : forme des primitives

Si F désigne une primitive de f , alors toutes les primitives de f sont de la forme $F + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des primitives de f . Montrons que $\mathcal{P} = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$.

$\subseteq$: Soit G une primitive de f . D'après le lemme, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + c$. Donc $G \in \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$.

$\supseteq$: Soit $c \in \mathbb{R}$, notons $G = F + c$. Alors G est dérivable, et $G' = F' + 0 = f$, donc G est une primitive de f , donc $G \in \mathcal{P}$.

On a donc montré l'égalité de ces deux ensembles par double inclusion. $\square$

Application 10

Soit $f : x \mapsto 4x + 2$.

- a► Déterminer une primitive de f .
- b► En déduire l'ensemble des primitives de f .
- c► Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

Proposition 11

Primitives usuelles

Fonction	Primitive
$a \ (a \in \mathbb{R})$	ax
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$

Fonction	Primitive
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Remarque 12

Une bonne maîtrise du tableau des dérivées dispense d'apprendre le tableau des primitives. Les mêmes astuces de mémorisation marchent dans les deux sens : les fonctions puissance gagnent un degré, et ceci est valable pour toutes les puissances (sauf 0 et -1), même négatives, même non entières. L'astuce de rotation autour du cercle trigonométrique fonctionne également pour les primitives du cosinus et du sinus, en tournant dans l'autre sens. Là où *descendre* une fonction signifiait la dériver, la *monter* signifiait en prendre une primitive. Voir le chapitre de trigonométrie pour plus de détails.

Proposition 13**Primitives de fonctions composées**

Soient u et v deux fonctions dérivables.

Fonction	Primitive
$ku' \ (k \in \mathbb{R})$	ku
$u' + v'$	$u + v$
$u'u$	$\frac{u^2}{2}$
$u'u^n \ (n \neq -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$

Fonction	Primitive
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Pour $u > 0$, la fonction $\frac{u'}{u}$ admet $\ln(u)$ comme primitive (voir le chapitre 10).

Application 14

Dans chaque cas, déterminer une primitive de f .

a▶ $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$

c▶ $f(x) = x^2 e^{x^3}$

b▶ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

d▶ $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Exercices conseillés : 2, 9, 10, 11, 12

2 – Équations différentielles

A – Définitions

Définition 15**Équation différentielle**

Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent les dérivées de cette fonction.

Une *solution* d'une équation différentielle est une fonction qui satisfait cette équation différentielle.

Exemple 16

On note en général y l'inconnue d'une équation différentielle.

- ▶ Considérons l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = 5$ d'inconnue y . Remarquons que $f : x \mapsto 5x$ est solution de cette équation différentielle, car $f'(x) = 5$.
- ▶ Considérons l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = 3x^2 - 2$, d'inconnue y . La fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x$ est une solution de cette équation différentielle, car pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 2$.
- ▶ Considérons l'équation différentielle $y' = y^2$, d'inconnue y . La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en est une solution, car pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = f(x)^2$.

Remarque 17 (Abus de notation)

Remarquez comme dans le dernier point ci-dessus, on n'utilise pas de quantificateur sur x , contrairement aux deux autres points. En effet, la troisième équation différentielle est directement donnée comme une égalité entre fonctions : la *fonction* dérivée de y est égale à la *fonction* y^2 . *A contrario*, dans le deuxième point, $3x^2 - 2$ est un nombre dépendant du réel x , et y' est une fonction : ces objets n'ont pas la même nature, ils ne peuvent pas être égaux.

Malgré cela, lorsque le contexte est clair, on se permet l'abus d'écrire $y' = 3x^2 - 2$ sans écrire $y'(x)$ ni le quantificateur sur x . Dans les équations compliquées, cela permet d'améliorer la lisibilité. C'est un abus toléré et compréhensible, mais gardez en tête que ce n'est pas une bonne pratique.

Pour des raisons qui dépassent le cadre de ce cours, une équation différentielle a en général une infinité de solutions. Comme on le verra plus bas, il suffit d'en trouver une pour toutes les trouver (de même que pour les primitives). Cette étape intermédiaire porte un nom : on dit qu'on trouve une *solution particulière* – ce qui est un peu saugrenu, étant donné que fondamentalement, ladite solution n'a rien de particulier... C'est juste la première qu'on a trouvée.

Application 18

Relier les équations différentielles aux fonctions qui en sont solution.

e^{-x} •	• $y' + y = 0$
x^2 •	
$\sqrt{x+1}$ •	• $y' = -y^2$
$3e^{1-x}$ •	
$\frac{1}{x+1}$ •	• $2yy' = 1$

Exercices conseillés : 3, 13, 23

B – Équations de type $y' = f$ **Proposition 19**

Les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ d'inconnue y sont les primitives de f .

Application 20

Montrer que $g : x \mapsto xe^x$ est solution de $y' = y + e^x$.

Exercice conseillé : 4

C – Équations de type $y' = ay$

Ce type d'équation différentielle est appelé *équation différentielle linéaire homogène du premier ordre*.

Proposition 21

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}(y' = ay)$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

$$\mathcal{S}(y' = ay) = \{x \mapsto Ce^{ax} : C \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration. (Exigible)

Il s'agit de montrer l'égalité de deux ensembles : on procède par double inclusion.

$\subseteq$: Soit y une solution de l'équation différentielle. Par définition, $y' = ay$. Posons $g : x \mapsto y(x)e^{-ax}$: cette fonction est dérivable sur I (comme produit de fonctions dérivables sur I), et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x) \times (-a)e^{-ax} = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = e^{-ax} \times 0 = 0$$

Donc la dérivée de g est nulle sur l'intervalle I , donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, g(x) = C$, c'est-à-dire $y(x)e^{-ax} = C$, donc $y(x) = Ce^{ax}$.

$\supseteq$: Soit $C \in \mathbb{R}$. Notons $g : x \mapsto Ce^{ax}$. Alors g est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = C \times ae^{ax} = ag(x)$$

donc $g \in \mathcal{S}(y' = ay)$. □

Application 22

Considérons l'équation différentielle $(E) : 3y' + 5y = 0$.

- a► Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .
- b► Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = 2$.

Théorème 23**Principe de superposition**

Si f et g sont deux solutions de $y' = ay$, alors :

- $f + g$ est aussi solution
- kf ($k \in \mathbb{R}$) est aussi solution

Démonstration. Soient f et g deux solutions, soit $k \in \mathbb{R}$. Remarquons que $f + g$ et kf sont dérivables.

- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$
- $(kf)' = kf' = kaf = a(kf)$ □

Exercices conseillés : 5, 6, 24, 27

D – Équations de type $y' = ay + b$

Dans cette section, on suppose que $a \neq 0$. Ce type d'équation différentielle est appelé *équation différentielle linéaire du premier ordre*.

Théorème 24

Soit y_p une solution particulière de $(E) : y' = ay + b$, soit y_h une solution non nulle de $y' = ay$. Alors :

$$\mathcal{S}(y' = ay + b) = \{y_p + Cy_h : C \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration. Montrons que y est solution de (E) si, et seulement si $y - y_p$ est solution de $(E_0) : y' = ay$.

$\Rightarrow$: Supposons que y est solution de (E) . Alors :

$$(y - y_p)' = y' - y_p' = ay + b - (ay_p + b) = ay - ay_p = a(y - y_p)$$

donc $y - y_p$ est solution de (E_0) .

$\Leftarrow$: Supposons que $y - y_p$ est solution de (E_0) . Alors :

$$y' = (y - y_p + y_p)' = (y - y_p)' + y_p' = a(y - y_p) + ay_p + b = ay + b$$

donc y est solution de (E) .

Le théorème découle alors de la description des solutions de (E_0) donnée dans la section précédente. $\square$

Définition 25

Équation homogène

L'équation $(E_0) : y' = ay$ est appelée *équation homogène* associée à (E) .

Méthode 26

- 1► On cherche une solution particulière **constante** ($y_p(x) = k$) de (E) ,
- 2► On cherche les solutions de l'équation homogène,
- 3► L'ensemble des solutions est alors donné par le théorème.

Exemple 27

Considérons l'équation $(E) : y' = 2y + 1$.

- 1► Soit $y_p : x \mapsto k$ avec $k \in \mathbb{R}$ une solution de (E) . Alors $0 = y'_p = 2y_p + 1 = 2k + 1$, donc $k = -\frac{1}{2}$. On vérifie réciproquement que $x \mapsto -\frac{1}{2}$ est bien une solution particulière de (E) .
- 2► L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_0) : y' = 2y$ associée à (E) est $\{x \mapsto Ce^{2x} : C \in \mathbb{R}\}$.
- 3► Ainsi, $\mathcal{S}(E) = \left\{-\frac{1}{2} + Ce^{2x} : C \in \mathbb{R}\right\}$.

Application 28

Déterminer l'ensemble des solutions de $(E) : 2y' - y = 3$, puis l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Exercices conseillés : 7, 14, 15, 16, 25, 26

E – Équations de type $y' = ay + f$

Dans cette section, on suppose que $a \neq 0$.

Méthode 29

Le théorème et la méthode de la section précédente restent valables, excepté que la solution particulière n'est pas constante en général.

Remarque 30

Lorsque le second membre est polynomial, on cherche une solution particulière sous forme polynomiale, de 1 degré supérieur. Lorsque le second membre est exponentiel, on peut chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction affine fois une exponentielle identique.

Application 31

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = x^2$.

- 1► Justifier que $y_p : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution de (E) .
- 2► En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exercices conseillés : 8, 17, 18, 19, 20, 21, 22

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Dans chaque cas déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par l'expression donnée (on se souciera de l'intervalle).

1► $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

9► $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x^2}$

15► $f(x) = 2e^{2x}$

2► $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

10► $f(x) = \frac{3x-2}{x^3}$

16► $f(x) = e^{1-3x}$

3► $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$

11► $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$

17► $f(x) = -xe^{x^2-1}$

4► $f(x) = 2025$

12► $f(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$

18► $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

5► $f(x) = x - 1$

13► $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^3}$

19► $f(x) = \frac{e^x}{e+2}$

6► $f(x) = x^2 + 2$

14► $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$

20► $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7► $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$

21► $f(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

8► $f(x) = \frac{2}{x^2}$

Exercice 2

Déterminer la primitive F des fonctions suivantes (on se souciera de l'intervalle) vérifiant la condition donnée.

1► $f(x) = x^3 - 2x; F(0) = 2$

4► $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - x + \frac{1}{2}; F(-1) = -\frac{1}{2}$

2► $f(x) = -\frac{2}{x^2} + x - 1; F(1) = \frac{1}{2}$

5► $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}; F(0) = -\frac{1}{16}$

3► $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x/2}; F(0) = \frac{1}{2}$

6► $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}; F(2) = 2$

Exercice 3

Pour chaque équation différentielle, montrer que g en est une solution particulière.

1► $y' - 3y = 2e^{1-x}$ et $g(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x}$

3► $y' - 3y = 3x^2 + x + 2$ et $g(x) = -x^2 - x - 1$

2► $y' = y + x$ et $g(x) = -x - 1$

4► $y' = y + \cos(x)$ et $g(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1► $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3► $y' = \frac{1}{x^3}$

5► $y' = 3x^2 + 2x + 1$

7► $y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-5}}$

2► $y' = e^x$

4► $y' = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

6► $y' = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$

8► $y' = \frac{2x^3-3x^2+2}{x^5}$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1► $y' = 3y$

3► $y' = \frac{3}{2}y$

5► $4y' - 3y = 0$

8► $2y' - 3y = 8y + 4y'$

2► $y' = -2y$

4► $3y' + 2y = 0$

6► $y' + 2y = 0$

7► $3y' - y = 0$

9► $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 6

Déterminer l'unique solution de chaque équation différentielle satisfaisant la condition initiale donnée :

1► $y' = x - 1$ avec $y(1) = -1$

5► $2y' + 3y = 0$ avec $y(2) = 1$

2► $y' + \sqrt{2}y = 0$ avec $y(\sqrt{2}) = 1$

6► $5y' - 2y = 0$ avec $y(5) = e$

3► $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $y(0) = 5$

7► $y = -5y'$ avec $y(-2) = 1$

4► $y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 2$

8► $y + 2y' = 0$ avec $y(-2) = \frac{1}{2}$

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1► $y' = 2y + 3$

4► $\sqrt{2}y' = \sqrt{6}y - 1$

7► $y + 3y' = 2$

10► $y' + y = 3$

2► $2y' - y = 2$

5► $y' + 3y = 2$

8► $y' = 2$

3► $2y' + 3y = 2$

6► $y' = 2y + 1$

9► $y' = 5y + 2$

11► $4y' + y - 5 = 0$

Exercice 8

Montrer que $\phi : x \mapsto 3x - 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 9x$, puis déterminer toutes les solutions de (E).

Je comprends mon cours

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $I =]0; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2(x - 1)^2}.$$

1► Déterminer les réels a et b tels que, pour tout

$$x \in I, f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x - 1)^2}$$

2► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $I =] - 2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 2}{(x + 2)^2}.$$

1► Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout

$$x \in I, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x + 2)^2}.$$

2► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $I =] - 1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

1► Factoriser $x^2 - 1$.

2► Déterminer les réels a et b tels que, pour tout

$$x \in I, f(x) = \frac{a}{(x - 1)^3} + \frac{b}{(x + 1)^3}.$$

3► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $I =] - 1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

1► Démontrer que pour tout $x \in I$,

$$x^2 + 1 = \frac{1}{2}[(x + 1)^2 + (x - 1)^2].$$

2► En déduire les primitives de f sur I .

Exercice 13

Pour chaque fonction f , déterminer une équation différentielle dont f est solution.

- 1► $f : x \mapsto 0$ 3► $f : x \mapsto 3e^{-3x}$
 2► $f : x \mapsto e^x$ 4► $f : x \mapsto 3e^{-2x} - 4$

Exercice 14

- 1► Résoudre l'équation $5y' - y = 4$.
 2► Déterminer la solution qui prend la valeur 5 en -5 .
 3► On considère la fonction $f : x \mapsto -4 - e^{\frac{1}{5}x-1}$
 a► Vérifier que f satisfait l'équation différentielle et $f(5) = -5$.
 b► Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
 c► Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 15

Dans un environnement où la température est maintenue à 0°C , la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la température de cet objet. Un objet chauffé à 100°C voit sa température chuter à 45°C en 10 minutes. On note $T(t)$ la température (en $^\circ\text{C}$) de l'objet après t minutes.

- 1► Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction T (on rappelle que la (vitesse de) variation de T est représentée par T').
 2► Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle et satisfaisant les données de l'énoncé.
 3► En combien de temps la température de cet objet atteindra-t-elle 25°C ? Arrondir à la minute.

Exercice 16

Le nombre de bactéries B d'une culture passe de 600 à $t = 0$ à 1800 en 2 heures. On suppose que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes.

- 1► Trouver :
 a► Une équation avec des conditions qui traduisent le problème.
 b► Une formule qui permet de calculer le nombre de bactéries $B(t)$ à l'instant t .
 c► Le nombre de bactéries après 4 heures.
 d► Le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.
 2► Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il

donne le résultat attendu à la question 1d►.

```
t = 0
B = 600
while ... 12000:
    t = ...
```

Exercice 17

On considère les deux équations suivantes :

$$(E) : y' - \left(1 + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) y = \sin(x)$$

$$(E') : y' - y = 1$$

- 1► Donner l'ensemble des solutions de (E') .
 2► Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f(x) = g(x) \sin(x).$$

Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si g est solution de (E') .

- 3► Déterminer l'unique solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 18

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 3y = e^{3x}$$

- 1► Résoudre l'équation homogène associée.
 2► Vérifier que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = xe^{3x}$ est une solution particulière de (E) .
 3► En déduire la forme générale des solutions de (E) .
 4► Déterminer la solution y de (E) telle que :

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = e.$$

Exercice 19

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 3y = e^{2x}$$

- 1► Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ est une solution particulière de (E) .
- 2► Résoudre l'équation (E) .
- 3► Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Objectif Bac**Exercice 20 (BAC 2010)****Partie I**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

- 1► Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = xe^{-x}.$$

Vérifier que u est solution de (E) .

- 2► On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
Résoudre (E') sur $\mathbb{R}$.
- 3► En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
- 4► Déterminer l'unique solution g de (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.

On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}$$

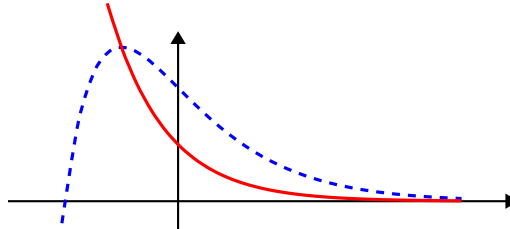
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal, et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h .

On a représenté en annexe les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_k$ sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

- 1► Sur le graphique en annexe, identifier la courbe $\mathcal{C}$.
- 2► En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe l'unité de chaque axe.

Annexe**Exercice 21 (BAC 2024)**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 1► Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
- 2► On considère l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

- 3► En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 4► Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Vers le supérieur

Exercice 22

Résoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une solution particulière ϕ de la forme indiquée.

- 1► $2y' + y = x + 1$ et $\phi(x) = mx + p$
- 2► $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ et $\phi(x) = ax^2 + bx + c$
- 3► $y' + y = (3 - 2x)e^x$ et $\phi(x) = (mx + p)e^x$

Exercice 23 (Vrai/faux)

La solution de l'équation différentielle $y' - 4y = 0$ qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = y_0 + e^{4(x-x_0)}$.

Exercice 24 (Vrai/faux)

- 1► La fonction constante égale à 0 est solution de toutes les équations de la forme $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$.
- 2► Les solutions non nulles de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel strictement positif, ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 25

Lors de la chute d'un objet de masse m sur Terre, une force de frottement due à la résistance de l'air s'applique à cet objet. L'intensité de cette force peut être considérée proportionnelle à la vitesse instantanée v de l'objet.

L'objet est lâché au temps $t = 0$. La chute étant verticale, le principe fondamental de la dynamique de Newton permet d'écrire la relation :

$$m \times a(t) = m \times g - k \times v(t)$$

où la fonction a représente l'accélération de l'objet en fonction du temps t , g est la constante qui désigne l'accélération de la pesanteur et k est une constante positive. On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $a(t) = v'(t)$.

- 1► Déterminer une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y + \beta$ vérifiée par v où α et β sont des constantes réelles.
- 2► Résoudre cette équation sur $[0; +\infty[$, puis exprimer v en fonction de t en considérant que la vitesse initiale de l'objet est nulle.

Exercice 26

Une colonie de 2 000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t \geq 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle :

$$(E) : N'(t) = 3N(t) - 0,005(N(t))^2$$

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de se ramener à la résolution d'une équation différentielle plus simple à résoudre.

On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$.

- 1► On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction g par $g(t) = \frac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.
- 2► Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de :

$$(F) : y' = -3y + 0,005.$$

- 3► Résoudre (F) .
- 4► Résoudre (E) .
- 5► a► Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale de l'énoncé.
b► Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures (arrondir à l'unité).

Exercice 27

On note $N(t)$ le nombre d'éléments radioactifs dans un échantillon à un instant t , et N_0 la quantité initiale. La loi de désintégration radioactive stipule l'existence d'une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $t > 0$,

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

Le temps de demi-vie d'une espèce radioactive est la durée $t_{\frac{1}{2}}$ nécessaire pour que le nombre d'éléments radioactifs soit réduit de moitié par rapport à l'instant initial.

Montrer que $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

5 Limites de suites

Table des matières

1	Convergence d'une suite	88
A	Limite finie	88
B	Limite infinie	90
2	Opérations sur les limites	91
3	Limites et comparaison	93
A	Théorèmes de comparaison et d'encadrement	93
B	Suites majorées, minorées, bornées	95
C	Convergence des suites monotones	96
	Exercices	98

Programme

Contenus

- ▶ La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- ▶ La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- ▶ Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- ▶ Opérations sur les limites.
- ▶ Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- ▶ Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- ▶ Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- ▶ Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- ▶ Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- ▶ Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- ▶ Limite de (q^n) , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- ▶ Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- ▶ Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Exemples d'algorithme

- ▶ Recherche de seuils.
- ▶ Recherche de valeurs approchées de π , e , $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\ln(2)$, etc.

Approfondissements possibles

- ▶ Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- ▶ Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- ▶ Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron.

Tôt dans l'histoire, les mathématiciens ont ressenti le besoin de discuter de ce qu'il se passe « au bout d'un temps infini », par exemple Archimède, né en -287 avec sa méthode d'exhaustion, selon laquelle si on calcule le volume d'un solide en faisant des approximations de plus en plus précises, alors on finira par trouver le volume exact de ce solide ; ou encore avec les paradoxes de Zénon, souvent ancrés dans les subdivisions de plus en plus fines de certaines quantités. Ce n'est cependant qu'au XVII^e siècle, avec Newton et Leibniz, que la notion de limite a commencé à être étudiée, sous le regard nouveau du calcul différentiel. Il a fallu attendre le XIX^e siècle pour que cette notion soit rigoureusement formalisée par Cauchy et Weierstrass.

Dans tout ce chapitre, u , v et w sont des suites.

1 – Convergence d'une suite

A – Limite finie

Définition 1

Limite finie d'une suite

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que u *converge vers* ℓ , ou admet pour *limite* ℓ , ou encore *tend vers* ℓ , si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Autrement dit ℓ est la limite de u si u devient et reste aussi proche que l'on veut de ℓ .

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*. Sinon, on dit qu'elle est *divergente*.

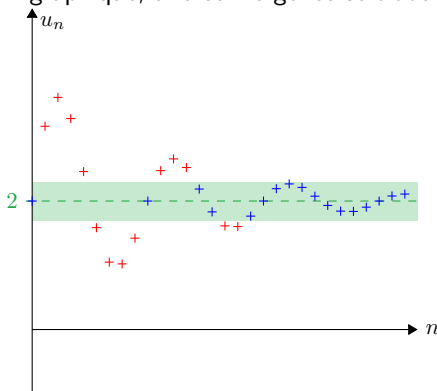
Remarque 2

Formellement, u converge vers ℓ si, et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.
(Remarque : ces inégalités se réécrivent $u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$, ou encore $|u_n - \ell| < \varepsilon$)

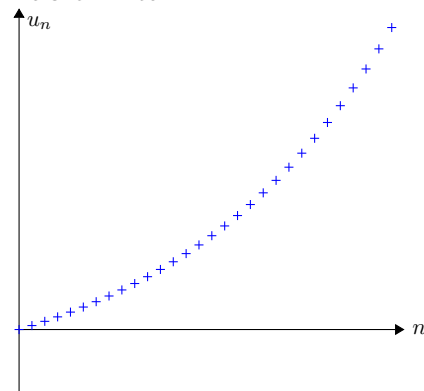
En particulier, c'est une manière de démontrer que u converge vers ℓ .

Exemple 3 (Sur des graphiques)

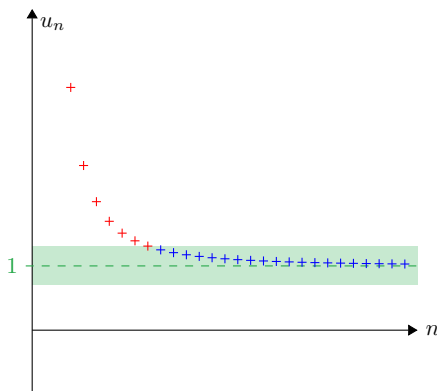
Sur un graphique, une convergence se traduit par une stabilisation vers la limite :



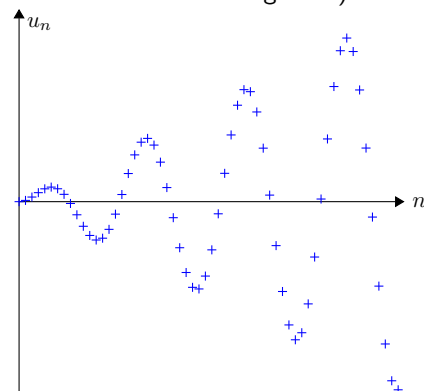
Semble converger vers $\ell = 2$.



Ne semble pas converger (semble devenir arbitrairement grande)



Semble converger vers $\ell = 1$



Ne semble pas converger (ne semble pas se concentrer à un endroit précis)

Exemple 4 (Avec une formule)

Soit u définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. Plus n devient grand, plus n^2 devient grand, et donc plus $\frac{1}{n^2}$ devient proche de 0 (on divise 1 en de plus en plus de parts). Donc plus n devient grand, plus u_n se rapproche de 1 : ainsi, u tend vers 1.

Théorème 5**Unicité de la limite**

Une suite convergente n'admet qu'une seule et unique limite.

Pour les curieux, voici la démonstration (non exigible).

Démonstration. Supposons que u converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2 . L'objectif est de montrer que nécessairement $\ell_1 = \ell_2$. Par l'absurde, supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$. Quitte à échanger leurs noms, supposons que $\ell_1 < \ell_2$. Posons $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$. Comme u tend vers ℓ_1 , il existe un rang n_1 à partir duquel $\ell_1 - \varepsilon < u_n < \ell_1 + \varepsilon$. Comme u tend également vers ℓ_2 , il existe un rang n_2 à partir duquel $\ell_2 - \varepsilon < u_n < \ell_2 + \varepsilon$. Notons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_0$, on a donc :

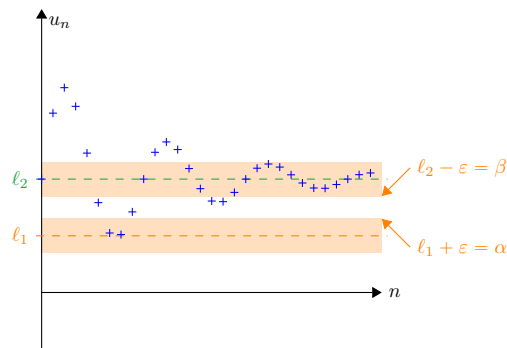
$$\triangleright u_n < \ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{\ell_2 + 2\ell_1}{3}.$$

Notons α ce dernier nombre.

$$\triangleright u_n > \ell_2 - \varepsilon = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{2\ell_2 + \ell_1}{3}.$$

Notons β ce dernier nombre.

Remarquons que $3(\beta - \alpha) = (2\ell_2 + \ell_1) - (\ell_2 + 2\ell_1) = \ell_2 - \ell_1 > 0$, donc $\beta > \alpha$. On a montré que $u_n > \beta > \alpha > u_n$: un nombre ne peut pas être strictement plus grand que lui-même, c'est absurde.



Résumé en dessin : u ne peut pas se rapprocher à la fois de ℓ_1 et de ℓ_2 s'ils sont distincts.

□

Proposition 6**Limites finies usuelles**

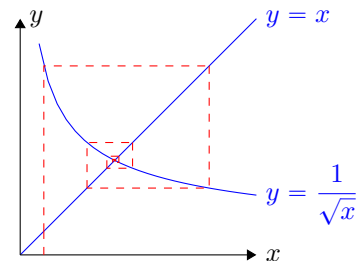
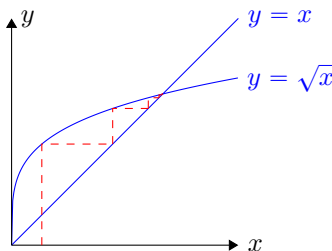
$$\triangleright \text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\triangleright \text{Pour } -1 < q < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

Remarque 7 (Convergence et représentation graphique des suites récurrentes)

Pour des raisons qui seront détaillées dans le chapitre 8, la représentation graphique des suites récurrentes peut donner un indice sur leur possible limite, dans certains cas.



B – Limite infinie

Limite infinie

Définition 8

- On dit que u admet comme limite $+\infty$, ou *tend vers* $+\infty$, ou *diverge vers* $+\infty$, si elle dépasse n'importe quel seuil arbitrairement grand à partir d'un certain rang, autrement dit si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, u_n > A$$

- On dit que u admet comme limite $-\infty$, ou *tend vers* $-\infty$, ou *diverge vers* $-\infty$, si elle passe en-dessous de n'importe quel seuil arbitrairement petit à partir d'un certain rang, autrement dit si :

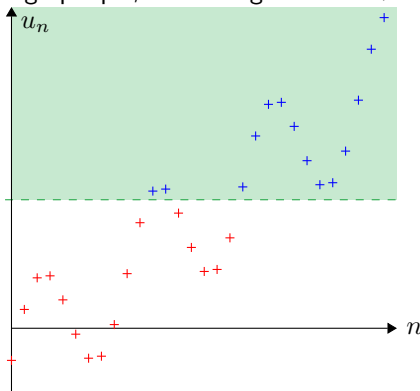
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, u_n < A$$

Exemple 9

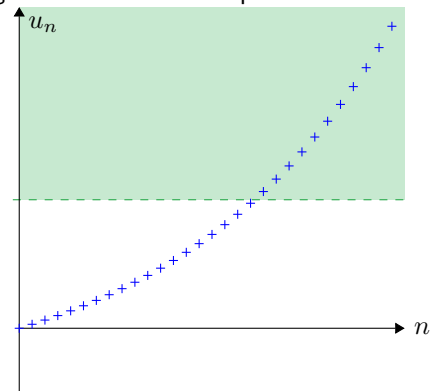
La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$. De même pour les suites arithmétiques de raison positive.

Exemple 10 (Sur des graphiques)

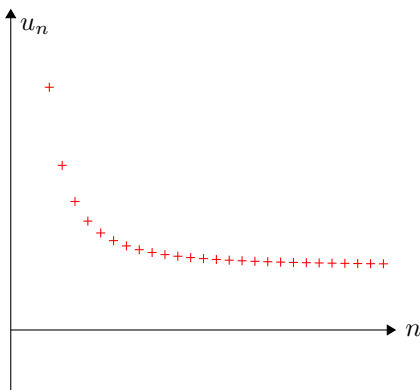
Sur un graphique, une divergence vers $+\infty$ se traduit par une augmentation ininterrompue :



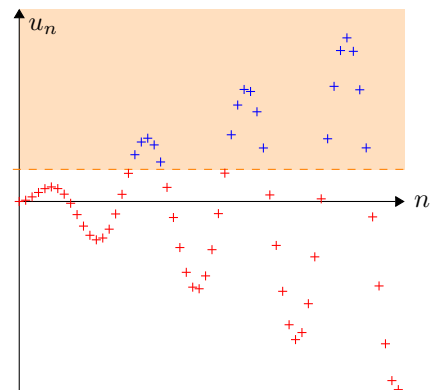
Semble diverger vers $+\infty$.



Semble diverger vers $+\infty$



Ne devient pas arbitrairement grande ou petite



Ne semble pas diverger vers $\pm\infty$: elle devient aussi grande/petite que l'on veut, mais elle ne reste pas au-dessus/en-dessous du seuil, elle est toujours tantôt au-dessus tantôt en-dessous

Proposition 11**Limites infinies usuelles**

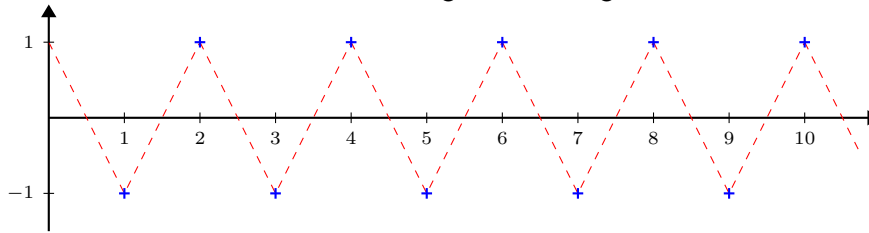
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$
- Pour $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Cette proposition est admise, sauf le dernier point qui est à connaître. Elle sera donnée plus tard dans ce chapitre, dans la section Limites et comparaison.

Exemple 12

Dans les Exemples 3 et 10, la quatrième suite n'est ni convergente (vers une limite finie), ni divergente vers une limite infinie : elle est divergente tout court.

Un exemple classique à connaître est le suivant : la suite u définie pour tout n par $u_n = (-1)^n$ alterne une fois sur deux entre les valeurs 1 et -1 , donc n'est ni convergente, ni divergente vers une limite infinie.

**2 – Opérations sur les limites**

Supposons que u converge vers 1 et que v converge vers 3. On imagine bien que $u + v$ converge vers $1 + 3 = 4$.

Prenons maintenant $u_n = n$ et $v_n = n^2$. Elles divergent toutes deux vers $+\infty$, et conformément à l'intuition, $u + v$ diverge également vers $+\infty$, ce qu'on pourrait écrire $+\infty + (+\infty) = +\infty$.

Prenons $u_n = n$ et $v_n = 1 - n$. On voit facilement que u diverge vers $+\infty$ et que v diverge vers $-\infty$. On aurait envie d'écrire que $u + v$ converge vers $+\infty + (-\infty)$ mais... qu'est-ce que ça signifie ? Ici, clairement, $u_n + v_n = 1$ donc $u + v$ converge vers 1. Mais si on avait pris $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, cette fois-ci on constate que $u + v$ diverge vers $+\infty$.

Définition 13**Formes indéterminées**

Une *forme indéterminée* (FI) est une situation dans laquelle on ne peut pas déterminer directement une limite avec une opération. Il y en a 4, que l'on peut symboliser ainsi :

$$\begin{array}{cccc} \text{► } \infty - \infty & \text{► } 0 \times \infty & \text{► } \frac{0}{0} & \text{► } \frac{\infty}{0} \end{array}$$

Attention, ces écritures ne sont pas correctes, elles ne doivent jamais apparaître sur une copie !

Proposition 14**Limite d'une somme**

$\begin{array}{c} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \end{array}$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Proposition 15**Limite d'un produit**

$\begin{smallmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \end{smallmatrix}$	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
0	0	0	FI
$\ell' \neq 0$	0	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$

(Le signe dans les cases en vert est déterminé par la règle des signes.)

Proposition 16**Limite d'un quotient**

$\begin{smallmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \end{smallmatrix}$	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
0	FI	FI	FI
$\ell' \neq 0$	0	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	FI

(Le signe dans les cases en vert est déterminé par la règle des signes.)

Ces propositions sont admises.

Exemple 17

Avec une rédaction sur-détaillée (inutile dans une copie, sauf si demandé explicitement) :

- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ par somme, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty$.
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$ (par somme, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + 3 = +\infty$ (par somme, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(n^2 + 3) = +\infty$ par produit.
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 - 3 = -\infty$ (par somme et produit, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$), et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3 = -3$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = 0$ par quotient.

Avec une rédaction suffisante pour une copie :

- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty$ par somme
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + 3 = +\infty$ par somme, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(n^2 + 3) = +\infty$ par produit.
- ▶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 - 3 = -\infty$ par somme et produit, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = 0$ par quotient.

Méthode 18 (Lever une forme indéterminée)

Dans une situation de forme indéterminée, on factorise l'expression (dans le cas d'un quotient, le numérateur et le dénominateur) par le terme « qui va le plus vite vers $\pm\infty$ », dit *prépondérant* : typiquement, par le terme de plus haut degré (du plus « lent » au plus « rapide », cela donne $\sqrt{n}$ puis n puis n^2 puis $n^3 \dots$).

Exemple 19 (Formes indéterminées)

- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} -7n^2 + 5n + 3$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». Le terme de plus haut degré est le terme en n^2 ; on factorise par n^2 :

$$-7n^2 + 5n + 3 = n^2 \left(-7 + \frac{5n}{n^2} + \frac{3}{n^2} \right) = n^2 \left(-7 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -7 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} = -7 \neq 0$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -7n^2 + 5n + 3 = -\infty$.

- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + n}{n^3 + 4n}$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Les termes de plus haut degré aux numérateur et dénominateur sont les termes en n^2 et en n^3 ; on factorise et on simplifie :

$$\frac{5n^2 + n}{n^3 + 4n} = \frac{n^2 \left(5 + \frac{1}{n} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{n \left(1 + \frac{4}{n} \right)}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{1}{n} = 5$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{4}{n} \right) = +\infty$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + n}{n^3 + 4n} = 0$.

- Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n^2 - 2n}{3n^2 + 7}$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Les termes de plus haut degré aux numérateur et dénominateur sont les termes en n^2 ; on factorise et on simplifie :

$$\frac{8n^2 - 2n}{3n^2 + 7} = \frac{n^2 \left(8 - \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{7}{n^2} \right)} = \frac{8 - \frac{2}{n}}{3 + \frac{7}{n^2}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 - \frac{2}{n} = 8$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{7}{n^2} = 3 \neq 0$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8n^2 - 2n}{3n^2 + 7} = \frac{8}{3}$.

Exercice conseillé : 1

3 – Limites et comparaison

A – Théorèmes de comparaison et d'encadrement

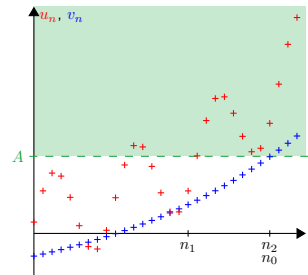
Théorème 20**Théorème de comparaison – minoration et majoration**

Si à partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. (Exigible)

Montrons le premier point. Supposons qu'à partir d'un certain rang n_1 , $u_n \geq v_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. La seconde hypothèse donne l'existence d'un rang n_2 à partir duquel $v_n > A$. En particulier, à partir du rang $n_0 = \max(n_1; n_2)$, $u_n \geq v_n > A$. Donc pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$, avec A quelconque : cela montre bien que u diverge vers $+\infty$.



Exemple 21

Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n$: pour tout $n \geq 0$, $(-1)^n \geq -1$, donc $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.

Théorème 22

Croissance de la limite

Si (u_n) et (v_n) convergent, et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Théorème 23

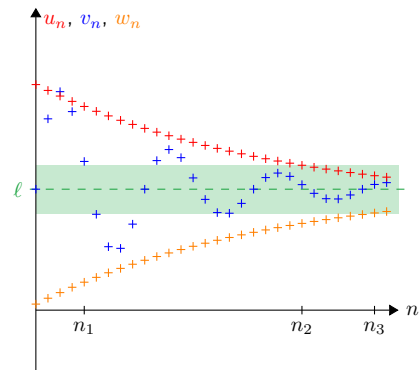
Théorème des gendarmes

Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

La démonstration est hors programme, mais la voici pour les curieux :

Démonstration.

Supposons qu'il existe un rang n_1 à partir duquel $u_n \leq v_n \leq w_n$. Supposons également que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des rangs n_2 et n_3 à partir desquels $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ et $\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon$. Posons $n_0 = \max(n_1; n_2; n_3)$. Pour tout $n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$, donc $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$: cela montre que v converge vers ℓ .



Exemple 24

Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} & -1 \leq \sin(n) \leq 1 \\ \text{donc} \quad & -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} && (\text{on divise par } n > 0) \\ \text{donc} \quad & 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\sin(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} && (\text{on ajoute 1}) \end{aligned}$$

mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \pm \frac{1}{n} = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$.

Terminons le paragraphe avec la démonstration (au programme) de la limite des suites géométriques. On rappelle le résultat montré en exemple de raisonnement par récurrence dans le chapitre ?? (Proposition 66) :

Proposition 25

Inégalité de Bernoulli

$$\forall x > -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

Proposition 26
Limite des suites géométriques

 Soit $q \in \mathbb{R}$.

 ▶ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

 ▶ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
Démonstration. (Premier point exigible)

- ▶ Supposons que $q > 1$. Alors $q - 1 > 0 > -1$. D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout $n \geq 0$, $q^n = (1 + (q - 1))^n \geq 1 + n(q - 1)$. Or $q - 1 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n(q - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ▶ Supposons que $0 < q < 1$. Posons $p = \frac{1}{q} > 1$. D'après le premier point, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^n} = 0$.
- ▶ Supposons que $-1 < q < 0$. Posons $p = -q$ de sorte que $0 < p < 1$. D'après le point précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = 0$. Remarquons que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $p^n > 0$, donc $-p^n \leq (-1)^n p^n \leq p^n$, et $(-1)^n p^n = (-p)^n = q^n$. Ainsi, $-p^n \leq q^n \leq p^n$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -p^n = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- ▶ Le cas $q = 0$ est évident.

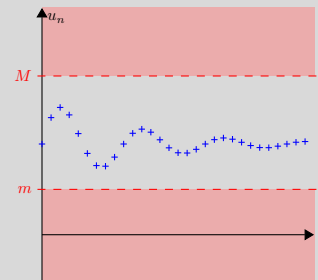
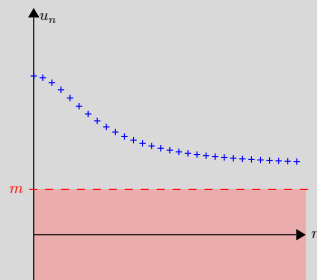
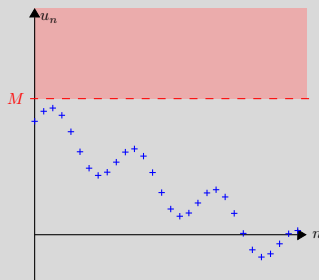
□

Exercice conseillé : 2

B – Suites majorées, minorées, bornées

Définition 27
Suite majorée, minorée, bornée

- ▶ On dit que u est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On dit aussi que M est un *majorant* de u .
- ▶ On dit que u est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. On dit aussi que m est un *minorant* de u .
- ▶ On dit que u est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.


Exemple 28

 La suite u définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dots$

- ▶ $(-1)^n$ est bornée ($-1 \leq (-1)^n \leq 1$)
- ▶ $5 - \sqrt{n}$ est majorée par 5 et non minorée
- ▶ $3 + n^2$ est minorée par 3 et non majorée
- ▶ $2 + \frac{1}{n}$ est bornée ($2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$)

Remarque 29

Si une suite est majorée, alors elle admet une infinité de majorants (*idem* avec les suites minorées) : en effet, si elle est majorée par 5, alors elle est majorée par 6, par 115, 7, par 14298...

Proposition 30**Majoration et convergence**

Si une suite croissante converge vers ℓ , alors elle est majorée par ℓ .

Si une suite décroissante converge vers ℓ , alors elle est minorée par ℓ .

La démonstration n'est plus au programme, mais la voici pour les curieux :

Démonstration. Supposons u croissante et convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons que ℓ n'est pas un majorant de u .

- ▶ « u est majorée par ℓ » : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$.
- ▶ Négation : $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} > \ell$

Pour tout $n \geq n_0$, comme u est croissante, $u_n \geq u_{n_0} > \ell$. L'intervalle ouvert $] \ell - 1; u_{n_0}[$ contient ℓ , mais ne contient aucun terme de u à partir du rang n_0 : cela contredit la convergence de u vers ℓ .

Donc u est majorée par ℓ . □

C – Convergence des suites monotones**Théorème 31****Théorème de convergence monotone**

Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Ce théorème est admis.

Remarque 32

Ce théorème est ce qu'on appelle un *théorème d'existence* : il nous dit que la limite existe, mais il ne nous la donne pas !

Exemple 33

Soit u de terme initial $u_0 = 2$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

Montrons par récurrence *express* (rédaction à soigner !) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll u_n \leq 3 \gg$.

INIT Comme $u_0 = 2 \leq 3$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

HYP Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

HÉRÉDITÉ D'après $\mathcal{P}_n$, $u_n \leq 3$, donc $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \leq \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

CCL D'après le principe de récurrence, u est majorée par 3.

Montrons par récurrence que u est croissante, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll u_{n+1} \geq u_n \gg$.

INIT

Comme $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 \geq u_0$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

HYP

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

HÉRÉDITÉ

D'après $\mathcal{P}_n$, $u_{n+1} \geq u_n$, donc $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \geq \frac{1}{3} \times u_n + 2 = u_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

CCL

D'après le principe de récurrence, u est croissante.

D'après le théorème de convergence monotone, u converge.

Remarque 34

Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite, seulement son existence ! Rendez-vous au chapitre 8 pour savoir comment trouver la valeur de la limite.

Théorème 35

Monotonie et divergence

Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. (Exigible) Supposons u croissante et non majorée.

- ▶ « u est majorée» : $\exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$.
- ▶ Négation : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} > A$.

Pour tout $\forall n \geq n_0$, comme u est croissante, $u_n \geq u_{n_0} > A$.

On a montré que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel u dépasse A : c'est la définition du fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. □

Exercices conseillés : 3, 4

Objectif bac : 5 à 10

Chercher et raisonner : 11 à 19

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Par opérations sur les limites, déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) .

$$1 \blacktriangleright u_n = -4n + 6 \qquad 5 \blacktriangleright u_n = n^2 - \frac{1}{n+1}$$

$$2 \blacktriangleright u_n = n\sqrt{n} \qquad 6 \blacktriangleright u_n = \frac{3n-1}{n^2}$$

$$3 \blacktriangleright u_n = 5 - \frac{2}{n+1} \qquad 7 \blacktriangleright u_n = 6^n - 7^n$$

$$4 \blacktriangleright u_n = \frac{3n-5}{2n+1} \qquad 8 \blacktriangleright u_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 2^n}$$

$$9 \blacktriangleright u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$10 \blacktriangleright u_n = \frac{3n^2 + n + 1}{n^2 + 2n - 1}$$

$$11 \blacktriangleright u_n = \frac{(n+1)(3-n)}{2n^2 + 1}$$

$$12 \blacktriangleright u_n = \left(n - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{2n^2}\right)$$

Exercice 2

Par comparaison, déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n) .

$$1 \blacktriangleright u_n = (\cos(n) - 2) \times n$$

$$2 \blacktriangleright u_n = 2n - \cos(n)$$

$$3 \blacktriangleright u_n = \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$$

$$4 \blacktriangleright u_n = n + 1 - \cos(n)$$

$$5 \blacktriangleright u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 1} - 2$$

$$6 \blacktriangleright u_n = n^2 - \sin(3n)$$

Exercice 3

On modélise le nombre de foyers français possédant un écran plat (en millions) en fonction de l'année $2015 + n$ par la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et,

pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n)$$

1 ▶ Soit f la fonction définie sur $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$.

a ▶ Étudier les variations de f sur $[0; 20]$.

b ▶ En déduire que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.

2 ▶ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3 ▶ Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4 ▶ Le nombre de foyers français possédant un écran plat pourra-t-il dépasser 10 millions de foyers selon la modélisation ?

Exercice 4

Soit la suite (t_n) définie par $t_1 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $t_{n+1} = 0,5t_n + 0,4$.

1 ▶ a ▶ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $t_n > 0,8$.

b ▶ En déduire que la suite (t_n) est décroissante.

c ▶ La suite (t_n) est-elle convergente ? Justifier.

2 ▶ On pose pour tout entier naturel n non nul, $v_n = t_n - 0,8$.

a ▶ Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme v_1 .

b ▶ En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $t_n = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$.

c ▶ Déterminer la limite de la suite (t_n) .

Objectif Bac

Exercice 5

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

Partie A

- 1► Calculer les valeurs exactes sous forme de fraction irréductible de u_1 et u_2 .
- 2► À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
- 3► Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) à l'aide de la calculatrice.

Partie B

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.

- 1► Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$$

- 2► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq v_n \leq 0$.
- 3► a► Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$$

- b► En déduire le sens de variation de (v_n) .

- 4► Justifier que (v_n) converge.
- 5► On note ℓ la limite de la suite (v_n) . On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
Déterminer la valeur de ℓ .
- 6► Les conjectures émises dans la partie A sont-elles validées ?

Exercice 6 (BAC 2021)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= u_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

- 1► a► Calculer u_1 et v_1 .

- b► Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives par récurrence.
- c► Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.
- d► Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.
- e► En déduire la limite de la suite (v_n) .

- 2► On pose, pour tout entier naturel n , $r_n = \frac{v_n}{u_n}$ et

$$\text{on admet que } r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- a► Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$\frac{-1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$$

- b► En déduire la limite de la suite de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
- c► En déduire la limite de la suite (r_n^2) .
- d► En déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
- e► Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$$

Exercice 7 (BAC 2021)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

- 1► Calculer, en détaillant les étapes, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
- 2► L'extrait, reproduit ci-dessous d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

- a► Quelle formule étirée ensuite vers le bas peut-on écrire dans la cellule B3 pour ob-

tenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

- b ▶ Conjecturer le sens de variation de (u_n) .
- 3 ▶ a ▶ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $n \leq u_n \leq n + 1$.
- b ▶ En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
- c ▶ Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
- 4 ▶ On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n$.
- a ▶ Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
- b ▶ En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$$

Exercice 8 (BAC 2014)

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

- 1 ▶ a ▶ À l'aide de la calculatrice, présenter dans un tableau les 8 premiers termes de (u_n) , approchés à 10^{-2} près.
- b ▶ D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2 ▶ a ▶ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$.
- b ▶ En déduire que, pour tout entier naturel n non nul $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- c ▶ En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 3 ▶ On admet que la limite de (u_n) est 0. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $u_n \leq 0,01$. Compléter la fin pour que le programme renvoie la valeur attendue.

```

1 def seuil():
2     n = 0
3     u = ...
4     while u > 0.01:
5         u = ...
6         n = n + 1
7     return n
    
```

Exercice 9

À Gotham City, le taux de criminalité est très élevé depuis l'arrivée du Joker qui envoie ses sbires racketter les commerçants de la ville. Pour s'assurer de ses revenus, le Joker envoie son bras droit surveiller les malfrats chargés du racket. On estime que :

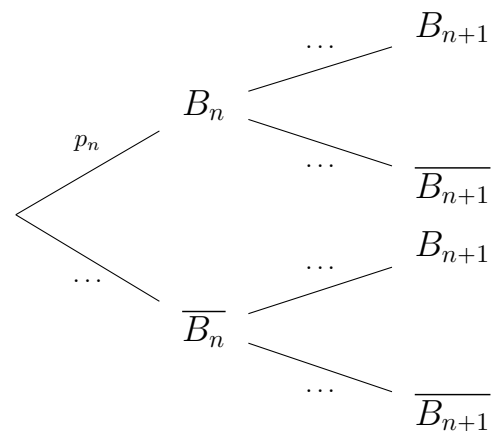
- ▶ lorsqu'un mafieux a racketté un commerce une semaine, la probabilité qu'il recommence la semaine suivante est 0,9 ;
- ▶ lorsqu'un mafieux a préféré se la couler douce une semaine, la probabilité qu'il se remette au travail la semaine suivante est 0,4.

On s'intéresse à l'activité d'un mafieux lorsque le bras droit du Joker arrive pour le surveiller.

Soit n un entier naturel non nul. On note B_n l'événement « le mafieux a bien racketté la n -ième semaine » et p_n la probabilité de B_n .

La première semaine, le mafieux est super méchant et super motivé. On a donc $p_1 = 1$.

- 1 ▶ Donner p_2 et montrer que $p_3 = 0,85$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
- 2 ▶ Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- 3 ▶ En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
- 4 ▶ a ▶ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0,8$.
- b ▶ Comment le Joker peut-il interpréter ce résultat ?
- 5 ▶ On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = p_n - 0,8$.
- a ▶ Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
- b ▶ En déduire l'expression de u_n , puis de p_n , en fonction de n .
- c ▶ En déduire la limite de la suite (p_n) .

Exercice 10

Comme la fouine ou le blaireau, la loutre fait partie de la grande famille des mustélidés. C'est une espèce semi-aquatique vivant le long des cours d'eau assez sauvages, peu ou pas pollués et surtout riches en poissons. Au XX^e siècle, la loutre a disparu de nombreuses régions européennes. Redoutée par les pêcheurs qui la trouvaient trop gourmande en poissons, elle a été intensément chassée et piégée. La destruction et la pollution de son habitat ont aussi joué un rôle important dans son déclin.

Au début de l'année 2020, on comptait 300 loutres d'Europe. Une étude a permis de modéliser ce nombre de loutres par la suite (u_n) définie par $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 3$$

où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de loutres au début de l'année 2020 + n .

- 1► Calculer, dans ce modèle, le nombre de loutres au début de l'année 2021, puis au début de l'année 2022.
- 2► Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $15 < u_{n+1} \leq u_n$.
- 3► La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
- 4► On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ en justifiant.
- 5► On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) d'une autre manière. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 15$.
 - a► Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.
 - b► En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 285 \times 0,8^n + 15$.
 - c► En déduire la limite de la suite (u_n) .
 - d► En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
- 6► On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en-dessous d'un certain seuil S .
 - a► Dans cette question, on suppose que $S = 30$. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq 30$ et interpréter.
 - b► Dans le programme Python ci-dessous, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020 et la variable u désigne l'effectif de la population.
Compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S .

```

1  def population():
2      n = 0
3      u = 300
4      while u .....:
5          u = ...
6          n =
7      return ...

```

Vers le supérieur

Exercice 11

Proposer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = \dots$

- 1► $+\infty$ 2► $-\infty$ 3► 0 4► 4

Exercice 12

- 1► Démontrer que si une suite (u_n) est croissante mais n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- 2► Application : soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
 - a► Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b► On suppose que la suite (u_n) est majorée. Montrer que, dans ce cas, elle converge vers un réel que l'on précisera.
 - c► En déduire que u n'est pas majorée.
 - d► Préciser alors le comportement de u en $+\infty$.

Exercice 13 (Vrai/faux)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et telle qu'aucun de ses termes n'est nul. On définit alors la suite v par $v_n = -\frac{4}{u_n}$ pour tout entier naturel n . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Si la suite (u_n) converge, alors la suite v converge.
- 2► Si la suite (u_n) est minorée par 2, alors la suite v est minorée par -2 .
- 3► Si la suite (u_n) est décroissante, alors la suite v est croissante.
- 4► Si la suite (u_n) diverge, alors la suite v admet 0 pour limite.

Exercice 14 (Vrai/faux)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

- 1► Toute suite croissante et majorée converge.
- 2► Toute suite croissante et convergente est majorée.
- 3► Toute suite majorée et convergente est croissante.
- 4► Toute suite décroissante est majorée.

Exercice 15

On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n par $p_n = n^2 - 42n + 4$. La suite (p_n) est-elle strictement décroissante ? Justifier.

Exercice 16 (Vrai/faux)

On considère deux suites u et v définies pour tout entier naturel n . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 0$.
- 2► Si la suite (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $u \times v$ ne converge pas.
- 3► Si les suites u et v convergent et v ne s'annule pas, alors la suite $\frac{u}{v}$ converge.

Exercice 17 (Vrai/faux)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

- 1► Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
- 2► Une suite croissante tend vers $+\infty$.
- 3► Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.
- 4► Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.

Exercice 18 (Vrai/faux)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

- 1► La suite (u_n) est minorée.
- 2► La suite (u_n) est décroissante.
- 3► L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.
- 4► La suite (u_n) est convergente.

Exercice 19 (Vrai/faux)

Soit (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < u_n < n + 1$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

- 1► Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u_N est un entier.
- 2► La suite (u_n) converge.
- 3► La suite (u_n) est croissante.
- 4► La suite (u_n) n'a pas de limite.

6 Géométrie et repérage dans l'espace

Table des matières

1	Vecteurs de l'espace et repérage	104
A	Définition et lien avec les translations	104
B	Dépendance linéaire, colinéarité et coplanarité	105
C	Repères et bases de l'espace	106
2	Droites et plans de l'espace	111
A	Vecteurs directeurs, représentation paramétrique	111
B	Positions relatives de droites et de plans	113
C	Parallélisme dans l'espace	118
	Exercices	120

Programme

Cette section introduit d'emblée le calcul vectoriel dans l'espace, avec les notions qui l'accompagnent : translations, combinaisons linéaires de vecteurs, indépendance linéaire, directions de droites et de plans. Il s'agit de s'appuyer sur la perception de l'espace pour mettre en place une géométrie reliée au calcul vectoriel et adaptée aux besoins des autres disciplines.

Les figures formées à partir des solides usuels (cube, pavé, tétraèdre) rencontrés au collège sont des supports privilégiés pour manipuler les notions vectorielles et appréhender la position relative de droites et de plans. Il est important de développer les représentations des objets géométriques, notamment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, afin de permettre à l'élève d'exercer son regard et de développer sa vision dans l'espace.

Contenus

- ▶ Vecteurs de l'espace. Translations.
- ▶ Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- ▶ Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
- ▶ Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- ▶ Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.

- ▶ Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- ▶ Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

Capacités attendues

- ▶ Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- ▶ Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- ▶ Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- ▶ Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
- ▶ Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- ▶ Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

Approfondissements possibles

- ▶ Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie.
- ▶ Fonction vectorielle de Leibniz.

1 – Vecteurs de l'espace et repérage

A – Définition et lien avec les translations

Définition 1

Vecteur

Soient A et B deux points distincts de l'espace. Le *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ est un objet mathématique, représenté par une flèche, défini par :

- ▶ sa *direction* : la droite (AB)
- ▶ son *sens* : de A vers B
- ▶ sa *norme* $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ (la distance entre A et B)

Le point A est appelé *origine* de $\overrightarrow{AB}$, et B est appelé son *extrémité*.

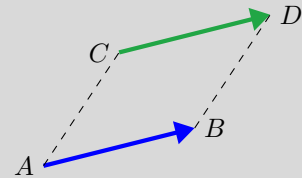
Remarque 2

- ▶ Lorsque A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ est plutôt noté $\vec{0}$. On l'appelle *vecteur nul*. Il n'a ni direction ni sens, et sa norme vaut 0.
- ▶ Les règles de construction des vecteurs en géométrie plane s'étendent naturellement à l'espace : somme, multiplication par un réel, relation de Chasles, ...

Définition 3

Vecteurs égaux

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux*, ou que $\overrightarrow{CD}$ est un *représentant* de $\overrightarrow{AB}$, si $ABDC$ (attention à l'ordre!) est un parallélogramme, autrement dit si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont mêmes direction, sens et norme.



Remarque 4 (Pour la culture)

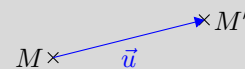
La relation « $ABDC$ est un parallélogramme» est appelée *relation d'équipollence* entre les couples de points (A, B) et (C, D) .

Application 5 (Théorème de Varignon)

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note I, J, K et L les milieux des quatre côtés de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. À l'aide de relations vectorielles, démontrez que $IJKL$ est un parallélogramme.

Définition 6

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. La *translation de vecteur* $\vec{u}$ est la transformation géométrique qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Exercices conseillés : 2, 5

B – Dépendance linéaire, colinéarité et coplanarité

Définition 7

Colinéarité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Proposition 8

Soient A , B et C trois points deux à deux distincts.

Les points A , B et C sont alignés si, et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration. On peut raisonner directement par équivalences.

Les points A , B et C sont alignés si, et seulement si ils appartiennent à une même droite, autrement dit si, et seulement si $(AB) = (AC)$. Les directions de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont (AB) et (AC) , en particulier, $(AB) = (AC)$ si, et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. $\square$

Définition 9

Dépendance linéaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- ▶ Tout vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ où a , b et c sont des nombres réels, est appelé *combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$* .
- ▶ On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *linéairement indépendants* si la seule combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui donne le vecteur nul est celle dont les coefficients sont tous nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \implies a = b = c = 0$$

Définition 10

Coplanarité

On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* s'ils ne sont pas linéairement indépendants.

Remarque 11

La définition de combinaison linéaire et d'indépendance linéaire s'adapte naturellement à une famille de deux vecteurs. Ainsi, on peut énoncer la caractérisation de la colinéarité de la manière suivante : « deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement s'ils ne sont pas linéairement indépendants ».

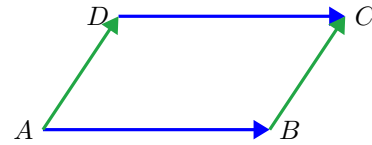
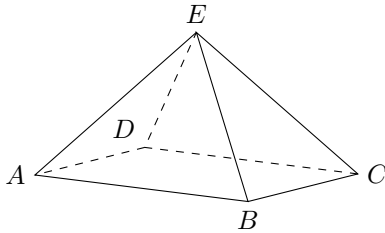
Exemple 12 (Montrer que trois vecteurs sont coplanaires – version sans coordonnées)

On considère une pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$. Montrons que ces trois vecteurs sont coplanaires, autrement dit montrons qu'ils ne sont pas linéairement indépendants. Il s'agit donc de trouver une combinaison linéaire dont au moins un coefficient n'est pas nul, qui donne le vecteur nul. Essayons la suivante :

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} - \vec{w} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AE} && \text{(Relation de Chasles)} \\ &= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} && \text{(Parallélogramme)} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

(Remarque : $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont 1, 1 et -1 : on a bien justifié que $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ ne sont pas linéairement indépendants, donc coplanaires.



Remarque 13 (En pratique)

La négation de « $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants » est « il existe a , b et c trois réels non simultanément nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ ». Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, alors en réarrangeant l'équation, cela revient à dire que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire :

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$$

Cette caractérisation est plus simple lorsqu'on dispose de coordonnées. Voir les exemples de la section suivante.

C – Repères et bases de l'espace

Ce paragraphe est placé ici pour le garder dans la section sur les vecteurs, mais les preuves nécessitent le contenu de la section sur les droites et les plans – uniquement les démonstrations, par la compréhension !

Lemme 14 (Décomposition unique)

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace linéairement indépendants.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Démonstration. La démonstration rigoureuse de l'existence des coordonnées est largement hors programme – à vrai dire, les définitions et l'ordre des contenus de ce chapitre sont artificiellement faussés, car la théorie mathématique derrière le sujet est complexe. Néanmoins, on peut se donner quelques intuitions.

L'unicité, quant à elle, est plus accessible, tout en restant assez subtile. Il faut commencer par montrer le premier point de la Proposition 16 et la Propriété 17.

Commençons par la Proposition 16. Il est assez aisé de constater que les coordonnées de la somme de deux vecteurs sont la somme des coordonnées de chaque terme. En effet, il faut penser les vecteurs comme des translations, et leur somme comme deux translations successives. Les coordonnées correspondent à une décomposition de la translation complète en trois translations parallèles aux axes. La dernière chose à remarquer est que l'on peut permuter deux translations sans en changer le résultat : cela revient à parcourir un parallélogramme d'un côté ou de l'autre.

Traisons maintenant la Propriété 17.

Notons $(x; y; z)$ les coordonnées de $\vec{0}$ dans une base quelconque $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Cela signifie que $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{0}$. Or par définition, une base est une famille de vecteurs linéairement indépendants, donc $x = y = z = 0$.

Supposons qu'un vecteur $\vec{u}$ admette deux décompositions : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. En réarrangeant l'équation, on obtient $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$. Comme $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont linéairement indépendants,

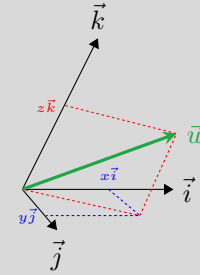
$x - x' = y - y' = z - z' = 0$, c'est-à-dire $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$: ainsi, il n'y a qu'une et une seule manière de décomposer un vecteur dans une base. $\square$

Définition 15**Base et coordonnées de vecteurs**

Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace linéairement indépendants. Le triplet $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé *base* de l'espace.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé *coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$* . Quand le choix de la base n'est pas ambigu, on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

L'écriture $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelée *décomposition de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$* . La composante x est appelée l'*abscisse*, y est appelée l'*ordonnée*, et z est appelée la *cote*.

**Proposition 16**

Soient $\mathcal{B}$ une base, $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ deux vecteurs, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\triangleright \vec{u} + \vec{v} : \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$$

$$\triangleright \lambda \vec{u} : \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \\ \lambda z_u \end{pmatrix}$$

Propriété 17

Le vecteur nul est le seul vecteur de coordonnées $(0, 0, 0)$ dans n'importe quelle base.

Exercices conseillés : 1, 6, 7, 8

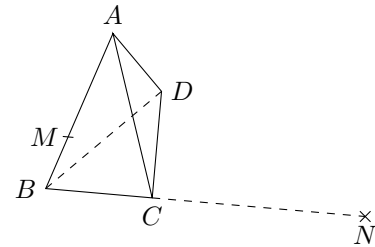
Exemple 18 (Montrer que deux vecteurs sont colinéaires)

On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-dessous. On construit deux points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$. Montrons que $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ ne sont pas coplanaires, donc linéairement indépendants, donc ils forment une base $\mathcal{B}$ de l'espace.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$= 0\overrightarrow{BD} + 1\overrightarrow{BC} + \left(-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\ &= -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \\ &= 0\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{BC} + (-1)\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$



Les coordonnées de $\overrightarrow{MC}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(0, 1, -\frac{1}{3})$, et celles de $\overrightarrow{AN}$ sont $(0, 3, -1)$. On remarque que c'est le triple des coordonnées de $\overrightarrow{MC}$: ainsi, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$, et donc ces vecteurs sont colinéaires.

(Remarque : les trois vecteurs de la base partagent le point B : on fait donc apparaître B dans les calculs grâce à la relation de Chasles. De manière générale, on utilise la relation de Chasles pour transformer un vecteur inconnu en deux (ou plus) vecteurs connus)

Proposition 19**Coordonnées et colinéarité**

Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Démonstration. Cela vient du fait que deux vecteurs sont colinéaires si l'un s'obtient en multipliant l'autre par un réel, et en utilisant le second point de la Proposition 16. $\square$

Remarque 20

Pour montrer la non colinéarité de deux vecteurs, il suffit de montrer la non proportionnalité de leurs coordonnées. Deux approches : soit on sait d'avance que les coordonnées ne sont pas proportionnelles, et on trouve deux produits en croix qui ne sont pas égaux (on rappelle que, dans une situation de proportionnalité, deux produits en croix sont nécessairement égaux), soit on ne connaît pas la réponse, et on pose un système ; on suppose qu'il existe λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, et on cherche λ . Soit on trouve trois fois la même valeur pour λ dans les trois équations, auquel cas c'est le coefficient de proportionnalité, soit il y a une incohérence et les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemple 21 (Montrer que trois vecteurs sont coplanaires – version avec coordonnées)

On reprend l'Exemple 12.

Dans les définitions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, le point A semblent jouer un rôle central : choisissons une base qui reflète cette importance. Prenons la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ (ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires). Calculons les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans $\mathcal{B}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$$

Donc les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 0, 0)$.

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$$

Donc les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ sont $(0, 1, 1)$.

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$$

($\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.) Donc les coordonnées de $\vec{w}$ dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 1, 1)$.

À l'aide de ces coordonnées, il apparaît immédiatement que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$: ainsi, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas linéairement indépendants, donc ils sont coplanaires.

Méthode 22 (Montrer que trois vecteurs sont coplanaires ou non avec les coordonnées)

Dans le cas où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas nuls (autrement ce serait immédiat), pour montrer que ces vecteurs sont coplanaires ou non, on écrit le système d'équations découlant de $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ écrit avec les coordonnées, d'inconnues λ et μ .

- ▶ Si on peut trouver une solution qui satisfait les 3 équations, alors les vecteurs sont coplanaires,
- ▶ Si on trouve un couple de valeurs qui satisfait deux équations mais pas la troisième, alors il n'y a pas de solution et les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Exemple 23 (Cas coplaire – Rédaction-type)

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrons que ces vecteurs sont coplanaires.

D'une part, $\vec{u} \neq \vec{0}$, d'autre part $1 \times (-1) \neq (-3) \times 5$, donc les coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas proportion-

nelles, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -7 = 1\lambda + 5\mu & (L_1) \\ -7 = -3\lambda - 1\mu & (L_2) \\ 10 = 4\lambda + 1\mu & (L_3) \end{cases}$$

En ajoutant les deux dernières lignes :

$$\begin{cases} -7 = \lambda + 5\mu & (L_1) \\ -7 = -3\lambda - \mu & (L_2) \\ 3 = \lambda + 0\mu & (L_2 + L_3) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lambda = 3$$

On substitue cette valeur dans les deux autres équations :

$$\begin{cases} -7 = 3 + 5\mu & (L_1) \\ -7 = -3 \times 3 - \mu & (L_2) \\ \lambda = 3 & (L_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \mu = -2 & (L_1) \\ \mu = -2 & (L_2) \\ \lambda = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Il n'y a pas d'incohérence dans les deux premières lignes, donc $\lambda = 3$ et $\mu = -2$, donc $\vec{u} = 3\vec{v} - 2\vec{w}$, donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exemple 24 (Cas non coplanaire – Rédaction-type)

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrons que ces vecteurs ne sont pas coplanaires.

D'une part, $\vec{u} \neq \vec{0}$, d'autre part $1 \times (-1) \neq (-3) \times 5$, donc les coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas proportionnelles, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -7 = 1\lambda + 5\mu & (L_1) \\ -7 = -3\lambda - 1\mu & (L_2) \\ 4 = 4\lambda + 1\mu & (L_3) \end{cases}$$

En ajoutant les deux dernières lignes :

$$\begin{cases} -7 = \lambda + 5\mu & (L_1) \\ -7 = -3\lambda - \mu & (L_2) \\ -3 = \lambda + 0\mu & (L_2 + L_3) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lambda = -3$$

On substitue cette valeur dans les deux autres équations :

$$\begin{cases} -7 = -3 + 5\mu & (L_1) \\ -7 = -3 \times (-3) - \mu & (L_2) \\ \lambda = 3 & (L_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \mu = -4 & (L_1) \\ \mu = -16 & (L_2) \\ \lambda = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Les deux premières lignes sont contradictoires, donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Définition 25

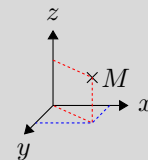
Repères et coordonnées de points

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base et O un point de l'espace.

Le quadruplet $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé un *repère* de l'espace.

Soit M un point de l'espace.

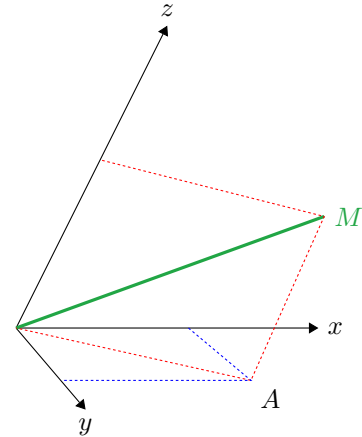
Les *coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$* sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Remarque 26

On peut noter les coordonnées des points dans un repère de la même manière que les vecteurs dans une base : $A(x; y; z)$. Parfois, on omet même les points-virgules, au profit d'espaces assez larges : par exemple, $A(1\ 2\ -3)$.

Avec la notion de repère, on peut se donner une idée plus précise de comment déterminer les coordonnées d'un point (et donc d'un vecteur par extension). Tout repose sur ce qu'on appelle les *projections parallèles*. On commence par prendre notre point M , et on détermine sa *projection parallèle à l'axe (Oz)* , qu'on va appeler A . Concrètement, c'est l'intersection de la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{k}$, et du plan (Oxy) (voir Exemple 39). Le point qui complète O , A et M en un parallélogramme permet de trouver la cote de M . Les deux points qui permettent de tracer le parallélogramme dont $[OA]$ est une diagonale et (Ox) et (Oy) forment deux côtés permettent de trouver l'abscisse et l'ordonnée de M (autrement dit, on trouve les projections parallèles de A selon (Ox) et (Oy)).

**Proposition 27**

Soient $\mathcal{R}$ un repère et $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

► $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

► Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

Démonstration.

- Il suffit de remarquer que les coordonnées de A sont les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ (*idem* pour B) et que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ d'après la relation de Chasles.
- Notons I le milieu de $[AB]$. En particulier, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA})$ donc $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, puis on utilise la correspondance entre les coordonnées d'un point et de son vecteur associé.

□

Exemple 28

Fixons un repère $\mathcal{R}$. Prenons $A(-1; 2; 5)$ et $B(3; 1; 3)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 2 - 1 \\ 5 - (-4) \end{pmatrix}$, autrement

dit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont :

$$\left(\frac{-1 + 3}{2} ; \frac{2 + 1}{2} ; \frac{5 + 3}{2} \right) = (1 ; 1,5 ; 4)$$

Exercices conseillés : 9, 11, 12, 17, 18, 19, 21, 20, 22, 40, 41, 45

2 – Droites et plans de l'espace

A – Vecteurs directeurs, représentation paramétrique

Définition 29

Droite et vecteur directeur

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
La droite *dirigée par $\vec{u}$ et passant par A* est l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite.

Remarque 30

- ▶ N'importe quel vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite.
- ▶ Si A et B sont deux points distincts, alors la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, autrement dit l'ensemble des points M alignés avec A et B (d'après la Proposition 8). On retrouve la définition d'une droite donnée au collège.

Définition 31

Représentation paramétrique

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par $A(x_A; y_A; z_A)$.

$$M(x, y, z) \in \Delta \quad \text{si, et seulement si} \quad \exists t \in \mathbb{R} : (S) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Le système (S) est appelé *représentation paramétrique* de Δ .

Remarque 32

Les représentations paramétriques de courbes correspondent à l'idée physique d'un objet qui évolue le long de cette courbe au fil du temps : à l'instant t , l'objet se trouve à un certain emplacement sur la courbe.

Exemple 33

Prenons $A(-1; 2; 5)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est donnée par la représentation paramétrique :

$$(S) : \begin{cases} x = -1 + 1t \\ y = 2 + 0t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 \\ z = 5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Remarque 34 (La rédaction rigoureuse)

Une rédaction plus détaillée peut parfois être attendue, plutôt que de donner le résultat directement. En voici une illustration, avec l'exemple précédent.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite passant par $A(-1; 2; 5)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}$

est colinéaire à $\vec{u}$. Ceci est équivalent à ce qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, autrement dit $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M(x, y, z)$ appartient à la droite si, et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} x = -1 + 1t \\ y = 2 + 0t \\ z = 5 + 2t \end{cases}.$$

On peut présenter cette rédaction avec la symbolique mathématique usuelle, de la manière suivante. Notez la répétition du quantificateur à chaque ligne.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Notons (Δ) la droite passant par $A(-1; 2; 5)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in (\Delta) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ colinéaire à } \vec{u} &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = -1 + 1t \\ y = 2 + 0t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 35

On peut également faire l'exercice inverse, c'est-à-dire retrouver un vecteur directeur et un point de passage à partir d'une représentation paramétrique. Par exemple, soit Δ la droite de représentation paramétrique $(\mathcal{S})$:

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = 8t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 On peut en donner un point et un vecteur directeur, en lisant «à l'envers», c'est-à-dire en lisant les pentes et ordonnées à l'origine de chaque équation affine, on peut donner $A(3; 1; 2)$ comme point de passage et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Remarque 36 (La rédaction rigoureuse)

Là encore, une rédaction plus rigoureuse que « par lecture » peut être attendue. Ci-après une illustration grâce à l'exemple précédent.

Pour $t = 0$, le système donne les coordonnées de $A(3; 1; 2) \in \Delta$. Pour $t = 1$, le système donne les coordonnées de $B(1; -2; 10) \in \Delta$. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ dirige Δ .

Remarque 37 (Vous avez le choix !)

- ▶ Quand on vous demande un vecteur directeur de (AB) , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est votre premier candidat. Mais c'est n'est pas le seul !
- ▶ La droite (AB) passe autant par A que par B .
- ▶ Une droite a une infinité de représentations paramétriques. Si vous devez répondre à la question « est-ce que ceci est une représentation paramétrique de la droite (AB) ? », il ne suffit pas de dire que le point et le vecteur directeur que vous lisez sont distincts de A et de $\overrightarrow{AB}$. Il faut dire qu'un certain point de la droite vérifie ou non le système pour un certain t , et qu'un certain vecteur connu est directeur ou non de la droite.

Exercices conseillés : 13, 14, 15, 16, 24

Plan, base et repère

Définition 38

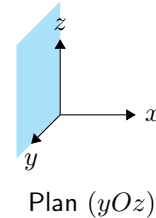
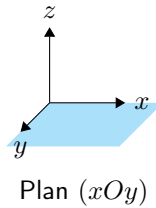
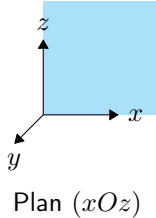
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.

Le plan passant par A et dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$.

Le couple $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de ce plan, et le triplet $(A; \vec{i}, \vec{j})$ en est un repère.

Exemple 39 (Plans usuels associés à un repère de l'espace)

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. De $\mathcal{R}$, on peut extraire trois plans naturels, en choisissant l'origine du repère et deux vecteurs de la base. Ces trois plans ont des notations particulières :



Remarque 40

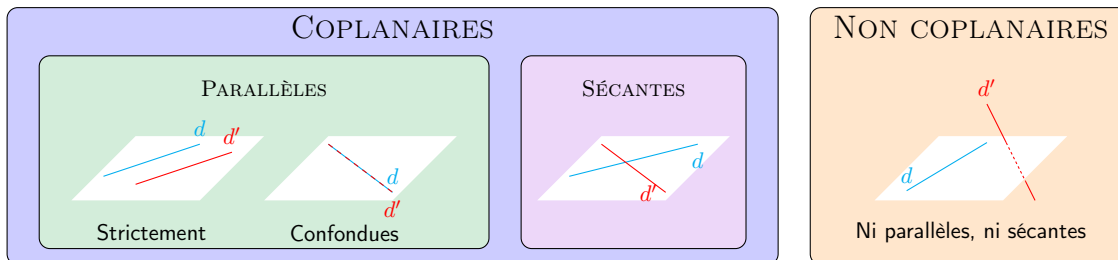
Par trois points non alignés A, B, C passe un et un seul plan, noté (ABC) , dont $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère.

B – Positions relatives de droites et de plans

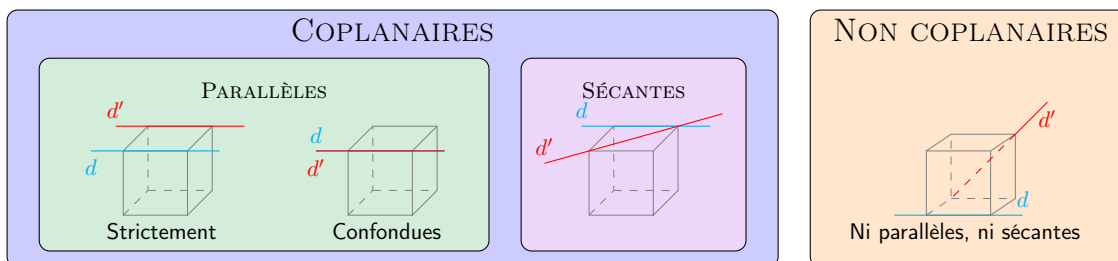
Positions relatives de droites

Proposition 41

Deux droites sont soit coplanaires, soit non coplanaires.
Si elles sont coplanaires, elles sont soit parallèles, soit sécantes en un unique point.



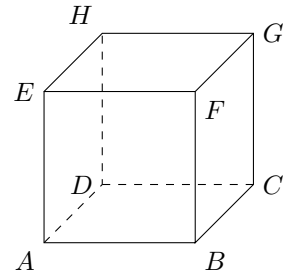
Voici une représentation alternative qui s'appuie sur un cube :



Exemple 42

Dans le cube ci-contre,

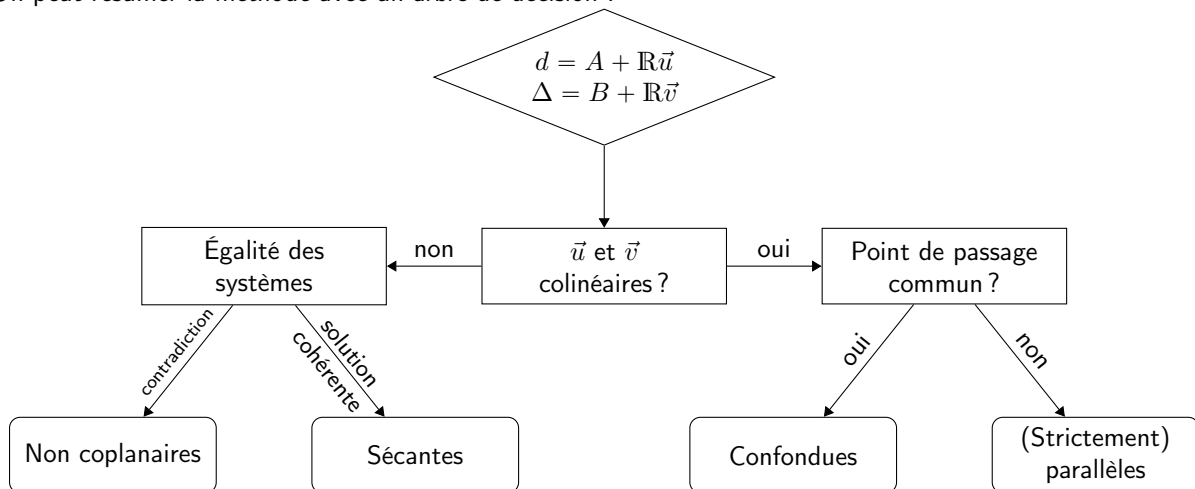
- ▶ les droites (AB) , (CD) , (EF) et (GH) sont parallèles,
- ▶ les droites (AB) et (BC) sont sécantes, de même que (CG) et (FG) , ou encore (AG) et (FD) ,
- ▶ les droites (AB) et (CG) sont non coplanaires, de même que (AB) et (DF) , ou encore (DF) et (HC) .



Méthode 43 (Étude de la position de deux droites paramétriques)

- 0▶ On détermine une représentation paramétrique des deux droites. Il est d'usage de nommer t le paramètre dans la première droite, et s (ou t') le paramètre de la seconde droite.
- 1▶ On détermine un vecteur directeur de chaque droite.
 - ▶ S'ils sont colinéaires, alors les droites sont parallèles, *a fortiori* coplanaires.
 - ▶ Si de plus elles partagent un point de passage, alors elles sont confondues.
- 2▶ Si elles ne sont pas parallèles, alors on regarde si elles sont sécantes en cherchant un t et un s qui font correspondre deux à deux les équations des deux systèmes (cela revient donc à résoudre un système à 3 équations d'inconnues t et s).
 - ▶ Si le système admet une solution qui satisfait les 3 équations simultanément, alors les droites sont sécantes, et les paramètres solutions permettent, dans leurs systèmes respectifs, de calculer les coordonnées du point d'intersection ;
 - ▶ Si la résolution conduit à une contradiction, alors les droites ne sont pas sécantes.
- 3▶ Si les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, alors elles sont non coplanaires.

On peut résumer la méthode avec un arbre de décision :



Exemple 44 (Cas parallèle – Rédaction-type)

Soient $d : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - 6t \\ z = 1 - 9t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\Delta : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 5 + 4s \\ z = 7 + 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$

On lit* que $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d , et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ de Δ . Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -3 = 2\lambda \\ -6 = 4\lambda \\ -9 = 6\lambda \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda = -3/2 \\ \lambda = -6/4 = -3/2 \\ \lambda = -9/6 = -3/2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lambda = -\frac{3}{2}$$

Donc $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{v}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc d et Δ sont parallèles, *a fortiori* coplanaires.

Exemple 45 (Cas sécant – Rédaction-type)

Soient $d : \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\Delta : \begin{cases} x = -4 - 2s \\ y = 3 + 3s \\ z = 3 + 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$

Supposons qu'il existe t et s tels que :

$$\begin{cases} 5 + 7t = -4 - 2s \\ 2 + 2t = 3 + 3s \\ 1 + 2t = 3 + 4s \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 7t + 2s = -9 & (L_1) \\ 2t - 3s = 1 & (L_2) \\ 2t - 4s = 2 & (L_3) \end{cases}$$

En soustrayant (L_3) à (L_2) :

$$\begin{cases} 7t + 2s = -9 & (L_1) \\ 0t + 1s = -1 & (L_2 - L_3) \\ 2t - 4s = 2 & (L_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 7t + 2s = -9 & (L_1) \\ s = -1 & (L_2) \\ 2t - 4s = 2 & (L_3) \end{cases} \quad \text{donc} \quad s = -1$$

En substituant cette valeur dans (L_1) et (L_3) :

$$\begin{cases} 7t + 2 \times (-1) = -9 & (L_1) \\ s = -1 & (L_2) \\ 2t - 4 \times (-1) = 2 & (L_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} t = -1 & (L_1) \\ s = -1 & (L_2) \\ t = -1 & (L_3) \end{cases}$$

Il n'y a pas d'incohérence, donc d et Δ sont sécantes, *a fortiori* coplanaires.

On peut de plus déterminer les coordonnées de leur point d'intersection, par exemple en remplaçant t par -1 dans le système de d , ce qui donne :

$$(5 + 7 \times (-1) ; 2 + 2 \times (-1) ; 1 + 2 \times (-1)) = (-2; 0; -1)$$

*. Pour être plus rigoureux, voir la Remarque 36.

Exemple 46 (Cas non coplanaire – Rédaction-type)

Soient $d : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\Delta : \begin{cases} x = -3 - s \\ y = 3 + 2s \\ z = 3 + 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

On lit* que $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d , et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ de Δ .

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2 = -\lambda \\ 1 = 2\lambda \\ 2 = 4\lambda \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 1/2 \\ \lambda = 1/2 \end{cases}$$

C'est contradictoire ; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas nuls, ils ne sont pas colinéaires, et donc d et Δ ne sont pas parallèles.

Supposons qu'il existe t et s tels que :

$$\begin{cases} 4 + 2t = -3 - s \\ 1 + t = 3 + 2s \\ 1 + 2t = 3 + 4s \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2t + s = -7 & (L_1) \\ t - 2s = 2 & (L_2) \\ 2t - 4s = 2 & (L_3) \end{cases}$$

En soustrayant (L_1) à (L_3) :

$$\begin{cases} 2t + s = -7 & (L_1) \\ t - 2s = 2 & (L_2) \\ 0t - 5s = 9 & (L_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2t + s = -7 & (L_1) \\ t - 2s = 2 & (L_2) \\ s = -9/5 & (L_3) \end{cases} \quad \text{donc} \quad s = -\frac{9}{5}$$

En substituant cette valeur dans (L_1) et (L_2) :

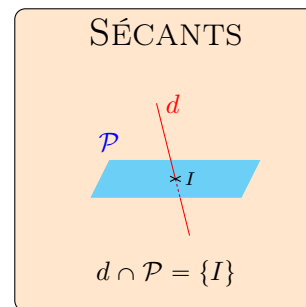
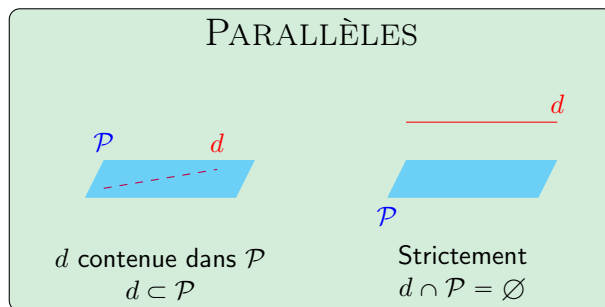
$$\begin{cases} 2t - \frac{9}{5} = -7 & (L_1) \\ t - 2 \times (-\frac{9}{5}) = 2 & (L_2) \\ s = -\frac{9}{5} & (L_3) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} t = \frac{-13}{5} & (L_1) \\ t = \frac{-8}{5} & (L_2) \\ s = -\frac{9}{5} & (L_3) \end{cases}$$

Les première et deuxième ligne sont contradictoires, donc d et Δ ne sont pas sécantes.

Exercices conseillés : 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 43

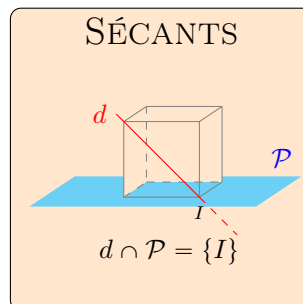
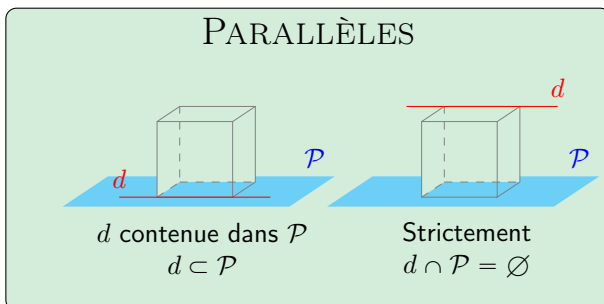
Proposition 47**Position relative d'une droite et d'un plan**

Une droite et un plan sont soit parallèles, soit sécants en un unique point.



*. Pour être plus rigoureux, voir la Remarque 36.

Voici une représentation alternative qui s'appuie sur un cube :

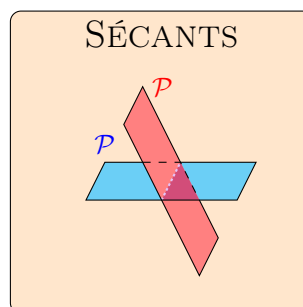
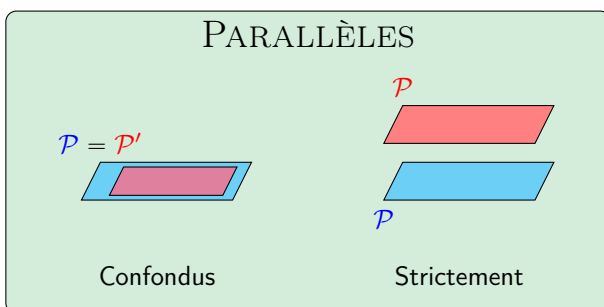


Exercices conseillés : 10, 32, 33

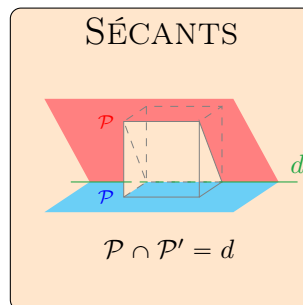
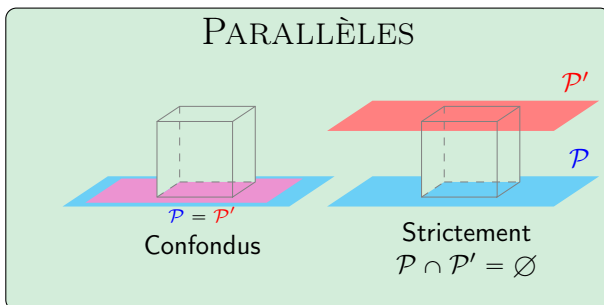
Proposition 48

Positions de plan

Deux plans sont soit parallèles, soit sécants selon une droite.



Voici une représentation alternative qui s'appuie sur un cube :



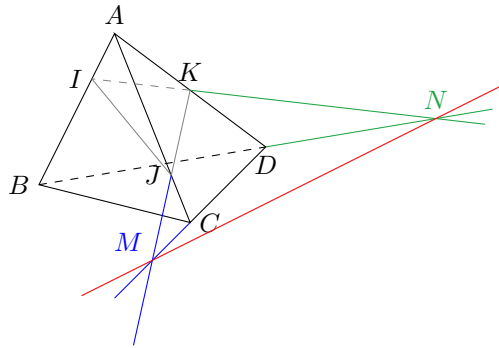
Méthode 49 (Intersection de deux plans sécants)

Pour déterminer la droite d'intersection de deux plans sécants, il faut :

- 1► Justifier que les plans sont sécants,
- 2► Trouver deux points qui appartiennent simultanément aux deux plans. En général, on les construit comme intersection de deux droites coplanaires appartenant respectivement aux deux plans à intersecter.

Exemple 50

Traçons $(BCD) \cap (IJK)$ dans le tétraèdre suivant :



- 1► Les points C, D, J et K appartiennent à la face ACD , donc ils sont coplanaires, donc (CD) et (JK) sont coplanaires, et s'intersectent au point M .
- 2► Les points B, D, I et K appartiennent à la face ABD , donc ils sont coplanaires, donc (BD) et (IK) sont coplanaires, et s'intersectent au point N .
- 3► On remarque $M \in (CD) \subset (BCD)$ et $M \in (JK) \subset (IJK)$, donc $M \in (BCD) \cap (IJK)$. De même, $N \in (BD) \subset (BCD)$ et $N \in (IK) \subset (IJK)$, donc $N \in (BCD) \cap (IJK)$. Ainsi, M et N sont tous deux dans l'intersection de (BCD) et (IJK) , qui est une droite : l'intersection de (BCD) et (IJK) est donc la droite (MN) .

Exercices conseillés : 3, 4, 34, 36, 37, 38, 42

C – Parallélisme dans l'espace

Proposition 51

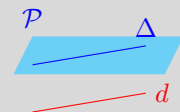
Parallélisme entre deux droites

Deux droites sont parallèles si, et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Théorème 52

Parallélisme entre une droite et un plan

Une droite d est parallèle à un plan $\mathcal{P}$
si, et seulement si
il existe une droite $\Delta \subset \mathcal{P}$ parallèle à d .



Démonstration. Le théorème est immédiat dans le cas où $d \subset \mathcal{P}$ (auquel cas on prend $\Delta = d$). Supposons que d n'est pas contenue dans $\mathcal{P}$. Procédons par double implication :

$\Rightarrow$ Supposons d parallèle à $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{P}'$ un plan sécant à $\mathcal{P}$ contenant d . On note d' l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Par l'absurde, supposons que d et d' ne sont pas parallèles : comme elles sont coplanaires (puisque toutes deux dans le plan $\mathcal{P}'$), elles s'intersectent en un point M . Mais $M \in d' \subset \mathcal{P}$ et $M \in d$, donc on a trouvé un point dans l'intersection de d et de $\mathcal{P}$: cela contredit notre hypothèse selon laquelle d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$. Ainsi, d est parallèle à d' .

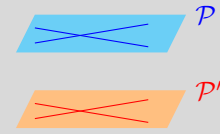
$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe une droite $\Delta \subset \mathcal{P}$ parallèle à d . Elles sont donc coplanaires, et distinctes car Δ est contenue dans $\mathcal{P}$ là où d ne l'est pas. On peut donc considérer le plan $\mathcal{P}'$ contenant d et Δ . En particulier, Δ est contenue à la fois dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, c'est donc leur droite d'intersection. Par l'absurde, supposons d et $\mathcal{P}$ non parallèles : alors ils s'intersectent en un point I . Comme $I \in d \subset \mathcal{P}'$ et $I \in \mathcal{P}$, en particulier $I \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta$. Donc $I \in \Delta$, autrement dit I est un point d'intersection de d et Δ , ce qui est impossible car comme dit plus tôt, d et Δ sont strictement parallèles. Donc d est parallèle à $\mathcal{P}$. $\square$

Théorème 53**Parallélisme entre deux plans**

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles
si, et seulement si

il existe deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ qui sont deux à deux parallèles à deux droites
sécantes de $\mathcal{P}'$.



Démonstration. Le théorème est immédiat dans le cas où les plans sont confondus, supposons les distincts. Procédons par double implication :

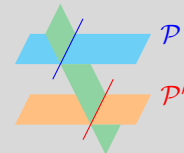
$\Leftarrow$ Soient d et Δ deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, soient d' et Δ' deux droites sécantes de $\mathcal{P}'$ parallèles à d et Δ . Le parallélisme permet d'affirmer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de d' et Δ' . Comme d et Δ sont sécantes, de même que d' et Δ' , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$, mais aussi de $\mathcal{P}'$: ainsi, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

$\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ parallèles. Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, ils ont la même direction, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}'$ également. De là, il suffit de prendre des droites de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: comme $(\vec{u}, \vec{v})$ une base, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites qu'ils dirigent sont sécantes. Comme deux droites ayant un même vecteur directeur sont parallèles, on a trouvé des droites qui conviennent. $\square$

Théorème 54**Intersection de deux plans parallèles**

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans strictement parallèles.

Tout plan sécant à $\mathcal{P}$ est également sécant à $\mathcal{P}'$, et les deux droites
d'intersection sont parallèles.



Démonstration. Soit $\mathcal{Q}$ un plan sécant à $\mathcal{P}$, on note d la droite d'intersection. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{Q}$ n'intersecte pas $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire qu'il lui est parallèle. Comme $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$, ce parallélisme se transmet entre $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$, ce qui contredit le fait qu'ils sont sécants. Donc $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, on note d' leur droite d'intersection. Les droites d et d' faisant partie de $\mathcal{Q}$, elles sont coplanaires, donc soit sécantes, soit parallèles. Par l'absurde, supposons-les sécantes. Notons M leur point d'intersection. Comme $M \in d \subset \mathcal{P}$ et $M \in d' \subset \mathcal{P}'$, on a trouvé un point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$: cela contredit leur strict parallélisme. Donc d et d' sont parallèles. $\square$

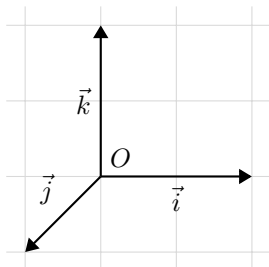
Exercices conseillés : 35, 39, 44, 46

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

- 1► Reproduire et prolonger la figure ci-dessous puis placer les points $A(1; 0; 2)$, $B(1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$ et $D(1; -2; 1)$.

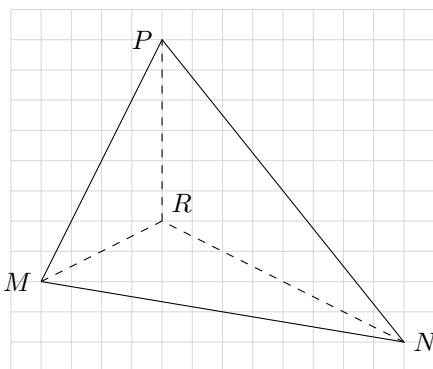


- 2► On considère le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Construire le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine O .

Exercice 2

Sur la figure ci-dessous, $MNPR$ est un tétraèdre. Soient S , T et U les points de l'espace tels que :

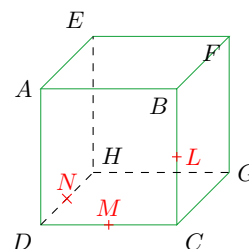
- $\vec{MS} = \frac{1}{2}\vec{MR} + \frac{1}{4}\vec{RN}$, ► $\vec{PU} = \frac{3}{4}\vec{PR} + \frac{3}{4}\vec{PN}$.
- $\vec{PT} = \frac{3}{4}\vec{PM}$,



- 1► Reproduire la figure, puis y placer les points S , T et U .
- 2► Exprimer $\vec{MS}$ en fonction de $\vec{PM}$, $\vec{PR}$ et $\vec{PN}$.
- 3► Montrer que $\vec{TS} = -\frac{1}{4}\vec{PM} + \frac{1}{4}\vec{PR} + \frac{1}{4}\vec{PN}$.
- 4► En déduire une expression de $\vec{TU}$ en fonction de $\vec{TS}$.

Exercice 3

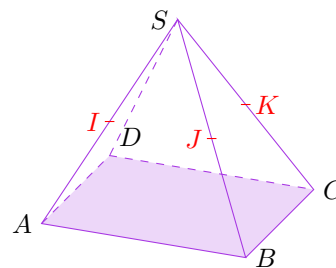
$ABCDEFGH$ est un cube. On note L , M et N les milieux des segments $[BC]$, $[DC]$ et $[DH]$. Déterminer les positions relatives des droites et plans suivants.



- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1► (ML) et (HF) | 5► (CD) et (EMN) |
| 2► (AD) et (GM) | 6► (MN) et (AEF) |
| 3► (HM) et (CG) | 7► (BGF) et (ANH) |
| 4► (EL) et (FGC) | 8► (NMA) et (ECH) |

Exercice 4

On considère une pyramide $SABCD$ dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On note I , J et K les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



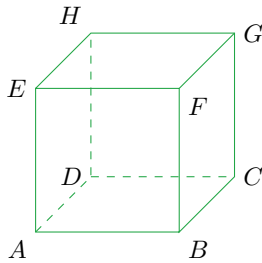
Exercice 5

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le centre du carré $ABCD$, J le centre du carré $EFGH$ et K le milieu de $[IJ]$.

- 1► Faire une figure.
- 2► Exprimer le vecteur $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- 3► Exprimer le vecteur $\vec{AK}$ en fonction de $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- 4► En déduire que K est le milieu de $[AG]$.

Exercice 6

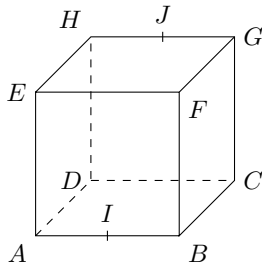
On considère un cube $ABCDEFGH$. Pour chaque triplet de vecteurs, indiquer s'il constitue une base de l'espace.



- 1▶ $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})$
- 2▶ $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$
- 3▶ $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BH})$
- 4▶ $(\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{HC}; \overrightarrow{EC})$

Exercice 7

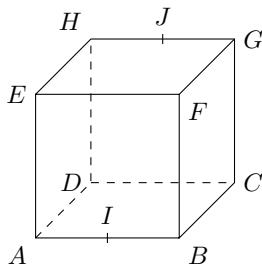
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



- 1▶ Justifier que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.
- 2▶ On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[HG]$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Exercice 8

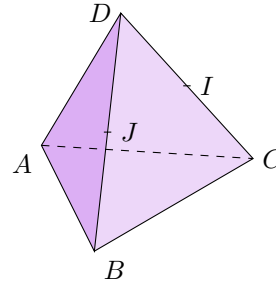
On considère un cube $ABCDEFGH$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{CE}$



- 1▶ dans la base $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CG})$.
- 2▶ dans la base $(\overrightarrow{HG}; \overrightarrow{HD}; \overrightarrow{HE})$.
- 3▶ dans la base $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BF})$.

Exercice 9

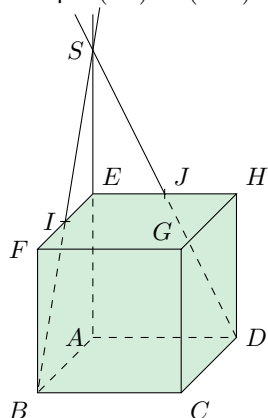
Soit un tétraèdre $ABCD$. On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[BD]$.



- 1▶ Dans cette question l'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$.
 - 1▶ Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans ce repère.
 - 2▶ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$.
- 2▶ Dans cette question l'espace est muni du repère $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD})$. Donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.

Exercice 10

On considère le cube $ABCDEFGH$ et on note I le milieu de $[FE]$, S l'intersection de (AE) et (BI) et J l'intersection de la droite (EH) avec le plan (BDS) . Montrer que (IJ) et (BD) sont parallèles.



Exercice 11

Soit $ABCDEFGH$ un cube. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[AB]$ et J le point défini par :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

Démontrer que les points I , J et G sont alignés.

Exercice 12

On se place dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; 1)$, $B(4; 4; 2)$, $C(2; 1; 4)$ et $D(6; 7; 0)$.

- 1► Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- 2► Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- 3► En déduire que A , B , C et D sont coplanaires.

Exercice 16

Dans l'espace muni d'un repère, soient $A(-1; 2; 5)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice 13 (QCM)

On se place dans l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

R. Parmi les points suivants, le(s)quel(s) appartient(en)t à la droite Δ ?

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1► $M(2; 1; -1)$ | 3► $P(-3; -4; 2)$ |
| 2► $N(-3; -4; 6)$ | 4► $Q(-5; -5; 1)$ |

Exercice 14 (QCM)

On se place dans l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 0; 2)$ et $B(2; 1; 0)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

- | | |
|---|---|
| 1► $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ | 3► $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ |
| 2► $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ | 4► $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ |

Exercice 15

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points suivants : $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD) .

Je comprends mon cours

Exercice 17

On considère les points $A(1; 1; 2)$ et $B(-1; 3; 4)$ et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1► Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
- 2► Soit M le point du plan défini par $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$. Les points A , B et M sont-ils alignés? Justifier.

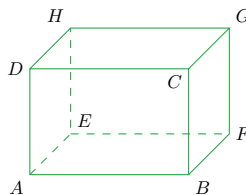
Exercice 18

On donne, dans l'espace muni d'un repère, les points $A(1; -1; 2)$, $B(0; 5; 3)$ et $C(4; -19; -1)$. Les points A , B et C sont-ils alignés? Justifier.

Exercice 19

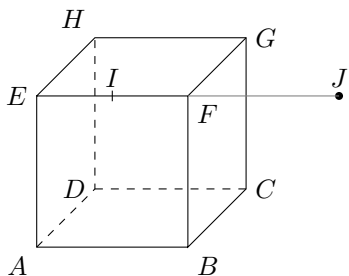
$ABCDEFGH$ est un pavé droit.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont colinéaires.



Exercice 20

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le milieu I de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F . On considère également le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- 1► Donner les coordonnées des points I et J .
- 2► En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{BG}$.

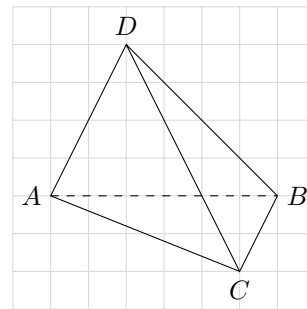
Exercice 21

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $E(-1; 3; 2)$, $F(2; -1; 3)$ et $G(-1; 0; 1)$. Déterminer les coordonnées du point M défini par :

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EG}.$$

Exercice 22

$ABCD$ est un tétraèdre.



Reproduire la figure et placer les points E , F et G définis par :

- 1► $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$
- 2► $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}$
- 3► $\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3} \overrightarrow{DC}$

Exercice 23

La droite d est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et la droite d'

est dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Montrer que d et d' sont parallèles.

Exercice 24

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(5; -1; 2)$, $B(3; 1; -1)$ et $C(3; 1; 5)$.

- 1► Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par les points A et B .
- 2► Le point C appartient-il à la droite (AB) ?

Exercice 25

Dans l'espace muni d'un repère, soient $A(1; -1; 3)$ et $B(3; 2; 4)$.

- 1► Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- 2► On considère le point $E(-5; 7; 1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB) .
- 3► On considère le point $F(-1; 13; 3)$.
 - a► Justifier que (AF) et d ne sont pas parallèles.
 - b► Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

Objectif Bac

Exercice 26

On donne, dans l'espace muni d'un repère, les points $A(3; 2; 2)$, $B(-1; -4; 4)$, $C(1; 0; 1)$ et $D(3; 3; 1)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles? Justifier.

Exercice 27

Dans l'espace muni d'un repère, soient $A(-1; 5; 3)$ et $B(2; -4; 3)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

Exercice 28

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $E(4; 7; 2)$ et $F(3; 1; -5)$.

- 1► Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF) .
- 2► On donne la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 6t - 1 \\ z = 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 Étudier la position relative de $\mathcal{D}$ et (EF) .

Exercice 31

Dans l'espace muni d'un repère, soient (d) et (d') deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (d') : \begin{cases} x = s + 1 \\ y = -2s + 1 \\ z = 4 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Exercice 29

Dans l'espace muni d'un repère, soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $A(1; 1; 0)$ et $B(3; 0; -1)$.

- 1► Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- 2► Les droites d et (AB) sont-elles coplanaires? Justifier.

Exercice 30

Soient (d) et (d') les droites de représentations paramétriques respectives :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (d') : \begin{cases} x = 19 + 3t \\ y = -4 - t \\ z = 10 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- 1► Donner un vecteur directeur de chacune des deux droites.
- 2► Étudier la position relative de ces deux droites.

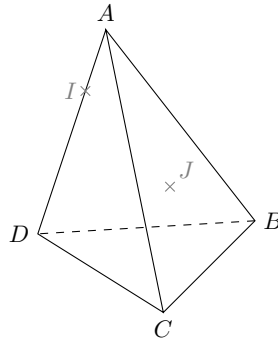
- 1► Pour chaque droite, donner un point lui appartenant et un vecteur directeur.
- 2► Les droites d et d' sont-elles parallèles? Justifier.
- 3► Les droites d et d' sont-elles sécantes? Justifier.
- 4► Que peut-on conclure?

Approfondir

Exercice 32

Soient $ABCD$ un tétraèdre, I un point de l'arête $[AD]$ et J un point de la face ABC . Construire l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD) .

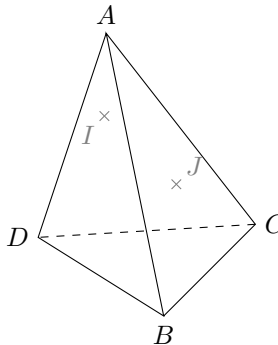
Conseil : Utiliser un plan contenant la droite (IJ) , par exemple (AIJ) , et déterminer l'intersection de ce plan avec le plan (BCD) ...



Exercice 33

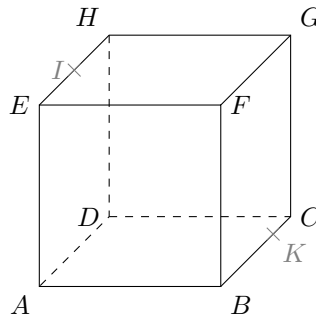
Soient $ABCD$ un tétraèdre, I un point de la face ADB et J un point de la face ABC . Construire l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD) .

Conseil : Construire les points d'intersection des droites (IJ) et (BD) , puis des droites (AJ) et (BC) ...



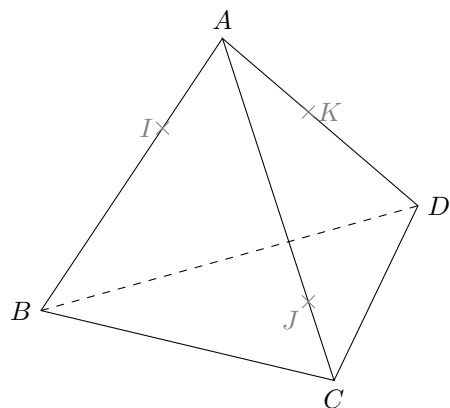
Exercice 34

Soient $ABCDEFGH$ un cube, I le point de l'arête $[EH]$ tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$, et K le point de l'arête $[BC]$ tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$. Construire la section du cube par le plan (IFK) .



Exercice 35

Tracer la droite d'intersection des plans (IJK) et (BCD) dans le tétraèdre ci-dessous :



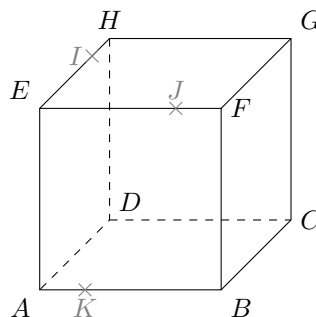
Exercice 36

Tracer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) . On donne :

$$\triangleright \overrightarrow{HI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{HE}$$

$$\triangleright \overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{EF}$$

$$\triangleright \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$$



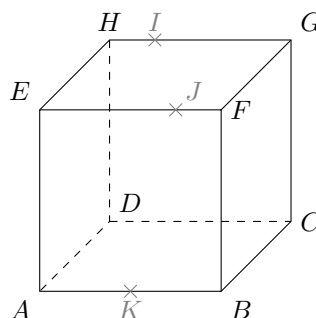
Exercice 37

Tracer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) . On donne :

$$\triangleright \overrightarrow{HI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{HG}$$

$$\triangleright \overrightarrow{EJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{EF}$$

$\triangleright K$ est le milieu de $[AB]$



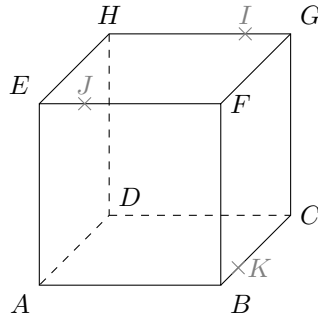
Exercice 38

Tracer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) . On donne :

$$\triangleright \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EF}$$

$$\triangleright \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

$$\triangleright \overrightarrow{HI} = \frac{3}{4} \overrightarrow{HG}$$

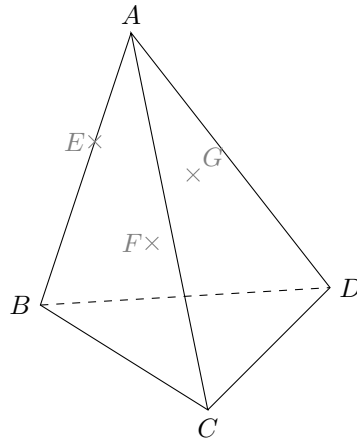
**Exercice 39**

Tracer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (EFG) , et l'intersection de ce dernier avec le plan (BCD) . On donne :

$$\triangleright E \in [AB]$$

$$\triangleright F \in (ABC)$$

$$\triangleright G \in (ABD)$$

**Exercice 40 (Médiane d'un tétraèdre)**

Soit $ABCD$ un tétraèdre. La *médiane* de $ABCD$ issue de A est la droite passant par A et le centre de gravité de la face opposée BCD .

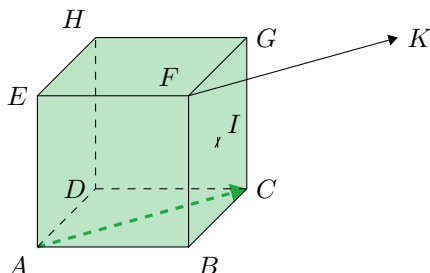
Le *centre de gravité* de $ABCD$ est l'unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

En admettant que le centre de gravité du triangle BCD est l'unique point G' tel que $\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} = \vec{0}$, démontrez que G se situe aux trois-quarts de chaque médiane en partant du sommet.

Vers le supérieur

Exercice 41

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous. On note I le centre du carré $BCGF$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. On note K l'image de F par t . Montrer que I est le milieu de $[AK]$.



Exercice 42

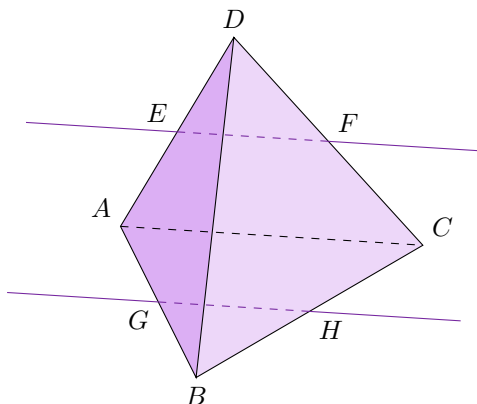
Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et d une droite contenue dans $\mathcal{P}$. Soit Δ une droite parallèle à d . Tout plan contenant Δ est-il parallèle à $\mathcal{P}$?

Exercice 43

On donne, dans l'espace muni d'un repère, les points $A(3; 0; 4)$, $B(2; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$ et $D(0; -1; 6)$. Quelle est la nature de $ABCD$? Justifier.

Exercice 44

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Les points E, F, G et H sont les milieux des segments comme indiqué sur la figure.



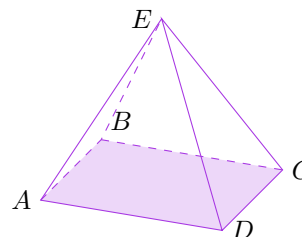
Démontrer que (EF) et (GH) sont parallèles.

Exercice 45

En réponse à un exercice, on écrit :
« $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ donc A, B, C et D sont coplanaires. ».
Rédiger un énoncé possible de cet exercice.

Exercice 46

On considère une pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base est un parallélogramme $ABCD$. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



7 Limites de fonctions

Table des matières

1	Limite d'une fonction en l'infini	130
A	Limite finie	130
B	Limite infinie	132
C	Limites usuelles	133
2	Limite d'une fonction en un point	133
A	Limite à gauche, limite à droite, limite en un point	133
B	Limites usuelles	135
3	Opérations sur les limites et théorèmes de comparaison	136
A	Opérations sur les limites, formes indéterminées	136
B	Limites de fonctions composées	138
C	Théorèmes de comparaison	139
	Exercices	142

Programme

Limites des fonctions

Les opérations sur les limites sont admises. L'utilisation de la composition des limites se fait en contexte.

Contenus

- ▶ Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
- ▶ Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.
- ▶ Limites et comparaison.
- ▶ Opérations sur les limites.

Capacités attendues

- ▶ Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minoration ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- ▶ Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

Démonstration

- ▶ Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et $\exp$ en $+\infty$.

Approfondissements possibles

- ▶ Asymptotes obliques. Branches infinies.

Dans tout ce chapitre, f , g et h désignent des fonctions.

1 – Limite d'une fonction en l'infini

A – Limite finie

Définition 1

Limite finie d'une fonction en l'infini

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f *converge vers* ℓ , ou admet pour *limite* ℓ , ou encore *tend vers* ℓ quand x tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de f à partir d'une certaine abscisse. On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

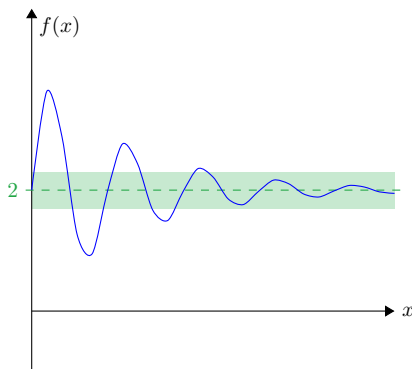
Autrement dit f tend vers ℓ en $+\infty$ si $f(x)$ devient et reste aussi proche que l'on veut de ℓ quand x s'approche de $+\infty$.

Une fonction qui admet une limite finie en $+\infty$ est dite *convergente en* $+\infty$. Sinon, on dit qu'elle est *divergente en* $+\infty$.

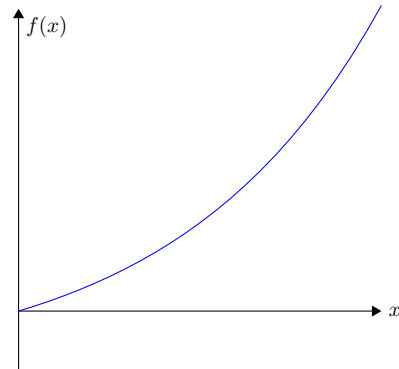
On définit de la même manière une limite finie quand x tend vers $-\infty$.

Exemple 2 (Sur des graphiques)

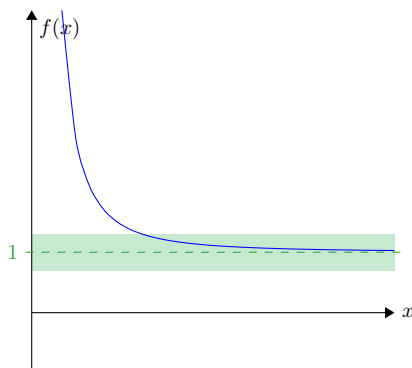
Sur un graphique, une convergence se traduit par une stabilisation vers la limite :



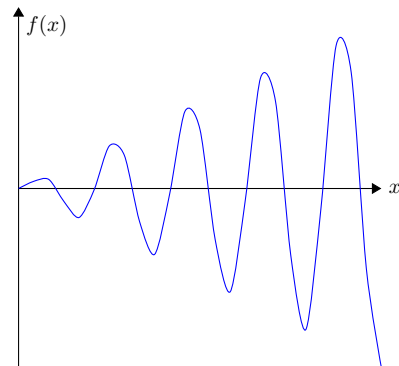
Semble converger vers $\ell = 2$.



Ne semble pas converger (semble devenir arbitrairement grande)



Semble converger vers $\ell = 1$



Ne semble pas converger (ne semble pas se concentrer à un endroit précis)

Exemple 3 (Avec une formule)

Soit f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Plus x devient grand, plus $\frac{1}{x}$ devient proche de 0. Donc plus x devient grand, plus $f(x)$ se rapproche de 1 : ainsi, f tend vers 1 en $+\infty$.

Théorème 4

Unicité de la limite

Une fonction convergente n'admet qu'une seule et unique limite.

Pour les curieux, voici la démonstration (non exigible).

Démonstration. Supposons que f converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2 . L'objectif est de montrer que nécessairement $\ell_1 = \ell_2$. Par l'absurde, supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$. Quitte à échanger leurs noms, supposons que $\ell_1 < \ell_2$. Posons $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$. Comme f tend vers ℓ_1 en $+\infty$, il existe un x_1 à partir duquel $\ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon$. Comme f tend également vers ℓ_2 en $+\infty$, il existe un x_2 à partir duquel $\ell_2 - \varepsilon < f(x) < \ell_2 + \varepsilon$. Notons $x_0 = \max(x_1, x_2)$. Pour $x \geq x_0$, on a donc :

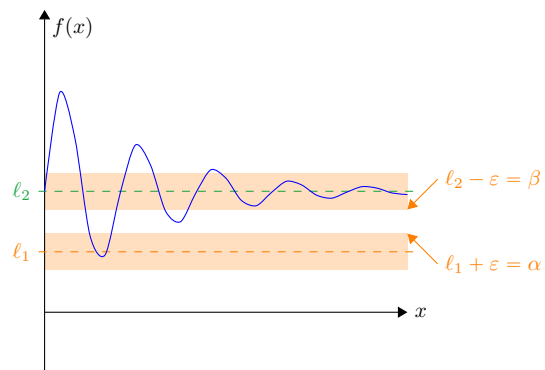
$$\bullet f(x) < \ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{\ell_2 + 2\ell_1}{3}.$$

Notons α ce dernier nombre.

$$\bullet f(x) > \ell_2 - \varepsilon = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{2\ell_2 + \ell_1}{3}.$$

Notons β ce dernier nombre.

Remarquons que $3(\beta - \alpha) = (2\ell_2 + \ell_1) - (\ell_2 + 2\ell_1) = \ell_2 - \ell_1 > 0$, donc $\beta > \alpha$. On a montré que $f(x) > \beta > \alpha > f(x)$: un nombre ne peut pas être strictement plus grand que lui-même, c'est absurde.



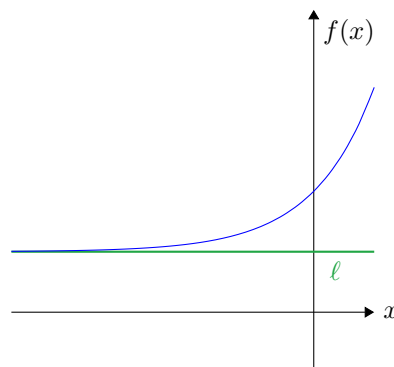
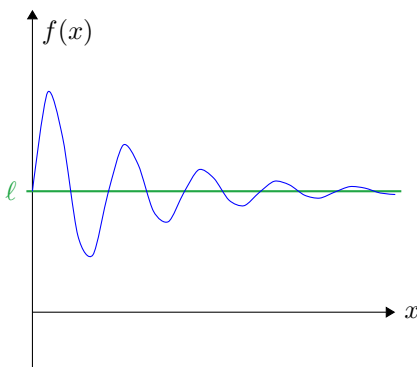
Résumé en dessin : f ne peut pas se rapprocher à la fois de ℓ_1 et de ℓ_2 s'ils sont distincts.

□

Définition 5

Asymptote horizontale

Lorsque f converge vers ℓ en $+\infty$, on dit que la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est une *asymptote à la courbe de f en $+\infty$* . On définit de la même manière une asymptote horizontale en $-\infty$.



B – Limite infinie

Limite infinie

Définition 6

- On dit que f admet comme limite $+\infty$, ou *tend vers* $+\infty$, ou *diverge vers* $+\infty$ en $+\infty$, si elle dépasse n'importe quel seuil arbitrairement grand à partir d'une certaine abscisse, autrement dit si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \geq x_0, f(x) > A$$

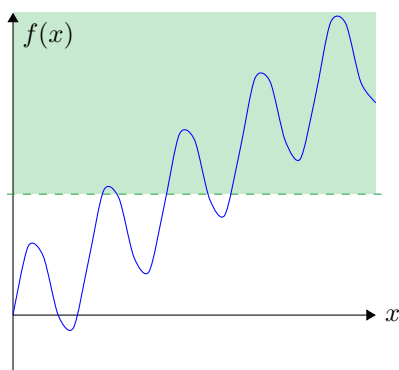
- On dit que f admet comme limite $-\infty$, ou *tend vers* $-\infty$, ou *diverge vers* $-\infty$ en $+\infty$, si elle passe en-dessous de n'importe quel seuil arbitrairement petit à partir d'une certaine abscisse, autrement dit si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \geq x_0, f(x) < A$$

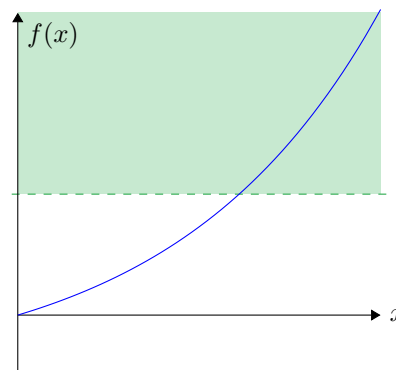
On définit de la même manière une limite infinie en $-\infty$.

Exemple 7 (Sur des graphiques)

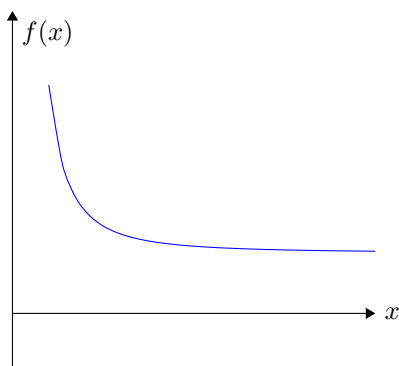
Sur un graphique, une divergence vers $+\infty$ se traduit par une augmentation ininterrompue :



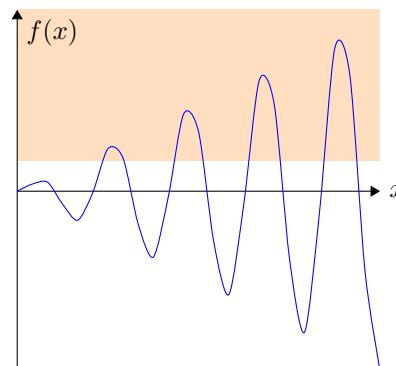
Semble diverger vers $+\infty$.



Semble diverger vers $+\infty$



Ne devient pas arbitrairement grande ou petite



Ne semble pas diverger vers $\pm\infty$: elle devient aussi grande/petite que l'on veut, mais elle ne reste pas au-dessus/en-dessous du seuil, elle est toujours tantôt au-dessus tantôt en-dessous

Exemple 8

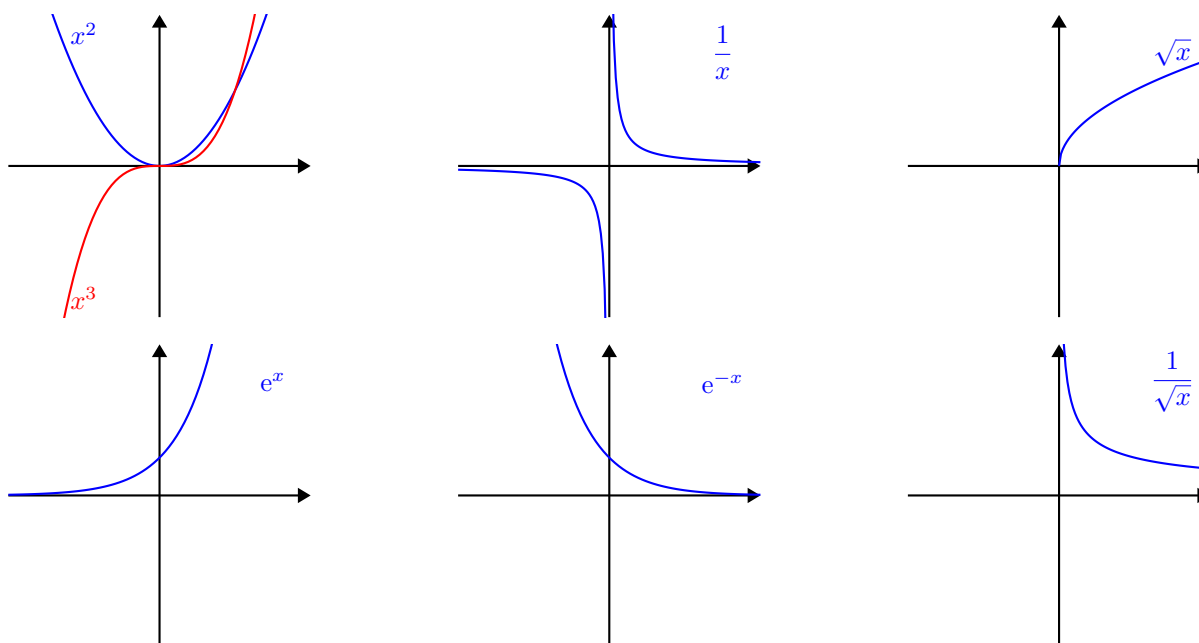
- La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Les fonctions affines de pente positive divergent vers $+\infty$ en $+\infty$, et vers $-\infty$ en $-\infty$. C'est l'inverse pour les fonctions affines de pente négative.

C – Limites usuelles

Proposition 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$.

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^{ax}	e^{-ax}
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	N/D	N/D	0	$+\infty$



2 – Limite d'une fonction en un point

A – Limite à gauche, limite à droite, limite en un point

Limite à droite et à gauche d'un point

Définition 10

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est définie sur un intervalle $]a; b[$ (à droite de a). On dit que f admet une *limite à droite* quand x tend vers a si quand x se rapproche de a par valeurs supérieures ($x > a$), $f(x)$ se rapproche d'une certaine valeur, finie ou infinie.

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

On définit de manière similaire la *limite à gauche* de f en a , que l'on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$.

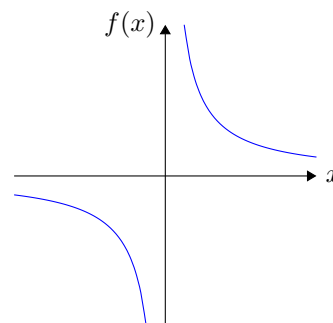
Remarque 11

On note parfois $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ la limite à droite et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ la limite à gauche.

Exemple 12

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Cette fonction admet en 0 deux limites à droite et à gauche différentes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$



Définition 13

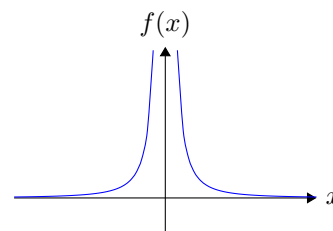
Limite en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose f définie autour de a . Si les limites à gauche et à droite de f en a sont identiques, alors leur valeur commune est appelée *limite de f en a* , notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exemple 14

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Cette fonction admet en 0 deux limites à droite et à gauche identiques :

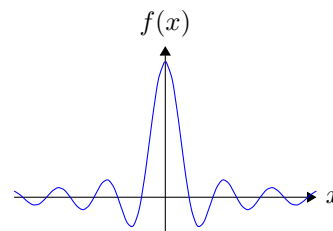
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Exemple 15

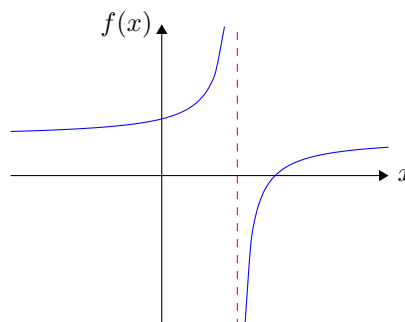
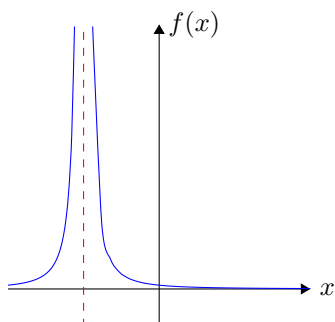
Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Cette fonction admet en 0 deux limites à droite et à gauche identiques :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



Asymptote verticale
Définition 16

Soit $a \in \mathbb{R}$. Lorsque f converge vers $\pm\infty$ en a , on dit que la droite verticale d'équation $x = a$ est une *asymptote à la courbe de f en a* .


Application 17

En simplifiant d'abord l'expression si possible, déterminer, si elle existe...

a► La limite quand $x \rightarrow 2$ de $x^2 - 1$.

c► La limite quand $x \rightarrow 0$ de $\frac{x}{|x|}$.

b► La limite quand $x \rightarrow 0$ de $\frac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

Exercices conseillés : 1, 2, 16, 23

B – Limites usuelles

Proposition 18
Limites usuelles en un point

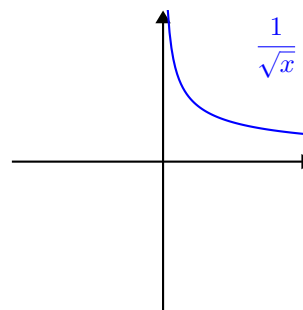
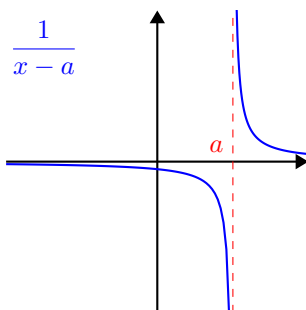
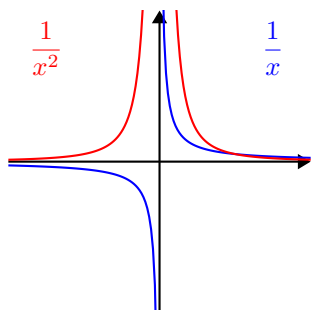
$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	N/D

Proposition 19
Limites usuelles en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\triangleright \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{x - a} = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{1}{x - a} = -\infty$$



Exercices conseillés : 10, 20

3 – Opérations sur les limites et théorèmes de comparaison

A – Opérations sur les limites, formes indéterminées

Le raisonnement est le même que pour les suites. Dans cette section, a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Les propositions sont écrites avec des limites "simples", elles sont identiques pour des limites à droite ou à gauche.

Formes indéterminées

Définition 20

Une *forme indéterminée* (FI) est une situation dans laquelle on ne peut pas déterminer directement une limite avec une opération. Il y en a 4, que l'on peut symboliser ainsi :

$$\blacktriangleright \infty - \infty \quad \blacktriangleright 0 \times \infty \quad \blacktriangleright \frac{0}{0} \quad \blacktriangleright \frac{\infty}{\infty}$$

Attention, ces écritures ne sont pas correctes, elles ne doivent jamais apparaître sur une copie !

Proposition 21

Limite d'une somme

$\begin{smallmatrix} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{smallmatrix}$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Proposition 22

Limite d'un produit

$\begin{smallmatrix} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{smallmatrix}$	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
0	0	0	FI
$\ell' \neq 0$	0	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$

(Le signe dans les cases en vert est déterminé par la règle des signes.)

Proposition 23

Limite d'un produit

$\begin{smallmatrix} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{smallmatrix}$	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
0	FI	FI	FI
$\ell' \neq 0$	0	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	FI

(Le signe dans les cases en vert est déterminé par la règle des signes.)

Ces propositions sont admises.

Exemple 24

Avec une rédaction sur-détaillée (inutile dans une copie, sauf si demandé explicitement) :

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ par somme, car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty.$$

- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ (par somme, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3 = +\infty$ (par somme, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^2 + 3) = +\infty$ par produit.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 3 = -\infty$ (par somme et produit, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$), et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 = -3$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-x^2 - 3} = 0$ par quotient.

Avec une rédaction suffisante pour une copie :

- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$ par somme
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3 = +\infty$ par somme, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^2 + 3) = +\infty$ par produit.
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 3 = -\infty$ par somme et produit, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-x^2 - 3} = 0$ par quotient.

Méthode 25 (Lever une forme indéterminée)

Dans une situation de forme indéterminée, on factorise l'expression (dans le cas d'un quotient, le numérateur et le dénominateur) par le terme « qui va le plus vite vers $\pm\infty$ », dit *prépondérant* : typiquement, par le terme de plus haut degré (du plus « lent » au plus « rapide », cela donne $\sqrt{x}$ puis x puis x^2 puis $x^3 \dots$).

Exemple 26 (Formes indéterminées)

- ▶ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^2 + 5x + 3$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». Le terme de plus haut degré est le terme en x^2 ; on factorise par x^2 :

$$-7x^2 + 5x + 3 = x^2 \left(-7 + \frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) = x^2 \left(-7 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -7 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = -7 \neq 0$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^2 + 5x + 3 = -\infty$.

- ▶ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + x}{x^3 + 4x}$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Les termes de plus haut degré aux numérateur et dénominateur sont les termes en x^2 et en x^3 ; on factorise et on simplifie :

$$\frac{5x^2 + x}{x^3 + 4x} = \frac{x^2 \left(5 + \frac{1}{x} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{4}{x} \right)} = \frac{5 + \frac{1}{x}}{x \left(1 + \frac{4}{x} \right)}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{4}{x} \right) = +\infty$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + x}{x^3 + 4x} = 0$.

- ▶ Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 2x}{3x^2 + 7}$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Les termes de plus haut degré aux numérateur et dénominateur sont les termes en x^2 ; on factorise et on simplifie :

$$\frac{8x^2 - 2x}{3x^2 + 7} = \frac{x^2 \left(8 - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(3 + \frac{7}{x^2} \right)} = \frac{8 - \frac{2}{x}}{3 + \frac{7}{x^2}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8 - \frac{2}{x} = 8$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{7}{x^2} = 3 \neq 0$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 2x}{3x^2 + 7} = \frac{8}{3}$.

Application 27

Déterminer les limites suivantes :

a► $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5)(3+x^2)$

c► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 + \frac{1}{x}$

f► $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \frac{3}{x}}{x-1}$

b► $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1-2x}{x-3}$

d► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-3x}-2}$

g► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$

e► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x}$

Application 28

Déterminer les limites à droite et à gauche de...

a► $x + 3 + \frac{1}{x}$ en 0

b► $\frac{2x-1}{x+2}$ en -2

c► $\frac{x}{x-2}$ en 2

Application 29

Déterminer les limites suivantes :

a► $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x$

b► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$

c► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$

Application 30Déterminer la limite suivante. Expliquer d'abord en quoi c'est une forme indéterminée, puis lever l'indétermination en factorisant en haut et en bas par $x-2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Application 31 (Méthode de la quantité conjuguée)Déterminer la limite suivante. Pour cela, multiplier la fraction en haut et en bas par la *quantité conjuguée* du dénominateur, c'est-à-dire par $\sqrt{x} + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

Exercices conseillés : 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 19

B – Limites de fonctions composées**Définition 32****Fonction composée**La fonction qui à x associe $g(f(x))$ est appelée *composée de g par f* , notée $g \circ f$, lu « g rond f » :

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

Théorème 33**Limite d'une fonction composée**Les lettres a , b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Démonstration. On effectue la démonstration dans le cas où a, b et c sont des réels, les autres cas sont similaires.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$. Soit $\varepsilon > 0$. On traduit les hypothèses :

- ▶ Il existe $\delta_g > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y - b| < \delta_g$, $|g(y) - c| < \varepsilon$.
- ▶ Il existe également $\delta_f > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < \delta_f$, $|f(x) - b| < \delta_g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < \delta_f$. Alors $|f(x) - b| < \delta_g$. Notons $y = f(x)$. D'après l'hypothèse, $|y - b| < \delta_g$ donc $|g(y) - c| < \varepsilon$, autrement dit $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$. $\square$

Exemple 34 (Rédaction type : changement de variable)

Soit $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Pour déterminer la limite de f en $+\infty$, on voit f comme la composée des fonction inverse et exponentielle. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$ (changement de variable $y = \frac{1}{x}$).

Exemple 35 (Rédaction type : changement de variable bis)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^{-x} - 1}$. On cherche à déterminer la limite de f à gauche de 0. On commence par remarquer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x - 1 = 0$ par continuité de $x \mapsto e^{-x}$. Or $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante, et $1 = e^{-0}$, donc pour tout $x < 0$, on a $e^x - 1 > 0$. Ainsi, dans le changement de variable $y = e^{-x} - 1$, y tend vers 0 par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{1}{y} = +\infty$.

Application 36

Déterminer les limites suivantes :

a ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

b ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + x^2}$

Exercice conseillé : 22

C – Théorèmes de comparaison

Théorème 37

Croissance de la limite

Si f et g convergent en $+\infty$, et si à partir d'une certaine abscisse, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

Théorème 38

Théorème de comparaison – minoration

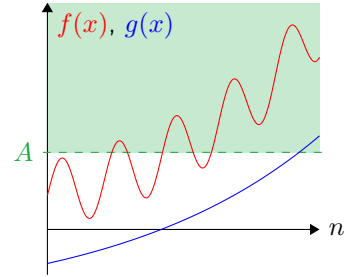
S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq x_0$, $f(x) \geq g(x)$, et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 39

On dispose également d'un résultat similaire (majoration) pour une limite qui vaut $-\infty$, ou une limite infinie en $-\infty$.

Démonstration.

Montrons le premier point. Supposons qu'à partir d'un certain $x_1 \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. La seconde hypothèse donne l'existence d' x_2 à partir duquel $g(x) > M$. En particulier, à partir de $x_0 = \max(x_1; x_2)$, $f(x) \geq g(x) > M$. Donc pour tout $x \geq x_0$, $f(x) > M$, avec M quelconque : cela montre bien que f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.



Exemple 40

Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq -1$, donc $x + \cos(x) \geq x - 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \cos(x) = +\infty$.

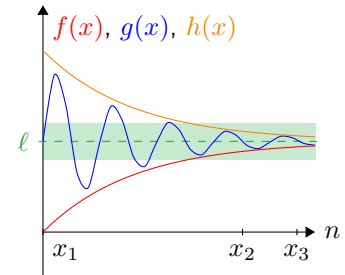
Théorème 41

Théorème des gendarmes

S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq x_0$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

Démonstration.

Supposons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ à partir duquel $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Supposons également que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe x_2 et x_3 deux réels à partir desquels $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ et $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$. Posons $x_0 = \max(x_1; x_2; x_3)$. Pour tout $x \geq x_0$, $\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$, donc $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$: cela montre que g converge vers ℓ en $+\infty$.



Exemple 42

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x}$. Comme on fait tendre x vers $+\infty$, on peut supposer $x > 0$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(x) \leq 1 \\ \text{donc} \quad -\frac{1}{x} &\leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x} && (\text{on divise par } x > 0) \\ \text{donc} \quad 1 - \frac{1}{x} &\leq 1 + \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x} && (\text{on ajoute } 1) \end{aligned}$$

mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \pm \frac{1}{x} = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Application 43

Déterminer les limites suivantes :

a► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos(x)}{x^2}$

b► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sin(x)$

Théorème 44**Croissance comparée**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

La démonstration de ce théorème est au programme, mais une maîtrise parfaite de la dérivation de fonctions est nécessaire pour la mener. Par ailleurs, on y utilise la notion de *dérivée seconde*, qui n'est autre que la dérivée de la dérivée. N'hésitez pas à revenir vers cette démonstration après avoir relu les chapitres sur la dérivation et sur la convexité qui (ré)expliquent ces notions.

Démonstration. (Exigible)

- On commence par montrer le premier point pour $n = 1$.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto e^x - x$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'' : x \mapsto e^x - 1$. Comme $\exp$ est croissante et $e^0 = 1$, on en déduit que pour tout $x \geq 0$, $f''(x) \geq 0$, donc f' est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Or $f'(0) = 1 > 0$, donc pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq f'(0) \geq 0$. On en déduit que f est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, en particulier

pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 1 \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$, $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$, donc pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq \frac{x^2}{2}$,

donc pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, donc par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définissons sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$. D'après les propriétés de la fonction exponentielle, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^{\frac{x}{n}})^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \times n\right)^n = f\left(\frac{x}{n}\right)^n \times n^n$$

avec f la fonction définie dans le premier point. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ (puisque $n \geq 0$) et $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$ (d'après le premier point), par limite des fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (car $n^n > 0$).

- D'après les propriétés de la fonction exponentielle,

$$h(x) = xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}} = -\frac{1}{f(-x)}$$

avec la fonction f du premier point. Posons $y = -x$. Quand $x \rightarrow -\infty$, on a $y = -x \rightarrow +\infty$, donc d'après le théorème de limite des fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$, donc à nouveau d'après le

théorème de limite des fonctions composées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{f(-x)} = -0 = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.

- Pour démontrer le second point en toute généralité, on utilise la même astuce que précédemment en écrivant :

$$x^n e^x = x^n \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = \left(xe^{\frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{x}{n}e^{\frac{x}{n}}\right)^n \times n^n = h\left(\frac{x}{n}\right)^n \times n^n$$

La rédaction rigoureuse et soignée de ce point est laissée en exercice.

□

Application 45

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 2)e^{-5x}$.

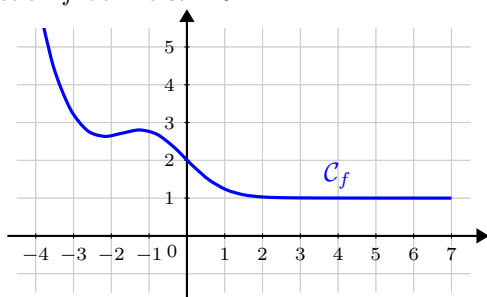
Exercices conseillés : 6, 12, 14, 15, 18, 21, 24

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



- 1► Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, en y précisant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2► Déterminer une équation de l'asymptote horizontale de la courbe de f .

Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
f	2	$+\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			1		

- 1► Donner les limites de f en $-\infty$, $+\infty$ et -1 .
- 2► Préciser le type de chaque asymptote qu'admet la courbe de f ainsi qu'une équation correspondante.
- 3► Tracer une allure possible de la courbe représentative de f .

Exercice 3 (QCM)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$. La limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à :

- 1► $-\infty$ 2► $+\infty$ 3► 0 4► n'existe pas

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes.

- 1► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 5x + 2$
- 2► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 6x + 5\sqrt{x} - 5$
- 3► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x+1}$
- 4► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2 - \cos(x)}$
- 5► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos^2(x) - x$
- 6► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos^2(x) - x$
- 7► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1}$
- 8► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$

Exercice 5

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes lorsque cela est possible.

- 1► $f(x) = 5x^3 - 3x + 1$
- 2► $f(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}$
- 3► $f(x) = -2x^4 + x^2 + 3$
- 4► $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$
- 5► $f(x) = 5e^x + x$
- 6► $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x} - 2e^x$

Exercice 6

Étudier les limites des fonctions suivantes et préciser les éventuelles asymptotes associées.

- 1▶ $f(x) = 3$ en 0 et en 2
- 2▶ $f(x) = |x|$ en 0, 3 et en $-\infty$
- 3▶ $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ en 5
- 4▶ $f(x) = x + \sqrt{x}$ en 0, 1 et $+\infty$
- 5▶ $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ en 0, 3 et en $-\infty$
- 6▶ $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ en $\sqrt{5}$ et en $-\infty$
- 7▶ $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$
- 8▶ $f(x) = e^{-x^2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
- 9▶ $f(x) = e^x + e^{-x}$ en $-\infty$
- 10▶ $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ en 0 et en $-\infty$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 2}$$

- 1▶ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2▶ Étudier la limite de la fonction f en 0, en 1 et en $+\infty$.
- 3▶ Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe de f .

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble. On précisera également les éventuelles asymptotes.

- 1▶ $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$
- 2▶ $f(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}$
- 3▶ $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
- 4▶ $f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 5}}$

Exercice 10

Calculer :

- A▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x - 2}$
- B▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3}{2 - x}$
- C▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{x - 1}$
- D▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{6x + 4}{3x - 6}$
- E▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1 - x}{2 - x}$
- F▶ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x^2 - 1}$

Je comprends mon cours

Exercice 11

Étudier les fonctions suivantes (ensemble de définition, variations, limites aux bords de son ensemble de définition, asymptotes à sa courbe) puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé ainsi que ses asymptotes.

- ▶ $f(x) = \frac{x + 2}{3x - 6}$ ▶ $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{x - 1}$$

- 1▶ Déterminer les limites en $+\infty$, $-\infty$ et 1 de f .
- 2▶ Déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe de f .

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1► a► Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b► En déduire l'existence de deux asymptotes à $\mathcal{C}$.

- 2► a► Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f(-x) = -f(x).$$

- b► Qu'en déduit-on graphiquement ?

- 3► a► Calculer la dérivée f' de f .
b► Étudier le signe de f' .
c► En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2 - 2x}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1► Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2► Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe.
- 3► En déduire le tableau de variations de f .
- 4► Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
- 5► Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Exercice 15

On note $E(x)$ la partie entière du nombre réel x , c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{E(x) + 2}{x}$$

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de g .
- 2► Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

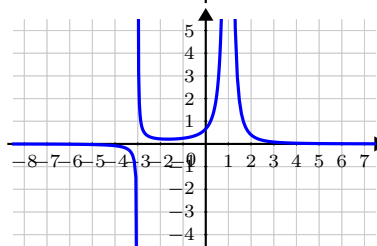
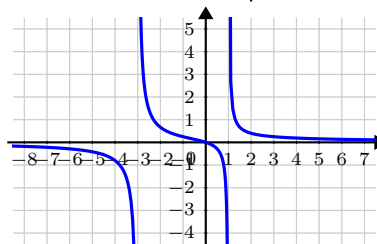
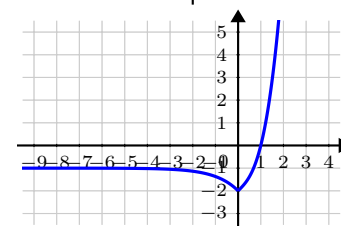
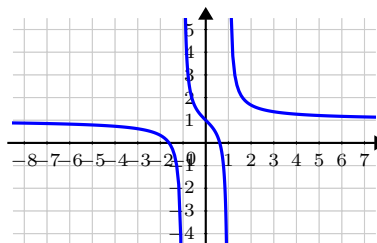
$$x - 1 \leq E(x) \leq x$$

- 3► En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Exercice 16

Pour chaque fonction représentée :

- 1► Conjecturer l'ensemble de définition.
- 2► Quelles limites peut-on conjecturer aux bornes de l'ensemble de définition ?
- 3► Quelles asymptotes éventuelles peut-on conjecturer ?



Exercice 17

Indiquer si chaque proposition est vraie ou fausse. Justifier.

- 1► Si f est une fonction strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- 2► Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$.

Exercice 18

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$. Que peut-on en déduire pour les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$?

Exercice 19

Déterminer l'expression d'une fonction f définie sur un ensemble à préciser vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$.

Exercice 20

Déterminer l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique admet une asymptote d'équation $y = 2$ en $-\infty$ mais pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Vers le supérieur

Exercice 21

Une seule réponse est bonne. Laquelle ? Justifier. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{a}{b + e^{-t}}$$

où a et b sont deux nombres réels. On sait que $g(0) = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 3$. Alors :

- | | |
|---------------------------------|-----------------------|
| 1► $a = 2$ et $b = 3$ | 3► $a = 4$ et $b = 1$ |
| 2► $a = 4$ et $b = \frac{4}{3}$ | 4► $a = 6$ et $b = 2$ |

Exercice 22

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$.

- 1► Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 2► En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$.
- 3► Retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.

Exercice 23

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1► Au maximum, combien d'asymptotes horizontales $\mathcal{C}_f$ peut-elle admettre ? Et d'asymptotes verticales ?
- 2► Trouver deux exemples de représentations graphiques permettant d'illustrer les réponses à la question précédente.

Exercice 24

Soit f la fonction racine carrée et A un nombre réel positif.

- 1► Rappeler l'expression $f(x)$ ainsi que l'ensemble de définition de f .
- 2► Conjecturer la limite de f en $+\infty$.
- 3► Justifier que, si $x > A^2$, alors $f(x) > A$.
- 4► Que peut-on en conclure sur la limite de f en $+\infty$?

8 Continuité

Table des matières

1	Continuité d'une fonction numérique	148
A	Définition et premiers exemples	148
B	Opérations sur les fonctions continues, fonctions de référence	149
2	Continuité et convergence de suites	151
3	Théorème des valeurs intermédiaires	152
	Exercices	155

Programme

Continuité des fonctions d'une variable réelle

La justification de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle n'est pas un objectif du programme. Hormis pour la fonction exponentielle, l'étude de la réciproque d'une fonction continue n'est pas au programme.

Contenus

- ▶ Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- ▶ Image d'une suite convergente par une fonction continue.
- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

Capacités attendues

- ▶ Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- ▶ Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples d'algorithme

- ▶ Méthode de dichotomie.
- ▶ Méthode de Newton, méthode de la sécante.

Approfondissements possibles

- ▶ Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires.
- ▶ Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y
- ▶ Prolongement par continuité.

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction, a désigne un réel et I désigne un intervalle ouvert contenant a .

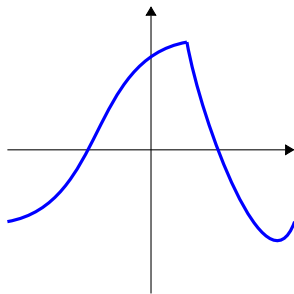
1 – Continuité d'une fonction numérique

A – Définition et premiers exemples

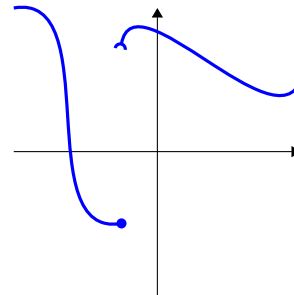
Définition 1

Une fonction est dite *continue sur un intervalle* si sa courbe représentative sur cet intervalle peut être tracée sans discontinuité, c'est-à-dire sans lever le crayon.

Continuité sur un intervalle, intuition



Fonction continue



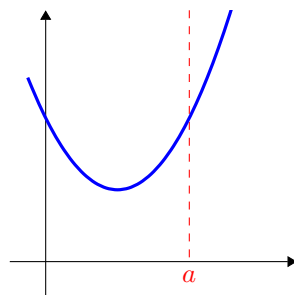
Fonction non continue

Définition 2

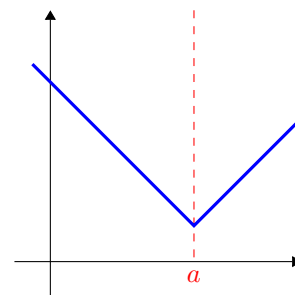
Continuité en un point, sur un intervalle

- ▶ On dit que f est *continue en a* lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- ▶ On dit que f est *continue sur I* lorsque f est continue en tout point de I .

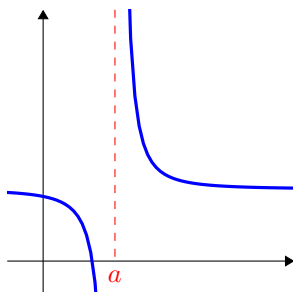
Exemple 3



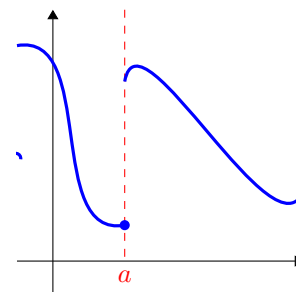
Continue en a



Continue en a



Non continue en a



Non continue en a

Exemple 4

Considérons la fonction f définie par morceaux par : $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -2x + 13 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$.

Vérifions par le calcul si f est continue en 3 et en 5, et traçons son graphe pour s'en convaincre.

Pour savoir si f est continue en un point a , on doit vérifier si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Pour cela on doit vérifier

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$, autrement dit que les expressions de f de part et d'autre de a donnent la même valeur, qui est $f(a)$.

► Pour 3 : comme $3 \leq 3 < 5$, $f(3)$ se calcule avec la seconde expression : $f(3) = 3 - 4 = -1$.

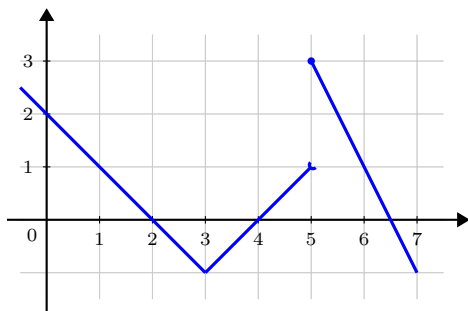
De part et d'autre de 3, les expressions de $f(x)$ sont $x - 4$ à droite et $-x + 2$ à gauche. On doit vérifier si, quand x tend vers 3 par la droite ou par la gauche, on obtient $f(3) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{À gauche : } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} -x + 2 = -3 + 2 = -1. \\ \text{À droite : } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} x - 4 = 3 - 4 = -1. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \\ \text{donc } f \text{ est continue en 3.} \end{array}$$

► Pour 5 : on applique le même procédé. Les idées clés de la rédaction qu'il faudrait faire sont :

$$\bullet f(5) = -2 \times 5 + 13 = 3 \quad \bullet -2x + 13 = -2 \times 5 + 13 = 3 \quad \bullet x - 4 = 5 - 4 = 1$$

Donc f n'est pas continue en 5.



Le premier morceau correspond à la droite de pente -1 passant par $(0; 2)$. Le deuxième morceau est un segment de la droite de pente 1 passant par $(5, 1)$. Le dernier morceau correspond à la droite de pente -2 passant par $(5; 3)$. La valeur de $f(5)$ est 3, ce que l'on indique par un petit disque.

Exercices conseillés : 1, 2

B – Opérations sur les fonctions continues, fonctions de référence

Proposition 5

Soient f et g deux fonctions continues.

- La somme $(f + g)$, le produit $(f \times g)$ et la composée $(g \circ f)$ de fonctions continues sont continues.
- Si g ne s'annule pas, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est continu.

Théorème 6

Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Démonstration. On rappelle que la dérivabilité de f en a se traduit par l'existence et la finitude de la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, que l'on note $f'(a)$. Pour tout $x \neq a$,

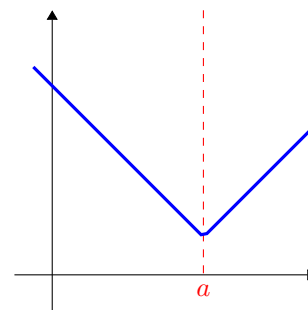
$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \quad \text{donc} \quad f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} x - a = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + f'(a) \times 0 = f(a)$, ce qui signifie que f est continue en a . $\square$

Remarque 7 (La réciproque est fausse !)

Attention, ça ne marche pas dans l'autre sens, une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable ! Par exemple, une fonction qui présente un point anguleux peut être continue en ce point, mais pas dérivable (car les tangentes à droite et à gauche ne sont pas identiques).

Les mathématiciens Karl Weierstrass et Leopold Kronecker ont même réussi à créer une fonction continue en tout point mais dérivable nulle part...



Exercices conseillés : 3, 23

Continuité des fonctions de références

Propriété 8

La fonction ...	... est continue sur ...
Valeur absolue ($ x $)	$\mathbb{R}$
Puissance ($x^n, n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$
Exponentielle (e^x)	$\mathbb{R}$
Logarithme ($\ln(x)$)	$]0; +\infty[$

La fonction ...	... est continue sur ...
Cosinus ($\cos(x)$)	$\mathbb{R}$
Sinus ($\sin(x)$)	$\mathbb{R}$
Racine carrée ($\sqrt{x}$)	$[0; +\infty[$
Inverse ($\frac{1}{x}$)	$] - \infty; 0[$ ET $]0; +\infty[$

Méthode 9 (Rédaction-type : justifier la continuité)

Pour justifier qu'une fonction est continue, on la décompose en somme, produit et composée de fonctions de référence.

Exemple : $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x} \times e^{\sin(x)}$ est continue sur $[0; +\infty[$ car $x \mapsto e^{\sin(x)}$ est continue sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues sur $[0; +\infty[$, et f est donc la somme et le produit de trois fonctions continues sur $[0; +\infty[$ ($x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto e^{\sin(x)}$).

Application 10

Justifier que $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2 – Continuité et convergence de suites

Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 11

Si f est continue en a , alors pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$. Autrement dit :

$$\text{Si } f \text{ continue en } a, \text{ alors pour toute suite } (u_n), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$$

Démonstration. Supposons f continue en a , soit (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers a . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \delta; a + \delta]$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - a| < \delta$, c'est-à-dire $u_n \in [a - \delta; a + \delta]$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$. C'est la définition de la convergence de $(f(u_n))$ vers $f(a)$. $\square$

Remarque 12

C'est en fait une équivalence : si, pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$, alors f est continue en a .

Exemple 13

Soient $f : x \mapsto (x + 1)^2$, qui est continue sur $\mathbb{R}$, et (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, qui converge vers 2. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(2) = (2 + 1)^2 = 9$.

Corollaire 14 (Théorème du point fixe)

Soient ℓ un réel, f une fonction continue en ℓ , et (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. Sous les hypothèses énoncées dans le corollaire : remarquons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, donc la suite (u_{n+1}) converge vers ℓ , mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ : ainsi, on peut écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$. Or f est continue en ℓ , et (u_n) converge vers ℓ , donc d'après la caractérisation séquentielle de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(\ell)$. Par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$. $\square$

Remarque 15

Un réel x tel que $f(x) = x$ est appelé *point fixe* de f . Ce théorème dit que si (u_n) converge, alors, nécessairement, la limite est un point fixe de f . Attention, une fonction peut avoir plusieurs points fixes. Cela permet de réduire le nombre de candidats à la limite.

Exemple 16 (Suites arithmético-géométriques)

Soit (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$. Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors ℓ est un point fixe de $x \mapsto 0,5x + 1$ (car cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$), c'est-à-dire $\ell = 0,5\ell + 1$, donc $\ell = 2$. Il ne reste qu'à vérifier si (u_n) est vraiment convergente...

Application 17

Déterminer la limite de (u_n) définie par $u_0 = 0, 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 0,5]$, puis déterminer la limite de (u_n) à l'aide du théorème du point fixe (attention à toutes les hypothèses...).

Application 18

Déterminer la limite de (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. (Indication : à l'aide de la calculatrice, conjecturer la monotonie et un encadrement de (u_n) , et démontrer cette conjecture par récurrence.)

Exercices conseillés : 7, 8, 18, 20

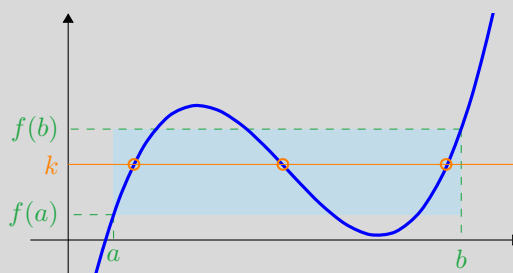
3 – Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 19

Soient $a < b$ deux réels de I , supposons f continue sur $[a; b]$.

Pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution dans $[a; b]$.

(Autrement dit, il existe au moins un $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.)



Théorème des valeurs intermédiaires

Remarque 20 (Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires)

On peut en fait remplacer a et b par $\pm\infty$, ou par des réels où la courbe de f admet une asymptote verticale. Auquel cas, on remplace $f(a)$ et/ou $f(b)$ par leurs limites (éventuellement à droite ou à gauche si nécessaire). Prêtez une grande attention aux rédactions types proposées dans les exemples plus loin.

Démonstration. On va avant toute chose démontrer rapidement le *théorème des suites adjacentes* : soient (u_n) et (v_n) deux suites respectivement croissante et décroissante telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$. Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_0$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Ainsi, $v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$. En particulier, (u_n) est croissante et majorée par v_0 , et (v_n) est décroissante et minorée par u_0 . Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Par hypothèse, $\ell - \ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$, donc $\ell = \ell'$. Deux suites qui vérifient ces hypothèses sont dites *adjacentes* : on a montré que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires, nous allons construire deux suites adjacentes : leur procédé de construction que nous allons détailler porte un nom : c'est ce que l'on appelle la *méthode par dichotomie*.

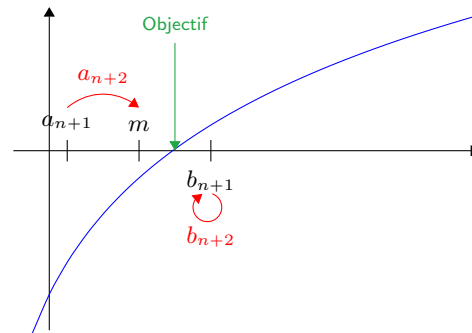
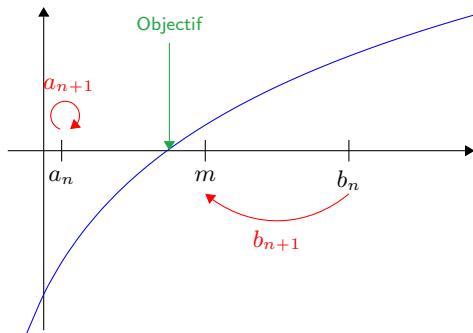
Pour fixer les idées, supposons que $f(a) \leq f(b)$, l'autre cas est identique. Soit $k \in [f(a); f(b)]$. Quitte à remplacer f par $f - k$, supposons que $k = 0$ (autrement dit on décale verticalement le graphe de f). L'hypothèse $k = 0 \in [f(a); f(b)]$ se traduit alors par $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.

On cherche à construire $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$. On va construire pas à pas deux suites (a_n) et (b_n) comme suit :

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Supposons a_n et b_n construits. Expliquons comment construire a_{n+1} et b_{n+1} . Posons $m = \frac{a_n + b_n}{2} \in [a; b]$. Deux cas de figure :

- Soit $f(m) \geq 0$ alors $0 \in [f(a); f(m)]$, et on pose $b_{n+1} = m$ et $a_{n+1} = a_n$.
- Soit $f(m) \leq 0$ alors $0 \in [f(m); f(b)]$, et on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.

Explication : on cherche c entre a et b tel que $f(c) = 0$. On regarde m le milieu de $[a; b]$: soit $f(m)$ est positif, soit il est négatif. Ainsi, on peut restreindre la recherche à gauche ou à droite de m . On reproduit le procédé afin d'affiner encore et encore l'intervalle de recherche de c .



Il reste à montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$ découle de la construction (à chaque fois, on prend m au milieu, qui est donc toujours plus grand que a_n et plus petit que b_n). Ensuite, du fait que m est le milieu de $[a_n; b_n]$ à chaque étape, l'amplitude de $[a_n; b_n]$ est divisée par 2 à chaque étape, autrement dit $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, donc $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc converge vers 0. Enfin, la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n) découle encore une fois de la construction, car on prend m au milieu de a_n et b_n , donc est plus grand que a_n et plus petit que b_n . Finalement, d'après le théorème des suites adjacentes, (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune, que l'on appelle c .

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a = a_0 \leq a_n \leq c \leq b_n \leq b_0 = b$, donc $c \in [a; b]$. Comme f est continue sur $[a; b]$, donc en c , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c)$. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \in [f(a_n); f(b_n)]$, autrement dit $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$, donc $f(a_n) \times f(b_n) \leq 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \times f(b_n) \leq 0$, donc $f(c)^2 \leq 0$, donc $f(c) = 0$. Donc c correspond à ce que l'on cherchait. $\square$

Exemple 21

Soit $f : x \mapsto x^3 - x^2 - 1$. On cherche si l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution, et si oui, on souhaite encadrer une solution (à l'unité).

La fonction f est continue sur $[1; 2]$ comme somme et produit de fonctions continues. On remarque que $f(1) = -1$ et $f(2) = 3$, et $0 \in [-1; 3]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution sur $[1; 2]$.

Exercices conseillés : 4, 6, 9, 16, 19, 24, 27, 28

Lemme 22 (Injectivité et monotonie)

Si f est une fonction strictement monotone (c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante), alors pour tout réel k , l'équation $f(x) = k$ admet **au plus** 1 solution (c'est-à-dire soit aucune, soit 1 exactement).

Démonstration. Supposons qu'il existe c et c' dans $[a; b]$ tels que $f(c) = f(c') = k$. Montrons que $c = c'$: par l'absurde, supposons le contraire. Quitte à les permuter, supposons que $c < c'$. Par stricte monotonie de f , $f(c) < f(c')$ ou $f(c) > f(c')$ (selon si f est croissante ou décroissante). Or ces inégalités strictes sont impossibles car $f(c) = f(c')$. C'est contradictoire, donc $c = c'$, d'où l'unicité. $\square$

Corollaire 23

Sous les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires, si f strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique** solution.

Exemple 24

Reprenons l'exemple précédent. Montrons que la solution sur $[1; 2]$ est unique. Pour tout $x \in [1; 2]$, f est dérivable en x , de dérivée $3x^2 - 2x = x(3x - 2)$. C'est un polynôme de degré 2, de racines 0 et $\frac{2}{3}$, de coefficient dominant $3 > 0$, donc elle est négative entre ses racines et positive en dehors. Ainsi, $f'(x) > 0$ pour $x \in [1; 2]$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution sur $[1; 2]$.

Exemple 25

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Montrons que l'équation $f(x) = 100$ admet une unique solution sur $]0; 1]$.

La fonction f est continue sur $]0; 1]$, de plus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 1$. Or $100 \in [1; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 100$ admet une unique solution sur $]0; 1]$. Comme f est strictement décroissante sur $]0; 1]$, la solution est unique.

Application 26

Déterminer un encadrement à 10^{-2} de la solution mentionnée dans les exemples précédents à l'aide de la calculatrice.

Pour cela, on créera un tableau de valeurs de f de pas 0,1 entre 1 et 2 afin de déterminer un encadrement à 10^{-1} , puis un nouveau tableau de valeurs de f de pas 0,01 entre les bornes de ce nouvel encadrement.

On dit que l'on procède par *balayage*.

Application 27 (Exercice-type)

Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$.

- a► Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
- b► Dresser le tableau de variations complet (avec les limites) de f sur $\mathbb{R}$.
- c► Justifier l'existence ou non, éventuellement l'unicité, d'une solution à l'équation $f(x) = 4$ sur $] -\infty; 0]$, sur $[0; 2]$ et sur $[2; +\infty[$.
- d► Résoudre $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée de la ou des solutions à 10^{-2} près.

Exercices conseillés : 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 21, 22, 25, 26, 29

Théorème 28

Théorème des valeurs intermédiaires, version plus générale

Supposons f continue sur I , où I est n'importe quel intervalle.

Soient M et m le supremum et l'infimum de f sur I c'est-à-dire soit le maximum et le minimum, soit un infini si f diverge en a ou en b .

Pour tout $k \in]m, M[$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution.

Exemple 29

Soit $f : x \mapsto x^3 - 2$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable, et de dérivée $f' : x \mapsto 3x^2$ qui est strictement positive sauf en un unique point de l'intervalle $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante.

On rappelle que $\mathbb{R} =] -\infty; +\infty[$. Comme f est croissante, son supremum sur $\mathbb{R}$ est $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et son infimum sur $\mathbb{R}$ est $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Or $0 \in] -\infty; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-4)/x & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1► Tracer la courbe représentative de f sur $[-5; 5]$.
- 2► Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$?
- 3► Démontrer cette conjecture.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1► Tracer la courbe représentative de f sur $[-5; 5]$.
- 2► Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$?
- 3► Démontrer cette conjecture.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x^2 - 4|.$$

Graphiquement, la fonction f semble-t-elle continue sur $\mathbb{R}$? Dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x - 2$$

Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f		e^2	$-\infty$

- 1► Justifier que pour $m \in]0; e^2[$ l'équation $f(x) = m$ admet exactement deux solutions.
- 2► Justifier que pour $m \in]e^2; +\infty[$ l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 2► a► Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2; +\infty[$.
b► Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2; +\infty[$. En donner un encadrement au dixième près.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

- 1► Déterminer l'expression d'une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ ainsi que l'ensemble de définition de cette fonction f .
- 2► Vérifier que si $x \in [2; 5]$, alors $f(x) \in [2; 5]$.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 3$$

- 1► Démontrer par récurrence que pour tout entier

naturel n : $15 < u_{n+1} \leq u_n$.

- 2► La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
3► On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ en justifiant soigneusement.

Je comprends mon cours

Exercice 9

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2.$$

- 1► Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2► Démontrer que la limite de la fonction g en $-\infty$ vaut -2 .
3► On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x , puis dresser le tableau de variations de la fonction g .
4► Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5► En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6► À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

Exercice 10

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}.$$

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$.
2► Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3► En déduire le signe de $P(x)$ pour tout réel x .
4► Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} - 3.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement à 10^{-3} près.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-2x + 1)e^{-x} - 3.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement à 10^{-3} près.

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2(x-1)e^{x-1} - x^2.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement à 10^{-3} près.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}e^x.$$

- 1► Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une

unique solution α .

- 2► Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0, 1.
- 3► Soit $k \in \mathbb{Z}$. Donner, selon les valeurs de k , le nombre exact de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$$

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 2► a► Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $\alpha < \beta$ et $\alpha \in [0; 1]$.
b► Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 18

On souhaite définir une suite (u_n) par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{6}{u_n + 1}$.

- 1► Déterminer l'expression d'une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ ainsi que l'ensemble de définition de cette fonction f .
- 2► Vérifier que si $x \in [0; 6]$, alors $f(x) \in [0; 6]$. On peut alors conclure par récurrence que tous les termes de la suite sont bien définis puisque le dénominateur dans la formule de récurrence permettant de déduire u_{n+1} à partir de u_n ne s'annule jamais. On peut donc définir une telle suite (u_n) .
- 3► On admet que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à l'intervalle $[0; 6]$. Déterminer la valeur de ℓ .

Exercice 19

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3 - \frac{u_n + 1}{e^{u_n}}.$$

- 1► Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 3 - \frac{x+1}{e^x}$ définie pour $x \in [0; +\infty[$.
- 2► Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique

solution α sur $\mathbb{R}$.

- 3► Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
- 4► Montrer, par récurrence, que (u_n) est croissante et majorée par α .
- 5► Justifier que la suite (u_n) converge.
- 6► Déterminer la limite de (u_n) .

Objectif Bac

Exercice 20 (BAC 2021)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1► Calculer u_1 .

- 2► On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

- a► Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
- b► En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- c► On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Exercice 21 (Étude complète d'une fonction)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x} - (2x + 1)e^x$. On définit la fonction $g : x \mapsto 3e^{2x} - 2x - 3$.

Partie A

- 1► Déterminer la limite de g en $\pm\infty$.
- 2► a► On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on note g' sa fonction dérivée.
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 6e^{2x} - 2$.
b► Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.
c► En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 3► a► Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
b► Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution $\alpha \neq 0$ dont on déterminera un encadrement à 10^{-1} .
- 4► En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f' sa fonction dérivée.

- 1► Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie A.
- 2► En déduire le signe de f' , puis les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Vers le supérieur**Exercice 22**

Montrer que l'équation $(E) : \sqrt{x+1} = -2x+3$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de a .

Exercice 23

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{\substack{2 \rightarrow f \\ 2 < f}}(x) = 4$, $f(2) = 6$ et $\lim_{\substack{2 \rightarrow f \\ 2 > f}}(x) = 8$.

- 1► f est-elle continue en 2?
- 2► Tracer une courbe compatible avec une telle fonction f .

Exercice 24 (QCM)

Une seule des quatre réponses proposées est exacte. Justifier.

On considère une fonction g continue sur l'intervalle $[-2; 4]$ telle que :

$$g(-1) = 0 \quad g(1) = 4 \quad g(3) = -1$$

On peut affirmer que :

- 1► la fonction g est croissante sur $[-1; 1]$.
- 2► la fonction g est positive sur $[-1; 1]$.
- 3► l'équation $g(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2; 4]$.
- 4► il existe au moins un réel a dans l'intervalle $[1; 3]$ tel que $g(a) = 1$.

Exercice 25

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction continue g . Déterminer selon la valeur du nombre réel k , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

x	-2	3	6
g	3		8

↘ ↗
1

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1.$$

Déterminer, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 27

Montrer que si une fonction est continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I , alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

Exercice 28

Montrer qu'un polynôme de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29

Soient $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x^2$ et $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $\sqrt{x}$.
Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$? Justifier.

9 Loi binomiale

Table des matières

1	Épreuve, loi et schéma de Bernoulli	162
2	Loi binomiale	163
A	Une introduction avec la planche de Galton	163
B	Définition et propriétés	165
C	Fonction de répartition (HP)	165
D	Problème de seuil grâce à une calculatrice	166
	Exercices	168

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Contenus

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i . Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Capacités attendues

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X , calculer numériquement une probabilité du type $\mathbb{P}(X = k)$, $\mathbb{P}(X \leq k)$, $\mathbb{P}(k \leq X \leq k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $\mathbb{P}(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$.

Démonstration

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Exemples d'algorithme

- Simulation de la planche de Galton.
- Problème de la surréservation. Étant donné une variable aléatoire binomiale X et un réel strictement positif α , détermination du plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X > k) \leq \alpha$.
- Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.

Approfondissements possibles

- Loi géométrique.
- Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (événements rares).

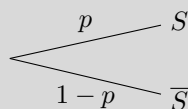
1 – Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition 1

Épreuve de Bernoulli

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée *succès* (S) et l'autre *échec* ($\bar{S}$).

Si la probabilité du succès est $p \in [0; 1]$, alors la probabilité de l'échec est $1 - p$. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est appelée *loi de Bernoulli de paramètre p* , notée $\mathcal{B}(p)$.



Issue	S	$\bar{S}$
Proba	p	$1 - p$

Exemple 2

- ▶ On lance une pièce équilibrée, on appelle succès l'événement « Obtenir Pile ». C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
- ▶ On lance un dé équilibré, on appelle succès l'événement « Obtenir un 6 ». C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
- ▶ On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On appelle succès l'événement « Obtenir un as ». C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Définition 3

Variable de Bernoulli

On dit que X suit la loi $\mathcal{B}(p)$, et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, lorsque la loi de X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété 4

Moments de la loi de Bernoulli

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

$$\mathbb{E}[X] = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = p(1 - p)$$

Démonstration. ▶ $\mathbb{E}[X] = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p$.

- ▶ La variable aléatoire X^2 prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités $1 - p$ et p , donc :

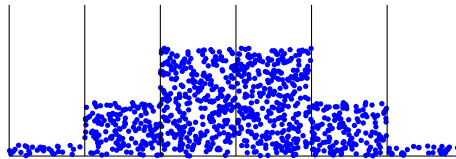
$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 0 \times \mathbb{P}(X^2 = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X^2 = 1) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

□

Définition 5

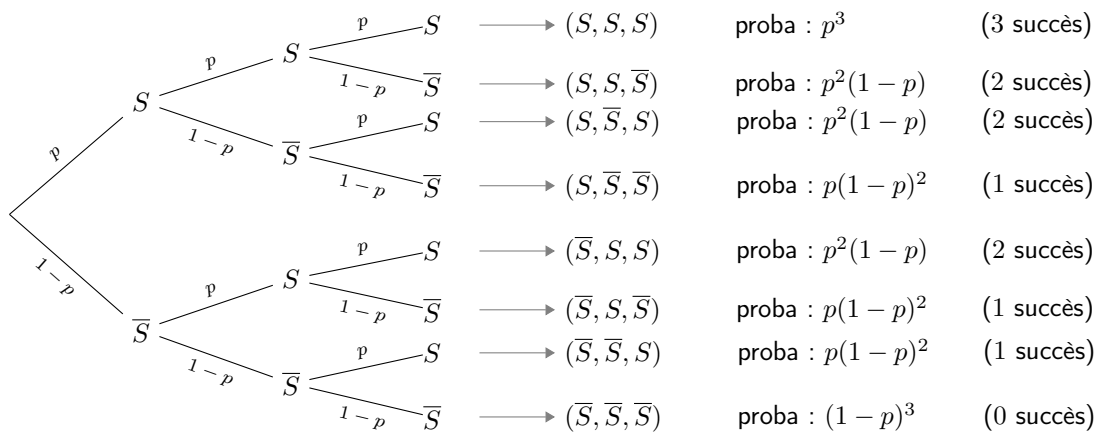
Schéma de Bernoulli

L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p est appelée *schéma de Bernoulli de paramètres n et p* .



Elle n'est pas équilibrée ! Essayons de comprendre d'où cela vient, voire quantifier ce déséquilibre. Déjà, il faut modéliser la situation. Disons que le succès de l'épreuve de Bernoulli à chaque étage est « la bille va vers la droite ». Numérotions les compartiments de 0 à 5. Pour que la bille tombe dans le compartiment 0 tout à gauche, elle doit nécessairement aller à gauche à chaque étage, autrement dit faire 0 succès. À l'inverse, pour aller dans le compartiment 5 tout à droite, elle doit aller à droite à chaque épreuve, autrement dit faire 5 succès. Pour les compartiments intermédiaires, on se convainc que pour tomber dans le compartiment 1, la bille doit en tout aller 1 fois à droite (et donc 4 fois à gauche), pour tomber dans le compartiment 2, la bille doit en tout aller 2 fois à droite (et donc 3 fois à gauche), et ainsi de suite. Mais à part pour les compartiments 0 et 5, il y a plusieurs routes permettant d'arriver à un même compartiment. Essayons de les dénombrer.

Pour simplifier la représentation, considérons un schéma de Bernoulli à 3 épreuves, avec une probabilité de succès p . Listons toutes les issues possibles, leur probabilité et le nombre de succès correspondant.



Comme on l'a vu, nous devons nous intéresser au nombre de succès. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli. Sa loi de probabilité est la suivante :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$(1-p)^3$	$3 \times p(1-p)^2$	$3 \times p^2(1-p)$	p^3

En effet, il y a 1 chemin menant à 0 succès et 3 succès, et 3 chemins menant à 1 succès et 2 succès. Comment peut-on retrouver ces valeurs sans redessiner tout l'arbre ? Comment étendre ceci à un schéma de Bernoulli avec plus d'épreuves ? Raisononnons un peu : on ne s'intéresse qu'au nombre de succès, pas à leurs positions dans le chemin. Dans le cas général avec n épreuves, combien y a-t-il d'issues avec k succès ? Choisir une telle issue revient à choisir les positions des k succès parmi les n épreuves, puisque les autres sont alors des échecs. Il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins

menant à k succès. Dans le cas $n = 3$, on retrouve bien $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3!$

B – Définition et propriétés

Définition 7

Loi binomiale

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi d'une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . On note cette loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Propriété 8

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La démonstration correspond au raisonnement fait en fin d'introduction.

Démonstration. (Exigible) Choisir une issue avec k succès revient à choisir les positions des k succès parmi les n épreuves, puisque les autres sont alors des échecs. Il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins avec exactement k succès. Sur ces chemins, il y a donc $n - k$ échecs. La probabilité d'un succès est p , donc celle de k succès est p^k , et celle de $n - k$ échecs est $(1 - p)^{n-k}$. Finalement, la probabilité d'obtenir exactement k succès est $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. $\square$

Application 9

On tire 11 fois au hasard avec remise une boule dans une urne contenant 9 boules rouges et 1 boule verte. On note V la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées au total. Déterminer la loi de V et $\mathbb{P}(V = 2)$.

Exercices conseillés : 2, 3

Propriété 10

Moments de la loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$\mathbb{E}[X] = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = np(1-p)$$

C – Fonction de répartition (HP)

Définition 11

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction :

$$F : x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

Propriété 12

Une fonction de répartition est croissante et comprise entre 0 et 1.

Remarque 13

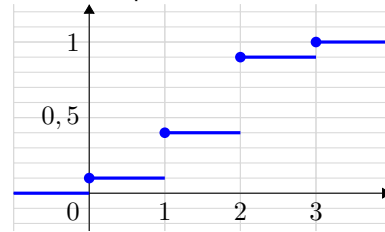
Comme $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ ne prend que des valeurs entières, on s'intéresse surtout aux $\mathbb{P}(X \leq k)$ avec k entier : en effet, par exemple, $\mathbb{P}(X \leq 2,5) = \mathbb{P}(X \leq 2)$ puisque les seules issues favorables sont $X = 0$, $X = 1$ et $X = 2$.

Par conséquent, sa fonction de répartition forme un escalier.

Exemple 14

Soit X dont la loi est donnée par le tableau suivant. On trace sa fonction de répartition.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0,1	0,3	0,5	0,1



Expliquons le tracé de la fonction de répartition :

- ▶ Comme X ne prend des valeurs qu'à partir de 0, la probabilité qu'elle vaille strictement moins que 0 est 0.
- ▶ Comme X prend les valeurs 0 puis 1, pour tout $x \in [0; 1[$, demander à ce que $X \leq x$ revient à imposer que $X = 0$: il n'y a pas d'autre possibilité. La probabilité est donc $\mathbb{P}(X = 0) = 0,1$.
- ▶ De même, $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,4$.
- ▶ De même, $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0,9$.
- ▶ Enfin, X étant nécessairement inférieure à 3, on a $\mathbb{P}(X \leq 3) = 1$.

Autrement dit, la fonction de répartition donne les probabilités cumulées au fur et à mesure des valeurs. C'est pourquoi elle est parfois représentée dans un tableau de valeurs.

Remarque 15

- ▶ Soit X une variable aléatoire. Le contraire de « être strictement plus grand que k » est « être inférieur ou égal à k ». Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k)$$

- ▶ Si de plus X ne prend que des valeurs entières, alors en remarquant que être strictement plus grand qu'un entier revient à être plus grand que le suivant, $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X \geq k + 1)$ (idem dans l'autre sens).
- ▶ Enfin, remarquons que X est comprise entre a et b si X est plus petite que b mais pas plus petite que a , autrement dit $\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}$ donc :

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$

Exercices conseillés : 4

D – Problème de seuil grâce à une calculatrice

Soit $X \sim \mathcal{B}(30; 0,78)$.

- ▶ On souhaite déterminer le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0,95$.

À l'aide de la calculatrice, deux options : soit on trace la fonction de répartition (souvent fournie par la fonction `binomFrep`) de la loi $\mathcal{B}(30; 0,78)$ et on parcourt la fonction ou la table pour voir à partir de quelle valeur la probabilité dépasse 0,95, soit la calculatrice dispose d'un outil de probabilités, dans lequel on peut entrer 0,95 dans la deuxième case. La calculatrice détermine alors la valeur de k correspondante.

Ici, on trouve $\mathbb{P}(X \leq 26) \approx 0,92$ et $\mathbb{P}(X \leq 27) \approx 0,97$, donc $k = 27$.

- ▶ On souhaite maintenant déterminer le plus grand entier k tel que $\mathbb{P}(X \geq k) \geq 0,9$.

La calculatrice ne peut que traiter les cas $\mathbb{P}(X \leq \dots) \geq \dots$. Il faut s'y ramener. Remarquons que :

$$\mathbb{P}(X \geq k) \geq 0,9 \iff 1 - \mathbb{P}(X < k) \geq 0,9 \iff \mathbb{P}(X < k) \leq 0,1 \iff \mathbb{P}(X \leq k-1) \leq 0,1$$

Ici, on trouve $\mathbb{P}(X \leq 19) \approx 0,048$ et $\mathbb{P}(X \leq 20) \approx 0,104$, donc $k-1 = 19$, donc $k = 20$.

Application 16

Soit $X \sim \mathcal{B}(50; 0,23)$. À l'aide de la calculatrice, déterminer $\mathbb{P}(X < 12)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$ et $\mathbb{P}(5 < X \leq 8)$.

Exercices conseillés : 5, 6, 7, 8

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est de 0,75, et on s'intéresse au nombre de Pile obtenus.

- 1► Justifier que l'on peut associer la situation à un schéma de Bernoulli. Préciser les paramètres.
- 2► Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
- 3► Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois Pile.

Exercice 2

On tire 15 cartes avec remise dans un jeu complet de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de trèfles obtenus.

- 1► Justifier que T suit une loi binomiale.
- 2► Calculer $\mathbb{P}(T = 5)$.

Exercice 3

On considère que la probabilité qu'un élève de Terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67.

- 1► Dans une classe de Terminale de 35 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année ? Justifier.
- 2► Calculer $\mathbb{P}(M = 10)$, $\mathbb{P}(M = 11)$ et $\mathbb{P}(M = 12)$.
- 3► En déduire la probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année.

Exercice 6

Dans un lycée, 237 élèves ont réservé un repas à la cantine. Lorsqu'un élève a réservé son repas, 7% du temps il ne mange pas à la cantine.

- 1► Quel est le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95% que tous les élèves se présentant auront un repas ?
- 2► Même question avec un risque que certains élèves n'aient pas de repas inférieur à 1%.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . En se ramenant à chaque fois à des inégalités de la forme $\mathbb{P}(X \leq \dots)$, calculer dans chaque cas :

- 1► $n = 100$ et $p = 0,78$

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a► $\mathbb{P}(X < 75)$ | c► $\mathbb{P}(X \geq 74)$ |
| b► $\mathbb{P}(X > 79)$ | d► $\mathbb{P}(73 < X \leq 81)$ |

- 2► $n = 27$ et $p = 0,32$

- | | |
|------------------------|--------------------------------|
| a► $\mathbb{P}(X < 8)$ | c► $\mathbb{P}(X \geq 13)$ |
| b► $\mathbb{P}(X > 9)$ | d► $\mathbb{P}(7 < X \leq 14)$ |

- 3► $n = 45$ et $p = 0,44$

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a► $\mathbb{P}(X < 20)$ | c► $\mathbb{P}(X \geq 23)$ |
| b► $\mathbb{P}(X > 16)$ | d► $\mathbb{P}(13 < X \leq 20)$ |

Exercice 5

En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est environ de 2%.

On suppose que la population française est suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.

Dans un train, dont 1 250 places ont été réservées, sont prévues 30 places pouvant accueillir les personnes en fauteuil roulant. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour ces personnes ?

Objectif Bac

Exercice 7 (Mars 2021)

Dans une école de statistiques, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- ▶ 10% des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- ▶ Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- ▶ D : « le candidat a été sélectionné sur dossier »
- ▶ A : « le candidat a été admis »

- 1▶ Traduire la situation par un arbre pondéré.
- 2▶ Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
- 3▶ Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.
- 4▶ On choisit au hasard un candidat admis dans l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

- 1▶ On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
 - a▶ On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
 - b▶ Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
 - c▶ Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
- 2▶ Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24, et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
 - a▶ Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
 - b▶ À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 8 (Polynésie 2021)

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les tests sanitaires de ce pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1% sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population. On note :

- ▶ M : « la personne est infectée par la maladie »
- ▶ T : « le test est positif »

- 1▶ Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
- 2▶
 - a▶ Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
 - b▶ Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

- 3► On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
- 4► On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
 - a► Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser les paramètres.
 - b► Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
- 5► Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif soit supérieure à 99%.

10 Logarithme

Table des matières

1	Construction du logarithme à partir de l'exponentielle	172
2	Définition et premiers exemples d'utilisation	173
3	Propriétés algébriques	174
4	Propriétés analytiques	176
	Exercices	179

Programme

Fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est introduite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle étudiée en classe de première. Les élèves s'appuient sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme.

Contenus

- Fonction logarithme népérien, notée $\ln$, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

Capacités attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Démonstration

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- Limite en 0 de $x \mapsto x \ln(x)$.

Exemple d'algorithme

- Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme.

Approfondissements possibles

- Pour α dans $\mathbb{R}$, fonction $x \mapsto x^\alpha$.
- Pour x dans $\mathbb{R}$, limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

1 – Construction du logarithme à partir de l'exponentielle

Rappels : fonction exponentielle

Propriété 1

La *fonction exponentielle* est l'unique fonction $\exp$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note* également $\exp(x) = e^x$.

Pour tous réels x et y ,

- ▶ $e^x > 0$
- ▶ $e^{x+y} = e^x e^y$
- ▶ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- ▶ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- ▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{nx} = (e^x)^n$
- ▶ $x < y \iff e^x < e^y$ (la fonction exponentielle est strictement croissante)
- ▶ $e^x = e^y \iff x = y$

Activité 2 (Construction du logarithme népérien)

- 1▶ Justifier (à partir de sa définition) que l'exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2▶ Soit $k \in \mathbb{R}$.
 - a▶ Supposons $k > 0$. Justifier que l'équation $e^x = k$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
 - b▶ Supposons $k \leq 0$. Justifier que l'équation $e^x = k$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Grâce à la question précédente, on a établi que pour tout $k > 0$, on peut trouver un certain nombre x qui dépend exclusivement de k , tel que $e^x = k$. Ce nombre est appelé le *logarithme népérien* de k , noté $\ln(k)$. On dispose donc de la fonction $\ln$ définie par la relation $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$. Remarquons en particulier que l'on a démontré que $\ln(x)$ n'est pas défini pour $x \leq 0$.
- 3▶ Dans cette question, on cherche à démontrer la nouvelle relation $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - a▶ Justifier que cette relation est licite pour tout $x \in \mathbb{R}$ (rappelez-vous que $\ln(x)$ n'existe pas toujours!).
 - b▶ Rappeler la définition de $\ln(k)$ d'après la question précédente.
 - c▶ Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquer cette définition à $k = e^x$.
 - d▶ En déduire que $\ln(e^x) = x$.
- 4▶ Soient x et y deux réels strictement positifs. L'objectif de cette question est de démontrer la relation fondamentale $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.
 - a▶ Appliquer la relation de la deuxième question à x , à y et à $x + y$.
 - b▶ En déduire que $e^{\ln(x) + \ln(y)} = x \times y$.
 - c▶ Justifier rigoureusement que $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- 5▶ Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. L'objectif est de montrer que $\ln(x) < \ln(y)$.
 - a▶ Nous allons procéder par l'absurde. Quelle est l'hypothèse initiale ?
 - b▶ Appliquer la fonction exponentielle à cette inégalité. Justifier rigoureusement.
 - c▶ Conclure.

Le propriétés analytiques feront l'objet d'un problème d'approfondissement.

*. C'est bien une notation : la notation puissance 2^5 désigne la répétition de 5 multiplications du facteur 2, mais que signifie une puissance non entière ? La notation $2^{1,3}$ ne désigne pas le produit de 1,3 exemplaires du facteur 2, ça n'a pas de sens... Plus de détails dans les approfondissements !

2 – Définition et premiers exemples d'utilisation

Ce sont les propriétés précédentes qui sont en fait la vraie définition de la fonction logarithme népérien :

Définition 3

Fonction logarithme népérien

Il existe une unique fonction, notée $\ln$, définie sur $]0; +\infty[$, appelée *logarithme népérien*, qui vérifie :

$$\forall x > 0, \quad e^{\ln(x)} = x$$

(On dit que les fonction $\exp$ et $\ln$ sont *réciroques* l'une de l'autre.)

C'est une conséquence du théorème de la bijection continue, car la fonction exponentielle est continue et strictement croissante.

Remarque 4

Autrement dit, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$,

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+5} = 2$.

Solution

En utilisant l'équivalence de la remarque précédente :

$$\begin{aligned} e^{3x+5} &= 2 \\ \iff 3x + 5 &= \ln(2) \\ \iff x &= \frac{\ln(2) - 5}{3} \end{aligned}$$

Donc cette équation admet pour unique solution $x = \frac{\ln(2) - 5}{3} \approx -1,435$.

Remarque 6

Le logarithme népérien n'est pas le plus couramment utilisé dans les sciences appliquées. On dit que le logarithme népérien est en *base e*, car pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

Le logarithme le plus utilisé est le logarithme *en base 10* : on le note $\log$, il vérifie $\forall x > 0$, $10^{\log(x)} = x$.

Proposition 7

Fonction réciproque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

Exercices conseillés : 4, 14, 17, 32

3 – Propriétés algébriques

Propriété 8

Relation fonctionnelle

Pour tous x et y strictement positifs,

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Démonstration. Soient x et y strictement positifs. D'après la relation fonctionnelle de l'exponentielle,

$$e^{\ln(x) + \ln(y)} = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = x \times y$$

donc le nombre $\ln(x) + \ln(y)$ est un nombre dont l'exponentielle vaut $x \times y > 0$: par définition de $\ln(x \times y)$,

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \times y)$$

□

Proposition 9

Conséquences remarquables

Pour tous x et y strictement positifs,

- ▶ $\ln(1) = 0$
- ▶ $\ln(e) = 1$
- ▶ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- ▶ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- ▶ $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln(x)$
- ▶ $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

Démonstration. Soient x et y strictement positifs.

- ▶ Cela découle immédiatement du fait que $e^0 = 1$ et donc de la définition du logarithme, mais il est bon de remarquer que la relation fonctionnelle suffit : en effet, $\ln(1) = \ln(1 \times 1) = \ln(1) + \ln(1)$ donc $\ln(1) = 0$ (on soustrait $\ln(1)$ de part et d'autre de l'égalité).
- ▶ $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- ▶ $0 = \ln(1) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- ▶ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- ▶ D'abord, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \ln(x)$. Ensuite, si on suppose la formule vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, alors $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n \ln(x) + \ln(x) = (n+1) \ln(x)$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $0 = \ln(1) = \ln(x^n \times x^{-n}) = \ln(x^n) + \ln(x^{-n})$ donc $\ln(x^{-n}) = -\ln(x^n) = -n \ln(x)$. Cela démontre la formule pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- ▶ $\ln(x) = \ln((\sqrt{x})^2) = 2 \ln(\sqrt{x})$ donc $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

□

Application 10

Exprimer les nombres suivants sous la forme d'un seul logarithme :

- ▶ $A = \ln(3 - \sqrt{5}) - \ln(3 + \sqrt{5})$
- ▶ $B = 3 \ln(2) + \ln(5) - 2 \ln(3)$
- ▶ $C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$

Propriété 11**Stricte croissance**

Pour tous x et y strictement positifs,

$$\triangleright \ln(x) = \ln(y) \iff x = y$$

$$\triangleright x < y \iff \ln(x) < \ln(y)$$

Exemple 12

Résoudre (on fera attention à préciser les intervalles de validité dans chaque cas) :

a► $e^{x+1} = 5$

c► $\ln(x-1) + \ln(x-3) = 0$

b► $e^x + 5 > 4e^x$

d► $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

Solution

a► Cette équation est valide sur $\mathbb{R}$.

$$e^{x+1} = 5 \iff x+1 = \ln(5) \iff x = \ln(5) - 1$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\ln(5) - 1\}$.

b► Cette inéquation est valide sur $\mathbb{R}$.

$$e^x + 5 > 4e^x \iff 5 > 3e^x \iff \frac{5}{3} > e^x (> 0) \iff \ln\left(\frac{5}{3}\right) > x$$

(Étapes : on soustrait e^x de part et d'autre, on divise par $3 > 0$, on applique le logarithme qui est strictement croissant sur $\mathbb{R}^{+*}$.)

L'ensemble des solutions est donc $\left]-\infty; \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right[$.

c► Cette équation n'est valide que lorsque $x-1 > 0$ et $x-3 > 0$, c'est-à-dire lorsque $x > 3$. Par ailleurs, pour tout $x > 3$:

$$\ln(x-1) + \ln(x-3) = 0 \iff \ln([x-1][x-3]) = 0 \iff [x-1][x-3] = e^0 = 1$$

$$\iff x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x \in \left\{\frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}\right\} \iff x \in \{2 \pm \sqrt{2}\}$$

Or $2 - \sqrt{2} < 2 < 3$ et $2 + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{1} = 3$ donc seule la deuxième valeur est une solution valide. Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est $\{2 + \sqrt{2}\}$.

d► Cette inéquation n'est valide que lorsque $3-x > 0$ et $x+1 > 0$, c'est-à-dire lorsque $-1 < x < 3$. Dans ces conditions :

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0 \iff \ln(3-x) \leq \ln(x+1) \iff 3-x \leq x+1 \iff 1 \leq x$$

par stricte croissance du logarithme. Finalement l'ensemble des solutions est $] -1; 1]$.

4 – Propriétés analytiques

Dérivée de la fonction logarithme

Théorème 13

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration. (Exigible)

La dérivabilité est admise.

D'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$(\exp \circ \ln)' = \ln' \times \exp' \circ \ln = \ln' \times \exp \circ \ln$$

Or pour tout $x > 0$, $\exp \circ \ln(x) = e^{\ln(x)} = x$, donc la dérivée de $\exp \circ \ln$ est égale à la dérivée de $x \mapsto x$, qui est constante égale à 1. Ainsi, la première égalité se réécrit pour tout $x > 0$:

$$1 = \ln'(x) \times x \quad \text{donc} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

□

Exemple 14

Dériver $f : x \mapsto x \ln(x) - x$.

Solution

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \ln'(x) - 1 = \ln(x) = x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Application 15

Dériver $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{x}$.

Exercices conseillés : 7, 15, 31

Corollaire 16

La fonction logarithme est strictement croissante et concave.

Corollaire 17 (Dérivée composée par un logarithme)

Pour toute fonction u à valeurs strictement positives et dérivable,

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple 18

Dériver $f : x \mapsto \ln(2x - x^2)$ sur $]0; 2[$ (factoriser les numérateur et dénominateur).

Solution

Pour tout $x \in]0; 2[$, $f(x) = \ln(u(x))$ où $u : x \mapsto 2x - x^2 = x(2 - x) > 0$ est dérivable sur $]0; 2[$. Ainsi,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2 - 2x}{2x - x^2} = \frac{2(1 - x)}{x(2 - x)}$$

Exercices conseillés : 10, 11, 16, 18, 33

Limites de la fonction logarithme**Propriété 19**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Application 20

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$.

- 1► Déterminer l'ensemble de définition de f et ses limites éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
- 2► Dresser le tableau de variations de f .
- 3► Tracer une allure de la courbe de f .

Théorème 21**Théorème de croissance comparée**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Exercice conseillé : 8, 9, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

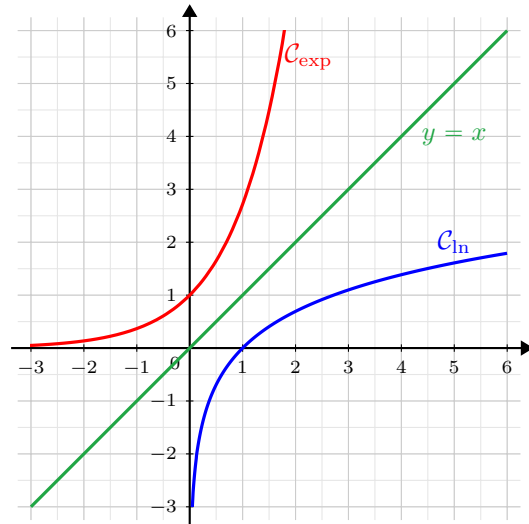
Application 22

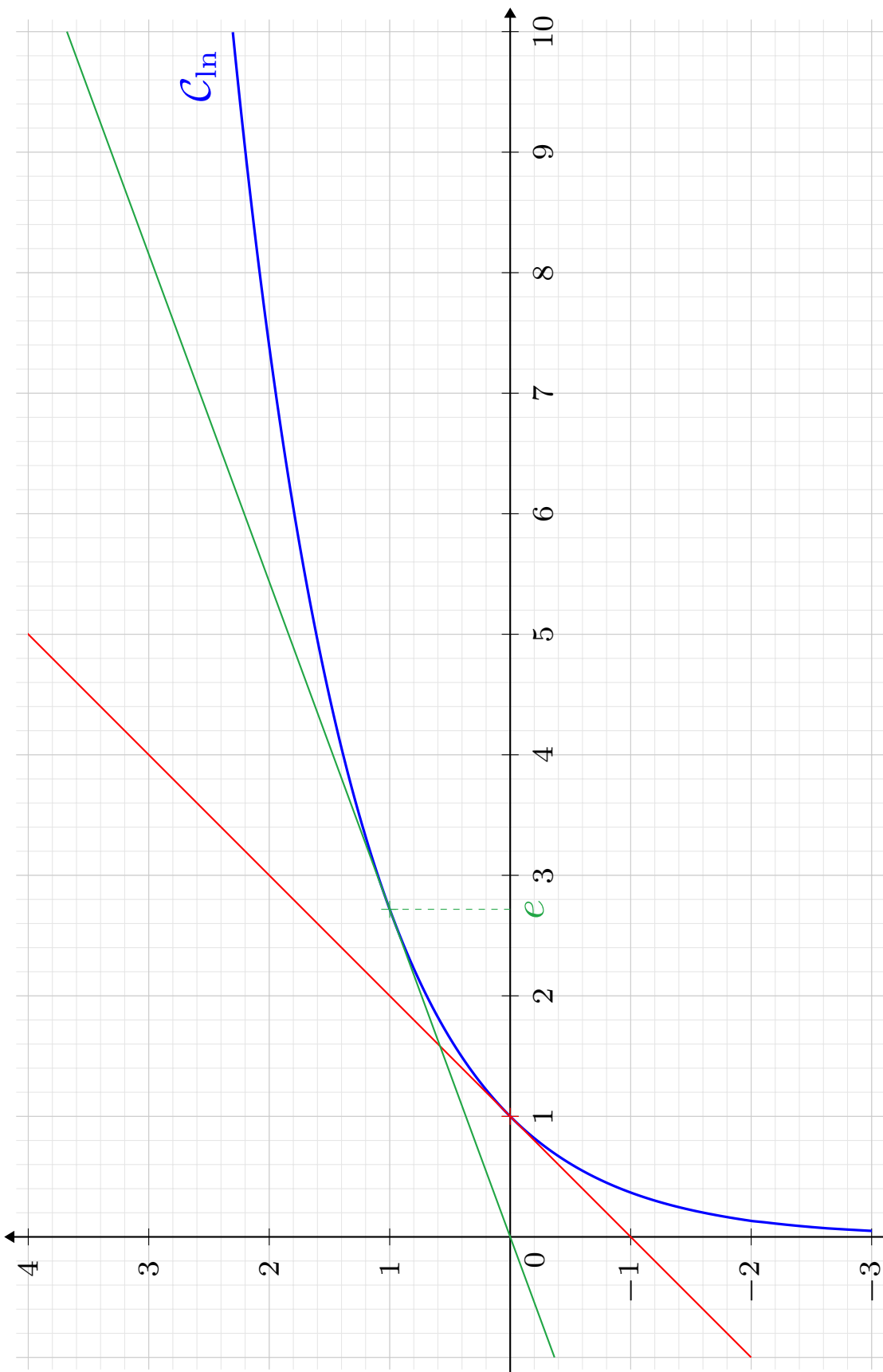
Calculer :

- 1► $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$
- 2► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$
- 3► $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{(x^2 + 1) \ln(x)}$

Remarque 23

Les graphes des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ceci est en fait une propriété de toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre (essayez avec la racine et le carré!).





Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Exprimer le nombre suivant en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$:

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{2^3}\right)$$

Exercice 2

Soient a et b deux nombres réels strictement supérieurs à 1. On considère un rectangle dont les côtés mesurent $\ln(a)$ et $\ln(b)$.

Montrer que le périmètre du rectangle est $\ln((ab)^2)$.

Exercice 3

Soit x un nombre strictement positif. On considère un cube dont l'arête a pour longueur x . On note V le volume de ce cube et P le périmètre d'une des faces de ce cube.

Montrer que :

$$\ln(P) = 2\ln(2) + \frac{1}{3}\ln(V)$$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| 1► $\ln(x+1) = 1$ | 6► $e^{x^2-4} = 10$ |
| 2► $e^{2x+1} = 3$ | 7► $\ln(2x-1) = 0$ |
| 3► $\ln(x^2+1) = \ln(2)$ | 8► $5 - \ln(x) = 5$ |
| 4► $\ln(2x+1) = 3$ | 9► $e^{5-2x} = 2$ |
| 5► $e^{-4x+2} - 5 = 0$ | 10► $\ln(x^2+6x+10) = 0$ |
| 11► $\ln(3-x) \times \ln(x+1) = 0$ | |
| 12► $\ln(x^2+x-6) = 0$ | |
| 13► $\ln(2x) - \ln(x+1) = \ln(x-5)$ | |

Exercice 5

Simplifier.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1► $e^{\ln(3)}$ | 4► $e^{\ln(x-1)+\ln(x)}$ |
| 2► $\frac{e^{3+\ln(8)}}{e^{2+\ln(4)}}$ | 5► $\ln\left(\frac{1}{16}\right)$ |
| 3► $\frac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}$ | 6► $\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2})$ |

Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1► $3\ln(x) - 4 > \ln(x)$ | 4► $\ln(x^2+1) \geq 1$ |
| 2► $2\ln(3-x) \leq 1$ | 5► $\ln(5-2x) > 0$ |
| 3► $\ln(x-2) > \ln(x)$ | 6► $\ln(x) \leq \ln(x^2+x+1)$ |

Exercice 7

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie et dérivable sur I .

- | |
|--|
| 1► $I =]-\infty; 2[$ et $f(x) = (x+1)\ln(2-x)$ |
| 2► $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ et $f(x) = \ln(2x-1)$ |
| 3► $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ |
| 4► $I =]0; +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ |
| 5► $I =]1; +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$ |
| 6► $I =]0; +\infty[$ et $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ |
| 7► $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(e^x+1)$ |
| 8► $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ |

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

- a► $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) - 4$
- b► $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) + \frac{3}{x}$
- c► $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 \ln(x) - 4x^2 + 1$
- d► $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{\ln(x-3)}{x-3} + 3x$

Exercice 9

Calculer les limites suivantes si elles existent.

- 1► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-3}{x^2+2}\right)$ 5► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 3}{2x}$
- 2► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2+2}{x+5}\right)$ 6► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$
- 3► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{2x}$ 7► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
- 4► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x + 1$ 8► $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 10

Dans chaque cas déterminer **une** primitive de la fonction f définie par l'expression donnée (**on se souciera de l'intervalle**).

- 1► $f(x) = \frac{1}{x-4}$ 3► $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$ 5► $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- 2► $f(x) = \frac{2}{1-x}$ 4► $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ 6► $f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{3x^3+3x^2+3x+3}$

Exercice 11

Déterminer la primitive F des fonctions suivantes (**on se souciera de l'intervalle**) vérifiant la condition donnée.

- 1► $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; $F(0,5) = 0$ 2► $f(x) = -\frac{1}{3-x}$; $F(1) = 1$

Je comprends le cours

Exercice 12

Résoudre les inéquations suivantes :

- a► $\ln(x^2+2x) - 1 > 0$ b► $3e^{2x} - 9e^x < 0$
- c► $\ln\left(\frac{5x+1}{x-2}\right) < 0$
- d► $\ln(4x-2) + \ln(5) < 1 - \ln(2)$
- e► $\ln(x^2-4x+4) - \ln(x-2) < \ln(8-x)$

Exercice 13

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{N}$.

- 1► $0,8^n < 0,05$ 3► $0,5^n < 0,01$
- 2► $1 - 0,3^n > 0,95$ 4► $2^n \leq 10^6$

Exercice 14

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions suivantes :

- $a(x) = \ln(\sqrt{4-x})$ ► $d(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x^2-1}$
- $b(x) = \ln(x^2)$ ► $f(x) = \ln(4x-1)^2$
- $c(x) = x^2 \ln(e^x+1)$ ► $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$

Exercice 15

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes (**préciser le domaine de validité**) :

- $f(x) = (\ln(x)+3)(x-2)$

- ▶ $g(x) = \frac{x - \ln(x)}{3\ln(x) + 1}$
- ▶ $h(x) = (\ln(x) - 2x + 1)^3$
- ▶ $k(x) = \sqrt{3x - x\ln(x)}$

Exercice 16

On considère la fonction :

$$F : x \mapsto (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 7$$

définie sur $I =]-1; +\infty[$.

- 1▶ Montrer que F est une primitive sur I de :

$$f : x \mapsto \ln(x + 1) - 2.$$

- 2▶ En déduire le tableau de variations de F .
- 3▶ Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 0.

Exercice 17

Soit $f : x \mapsto x + \ln(4) + \frac{2}{e^x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1▶ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2▶ Dresser le tableau de variations de f .
- 3▶ a▶ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 2 + \ln(4) - \frac{2e^x}{e^x + 1}.$$

- b▶ En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Lors d'une expérience, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 m.

On modélise le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1[$ par :

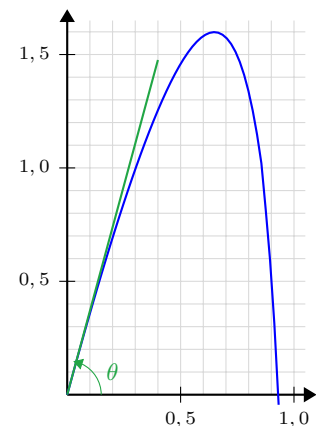
$$f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$$

où $b \geq 2$ est un paramètre réel, x et $f(x)$, exprimés en mètres, sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du projectile.

- 1▶ a▶ Déterminer f' .
- b▶ Montrer que f admet un maximum sur $[0; 1[$.
- 2▶ On veut déterminer les valeurs du paramètre b pour lesquelles la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
- On considère la fonction g définie sur $I = [2; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2 + 2\ln(2) - 2\ln(x)$$

- a▶ Montrer que le problème revient à résoudre $g(x) \leq 1,6$.
- b▶ Montrer que la fonction g est strictement croissante sur I .
- c▶ Montrer que l'équation $g(x) = 1,6$ admet une unique solution α sur I .
- d▶ Déterminer un encadrement de la valeur de α à 10^{-3} près.
- e▶ Déterminer les valeurs de b répondant au problème.



Exercice 19

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

- 1► Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
- 2► Déterminer la limite de f en $-\infty$.
On admettra dans la suite que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
- 3► Déterminer f' .
- 4► Déterminer le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variation de f .
- 5► Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$,

$$f(x) \in [0; 1].$$

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1► Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
- 2► Étudier les variations de la suite (u_n) .
- 3► Montrer que la suite (u_n) converge.
- 4► On appelle ℓ la limite de (u_n) . Déterminer ℓ .

Objectif Bac

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. On note d la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

La fonction f s'exprime sous la forme :

$$f(x) = a \ln(x) + bx + c$$

avec a , b et c trois réels.

Partie A : Exploitation graphique

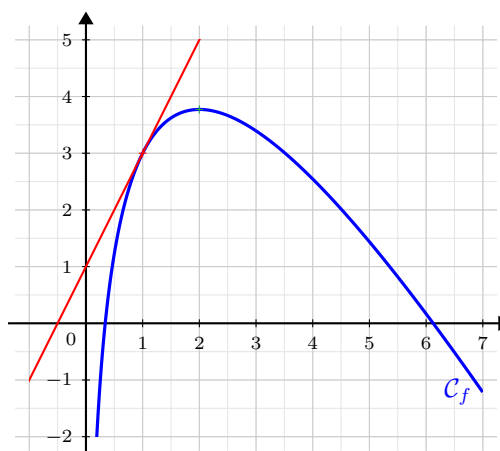
- 1► Par lecture graphique, déterminer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
- 2► En déduire les valeurs de a , b et c .
- 3► Résoudre graphiquement $f(x) \geq 3$.

Partie B : Étude analytique

On admet pour la suite que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = 4 \ln(x) - 2x + 5$$

Soit $g : x \mapsto 2 \ln(x) - x + 1$ définie sur $]0; +\infty[$.



- 1► Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2► Dresser le tableau de variations de g en étudiant le signe de sa dérivée.
- 3► Vérifier que 1 est solution de $g(x) = 0$.
- 4► Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2; +\infty[$ dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.
- 5► En déduire le signe de g .
- 6► En déduire l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 3$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) + \frac{1}{x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1► Déterminer la limite de la fonction f en 0^+ ainsi que sa limite en $+\infty$.
- 2► a► On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout x strictement positif,

$$f'(x) = 1 + \ln(x) - \frac{1}{x^2}$$

- b► En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et ses limites.
- 3► On admet que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions : 1 et $\alpha \approx 2,22$.
On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]1; \alpha[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a► Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 < u_n < \alpha$.
- b► En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- c► Montrer que pour tout $x \in [1, \alpha]$, on a $f(x) \leq x$.
(On pourra tracer numériquement le graphe de f pour se représenter la situation et organiser le raisonnement.)
- d► En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

- 1► a► Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b► Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
- 2► a► On note A le point de la courbe de f , notée $\mathcal{C}_f$, d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A .
b► Construire T , puis $\mathcal{C}_f$ en prenant comme unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 23 (BAC 2022)

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x))$$

- 1► Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- 2► a► Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $g'(x) = -4x \ln(x)$.
b► En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
c► Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ puis que $\alpha \in [1; e]$.
d► Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 24 (BAC 2017)

Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln(x)$$

Partie A

- 1► Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.
- 2► Étudier les variations de φ sur $]0; +\infty[$.
- 3► En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3 \ln(x)}{x}$$

- 1► Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2► Montrer que sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$.
- 3► En déduire le tableau de variation de f .
- 4► Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$ puis déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 25

On considère l'équation :

$$\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$$

Vrai ou faux : cette équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

Exercice 26

On considère la suite u définie par $u_0 = e$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{e}}$.

- 1▶ À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite u .
- 2▶ Pour tout entier naturel n , on pose :

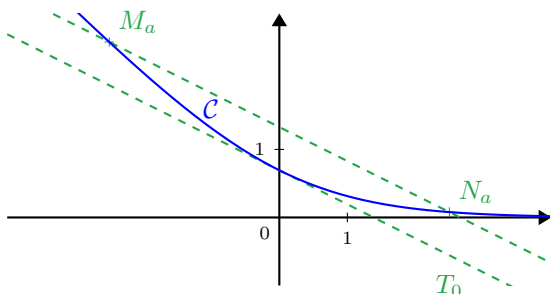
$$v_n = \ln(u_n) + 1.$$
 - a▶ Montrer que la suite v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - b▶ En déduire une expression de v_n , puis de u_n en fonction de n .
 - c▶ Déterminer alors la limite de u en $+\infty$.

Exercice 27 (BAC 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé suivant.



- 1▶
 - a▶ Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b▶ Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
 - c▶ On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$$

- d▶ Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2▶ On note $\mathcal{T}_0$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$.
- 3▶ Pour tout nombre réel a non nul, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a . On a donc $M_a(-a; f(-a))$ et $N_a(a; f(a))$.

- a▶ Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) - f(-x) = -x$$

- b▶ En déduire que, quel que soit le réel a non nul, les droites $\mathcal{T}_0$ et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

Exercice 28 (BAC 2023)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$.

- 1▶ a▶ Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3$$

- b▶ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-3 < u_n \leq -1$$

- c▶ Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
- d▶ Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

- 2▶ On se propose d'étudier la fonction g définie sur $] -3; -1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$$

- a▶ Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g ci-dessous.

x	-3	-2	-1
g	$-\infty$	$g(-2)$	1

- b▶ En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3} .
- 3▶ Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$$

- a▶ En utilisant la formule donnée en 1▶a▶, démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.
- b▶ Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.
- c▶ Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.
- d▶ En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = v_k$.

Exercice 29 (BAC 2023)

Partie A

On considère une fonction f dont l'expression est la suivante :

$$f(x) = x - \ln(1 + x)$$

- 1► Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $] - 1; +\infty[$.
- 2► On admet que la fonction f est dérivable sur $] - 1; +\infty[$. Déterminer une expression de la fonction dérivée f' .
- 3► a► En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] - 1; +\infty[$.
b► En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $] - 1; 0[$.
- 4► a► Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] - 1; +\infty[$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right)$$

- b► En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f .

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

- 1► Donner la valeur arrondie au millièmme de u_1 .
- 2► En utilisant la question 3►a► de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
- 3► Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 4► Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
- 5► Déterminer la limite de la suite (u_n) .

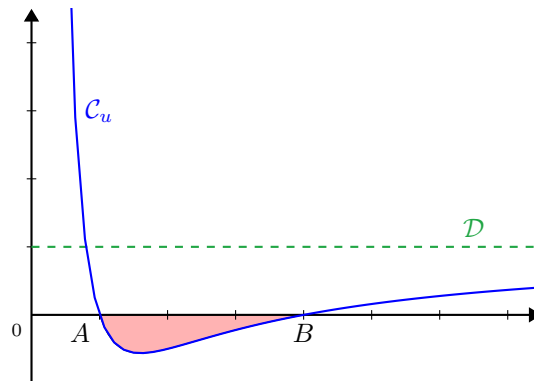
Exercice 30 (BAC 2015)

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a , b et c sont des réels fixés. On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe C_u et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe C_u passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}$ sont des asymptotes de la courbe C_u .

- 1► Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
- 2► Donner la limite de u en $+\infty$. En déduire la valeur de a .
- 3► En déduire que, pour tout x strictement positif,

$$u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5 \ln(x) - \frac{4}{x}$$

- 1► Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
- 2► Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
- 3► En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Vers le supérieur

Exercice 31

Soit $f : x \mapsto \ln(x)^2 - (1+e)\ln(x) + e$ définie sur $]0; +\infty[$.

1► Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2► Montrer que $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2\ln(x) - 1 - e}{x}.$$

3► En déduire le tableau de variations de f .

4► En déduire le nombre d'antécédents de 0 par f .

5► Retrouver la réponse précédente en résolvant une équation, puis en déduire la valeur exacte du/des antécédent(s).

Exercice 32 (BAC 2014)

On considère l'équation $(E_1) : e^x - x^n = 0$, où x est l'inconnue réelle strictement positive et n est un paramètre entier naturel non nul.

1► Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.

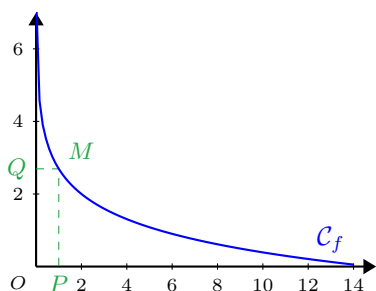
2► Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Exercice 33 (BAC 2016)

Soit f la fonction définie sur $]0; 14]$ par :

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

La courbe représentative de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal ci-dessous.



À tout point M appartenant à C_f on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur C_f ? Si non, préciser les coordonnées du point M rendant l'aire du rectangle maximale.

11 Orthogonalité dans l'espace

Table des matières

1	Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace	189
A	Produit scalaire de deux vecteurs	189
B	Orthogonalité dans l'espace	190
2	Géométrie analytique de l'espace	191
A	Bases et repères orthonormés – produit scalaire et distance	191
B	Équation cartésienne d'un plan, vecteur normal	192
3	Projection orthogonale dans l'espace	196
A	Projeté orthogonal et distance d'un point à un plan	196
B	Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite	198
	Exercices	200

Programme

Orthogonalité et distances dans l'espace

L'extension à l'espace du produit scalaire de deux vecteurs donne un outil efficace pour les problèmes de distance et d'orthogonalité. Dans cette section, on continue de combiner les outils algébriques (vecteurs, produit scalaire) et la vision géométrique de l'espace, notamment autour de l'orthogonalité : orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite, projection orthogonale sur un plan ou sur une droite.

Contenus

- ▶ Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie.
- ▶ Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
- ▶ Base orthonormée, repère orthonormé.
- ▶ Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.
- ▶ Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, formules de polarisation.
- ▶ Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.
- ▶ Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$.
- ▶ Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.

Capacités attendues

- ▶ Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- ▶ Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- ▶ Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- ▶ Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

Démonstration

- ▶ Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .

Approfondissements possibles

- ▶ Intersection d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère en un point.
- ▶ Sphère circonscrite à un tétraèdre.
- ▶ Fonction scalaire de Leibniz.

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

L'objectif de cette section est de montrer comment la donnée d'un repère, qu'on supposera orthonormé, permet d'établir un lien entre la géométrie de l'espace et les calculs algébriques dans $\mathbb{R}^3$. L'objectif majeur est une bonne maîtrise des représentations paramétriques de droites et des équations de plans.

Contenus

- ▶ Représentation paramétrique d'une droite.
- ▶ Équation cartésienne d'un plan.

Capacités attendues

- ▶ Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- ▶ Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
- ▶ Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
- ▶ Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions

Démonstration

- ▶ Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A .

Approfondissements possibles

- ▶ Déterminer l'intersection de deux plans.
- ▶ Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
- ▶ Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon.
- ▶ Intersection d'une sphère et d'une droite.

1 – Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

A – Produit scalaire de deux vecteurs

On étend naturellement la définition et les propriétés du produit scalaire vues dans le plan à l'espace.

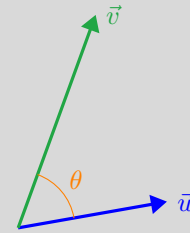
Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

où $\|\vec{a}\|$ désigne la norme d'un vecteur $\vec{a}$, et $(\vec{u}; \vec{v})$ désigne l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (noté θ sur le schéma).

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$.

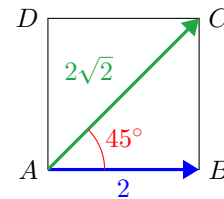


Produit scalaire

Exemple 2

Dans le carré $ABCD$ de côté 2, ci-contre, $\|\vec{AB}\| = AB = 2$, $\|\vec{AC}\| = AC = 2\sqrt{2}$ et $(\vec{AB}; \vec{AC}) = 45^\circ$, donc :

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = AB \times AC \times \cos(45^\circ) \\ &= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \end{aligned}$$



Propriété 3

Le produit scalaire est :

- *symétrique* : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- *bilinéaire* : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tout réel k ,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Propriétés du produit scalaire

Toutes les démonstrations qui ne sont pas données au fil de ce cours seront données à la fin du chapitre, dans la section bonus.

Propriété 4

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Produit scalaire et norme

Démonstration. Il suffit de remarquer que $(\vec{u}; \vec{u})$ a pour mesure 0, et que $\cos(0) = 1$. Le reste découle directement de la définition. $\square$

Remarque 5

On note parfois conventionnellement $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Proposition 6**Formule de développement**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \pm \vec{v}) \cdot (\vec{u} \pm \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} \pm \vec{u} \cdot \vec{v} \pm \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

□

Théorème 7**Formules polarisation**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\triangleright \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\triangleright \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture de la Proposition 6.

□

Exemple 8

Supposons que l'on dispose de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{22}$. D'après une formule de polarisation,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (3^2 + 5^2 - (\sqrt{22})^2) = 6$$

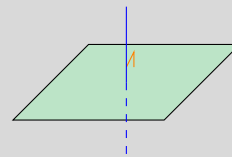
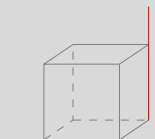
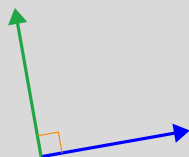
or $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ donc $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0,4$. On en déduit que $(\vec{u}; \vec{v}) = \arccos(0,4) \approx 66,42^\circ$.

Exercices conseillés : 1, 2, 3, 5

B – Orthogonalité dans l'espace

Définition 9**Orthogonalité(s)**

- On dit que deux vecteurs sont *orthogonaux* lorsque leur produit scalaire est nul.
- On dit que deux droites sont *orthogonales* lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- On dit qu'une droite est orthogonale à un plan lorsque les vecteurs directeurs de la droite sont orthogonaux aux vecteurs directeurs du plan.

**Remarque 10**

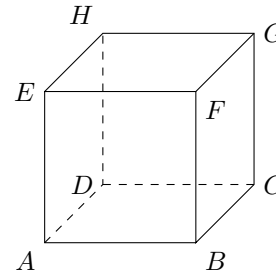
Deux droites orthogonales ne se croisent pas nécessairement ! Exemple : le cube dans la définition précédente, les droites bleue et rouge ne sont pas coplanaires, mais elles sont orthogonales.

Remarque 11

On utilise parfois le symbole $\perp$ pour indiquer l'orthogonalité de deux objets. Par exemple, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemple 12

	Orthogonales	Non orthogonales
Coplanaires	$(AE) \perp (AB),$ $(BG) \perp (FC)$	(EH) et $(FG),$ (AH) et (AD)
Non coplanaires	$(EF) \perp (CG),$ $(EG) \perp (BD)$	(CD) et $(BE),$ (AG) et (BF)



Les deux propositions ci-dessous permettent de caractériser l'orthogonalité entre une droite et un plan.

Proposition 13

Soient $\mathcal{P}$ un plan et d une droite.

Si d est orthogonale à $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale à toute droite contenue dans $\mathcal{P}$.

Démonstration. Soit Δ une droite contenue dans $\mathcal{P}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ . En considérant une droite de $\mathcal{P}$ non parallèle à Δ , dont on note $\vec{v}$ un vecteur directeur, on construit une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$. Notons $\vec{w}$ un vecteur directeur de d . Comme d est orthogonale à $\mathcal{P}$, $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Or l'orthogonalité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ signifie précisément l'orthogonalité de d et Δ .

Autre manière de présenter la démonstration : soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{P}$, on note toujours $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{w}$ un vecteur directeur de d . Il existe x et y deux réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (décomposition dans la base), donc :

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = x\vec{w} \cdot \vec{i} + y\vec{w} \cdot \vec{j} = x \times 0 + y \times 0 = 0$$

donc d est perpendiculaire à Δ . □

Proposition 14

Soient d une droite et $\mathcal{P}$ un plan.

Si d est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Démonstration. Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes contenues dans $\mathcal{P}$ orthogonales à d . Notons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 , et $\vec{w}$ un vecteur directeur de d . Alors $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, mais $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent $\mathcal{P}$ car ce sont des vecteurs directeurs de deux droites sécantes distinctes de $\mathcal{P}$. Ainsi d est orthogonale à $\mathcal{P}$. □

Exercices conseillés : 4, 16, 19, 34, 35

2 – Géométrie analytique de l'espace

A – Bases et repères orthonormés – produit scalaire et distance

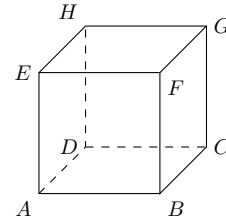
Définition 15**Base et repère orthonormés**

Une *base orthonormée* de l'espace est une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

Un *repère orthonormé* est un quadruplet de points dont la base sous-jacente est orthonormée.

Exemple 16

Dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, est une base orthonormée de l'espace, donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé.



Dans toute la suite, $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne un repère orthonormé de l'espace, et $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs.

Produit scalaire relatif à une base**Proposition 17**

Le produit scalaire s'exprime en fonction des coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

La norme en découle :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

Corollaire 18

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. La distance entre A et B est :

$$d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple 19

On considère $A(3; 1; 5)$, $B(3; 5; 1)$ et $C(-1; 5; 5)$. Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC avec les formules précédentes.

Tout d'abord, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-4) + 4 \times 4 + (-4) \times 0 = 16$.

Ensuite, $AB = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

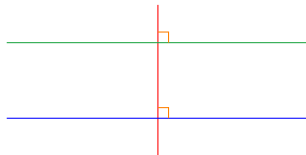
Application 20

Montrer que ABC , où A , B et C sont les points de l'exemple précédent, est un triangle équilatéral.

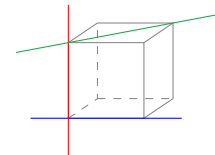
Exercice conseillé : 20, 21, 36

B – Équation cartésienne d'un plan, vecteur normal

Vous avez vu en classe de sixième que dans le plan, deux droites du plan sont parallèles si, et seulement si elles sont perpendiculaires à une même droite. Dans l'espace, cette propriété n'est plus vraie, car le degré de liberté accordé par la troisième dimension permet aux droites de tourner.



Dans le plan



Dans l'espace

Lemme 21

Deux droites de l'espace sont parallèles si, et seulement si elles sont orthogonales à un même plan.

Démonstration. Soient $\mathcal{P}$ un plan, $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{P}$, d une droite orthogonale à $\mathcal{P}$ dont on note $\vec{a}$ un vecteur directeur, et Δ une droite quelconque de l'espace, dont on note $\vec{b}$ un vecteur directeur.

Il s'agit de montrer que Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si, et seulement si d et Δ sont parallèles. Par définition de l'orthogonalité et du parallélisme, cela revient à montrer que $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si, et seulement si $\vec{b}$ est colinéaire à $\vec{a}$. On rappelle que l'hypothèse selon laquelle d est orthogonale à $\mathcal{P}$ signifie que $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

⇐ Étant des vecteurs directeurs de droites, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas nuls, donc s'ils sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Mais alors, par bilinéarité du produit scalaire, $\vec{b} \cdot \vec{u} = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{u} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{u}) = 0$ par hypothèse, de même pour $\vec{b} \cdot \vec{v}$. Ainsi, si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, alors $\vec{b}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

⇒ Supposons $\vec{b}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il existe plusieurs manières de démontrer cette implication, nous allons prendre une voie qui utilise peu d'arguments sophistiqués pour éviter les dépendances.

Par l'absurde, supposons $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non colinéaires. En particuliers, ils constituent une base d'un certain plan que l'on note $\mathcal{Q}$. Comme $\vec{a}$ dirige d , cette droite est incluse dans $\mathcal{Q}$, mais elle est orthogonale à $\mathcal{P}$, en particulier sécante. Ainsi, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants : on note $\vec{w}$ cette droite, et $\vec{w}$ un vecteur directeur de cette droite.

- Comme $d \subset \mathcal{P}$, le vecteur $\vec{w}$ se décompose dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.
- Comme $d \subset \mathcal{Q}$, le vecteur $\vec{w}$ se décompose dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = p \vec{a} + q \vec{b}$.

En particulier, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot (p \vec{a} + q \vec{b}) = \lambda p \vec{u} \cdot \vec{a} + \lambda q \vec{u} \cdot \vec{b} + \mu p \vec{v} \cdot \vec{a} + \mu q \vec{v} \cdot \vec{b}$$

Or par hypothèse $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont tous deux orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc les quatre produits scalaires sont nuls, donc $\|\vec{w}\|^2 = 0$, donc $\vec{w} = \vec{0}$, ce qui est absurde car un vecteur directeur n'est pas nul par définition. $\square$

Définition 22**Vecteur normal à un plan**

Un vecteur normal à un plan est un vecteur dirigeant une droite orthogonale à ce plan.

Corollaire 23

Tous les vecteurs normaux à un plan sont colinéaires.

Propriété 24**Caractérisation de l'appartenance à un plan**

Un plan est caractérisé par un point de passage et un vecteur normal. Plus précisément, le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est :

$$\mathcal{P} = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \right\}$$

Démonstration. Il s'agit de montrer une égalité d'ensembles, on va donc montrer une équivalence. Soit M un point de l'espace. Montrons que $M \in \mathcal{P}$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. On note $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathcal{P}$.

$\Rightarrow$ Supposons que $M \in \mathcal{P}$. Il existe donc x et y deux réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ (car $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$). Remarquons que $\vec{n}$ étant normal à $\mathcal{P}$, il est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (x\vec{u} + y\vec{v}) \cdot \vec{n} = x\vec{u} \cdot \vec{n} + y\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

$\Leftarrow$ On procède par contraposée. Supposons que $M \notin \mathcal{P}$. Comme $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base de l'espace (en effet, si ce n'était pas le cas, alors ils seraient coplanaires, donc on pourrait écrire $\vec{n} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et donc $\|\vec{n}\|^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = x\vec{u} \cdot \vec{n} + y\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, mais alors $\vec{n} = \vec{0}$, ce qui est impossible car un vecteur normal n'est pas nul par définition). Il existe donc x, y et z trois réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{n}$. Notons que $z \neq 0$, car dans le cas contraire, $\overrightarrow{AM}$ serait une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, mais A appartient à $\mathcal{P}$ donc M appartiendrait à $\mathcal{P}$ aussi, ce qui n'est pas, par hypothèse. On remarque également que $\|\vec{n}\| \neq 0$ comme dit précédemment. Pour conclure, on écrit :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{n}) \cdot \vec{n} = x\vec{u} \cdot \vec{n} + y\vec{v} \cdot \vec{n} + z\vec{n} \cdot \vec{n} = z\|\vec{n}\|^2 \neq 0$$

□

Théorème 25

Équation cartésienne d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan. Dans un repère orthonormé, il existe quatre réels a, b, c et d (avec a, b et c non simultanément nuls) tels que $\mathcal{P}$ est décrit par son équation cartésienne :

$$\mathcal{P} = \{M(x; y; z) \in \mathcal{E} \mid ax + by + cz + d = 0\}$$

Plus précisément, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. On écrit alors « $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ ».

Démonstration. (exigible)

- Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

D'après la Propriété précédente,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - \underbrace{ax_A - by_A - cz_A}_{=d} = 0 \end{aligned}$$

- Notons $\mathcal{Q} = \{M(x; y; z) \in \mathcal{E} \mid ax + by + cz + d = 0\}$. Notons $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Il s'agit de montrer que $\mathcal{Q}$ est un plan et que $\vec{n}$ en est normal. On sait que a, b et c ne sont pas simultanément nuls : pour fixer les idées, supposons que $a \neq 0$. Soit $A \left(-\frac{d}{a}; 0; 0 \right)$. Alors :

$$a \left(-\frac{d}{a} \right) + b \times 0 + c \times 0 + d = 0$$

et donc $A \in \mathcal{Q}$. Par ailleurs, pour tout $M(x; y; z)$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a \left(x + \frac{d}{a} \right) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d$$

Ainsi,

$$M \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

et cette dernière condition caractérise le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$: par la suite d'équivalences, $\mathcal{Q}$ est donc bien ce plan. □

Exemple 26

Soient $A(-2; 1; 3)$, $B(1; -2; 2)$, $C(4; 1; -1)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à (BC) . On se demande si $I(2; -3; 3)$ et $J(1; -4; -1)$ appartiennent à $\mathcal{P}$.

Comme $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $3x + 3y - 3z + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. On sait que $A \in \mathcal{P}$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $3 \times (-2) + 3 \times 1 - 3 \times 3 + d = 0$, donc $d = 12$. Finalement, $3x + 3y - 3z + 12 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. Pour savoir si I et J appartiennent à $\mathcal{P}$, il suffit de voir si leurs coordonnées vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$:

- ▶ $I : 3 \times 2 + 3 \times (-3) - 3 \times 3 + 12 = 0$, donc $I \in \mathcal{P}$.
- ▶ $J : 3 \times 1 + 3 \times (-4) - 3 \times (-1) + 12 = 6$, donc $J \notin \mathcal{P}$.

Remarque 27

Dans l'exemple précédent, on a déterminé que $3x + 3y - 3z + 12 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. On en déduit que $x + y - z + 4 = 0$ en est une autre : on a simplement divisé l'équation par 3. À partir d'une équation cartésienne, les autres se trouvent en multipliant ou en divisant par un certain nombre.

Application 28

Refaire l'exemple précédent en utilisant la Propriété 24.

Exercices conseillés : 6, 7, 8, 9, 10, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 33, 37, 38

Méthode 29 (Vérifier l'équation d'un plan)

Il est fréquent qu'une consigne demande « vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne [...] ». Là où vous pourriez refaire tout le procédé de trouver un vecteur directeur puis la constante d , il est bien plus efficace d'utiliser la proposition « par trois points non alignés passe un unique plan ». Ainsi, vous pouvez vérifier que A , B et C ne sont pas alignés, montrer qu'ils appartiennent au plan d'équation donnée en vérifiant que leurs coordonnées satisfont ladite équation, et invoquer cette proposition, ce qui est bien plus rapide et efficace !

3 – Projection orthogonale dans l'espace

A – Projeté orthogonal et distance d'un point à un plan

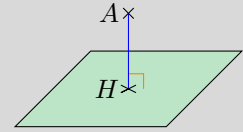
Définition 30

Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point qui n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

Le *projeté orthogonal* de A sur $\mathcal{P}$ est le point $H \in \mathcal{P}$ tel que (AH) est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Le projeté orthogonal d'un point de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$ est le point lui-même.



Exemple 31 (Situation-type)

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x + y - z - 2 = 0$. Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal de $A(5; 1; 3)$ sur $\mathcal{P}$.

On sait que $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$. Notons $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$: la droite (AH) étant par définition normale à $\mathcal{P}$, elle est dirigée par $\vec{n}$, donc elle admet la représentation paramétrique :

$$(AH) : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On sait que $H \in (AH)$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x_H; y_H; z_H)$ est décrit par le système pour le paramètre t . De plus, $H \in \mathcal{P}$, donc $3x_H + y_H - z_H + 2 = 0$. En injectant dans cette équation les expressions de x_H , y_H et z_H en fonction de t , on obtient $3(5 + 3t) + (1 + t) - (3 - t) + 2 = 0$. Après résolution, on trouve $t = -1$, ce qui permet de déterminer les coordonnées de H à partir du système paramétrique : on trouve $H(2; 0; 4)$.

Définition 32

Distance d'un point à un plan

La *distance* de A à $\mathcal{P}$ est la distance minimale entre A et tout point de $\mathcal{P}$:

$$d(A, \mathcal{P}) = \min_{M \in \mathcal{P}} d(A, M)$$

Remarque 33

Si A est un point de $\mathcal{P}$, alors sa distance à $\mathcal{P}$ est 0 : c'est même une caractérisation de l'appartenance à $\mathcal{P}$.

Propriété 34

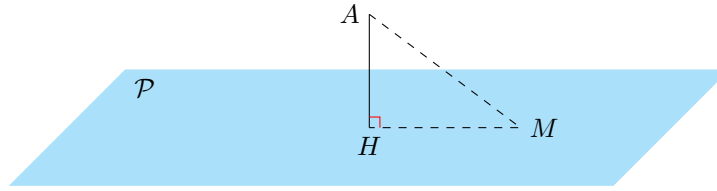
Distance et projeté orthogonal

La *distance* d'un point A à un plan $\mathcal{P}$ est la distance A à son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$:

$$d(A, \mathcal{P}) = AH$$

Démonstration. (Exigible)

Soient A un point et $\mathcal{P}$ un plan. Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Montrons que AH est la distance minimale possible entre A et un point quelconque de $\mathcal{P}$. Soit $M \in \mathcal{P}$ distinct de H . Il s'agit alors de montrer que $AH < AM$.



Comme H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ et comme $(HM) \subset \mathcal{P}$, les droites (HM) et (AH) sont perpendiculaires, et donc AMH est un triangle rectangle en H . Or $H \neq M$ donc $HM > 0$, donc l'hypoténuse $[AM]$ est le plus grand côté strictement, donc $AM > AH$. $\square$

Exemple 35

Calculons la distance de A à $\mathcal{P}$ dans l'exemple précédent. On a montré que le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est $H(2; 0; 4)$, donc :

$$d(A, \mathcal{P}) = AH = \sqrt{(2-5)^2 + (0-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{11}$$

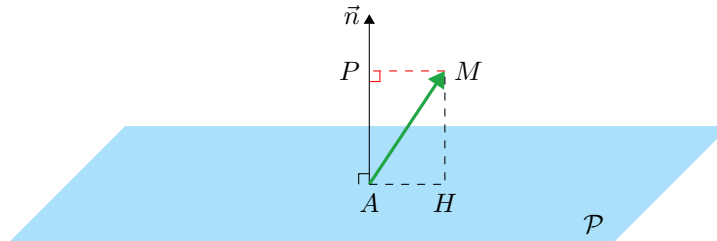
Exercices conseillés : 11, 12, 13, 14, 24, 30, 32

Le théorème suivant est, pour ainsi dire, la raison de vivre du produit scalaire dans l'algèbre du supérieur, pour autant il est préférable d'apprendre la méthode illustrée dans les exemples précédents, car le plus souvent les questions d'un énoncé la découpent en étapes guidées, ne laissant donc pas vraiment place à l'application de cette formule, qui trouve son intérêt plus dans la théorie que dans la pratique.

Théorème 36

Soit $\mathcal{P}$ passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$. Pour tout point M de l'espace,

$$d(M, \mathcal{P}) = \left| \overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|$$



Démonstration. Cela découle de la Proposition 43 : si on note d la droite dirigée par $\vec{n}$ et passant par A , P le projeté orthogonal de M sur d et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \pm AP \times \|\vec{n}\|$$

Or $PMHA$ est un rectangle, donc un parallélogramme, donc $d(M, \mathcal{P}) = MH = AP$, donc :

$$|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |\pm AP \times \|\vec{n}\|| = AP \times \|\vec{n}\| = d(A, \mathcal{P}) \times \|\vec{n}\|$$

et donc :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{1}{\|\vec{n}\|} |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = \left| \overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|$$

$\square$

B – Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite

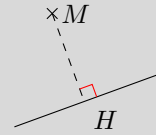
Définition 37

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soient Δ une droite de l'espace et A un point qui n'appartient pas à Δ .

Le *projeté orthogonal* de A sur Δ est le point $H \in \Delta$ tel que (AH) est orthogonal à Δ .

Le projeté orthogonal d'un point de Δ sur Δ est le point lui-même.



Exemple 38 (Rédaction-type)

Déterminons le projeté orthogonal de $A(4; -1; 2)$ sur la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Notons le $H(x_H, y_H, z_H)$. Par définition, $H \in \Delta$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_H = 1 + t$, $y_H = 2 - t$ et $z_H = -1 + 4t$. Toujours par définition, (AH) est orthogonale à Δ . Si on note $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, cela revient à dire que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, soit encore $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$. Or $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t - 4 \\ 2 - t + 1 \\ -1 + 4t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + t \\ 3 - t \\ -3 + 4t \end{pmatrix}$$

donc :

$$0 = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = (-3 + t) \times 1 + (3 - t) \times (-1) + (-3 + 4t) \times 4 = 18t - 18$$

donc $t = 1$, ce qui nous permet de calculer les coordonnées de H , à savoir $H(2; 1; 3)$.

Définition 39

Distance d'un point à une droite

La *distance* de A à Δ est la distance minimale entre A et tout point de Δ :

$$d(A, \Delta) = \min_{M \in \Delta} d(A, M)$$

Remarque 40

Si A est un point de Δ , alors sa distance à Δ est 0 : c'est même une caractérisation de l'appartenance à Δ .

Propriété 41

Distance et projeté orthogonal

La *distance* d'un point A à une droite Δ est la distance A à son projeté orthogonal sur Δ :

$$d(A, \Delta) = AH$$

Démonstration. L'argument est strictement identique au cas d'un plan. □

Exemple 42

Dans l'exemple précédent, la distance de A à Δ est :

$$d(A, \Delta) = AH = \sqrt{(2-4)^2 + (1-(-1))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{14}$$

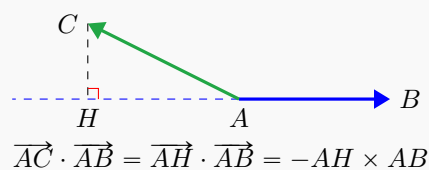
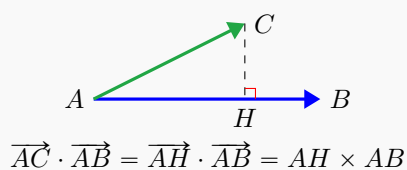
Exercices conseillés : 15, 31

Ci-dessous une proposition qui donne une méthode de calcul du produit scalaire grâce au projeté orthogonal, qui est plutôt utilisée dans les sciences appliquées, par exemple pour les calculs de forces en mécanique.

Proposition 43

Soient A , B , et C trois points de l'espace, et H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } (\vec{AB}; \vec{AC}) \text{ est aigu} \\ -AB \times AH & \text{si } (\vec{AB}; \vec{AC}) \text{ est obtus} \end{cases}$$



Exercices

Sauf indication contraire, on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Je connais mon cours

Exercice 1

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, $\|\vec{u}\| = 8$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 24$. Que vaut alors $\|\vec{v}\|$?

Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- 1► Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 2► Quelle est, à un degré près, une mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 3

Dans le tétraèdre $HARU$, on donne $HA = 2$, $HR = 3$ et $AR = 4$.

- 1► À l'aide d'une des formules de polarisation, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HR}$.
- 2► En déduire une mesure arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{RHA}$.

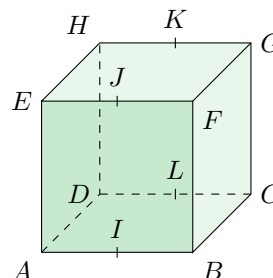
Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs de coordonnées données sont orthogonaux.

- 1► $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 2► $\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 4 \end{pmatrix}$
- 3► $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
- 4► $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$

Exercice 5

Soit $ABCDEFGH$ le cube d'arête 4 ci-dessous. Les points I , J , K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[EF]$, $[GH]$ et $[CD]$.



Calculer chaque produit scalaire puis une valeur approchée au degré près d'une mesure de l'angle formé par les deux vecteurs donnés.

- 1► $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AL}$
- 2► $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JH}$
- 3► $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF}$

Exercice 6

Pour chacun des plans dont on donne une équation cartésienne ci-dessous, donner un vecteur normal.

- 1► $2x + y - 3z + 1 = 0$
- 2► $3y + 5z = 0$
- 3► $z = -2x + 3y - 4$
- 4► $2x + y = 3z - 5$

Exercice 7 (BAC 2019)

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 9 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- 1► Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont-ils orthogonaux ?
- 2► Sont-ils parallèles ? Si non, déterminer leur intersection.

Exercice 8

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1cm on considère les points suivants : $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$.

- 1► Montrer que les points B , C et D définissent un plan, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas alignés.
- 2► Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) .
- 3► Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) .

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

- 1► $A(3; -1; 2)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
- 2► $A(1; -1; 0)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 3► $A(-2; 1; 2)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 4► $A(\sqrt{2}; 3; 0)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 10

On considère les points $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; 0)$ et $C(0; -1; 2)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- 1► Justifier que les points A , B et C définissent bien un plan de l'espace.
- 2► Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .
- 3► Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

Exercice 11

On donne $A(4; 5; 2)$, $B(1; 3; 1)$ et $C(3; 3; -1)$.

- 1► a► Déterminer les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- b► Montrer que A , B et C définissent un plan.

- c► Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) et en déduire une équation de ce plan.

- 2► Soit le point $D(1; 1; 1)$.

- a► Justifier que $D \notin (ABC)$.
- b► Quelle est la distance entre le point D et le plan (ABC) ?

Exercice 12

On considère le point $A(-7; 0; 4)$ et le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $x + 2y - z - 1 = 0$. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 13

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x - y + 2z - 3 = 0$.

- a► Parmi les points A , B et C suivants, lesquels appartiennent au plan $\mathcal{P}$?

- 1► $A(1; 1; 1)$
- 3► $C(2; 1; 1)$
- 2► $B \left(1; 1; \frac{3}{2} \right)$

- b► Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont normaux au plan $\mathcal{P}$?

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- c► Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$.
- d► Soit K le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées du point K .

Exercice 14

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer la distance entre $K(3; 1; 3)$ et le plan d'équation $x + 2y - 3z + 18 = 0$.

Exercice 15

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer la distance entre le point $S(1; 1; 1)$ et la droite ci-contre.

$$\Delta : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -4t \\ z = 2t + 12 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Je comprends mon cours**Exercice 16**

Déterminer deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 17

Déterminer trois plans admettant comme vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18

Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant le point $A(4; -1; 2)$. Donner une équation possible de $\mathcal{P}$.

Exercice 19

Prouver que les diagonales d'un cube ne sont pas orthogonales.

Exercice 20

Dans l'espace muni d'un repère, soient d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ainsi que $A(1; 1; 0)$ et $B(3; 0; -1)$.
Les droites d et (AB) sont-elles orthogonales ?

Exercice 21

On considère les points suivants : $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$. Soit M un point de la droite (CD) .
Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Exercice 22

Les points A , B , C et D ont pour coordonnées $A(-1; 0; 2)$, $B(3; 2; -4)$, $C(1; -4; 2)$ et $D(5; -2; 4)$. On considère les points I , J et K définis par : I est le milieu de $[AB]$, K est le milieu du segment $[CD]$ et J est tel que $\vec{BJ} = \frac{1}{4} \vec{BC}$.

- 1► Déterminer les coordonnées des points I , J , K .
- 2► Montrer que I , J et K ne sont pas alignés.
- 3► Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.
- 4► Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que (IJK) et (AD) sont sécants en un point L dont on donnera les coordonnées.

Exercice 23

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $E(1; 1; -2)$ et $F(-1; 3; 2)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + my - 2z + 8 = 0$, où m est un nombre réel.
Une valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ est (justifier) :

- | | |
|-------------|-------------|
| 1► $m = -1$ | 3► $m = 5$ |
| 2► $m = 1$ | 4► $m = -2$ |

Exercice 24

Pour chaque question une seule réponse est exacte.
On donne le point $S(1; -2; 0)$ et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

- 1► Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

a►	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
----	---

$$\text{b} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{c} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{d} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2► Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$\text{a} \rightarrow (-4; 0; 0) \quad \text{c} \rightarrow \left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{b} \rightarrow \left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right) \quad \text{d} \rightarrow \left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

3► La distance du point S au plan P est égale à :

$$\text{a} \rightarrow \frac{\sqrt{11}}{3} \quad \text{b} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{11}} \quad \text{c} \rightarrow \frac{9}{\sqrt{11}} \quad \text{d} \rightarrow \frac{9}{11}$$

Exercice 25

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$.

1► Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2► Soit Δ la droite passant par le point D de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .

3► En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

4► Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

5► Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .

Exercice 26

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définit les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ par les équations cartésiennes respectives $4x + y - 3z + 1 = 0$ et $2x - 3y + 2z + 4 = 0$.

1► Déterminer deux vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ que l'on notera respectivement $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

2► En déduire que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

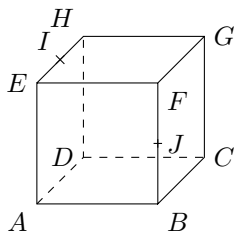
3► En posant $x = t$, déterminer en fonction de t les coordonnées y et z d'un point à l'intersection des deux plans.

4► En déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Objectif Bac

Exercice 27

Dans l'espace on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1► Donner les coordonnées des points B , G , H , I et J sans justifier.

2► Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BIG) .

3► En déduire une équation cartésienne du plan (BIG) .

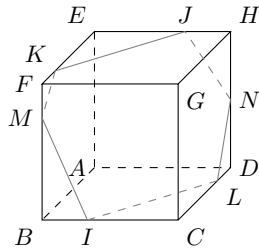
4► On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BIG) ?

Exercice 28

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On considère les points :

$$I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right) \quad J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right) \quad K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right) \quad L\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$$

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH) .



Le but de cet exercice est de déterminer les coordonnées des points M et N .

- 1► Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJK) .
- 2► En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
- 3► En déduire les coordonnées des points M et N .

Exercice 29

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1cm on considère les points suivants : $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3; 3; -1)$.

- 1► Démontrer que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
- 2► Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12cm^2 .

Exercice 30 (BAC 2021)

On considère les points $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ et $C(0; 0; 1)$.

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC .

- 1► a► Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

b► En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

- 2► On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC) .

a► Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .

b► Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49}\right)$.

c► Calculer la distance OH .

- 3► On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base et h est la hauteur correspondant à cette base. En calculant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $OABC$, déterminer l'aire du triangle ABC .

Exercice 31

Les points A , B et C ont pour coordonnées $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -6; -1)$ et $C(2; 2; 2)$.

- 1► Montrer que A , B et C ne sont pas alignés et que

le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

- 2► Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

- 3► Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) orthogonale au plan (ABC) passant par le point $D(0; 1; -1)$.

- 4► Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de (Δ) avec le plan (ABC) . Quelle est la distance de D au plan (ABC) ?

- 5► Soit M un point quelconque de (DC) . Ainsi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DC}$.

a► Vérifier que la distance AM est minimale lorsque $t = \frac{5}{14}$.

b► En déduire les coordonnées du point Q , projeté orthogonal de A sur (DC) .

Exercice 32 (BAC 2024)

On considère :

- les points $A(-2; 0; 2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(1; -1; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

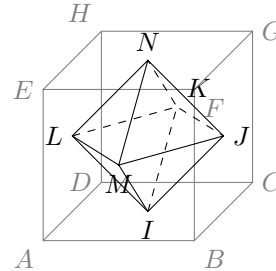
- la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

- 1► Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- 2► a► Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .
 b► Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 3y + 5z - 8 = 0$.
 c► En déduire que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
- 3► a► Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D . On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C .
 b► Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
- 4► a► Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC) .
 b► Calculer la distance du point D au plan (ABC) .
 Arrondir le résultat au dixième.

Exercice 33 (BAC 2019)

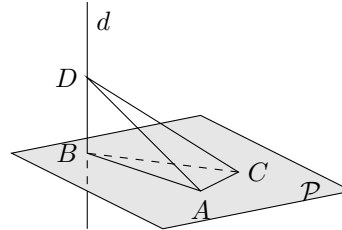
On relie les centres de chaque face d'un cube $ABCDEFGH$ pour former un solide $IJKLMNOP$ comme sur la figure ci-dessous. Plus précisément, les points I , J , K , L , M et N sont les centres respectifs des faces carrées $ABCD$, $BCGF$, $CDHG$, $ADHE$, $ABFE$ et $EFGH$ (donc les milieux des diagonales de ces carrés).



Justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Exercice 34 (BAC 2019)

Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC rectangle en A . Soit d la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point B . On considère un point D de cette droite distinct du point B .

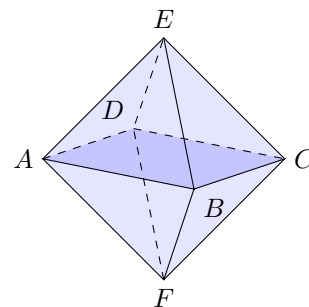


Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD) .

Vers le supérieur

Exercice 35

$ABCDEF$ est un octaèdre régulier composé de huit faces qui sont toutes des triangles équilatéraux.
 Montrer que la droite (EF) est orthogonale au plan (ABC) .



Exercice 36

Montrer que les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.

(Indication : quatre sommets bien choisis d'un cube forment un tétraèdre régulier...)

Exercice 37

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(-2; 0; 1)$, $B(3; 1; -1)$ et $C(0; 2; 3)$.

Exercice 38

Soient $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 4; 5)$ deux points de l'espace. Le *plan médiateur* du segment $[AB]$ est le plan orthogonal à $[AB]$ qui passe par son milieu.

- 1► Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$.
- 2► Démontrer que tout point de ce plan est équidistant de A et B .

12 Intégration

Table des matières

1	Un peu d'histoire : la méthode des rectangles de Riemann	209
2	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	212
A	Cas d'une fonction positive – Notations et vocabulaire	212
B	Généralisation à des fonctions de signe quelconque – Propriétés de l'intégrale	213
C	Intégrale et primitive : théorème fondamental de l'analyse	215
D	Intégration par parties	218
3	Applications du calcul intégral	220
A	Calculs d'aire	220
B	Valeur moyenne d'une fonction	220
C	Intégrales et suites	221
	Exercices	222

Programme

Calcul intégral

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives.

On met en regard les écritures $\int_a^b f(x) \, dx$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f . Notation $\int_a^b f(x) \, dx$.
- Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f . Notation $[F(x)]_a^b$.
- Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de $\int_a^b f(x) \, dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b .
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.

- ▶ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- ▶ Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- ▶ Calculer l'aire entre deux courbes.
- ▶ Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- ▶ Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations

- ▶ Pour une fonction positive croissante f sur $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ est une primitive de f . Pour toute primitive F de f , relation $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.
- ▶ Intégration par parties.

Approfondissements possibles

- ▶ Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes.
- ▶ Encadrement de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ par des intégrales.

Exemples d'algorithme

- ▶ Méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes.
- ▶ Méthode de Monte-Carlo.
- ▶ Algorithme de Brouncker pour le calcul de $\ln(2)$.

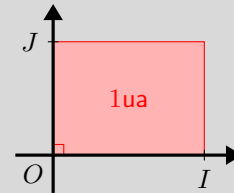
Dans tout le chapitre, f désigne une fonction *continue* sur un intervalle I , et on note $[a, b]$ un segment contenu dans l'intérieur de I , c'est-à-dire que ni a ni b ne sont des bornes de I .

1 – Un peu d'histoire : la méthode des rectangles de Riemann

L'*aire* d'une portion du plan est une mesure de la place occupée par cette portion dans le plan. En tant que grandeur mesurable, l'aire dépend d'une unité : par exemple les unités du système métrique (m^2 , km^2 , cm^2 ...). De manière générale, on parle d'*unité d'aire* :

Définition 1

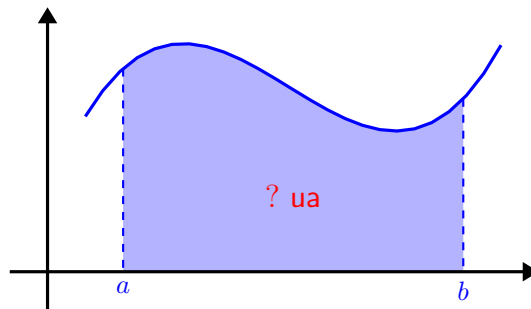
Dans un repère orthogonal (O, I, J) du plan, on appelle *unité d'aire*, notée ua , l'aire du rectangle décrit par O , I et J , autrement dit $1ua = OI \times OJ$.



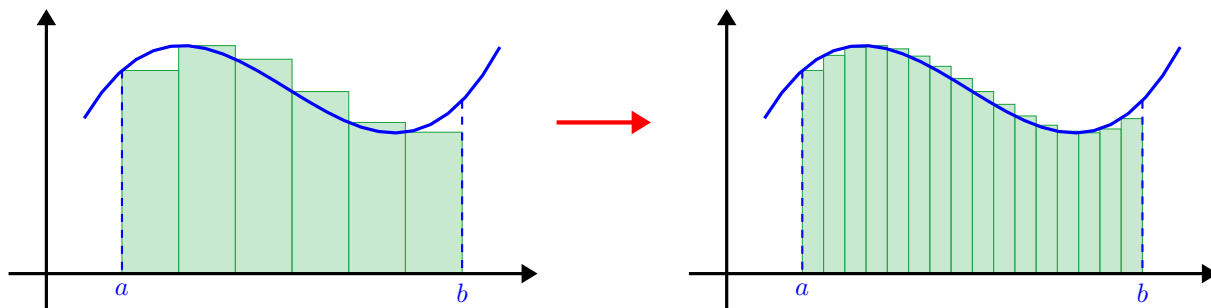
Unité d'aire

Dans toute la suite, on se place dans un repère orthogonal (O, I, J) du plan, et on note ua l'unité d'aire associée. Tout objet géométrique, notamment les courbes de fonctions, seront sous-entendu tracés dans ce repère.

Supposons f positive, sa courbe est donc au-dessus de l'axe des abscisses. On souhaite déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, dans la portion de plan délimitée par a et b .



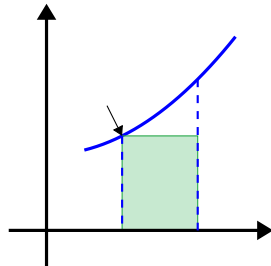
C'est un problème compliqué en général, car la courbe d'une fonction peut prendre de très nombreuses formes. Au XIX^e siècle, Bernhard Riemann a formulé l'idée suivante : découpons la surface en rectangles. Cela ne donne pas une valeur exacte de l'aire recherchée, mais une approximation. Le constat au cœur de la méthode de Riemann est que plus l'on découpera la surface avec de nombreux rectangles de plus en plus fins, meilleure sera l'approximation.



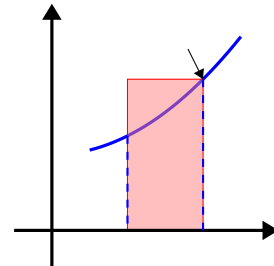
Notons n le nombre de rectangles, et $R_n(f)$ l'aire totale des rectangles construits comme sur le schéma (les détails calculatoires seront donnés plus bas). L'idée de Riemann se reformule donc ainsi : plus n devient grand, plus $R_n(f)$ se rapproche de la mesure de l'aire sous la courbe de f entre a et b ... ça ressemble beaucoup à une limite, n'est-ce pas ? Et ce n'est pas pour rien ! La notion de limite n'a été formalisée que dans le courant des deux siècles qui ont précédé Riemann.

On dispose donc d'une méthode pour approcher l'aire sous la courbe d'une fonction. Regardons le détail calculatoire de la méthode : quelle est l'aire totale des rectangles, en fonction de leur nombre ?

Tout d'abord leur largeur : on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n morceaux de même longueur : chaque morceau a donc pour longueur $\frac{b-a}{n}$, ce qui est donc la largeur de chaque rectangle. Concernant la hauteur, il y a en fait deux méthodes principales : les *rectangles à gauche*, comme illustré ci-dessus, et les *rectangles à droite*. La différence réside dans le choix du sommet du rectangle qui touche la courbe de f : le sommet de gauche, ou celui de droite.

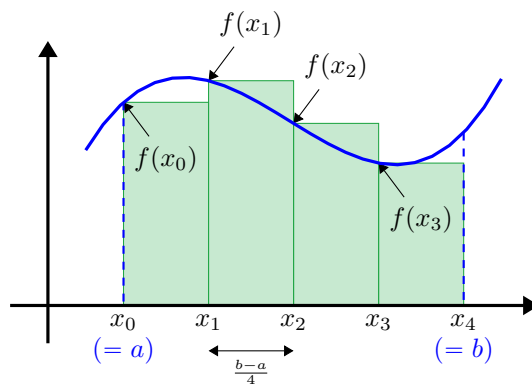


Rectangle à gauche



Rectangle à droite

Notons $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ les abscisses successives à la base des rectangles. On a donc $x_0 = a$, $x_n = b$ et pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$: par conséquent, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i = a + i \times \frac{b-a}{n}$. Comme on considère les rectangles à gauche, la hauteur du rectangle entre x_i et x_{i+1} est $f(x_i)$.



Ainsi, l'aire totale des rectangles s'exprime :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \times f(x_0) + \frac{b-a}{n} \times f(x_1) + \dots + \frac{b-a}{n} \times f(x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f(x_i)$$

Ce qui se réécrit, en factorisant et en donnant l'expression explicite de chaque x_i :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right)$$

Cette formule se traduit aisément en une méthode algorithmique d'approximation :

```
1 def methode_rectangles(f, a, b, n):
2     aire = 0
3     h = (b-a)/n
4     x = a
5     for i in range(n):
6         aire += f(x)
7         x += h
8     return h*aire
```

Remarque 2

Pour les rectangles à droite, les bornes de la somme sont décalées :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right)$$

Pour faire le lien avec la section suivante, faisons réapparaître les x_i , et notons $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. En faisant re-renter le Δx_i à l'intérieur de la somme, la formule se réécrit :

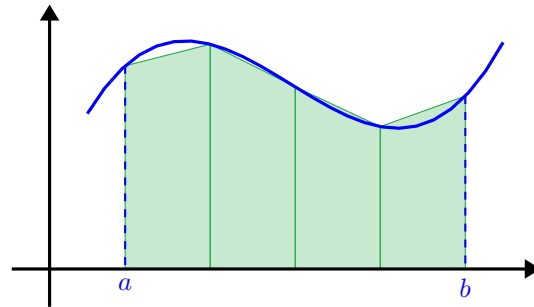
$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Notez que la notation Δx_i , qui désigne l'écart entre x_{i-1} et x_i , permet de créer une méthode des rectangles où les différents rectangles n'ont pas forcément tous la même largeur.

Remarque 3 (Pour la culture)

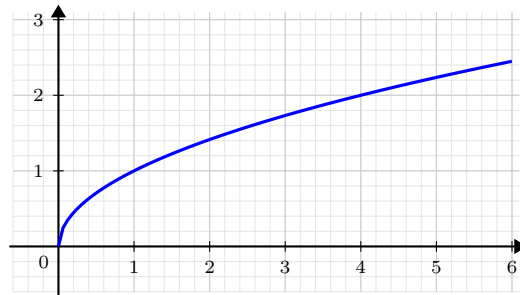
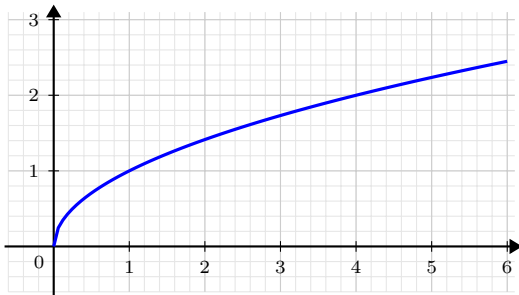
Il existe bien d'autres manières d'approcher l'aire sous une courbe. L'une des plus célèbres consiste à utiliser des trapèzes au lieu de rectangles. La qualité de l'approximation dépend de l'aire oubliée ou ajoutée : on constate visuellement qu'approcher l'aire par des trapèzes à la place de rectangles permet d'améliorer grandement la qualité de l'approximation.

En guise d'exercice, décrivez la construction des trapèzes et écrivez leur aire totale...

**Application 4**

Ci-dessous, la courbe représentative de la fonction racine carrée, en deux exemplaires.

- 1► Sur la courbe de gauche, représenter la méthode des rectangles à gauche pour des rectangles de largeur 1. Déterminer l'aire totale de ces rectangles.
- 2► Faire de même à droite pour la méthode des rectangles à droite. Déterminer l'aire totale de ces rectangles.
- 3► En déduire un encadrement de l'aire sous la courbe de la fonction racine carrée entre 1 et 6.



2 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

A – Cas d'une fonction positive – Notations et vocabulaire

Dans ce paragraphe, on suppose toujours f positive sur $[a, b]$.

On a vu dans le paragraphe précédent comment la méthode des rectangles permet d'approcher l'aire sous une courbe : en notant $R_n(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ l'aire des n rectangles, cette suite tend vers l'aire sous la courbe quand n tend vers $+\infty$. Comme on intercale de plus en plus de rectangles dans un espace fini, entre a et b , chacun de ces rectangles devient de plus en plus fin, donc la quantité Δx_i se rapproche de 0. La notation intégrale rend compte de cette idée, en mimant la notation somme :

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \longrightarrow \int_a^b f(x) \, dx$$

Remarque 5

Attention à l'ordre des bornes : comme on le verra plus tard, le fait que a soit en bas et b en haut est extrêmement important.

Le symbole intégrale, en forme de S allongé, est affublé des valeurs extrémales du segment d'intégration, appelées *bornes d'intégration*. Cette notation se lit « *intégrale de a à b de f* », ou « *intégrale de f entre a et b* ». On peut également lire le x en disant « f de x dx ».

Remarque 6 (La plus importante de ce cours)

Le x dans l'intégrale est appelé *variable d'intégration*. On dit que c'est une variable *muette*, c'est-à-dire que le fait que ce soit un x n'a aucune importance. On peut mettre la lettre qu'on veut : x , y , t , u , ... Il faut uniquement que la variable de f corresponde à la variable du d .

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(y) \, dy = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(u) \, du = \dots$$

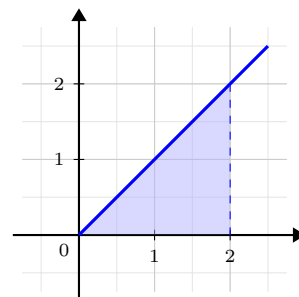
Attention cependant, le symbole $\int$ est toujours affublé du d . Ainsi, on n'écrira jamais $\int_a^b f(x)$.

Exemple 7

Soit $f : x \mapsto x$. Calculons $\int_0^2 f(x) \, dx$. Cette intégrale mesure l'aire du triangle rectangle isocèle représenté ci-contre, de base et hauteur 2 : son aire est donc $\frac{2 \times 2}{2} = 2$ u.a.. Ainsi,

$$\int_0^2 f(x) \, dx = 2$$

(Remarque : l'intégrale d'une fonction est un nombre sans unité, elle permet de mesurer l'aire mais n'est pas égale à l'aire. On n'écrit donc pas « u.a. » dans le résultat.)



Application 8

Par une méthode géométrique, calculer $\int_1^5 f(x) \, dx$ où f est la fonction constante égale à 2.

Application 9

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$.

- 1► Schématiser la courbe de f entre -1 et 5 dans un repère orthogonal.
- 2► Par une méthode géométrique, calculer $\int_{-1}^5 f(x) \, dx$.

Exercices conseillés : 1, 13

B – Généralisation à des fonctions de signe quelconque – Propriétés de l'intégrale

Définition 10

Intégrale d'une fonction négative

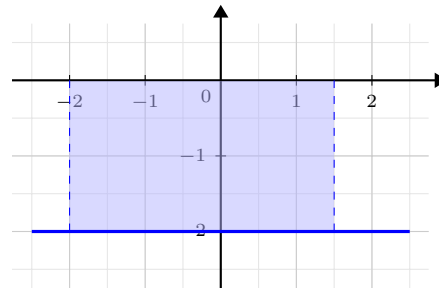
L'intégrale d'une fonction négative mesure l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, comptée négativement. Pour faire le lien avec la partie précédente, on peut écrire :

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_a^b -f(x) \, dx$$

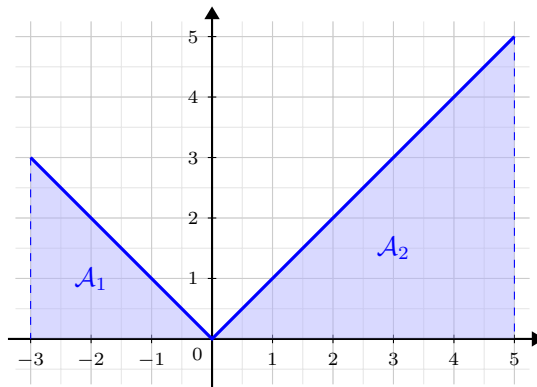
Exemple 11

Soit f la fonction constante égale à -2 . Calculons son intégrale entre -2 et $1,5$. La surface décrite est un rectangle de longueur $1,5 - (-2) = 3,5$ et de largeur $+2$, donc son aire est $2 \times 3,5 = 7 \text{ u.a.}$ Comme f est négative entre -2 et $1,5$,

$$\int_{-2}^{1,5} f(x) \, dx = -7$$



Considérons la fonction valeur absolue, cherchons la valeur de son intégrale entre -2 et 4 . L'aire à calculer se décompose naturellement en deux triangles dont l'aire est simple à calculer.



Il est donc naturel d'écrire $\int_{-3}^5 |x| dx = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$. Or $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des aires en-dessous de la courbe d'une fonction entre deux bornes, on peut donc les écrire comme des intégrales, et réécrire l'égalité précédente :

$$\int_{-3}^5 |x| dx = \underbrace{\int_{-3}^0 |x| dx}_{\mathcal{A}_1} + \underbrace{\int_0^5 |x| dx}_{\mathcal{A}_2}$$

On a donc scindé l'intégrale en ajoutant une borne entre les deux originales... cela vous rappelle peut-être la relation de Chasles pour les vecteurs : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Cette similarité donne en fait son nom à cette propriété (bien que Michel Chasles n'en soit pas l'auteur...) :

Relation de Chasles

Théorème 12

Pour tous a , b et c :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Application 13

Soit $f : x \mapsto 3 - x$.

1► Schématiser la courbe de f entre 2 et 5 dans un repère orthogonal.

2► En utilisant la relation de Chasles, calculer $\int_2^5 f(x) dx$.

Constatez l'absence d'hypothèses sur a , b et c dans l'énoncé du théorème... et en effet, cette relation fonctionne toujours. Mais cela laisse la porte ouverte à une situation que l'on s'est interdit plus tôt : que se passe-t-il quand les bornes de l'intégrale sont à l'envers ? Essayons d'appliquer la relation de Chasles pour lier les intégrales avec les bornes dans un sens ou dans l'autre :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx$$

Quelle est la valeur d'une intégrale quand les deux bornes sont identiques ? Si l'on se réfère à l'interprétation de l'intégrale comme une aire, cela correspond à l'aire sous la courbe de f dans une bande de largeur 0, son aire est donc nulle. On peut également montrer cette propriété à l'aide de la relation de Chasles (exercice pour le lecteur scrupuleux...). Ainsi, $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$, et donc :

Propriété 14

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Remarque 15

Si la fonction est nulle, ou que les bornes sont égales, l'intégrale est nulle car la surface associée est d'aire nulle. Il existe cependant des situations où les bornes sont distinctes, la fonction non nulle, et pourtant l'intégrale est nulle. Cela arrive quand les aires comptées positivement et négativement se compensent exactement.

Par exemple, $\int_1^5 3 - x dx = 0$, car cette intégrale se décompose en deux aires triangulaires identiques, l'une compté positivement, l'autre négativement.

Exercice conseillé : 3

C – Intégrale et primitive : théorème fondamental de l'analyse

Théorème 16

Théorème fondamental de l'analyse

Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration. (Première partie exigible)

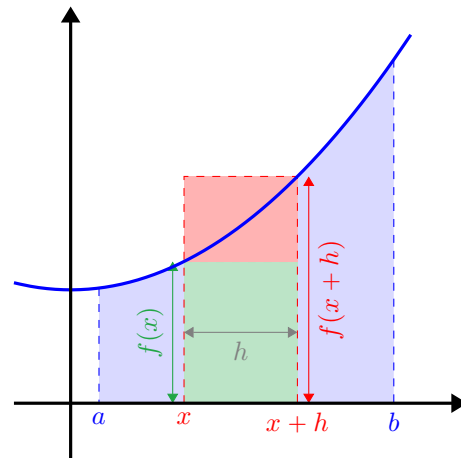
Pour simplifier la démonstration, on supposera f croissante et positive. Le cas général suit le même principe.

F_a EST UNE PRIMITIVE : Pour montrer que F_a est une primitive de f , on doit montrer que F_a est dérivable et de dérivée f . Soit $x \in]a, b[$. Montrons que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

Soit $h > 0$ tel que $x+h \in]a, b[$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} F_a(x+h) - F_a(x) &= \int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t) \, dt + \int_x^a f(t) \, dt \\ &= \int_x^a f(t) \, dt + \int_a^{x+h} f(t) \, dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) \, dt \end{aligned}$$

On s'inspire désormais de la méthode des rectangles pour déterminer un encadrement de cette différence. Comme f est positive et $h > 0$, cette intégrale est entre l'aire du rectangle à gauche, de largeur h et de hauteur $f(x)$, et l'aire du rectangle à droite, de largeur h , et de hauteur $f(x+h)$.



Ainsi :

$$h \times f(x) < \int_x^{x+h} f(t) \, dt < h \times f(x+h)$$

Comme $h > 0$, en remplaçant l'intégrale par $F_a(x+h) - F_a(x)$:

$$f(x) < \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} < f(x+h)$$

Comme f est continue en x , $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) = f(x)$, donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$$

On calcule de même la limite en 0 à gauche. Finalement, pour tout $x \in]a, b[$, F_a est dérivable en x , et $F'_a(x) = f(x)$: ainsi, F_a est une primitive de f sur $]a, b[$. Il est immédiat que $F_a(a) = 0$.

UNICITÉ : Soit F une primitive de f qui s'annule en a . Posons $\varphi = F_a - F$: elle est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur I , et sa dérivée est $\varphi' = F'_a - F' = 0$. Ainsi φ est de dérivée nulle sur un intervalle, elle est donc constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = c$, donc $F_a(x) = F(x) + c$. En particulier, pour $x = a$, $F_a(a) = F(a) + c$, mais $F_a(a) = F(a) = 0$, donc $c = 0$, donc $F_a = F$. $\square$

Corollaire 17

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Corollaire 18

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration. La preuve est donnée dans la partie sur l'unicité dans la démonstration précédente. $\square$

Proposition 19**Intégration par une primitive**

Si F est une primitive (quelconque) de f , alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

On utilise la notation suivante :

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration. (Exigible)

Soit $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ l'unique primitive de f qui s'annule en a . Comme F et F_a sont deux primitives d'une même fonction, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $F = F_a + k$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t) \, dt = F_a(b) - 0 = F_a(b) - F_a(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k] = F(b) - F(a)$$

$\square$

Exemple 20

Comme $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$,

$$\int_1^3 2x \, dx = [x^2]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

Application 21

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} \, dx$$

$$B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 \, dx$$

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} \, dx$$

Exercice conseillé : 2, 7, 10

Propriété 22**Propriétés de l'intégrale**

Pour toutes fonctions f et g continues sur I , pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\triangleright \int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{linéarité de l'intégrale})$$

- ▶ $\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$ (linéarité de l'intégrale)
- ▶ Si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ (positivité de l'intégrale)
- ▶ Si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$ (croissance de l'intégrale)

(Les deux derniers points sont très faux si $b < a$!)

Démonstration. Soient F et G des primitives de f et de g .

- ▶ Le fonction kF est une primitive de kf , donc $\int_a^b kf(x) \, dx = [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k[F(x)]_a^b = k \int_a^b f(x) \, dx$.
- ▶ Le fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$, donc $\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$.
- ▶ Comme f est positive sur l'intervalle d'intégration, son intégrale mesure une aire, et est donc positive.
- ▶ L'inégalité $f \geq g$ se ramenant à $f - g \geq 0$, on exploite le point précédent avec $f - g$ et on utilise la linéarité de l'intégrale pour démontrer l'inégalité demandée.

□

Application 23

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ et $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x)$. On note $A = \int_0^{2\pi} \cos(x)^2 \, dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin(x)^2 \, dx$. En utilisant les formules précédentes :

- 1▶ Calculer $A + B$ et $A - B$.
- 2▶ En déduire les valeurs de A et B .

Application 24

- 1▶ Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
- 2▶ En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} \, dx \leq e - 1$.

Exercices conseillés : 5, 12, 25, 27, 30

Méthode 25 (Encadrer une intégrale)

Pour encadrer une intégrale, on part de l'encadrement de la variable d'intégration – par exemple si on intègre entre 1 et 5 et que la variable s'appelle t , on écrit $1 \leq t \leq 5$ – et on reconstruit la fonction à partir de t en modifiant les inégalités au fur et à mesure.

Attention aux pièges des fonctions qui ne sont pas croissantes ! On rappelle que les fonctions croissantes conservent les inégalités, et les décroissantes les renversent. Si vous tombez sur une fonction ni croissante, ni décroissante, vous aurez besoin d'une étude plus approfondie.

Exemple 26

Encadrons $\int_1^3 e^{x+1} dx$.

$$1 \leq x \leq 3$$

Donc $2 \leq x+1 \leq 4$

(on ajoute 1)

Donc $e^2 \leq e^{x+1} \leq e^4$

(car e^x est croissante sur $[2; 4]$)

Donc $\int_1^3 e^2 dx \leq \int_1^3 e^{x+1} dx \leq \int_1^3 e^4 dx$

(par croissance de l'intégrale)

Donc $2e^2 \leq \int_1^3 e^{x+1} dx \leq 2e^4$

Exemple 27

Encadrons $\int_2^8 1 - 2t dt$.

$$2 \leq t \leq 8$$

Donc $-4 \geq -2t \geq -16$

(car $t \mapsto -2t$ est décroissante sur $[2; 8]$)

Donc $-3 \geq 1 - 2t \geq -15$

(on ajoute 1)

Donc $\int_2^8 -3 dt \geq \int_2^8 1 - 2t dt \geq \int_2^8 -15 dt$

(par croissance de l'intégrale)

Donc $-18 \geq \int_2^8 1 - 2t dt \geq -90$

Exercices conseillés : 17, 20, 29

D – Intégration par parties

Théorème 28

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables de dérivées continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Démonstration. (Exigible)

La fonction uv est dérivable comme produit, de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$. Autrement dit, uv est une primitive de $u'v + uv'$. Les fonctions u et v sont continues (car dérivables), donc $u'v$ et uv' sont continues comme produits. Ainsi,

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

donc :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

□

Remarque 29

La technique d'intégration par parties nécessite de lire l'intégrande (c'est le nom que l'on donne à la fonction que l'on intègre) comme un produit d'une fonction dérivable et de la dérivée d'une autre fonction. La plupart du cas, il n'est pas évident de voir qui joue le rôle de la dérivée parmi les deux fonctions... Il arrive donc qu'il faille s'y prendre à deux fois.

Conseil pour décider du rôle de chaque fonction : si vous pouvez faire disparaître l'une des fonctions en la dérivant, essayez dans ce sens !

Exemple 30

On souhaite calculer $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) \, dx$. On considère $u(x) = x$ (donc $u'(x) = 1$) et $v'(x) = \sin(x)$ (donc on peut prendre $v(x) = -\cos(x)$, bien que toute autre primitive fonctionne), donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \underset{u(x)}{x} \underset{v'(x)}{\sin(x)} \, dx &= \left[\underset{u(x)}{x} \times \underset{v(x)}{-\cos(x)} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underset{u'(x)}{1} \times \underset{v(x)}{-\cos(x)} \, dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 \times \cos(0) + [\sin(x)]_0^{\pi/2} \\ &= -0 + 0 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Application 31

Calculer :

$$A = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) \, dx \qquad B = \int_1^{e^2} \ln(x) \, dx$$

Exercices conseillés : 4, 22, 26, 28

3 – Applications du calcul intégral

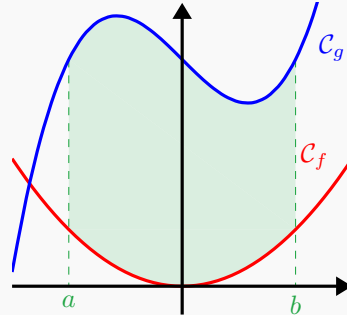
A – Calculs d'aire

Proposition 32

Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur I et telles que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$. L'aire de la portion du plan entre les courbes de f et g entre les bornes a et b est donnée, en unités d'aire, par :

$$\int_a^b g(x) - f(x) \, dx$$



Démonstration. On admet que toute fonction continue sur un segment admet un minorant : on peut donc trouver $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b], (g(x) \geq f(x) \geq c)$. La courbe de $f + |c|$ correspond à une translation vers le haut la courbe de f , idem pour $g + |c|$: comme l'aire est invariante par translation, on remplace f et g par leurs translatées, de sorte que $\forall x \in [a, b], g(x) \geq f(x) \geq 0$. Dans cette situation on peut interpréter les intégrales de f et de g sur $[a, b]$ comme l'aire sous leurs courbes. Il est alors immédiat que l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire sous

la courbe de g à laquelle on retranche l'aire sous la courbe de f , c'est-à-dire $\int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx$, ce qui, par linéarité de l'intégrale, vaut bien $\int_a^b g(x) - f(x) \, dx$. □

Application 33

Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x$. On se place dans un repère orthogonal dont l'unité de l'abscisse est 2cm et l'unité de l'ordonnée est 3cm. Exprimer en unités d'aire, puis en cm^2 , l'aire du domaine délimité par les courbes de f et g , et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

(Il est conseillé de faire un schéma de la situation. Attention à clairement justifier toutes les hypothèses.)

Exercices conseillés : 6, 21

B – Valeur moyenne d'une fonction

Dans cette section, on suppose que $b > a$.

Quand on dispose d'une série de données numériques $x_1, x_2, \dots, x_n$, on peut calculer leur moyenne grâce à la formule :

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

De même que pour la méthode des rectangles, c'est assez naturellement que l'on « prolonge » cette définition à une infinité de valeurs, en transformant la somme en intégrale :

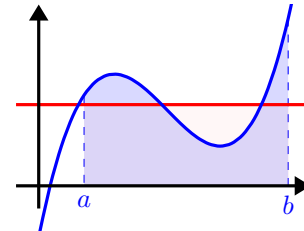
Définition 34**Valeur moyenne d'une fonction**

On appelle *valeur moyenne de f entre a et b* la quantité :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Remarque 35

En termes d'aire, cela correspond à trouver la hauteur du rectangle entre a et b qui a la même aire que le domaine délimité par la courbe de f entre a et b . De même que pour les séries de données, cela revient donc à trouver la droite horizontale qui « passe au milieu de f ».

**Application 36**

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto 3x^2 - 4x + 5$ sur $[1; 10]$.

Application 37

On modélise le nombre de malades lors d'une épidémie par la fonction $f : t \mapsto 16t^2 - t^3$ où la variable t désigne le temps passé en jours.

Déterminer le nombre moyen de malades durant les 16 premiers jours.

Exercices conseillés : 8, 11, 19, 31

C – Intégrales et suites

Application 38

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$, et on pose $I_n = \int_0^1 f_n(t) \, dt$.

- 1► Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0; 1]$, $1 - t^n \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$.
- 2► Calculer $\int_0^1 1 - t^n \, dt$ et en déduire un encadrement de I_n .
- 3► Montrer que $(I_n)_n$ converge, et donner sa limite.

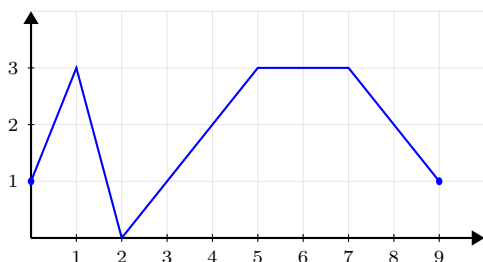
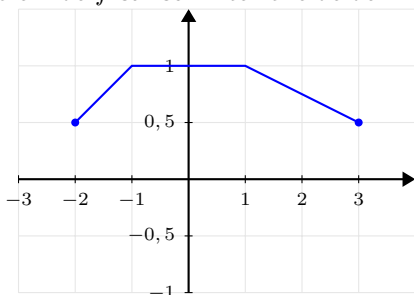
Exercices conseillés : 9, 18, 23, 25, 32

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Pour chaque fonction affine par morceaux f , calculer l'intégrale I de f sur son intervalle de définition.



Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes.

$$\blacktriangleright I_1 = \int_0^4 x - 3 \, dx \quad \blacktriangleright I_7 = \int_1^2 \frac{2}{(3u-1)^2} \, du$$

$$\blacktriangleright I_2 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t} \, dt \quad \blacktriangleright I_8 = \int_0^3 x e^{-x^2} \, dx$$

$$\blacktriangleright I_3 = \int_1^2 2e^{3x} \, dx \quad \blacktriangleright I_9 = \int_1^2 \frac{1}{3x-2} \, dx$$

$$\blacktriangleright I_4 = \int_{-3}^3 \frac{5x}{\sqrt{x^2+3}} \, dx \quad \blacktriangleright I_{10} = \int_1^e \frac{\ln(3x)}{x} \, dx$$

$$\blacktriangleright I_5 = \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{2x+3}} \, dx \quad \blacktriangleright I_{11} = \int_0^4 1 \, dx$$

$$\blacktriangleright I_6 = \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2} \quad \blacktriangleright I_{12} = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-4} \, dx$$

$$\blacktriangleright I_{13} = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} \, dx \quad \blacktriangleright I_{17} = \int_{-1}^2 t^2 - 4t + 3 \, dt$$

$$\blacktriangleright I_{14} = \int_0^3 x^2 - 3x + 4 \, dx \quad \blacktriangleright I_{18} = \int_{-3}^0 x^3 + 2x^2 - 1 \, dx$$

$$\blacktriangleright I_{15} = \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \quad \blacktriangleright I_{19} = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} \, dx$$

$$\blacktriangleright I_{16} = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1} \, dt \quad \blacktriangleright I_{20} = \int_0^2 (x-2)e^{2x^2-8x} \, dx$$

Exercice 3

Calculer géométriquement les intégrales suivantes :

$$\text{A} \blacktriangleright \int_2^5 2x \, dx \quad \text{C} \blacktriangleright \int_{-4}^{-1} -2u - 1 \, du$$

$$\text{B} \blacktriangleright \int_{-2}^4 3 - \frac{1}{2}x \, dx \quad \text{D} \blacktriangleright \int_2^5 -y + 3 \, dy$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties.

$$\blacktriangleright I_1 = \int_1^e x \ln(x) \, dx \quad \blacktriangleright I_6 = \int_{-1}^2 \frac{x}{(2+x)^3} \, dx$$

$$\blacktriangleright I_2 = \int_1^{e^2} \ln(t) \, dt \quad \blacktriangleright I_7 = \int_0^1 -x e^x \, dx$$

$$\blacktriangleright I_3 = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx \quad \blacktriangleright I_8 = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$$

$$\blacktriangleright I_4 = \int_1^2 (t-2)e^{2t} \, dt \quad \blacktriangleright I_9 = \int_0^{e-1} \frac{x}{(x+1)^2} \, dx$$

$$\blacktriangleright I_5 = \int_{-1}^0 x e^x \, dx \quad \blacktriangleright I_{10} = \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} \, dx$$

Exercice 5

Calculer :

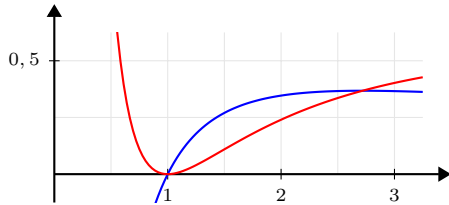
$$\text{A} \blacktriangleright \int_{-2}^1 3x \, dx - 3 \int_{-2}^1 t \, dt$$

$$\text{B} \blacktriangleright \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} \, dx$$

$$\text{C} \blacktriangleright \int_{-4}^1 (3t^2+2) \, dt + \int_1^3 (3x^2+2) \, dx$$

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $g(x) = \frac{\ln(x)^2}{x}$ de courbes respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



- 1► Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent deux points d'intersection dont on précisera les coordonnées.
- 2► Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 3► Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. L'unité est de 1 cm sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Exercice 7

On pousse un objet de manière rectiligne sur une distance de 4m. La force F nécessaire pour pousser cet objet, en N, s'exprime en fonction de la distance parcourue x , exprimée en m.

Dans cet exercice, F est une fonction affine. Au départ, la force est de 400N pour s'annuler au bout de 4m

- 1► Exprimer $F(x)$ en fonction de x .
- 2► Le travail W , en joules, de cette force est égal à $\int_0^4 F(x) \, dx$. Calculer le travail W de cette force.

Exercice 8

Lors d'un voyage de 8 heures, on roule à une vitesse v , exprimée en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, en fonction du temps t , exprimé en heure. La vitesse v est définie par :

$$v(t) = -6t(t - 8)$$

Calculer la vitesse moyenne sur le trajet, c'est-à-dire la valeur moyenne de v sur $[0; 8]$.

Exercice 9

La suite (I_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 1 + t^n \, dt$$

- 1► Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
- 2► Est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 10

- 1► Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\frac{4x^2 + 7x + 1}{x + 2} = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

- 2► En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{4x^2 + 7x + 1}{x + 2} \, dx$.

Exercice 11

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$$

- 1► Déterminer une primitive de f .
- 2► Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[50; 100]$.

Exercice 12

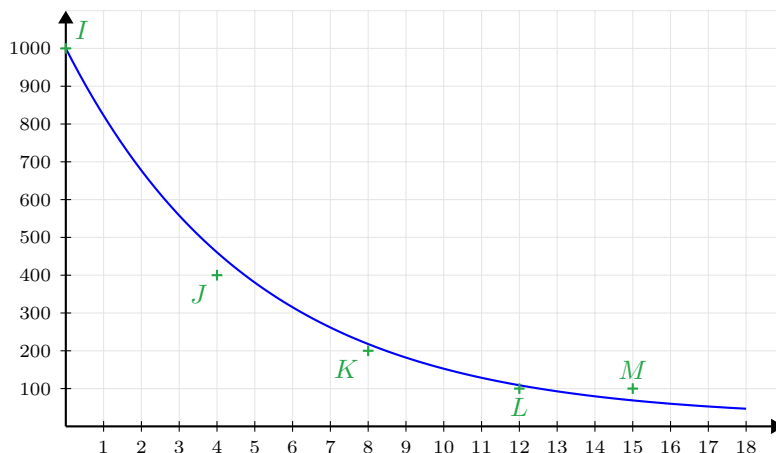
Comparer $I = \int_1^2 x e^x \, dx$ et $J = \int_1^2 x^2 e^x \, dx$.

Je comprends mon cours

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 980e^{-t/5} + 20$.

- 1► À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la valeur moyenne μ de f sur $[0; 15]$. On pourra s'aider des points I, J, K, L et M .



- 2► Déterminer la valeur exacte de μ puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 14

Calculer :

- | | |
|---|---|
| A► $\int_1^2 x^2 \, dx$ | E► $\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx$ |
| B► $\int_1^3 t^3 \, dt$ | F► $\int_1^e \frac{2}{2t^3} \, dt$ |
| C► $\int_2^{10} \frac{1}{u} \, du$ | G► $\int_0^{\ln(2)} 3x^2 e^{x^3} \, dx$ |
| D► $\int_0^4 s - 3 \, ds$ | H► $\int_{-1}^1 x(2 - x^2)^3 \, dx$ |
| I► $\int_1^2 \frac{x^3}{x^4 + 1} \, dx$ | |
| J► $\int_{-1}^2 (1 - 2t)e^{-t^2+t+1} \, dt$ | |
| K► $\int_1^e (t^2 - 1) \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) \, dt$ | |
| L► $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$ | |

Exercice 15

Calculer :

- | | |
|---|--|
| A► $\int_0^1 xe^x \, dx$ | F► $\int_1^e x^2 \ln(x) \, dx$ |
| B► $\int_0^\pi x \cos(x) \, dx$ | G► $\int_0^1 \frac{x}{(5x + 3)^3} \, dx$ |
| C► $\int_0^{10} (2t + 1)e^{-t} \, dt$ | H► $\int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x - 9)^3} \, dx$ |
| D► $\int_{-2\pi}^{\pi/2} 2x \cos(x) \, dx$ | I► $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$ |
| E► $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$ | J► $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ |
| L► $\int_{-1/3}^0 (4 - 3t)e^{3t+1} \, dt$ | |
| M► $\int_{-\pi}^\pi (3x - 2) \sin(x) \, dx$ | |
| N► $\int_0^\pi (x^2 - 2x + 1) \sin(3x) \, dx$ | |
| O► $\int_{-1}^1 2x(8x + 2)^2 \, dx$ | |

Exercice 16

- 1► Soient $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto x + 1$. Déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par les courbes de f et g , et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
- 2► Déterminer les valeurs moyennes des fonctions suivantes sur les intervalles demandés :

$f : x \mapsto x^2 + 3$
sur $[-2; 2]$

$g : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 3}$
sur $[e; 4]$
- 3► Soit g une fonction continue de valeur moyenne $\ln(2)$ sur $[1; 3]$. Calculer $\int_1^3 g(x) \, dx$.

Exercice 17

Démontrer les inégalités suivantes grâce à la croissance de l'intégrale.

- a► $2 \leq \int_1^9 \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \, dt \leq 4$
- b► $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx \leq 3$
- c► $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} \, dx \leq 2$

Exercice 18

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx.$$

- 1► Calculer I_0 .
- 2► Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
- 3► En déduire que (I_n) converge.
- 4► Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

- 5► En déduire la limite de la suite (I_n) .

Exercice 19

On considère une fonction f définie sur $[1; 4]$, de valeur moyenne $\mu = 2$. Déterminer $\int_1^4 f(x) \, dx$.

Exercice 20

Les questions sont indépendantes.

- 1► Soient f et g deux fonctions continues telles que $\int_0^1 f(x) \, dx = 3$ et $\int_0^1 g(x) \, dx = -5$.
Calculer $\int_0^1 2f(x) - g(x) \, dx$.
- 2► Calculer $\int_1^2 \ln(x) \, dx + \int_1^2 t + \ln\left(\frac{1}{t}\right) \, dt$.
- 3► Soit f continue telle que pour tout $x \in [2; 4]$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.
Déterminer un encadrement de $\int_2^4 f(x) \, dx$.
- 4► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n une fonction continue telle que pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{-n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$.
Étudier la convergence de la suite de terme général $\int_0^1 f_n(x) \, dx$.

Exercice 21

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{x/2} - 1$.

- 1► a► Pour tout réel x , développer $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$.
b► En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 2► Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 22 (BAC 2012)

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} \, dx$.

- 1► Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x^2}$. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g . En déduire la valeur de I_1 .
- 2► À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$$

- 3► Calculer I_3 et I_5 .

Exercice 23

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_1^n \frac{x}{x+1} dx$$

- 1► Prouver que la suite (I_n) est croissante.
- 2► Est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 24

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n)$$

et (I_n) la suite de terme général $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 1► a► Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n \leq 2$$
 - b► Étudier le sens de variation de la suite (I_n) .
 - c► En déduire que la suite converge.

2► Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x$$

- a► Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
- b► En déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.
- c► Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$,

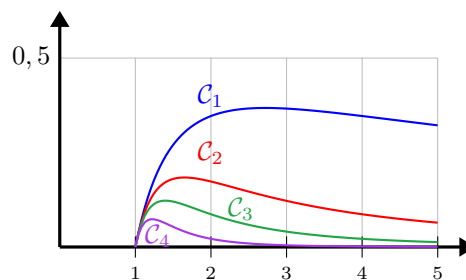
$$\ln(1 + x^n) \leq x^n$$

3► Déterminer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 25

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $[1; 5]$ par $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.



- 1► Conjecturer la limite de l'aire délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 2► a► Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1; 5]$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$.
b► Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$$

c► Démontrer la conjecture de la question 1►.

Objectif Bac

Exercice 26 (BAC 2019)

Partie A

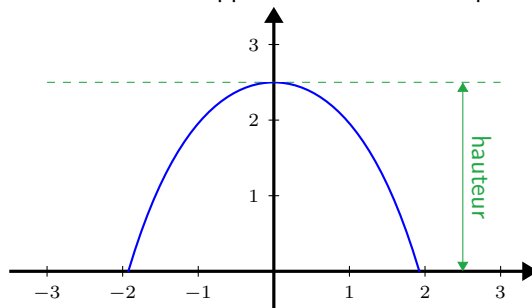
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

- 1► a► Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b► Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
- c► Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, une unique solution α .
- 2► En remarquant que, pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les serres en forme de tunnel sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température. Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.



Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la partie A. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.

On admettra que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

- 1► Calculer la hauteur d'un arceau.
- 2► Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0; \alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par :

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

- a► Montrer que pour tout réel x ,

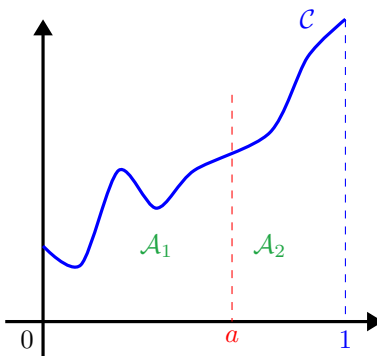
$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$$

- b► En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α .
- c► Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à $e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Exercice 27

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$, continue et positive sur cet intervalle. Soit $a \in]0; 1[$. On note :

- ▶ $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal,
- ▶ $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine plan entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$,
- ▶ $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine plan entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$,



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f , une valeur du réel a telle que la condition (E) : « les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales » est vérifiée. On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

- 1▶ Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a , et déterminer sa valeur.
 - a▶ f est une fonction constante strictement positive,
 - b▶ f est définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x$,
- 2▶ a▶ À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aire, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
 b▶ On note F une primitive de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
 Démontrer que si a satisfait la condition (E) , alors $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$.
 c▶ La réciproque est-elle vraie ?
- 3▶ Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
 - a▶ La fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = e^x$. Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel a et donner sa valeur.
 - b▶ La fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. Vérifier que $a = \frac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, $f : x \mapsto 4 - 3x^2$.

- 1▶ Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E) , alors a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.
- 2▶ On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a▶ Calculer u_1 .
 - b▶ Démontrer que g est croissante sur $[0; 1]$.
 - c▶ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
 - d▶ Prouver que la suite (u_n) est convergente. À l'aide d'opérations sur les limites, prouver que la limite est a .
 - e▶ On admet que $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Donner une valeur approchée de a à 10^{-8} près.

Exercice 28

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto x^n e^x$ sur $[0; 1]$. On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- 1► a► Soit $F_1 : x \mapsto (x-1)e^x$ définie sur $[0; 1]$. Vérifier que F_1 est une primitive de f_1 .
b► Calculer I_1 .
- 2► À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

- 3► Calculer I_2 .

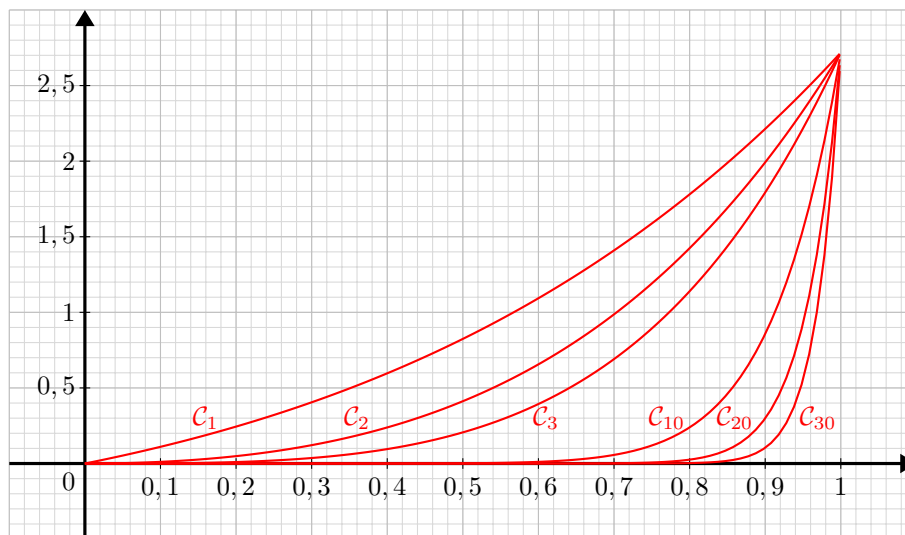
- 4► On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

```
1 def mystere(n):
2     a = 1
3     L = [a]
4     for i in range(1,n):
5         a = e - (i + 1)*a
6         L.append(a)
7     return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

Partie II

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}, C_{30}$.



- 1► a► Donner une interprétation graphique de I_n .
b► Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
- 2► Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$.
- 3► En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Vers le supérieur

Exercice 29

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

- 1► Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$$

- 2► La suite (I_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

- 3► Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 30

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. Cela signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+T) = f(x)$$

- 1► On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\ell(a) = \int_a^{a+T} f(x) \, dx$$

- a► Démontrer que ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que, pour tout réel a , $\ell'(a) = 0$.
b► Que peut-on en déduire pour ℓ ?

- 2► Justifier alors que :

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx$$

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $[0; 3]$ telle que :

$$f(x) = (5x - 2)e^{-2x}$$

- 1► Calculer $\int_0^3 f(x) \, dx$.

- 2► En déduire la valeur moyenne de f sur $[0; 3]$.

Exercice 32

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_1^e x \ln(x)^n \, dx$$

- 1► Calculer I_0 .

- 2► À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

13 Variables aléatoires

Table des matières

1	Somme de variables aléatoires	233
A	Somme de deux variables aléatoires	233
B	Espérance et variance	233
C	Application à la loi binomiale	236
2	Notion d'échantillon	236
3	Inégalités probabilistes	238
4	Loi faible des grands nombres	240
	Exercices	242

Sommes de variables aléatoires

Cette section prolonge le programme de la classe de première sur les variables aléatoires en considérant des modèles probabilistes où interviennent deux ou plusieurs variables aléatoires, l'intérêt se portant sur leur somme, et notamment sur l'espérance et la variance de cette somme.

Les élèves ont déjà eu l'occasion, dans les classes antérieures, de rencontrer des exemples qui entrent dans ce cadre : lancers de deux dés, tirage de boules numérotées dans une urne (avec ou sans remise), roues de loterie, etc. En classe terminale, le schéma de Bernoulli est un exemple fondamental, où le nombre de succès peut être représenté comme somme de variables de Bernoulli indépendantes de même loi ; plus généralement, le modèle de la succession d'épreuves indépendantes fournit naturellement des exemples de variables aléatoires indépendantes.

L'objectif est de rendre l'élève capable d'utiliser la linéarité de l'espérance pour des variables aléatoires quelconques et l'additivité de la variance pour des variables indépendantes dans diverses situations. Il s'agit de développer l'intuition probabiliste, les compétences de calcul et de raisonnement sur les variables aléatoires.

La démonstration de la linéarité de l'espérance nécessite de formaliser les variables aléatoires comme des fonctions sur l'univers et d'utiliser l'expression de l'espérance comme moyenne pondérée sur l'ensemble des issues. Le professeur peut choisir de l'admettre, ou de la justifier sur un exemple.

Les variables indépendantes considérées dans le programme sont toujours envisagées dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. L'hypothèse d'indépendance étant constitutive du modèle considéré, toute question visant à justifier l'indépendance de variables aléatoires données a priori est en dehors des objectifs du programme.

L'additivité de la variance pour la somme de deux variables indépendantes est admise. La relation $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ pour des variables indépendantes n'est pas un attendu du programme.

Contenus

- ▶ Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$.
- ▶ Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$. Relation $\mathbb{V}[aX] = a^2\mathbb{V}[X]$.
- ▶ Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- ▶ Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n/n$.

Capacités attendues

- ▶ Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- ▶ Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.

- ▶ Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Démonstrations

- ▶ Espérance et variance de la loi binomiale.

Approfondissements possibles

- ▶ Relation $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ pour des variables aléatoires indépendantes X, Y . Application à la variance de $X + Y$.

Concentration, loi des grands nombres

L'objectif de cette section est d'une part d'approfondir le sens de l'écart-type comme mesure de dispersion, d'autre part de couronner la partie « Probabilités » par la loi des grands nombres, qui est le premier résultat fondamental de la théorie des probabilités et dont les implications sont considérables.

Pour cela, l'outil employé est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dont l'idée fondamentale est mise en valeur : l'écart type σ d'une variable aléatoire X est l'unité naturelle pour étudier la dispersion de X autour de son espérance μ ; par construction, il est naturel d'observer des écarts de X à μ en deçà ou au-delà de σ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre qu'en revanche des écarts de X à μ de quelques σ deviennent improbables. Ce résultat, d'une importance majeure en lui-même, permet de plus d'établir la loi des grands nombres, selon laquelle l'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Il est utile de faire remarquer aux élèves que le caractère universel de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev a pour contrepartie le fait qu'elle est loin d'être optimale : ainsi, elle montre qu'un écart à μ supérieur à 2σ est de probabilité inférieure ou égale à $1/4$ alors que les élèves ont découvert par simulation que cette probabilité est souvent majorée par 0,05. En avoir conscience ne diminue pas l'intérêt théorique de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et permet de mettre en évidence des cas de raisonnement par conditions suffisantes, par exemple la recherche d'une taille d'échantillon pour majorer une probabilité.

Contenus

- ▶ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V , et quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V[X]}{\delta^2}$.
- ▶ Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V , alors pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$.
- ▶ Loi des grands nombres.

Capacité attendue

- ▶ Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

Exemples d'algorithme

- ▶ Calculer la probabilité de $(|S_n - pn| > \sqrt{n})$, où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- ▶ Simulation d'une marche aléatoire.
- ▶ Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ . Calculer l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\sigma/\sqrt{n}$. Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks , ou à $k\sigma/\sqrt{n}$, pour $k = 1, 2, 3$.

Approfondissements possibles

- ▶ Estimation.
- ▶ Marche aléatoire.
- ▶ Exemples d'application issus d'autres disciplines pour diverses valeurs de n : sondage (par exemple $n = 1000$), étude du sex ratio (par exemple $n = 10^6$), demi-vie d'atomes radioactifs ($n = 10^{23}$).

1 – Somme de variables aléatoires

A – Somme de deux variables aléatoires

On lance deux dés, un rouge et un bleu. On note X la variable aléatoire qui donne le résultat du dé rouge, et Y celui du dé bleu. On note Z la variable aléatoire qui donne la somme des résultats des deux dés : on écrit alors $Z = X + Y$. Les variables X et Y peuvent prendre les valeurs de 1 à 6, donc leur somme Z peut prendre les valeurs de 2 à 12. Pour que la variable Z soit égale à 4, il faut que X et Y valent respectivement 1 et 3, ou 2 et 2, ou 3 et 1. En termes d'événements, on peut écrire :

$$\{Z = 4\} = (\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) \cup (\{X = 2\} \cap \{Y = 2\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 1\})$$

Si de plus X et Y sont indépendantes, alors on peut écrire :

$$\mathbb{P}(X + Y = 4) \stackrel{\text{id}}{=} \mathbb{P}(X = 1) \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2) \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(X = 3) \mathbb{P}(Y = 1)$$

Exemple 1

On lance 5 dés équilibrés, on compte la somme des résultats obtenus. On note X_i la variable aléatoire donnant le résultat du i -ième lancer, et $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. L'ensemble des valeurs prises par X est $\llbracket 5; 30 \rrbracket$.

Application 2

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux tours indépendants :

- ▶ 1^{er} tour : on lance un pièce, si on tombe sur Pile on gagne 1€, sinon on gagne 2€.
- ▶ 2nd tour : on lance un dé, si on tombe sur 1 on perd 5€, sinon si on tombe sur un pair on gagne 1€, sinon on gagne 2€.

On note X et Y les gains des deux tours, et $S = X + Y$. Établir la loi de S .

B – Espérance et variance

Activité 3

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces et à regarder le numéro obtenu : si le nombre obtenu est 5 ou 6, on gagne 6€. Si le nombre obtenu est 1, 2 ou 4, on perd 12€. Si le nombre obtenu est 3, on gagne 15€.

Partie A : On ne joue qu'une fois.

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain.

- 1▶ Déterminer la loi de probabilité de la variable X .
- 2▶ En déduire l'espérance de X et interpréter le résultat. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

Partie B : on triple les gains (et les pertes)

Soit T la variable aléatoire correspondant au gain obtenu avec ces nouvelles règles.

- 1▶ Déterminer la loi de probabilité de la variable T , puis son espérance.
- 2▶ À l'aide de l'énoncé, expliquer pourquoi on peut écrire $T = 3X$.
- 3▶ Quelle relation avons-nous obtenue entre $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{E}[X]$?

Partie C : On étend le jeu.

Le jeu se poursuit par un second lancer dont les règles sont les suivantes. Le joueur relance le dé équilibré : s'il obtient un nombre impair il gagne 3€ sinon il perd 2€.

On note Y la variable aléatoire correspondant au gain du second jeu, Z la variable aléatoire correspondant au gain obtenu.

- 1► Déterminer la loi de probabilité de la variable Y . Justifier qu'on peut écrire $Z = X + Y$.
- 2► Pour tout $i \in \{6; -12; 15\}$, on note A_i l'évènement « On remporte i euros au cours de la 1^{ère} phase du jeu ».
- Pour tout $j \in \{-2; 3\}$, on note B_j l'évènement « On remporte j euros au cours de la 2nd phase du jeu ».
- Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation. On admettra que les évènements B_j et A_i sont indépendants.

- 3► Recopier et compléter le tableau suivant :

z_i	-14					
$P(Z = z_i)$						

- 4► Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[Z]$. Comparer alors $\mathbb{E}[Z]$ avec $\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ et déterminer si le jeu est favorable au joueur.

Propriété 4

Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires et a un nombre réel, alors :

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$$

On dit que l'espérance est *linéaire*.

La démonstration requiert de jouer avec l'écriture de la somme définissant l'espérance. L'argument principal repose sur le fait que l'espérance est une somme, la somme est linéaire, donc l'espérance est linéaire.

Application 5

On lance un dé équilibré deux fois. Le premier jet permet de gagner 10€ si le nombre est pair et 5€ sinon. Le second jet permet de gagner 5€ si le nombre est 1 ou 2, 2€ si le nombre est 3 et de ne rien gagner sinon. On s'intéresse au gain. Proposer une modélisation de ce jeu à l'aide de deux variables aléatoires, puis calculer l'espérance.

On peut généraliser ceci :

Propriété 6

Linéarité de l'espérance

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires, et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[X_i]$$

Remarque 7

L'espérance d'une (variable aléatoire) constante est égale à cette constante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[a] = a$$

Proposition 8

Soit X une variable aléatoire, soit a un nombre réel.

$$\mathbb{V}[aX] = a^2 \mathbb{V}[X]$$

Démonstration. Par définition de la variance,

$$\mathbb{V}[aX] = \mathbb{E}[(ax - \mathbb{E}[aX])^2] = \mathbb{E}[a^2(X - \mathbb{E}[X])^2] = a^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = a^2\mathbb{V}[X]$$

□

Proposition 9

Soient X et Y deux variables indépendantes.

$$\mathbb{V}[X + Y] \stackrel{\text{id}}{=} \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$$

Remarque 10

Si X et Y ne sont pas indépendantes, cette égalité est très fausse ! Voir la section Pour aller (plus) loin pour plus de détails.

La formule suivante n'est pas au programme, mais elle est tellement pratique qu'il serait criminel de ne pas l'apprendre :

Proposition 11

Formule de König-Huygens

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$$

car $\mathbb{E}[X]$ est un nombre, et rappelons également que l'espérance d'un nombre est égale au nombre lui-même. Après simplification, on obtient bien la formule. □

Méthode 12 (Calculer la variance d'une variable aléatoire)

Pour calculer la variance d'une variable aléatoire à l'aide de la formule de König-Huygens, il faut trouver $\mathbb{E}[X^2]$. Pour cela, on détermine la loi de X^2 en mettant au carré les valeurs, *mais pas les probabilités*, de la loi de X . Il arrive que suite à cela, une même valeur apparaisse deux fois ; on eut simplement fusionner les colonnes en ajoutant les probabilités.

Exemple 13

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-contre.

Valeur	-2	0	2	3
Proba	0,3	0,2	0,4	0,1

La loi de X^2 est alors la suivante. Notez que $(-2)^2 = 2^2$, on les regroupe donc dans une même colonne, avec la probabilité $0,3 + 0,4 = 0,7$.

Valeur	0	4	9
Proba	0,2	0,7	0,1

Ainsi :

- ▶ $\mathbb{E}[X] = (-2) \times 0,3 + 0 \times 0,2 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,1 = 0,5$
- ▶ $\mathbb{E}[X^2] = 0 \times 0,2 + 4 \times 0,7 + 9 \times 0,1 = 3,7$

Et donc :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 3,7 - 0,5^2 = 3,45$$

C – Application à la loi binomiale

Propriété 14

Moments de la loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$\mathbb{E}[X] = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = np(1-p)$$

Démonstration. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Notons $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables de Bernoulli telles que X_i vaut 1 en cas de succès à la i -ième épreuve, et 0 en cas d'échec. Les épreuves du schéma de Bernoulli étant indépendantes, les variables X_i le sont également. Pour tout i entre 1 et n , $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, donc $\mathbb{E}[X_i] = p$ et $\mathbb{V}[X_i] = p(1-p)$.

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli. Par définition, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Remarquons que $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Alors :

- ▶ Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = \underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ fois}} = np$$

- ▶ Par indépendance des variables X_i ,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X] &= \mathbb{V}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \\ &\stackrel{\text{id}}{=} \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \dots + \mathbb{V}[X_n] \\ &= \underbrace{p(1-p) + p(1-p) + \dots + p(1-p)}_{n \text{ fois}} \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

□

2 – Notion d'échantillon

Définition 15

Échantillon

Un *échantillon* de taille n d'une loi de probabilité est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

Remarque 16

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n d'une variable X . Notons $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Par linéarité de l'espérance, et par indépendance,

- ▶ $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n\mathbb{E}[X]$.
- ▶ $\mathbb{V}[S] \stackrel{\text{id}}{=} \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \dots + \mathbb{V}[X_n] = n\mathbb{V}[X]$.

Application 17

Alice rentre du bar, ivre morte. Remonte la rue, directe entre le bar et chez elle. Titubant d'ivresse, elle a une probabilité $\frac{1}{3}$ de faire un pas en avant, et $\frac{2}{3}$ de faire un pas en arrière. On suppose les pas indépendants les uns des autres.

Pour tout entier naturel k , on note X_k la variable aléatoire qui vaut +1 si le k -ième pas d'Alice est vers l'avant, et -1 s'il est vers l'arrière.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- 1► Calculer $\mathbb{E}[X_k]$ et $\mathbb{V}[X_k]$.
- 2► En déduire $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.

Définition 18

Moyenne d'échantillon

La *moyenne* d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Proposition 19

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de la loi d'une variable aléatoire X , on note M_n la moyenne de cet échantillon.

$$\begin{aligned} \text{► } \mathbb{E}[M_n] &= \mathbb{E}[X] & \text{► } \mathbb{V}[M_n] &= \frac{1}{n} \mathbb{V}[X] & \text{► } \sigma(M_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma(X) \end{aligned}$$

Démonstration. ► Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_n]}{n} \\ &= \frac{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] + \dots + \mathbb{E}[X]}{n} \\ &= \mathbb{E}[X] \end{aligned}$$

► Par indépendance,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[M_n] &= \mathbb{V}\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{V}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \\ &= \frac{1}{n^2} (\mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \dots + \mathbb{V}[X_n]) \\ &= \frac{1}{n^2} (\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[X] + \dots + \mathbb{V}[X]) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{V}[X] \end{aligned}$$

$$\text{► } \sigma(M_n) = \sqrt{\mathbb{V}[M_n]} = \sqrt{\frac{1}{n} \mathbb{V}[X]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\mathbb{V}[X]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma(X)$$

□

Application 20

On considère la variable aléatoire X qui prend de manière équiprobable les valeurs $-4, 0, 1, 3$ et 6 . On réalise un échantillon de taille 50, dont on note la moyenne M_{50} .

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de M_{50} .

Bonus : écrire en Python un programme qui simule un tel échantillon, et calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cet échantillon.

3 – Inégalités probabilistes

Définition 21

Une variable aléatoire *positive* est une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X < 0) = 0$ (on peut dire qu'aucune issue n'est négative).

Théorème 22

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Démonstration. On rappelle qu'une variable aléatoire est une fonction qui à une issue associe un nombre. On note $\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}$ la variable aléatoire telle que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc l'inégalité :

$$a\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} \leq X\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$$

En effet, soit $\omega \in \Omega$. Deux cas de figure :

- ▶ Si $X(\omega) \geq a$, alors $\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) = 1$, et l'inégalité s'écrit donc $a \leq X(\omega) \leq X(\omega)$.
- ▶ Sinon, $\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) = 0$, et l'inégalité s'écrit $0 \leq 0 \leq X(\omega)$, ce qui est vrai car X est positive.

On admet que l'espérance est croissante*. Alors :

$$\mathbb{E}[a\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}] \leq \mathbb{E}[X]$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[a\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}] &= a\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}] \\ &= a(0 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} = 0) + 1 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} = 1)) \\ &= a\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}} = 1) \\ &= a\mathbb{P}(X \geq a) \end{aligned}$$

Donc, comme $a > 0$:

$$a\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}[X] \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

□

Exemple 23

Soit $X \sim \mathcal{B}(50; 0,75)$. On vérifie à la calculatrice que $\mathbb{P}(X \geq 35) \approx 0,8369$. L'inégalité de Markov nous dit que $\mathbb{P}(X \geq 35) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{35} = \frac{50 \times 0,75}{35} \approx 1,07$. C'est une majoration très large !

*. Si vous ne voulez pas l'admettre : soit X positive, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X=x) \geq 0$ car une probabilité est positive, et par positivité de X ses valeurs x sont positives (et une somme de nombres positifs est positive). Donc $\mathbb{E}[X] \geq 0$. Soient maintenant X et Y deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$. Alors $Y - X \geq 0$, donc $\mathbb{E}[Y - X] \geq 0$, donc $\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X] \geq 0$, donc $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ par linéarité de l'espérance.

Théorème 24**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit X une variable aléatoire. Pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}$$

Démonstration. Soit $a > 0$. Remarquons que $|X - \mathbb{E}[X]| \geq a \iff (X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a^2$, et $(X - \mathbb{E}[X])^2$ est une variable aléatoire positive, donc d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{a^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}$$

□

Remarque 25 (Comprendre la formule pour ne pas avoir à l'apprendre)

Utilisons des couleurs pour décomposer les différentes parties de la formule, et comprendre leur équivalent en français :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}$$

« La probabilité que l'écart entre X et son espérance soit d'au moins a ne peut pas dépasser une quantité dépendant de la variance de X et de a . »

Voici comment retrouver la formule en comprenant le sens de chacun de ses composants :

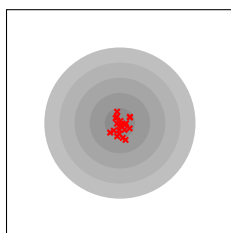
- Il faut d'abord comprendre que la variance d'une variable aléatoire mesure sa tendance à se disperser, à prendre des valeurs éloignées les unes des autres. En particulier, plus la variance est grande, plus X a « de la place » pour prendre diverses valeurs, et plus il est probable que X tombe loin de sa moyenne, c'est-à-dire son espérance, qui est en quelque sorte son point de référence. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev concerne donc la probabilité que X s'écarte de son espérance, et cette probabilité est réglée par la variance.
- Lorsqu'on soustrait deux réels, par exemple $5 - 3 = 2$, on montre que l'écart entre 3 et 5 est de 2. Mais on a aussi envie de dire que l'écart entre 5 et 3 est le même que celui entre 3 et 5, or $3 - 5 = -2 \neq 2$. Ce qu'il nous faut, c'est la valeur de la différence indépendamment du signe : c'est le travail de la valeur absolue. L'écart entre 3 et 5, ou entre 5 et 3 est $|5 - 3| = |3 - 5| = 2$. De même, l'écart entre X et son espérance est donc $|X - \mathbb{E}[X]|$.
- Comme on a dit, X a tendance à graviter autour de son espérance, ce qui est donc intéressant, c'est de savoir à quel point elle peut s'éloigner ; autrement dit à quel point l'écart peut être grand. On s'intéresse donc à l'événement $|X - \mathbb{E}[X]| \geq a$.
- Comme on a dit, X a tendance à graviter autour de son espérance, donc la probabilité qu'elle s'éloigne ne peut pas être trop grande : elle est donc majorée, et donc la formule est de la forme $\mathbb{P}(\dots) \leq \dots$.
- Comme expliqué plus haut, plus la variance est élevée, plus X a la bougeotte, et donc plus il est probable qu'elle s'éloigne de son espérance. Ainsi, $\mathbb{V}[X]$ est en haut de la fraction, car elle fait augmenter la probabilité. Inversement, plus on exige que X s'éloigne de son espérance, autrement dit plus on prend a grand, moins il est probable d'observer un tel écart. Ainsi, a va en bas de la fraction, car il fait diminuer la probabilité. Enfin, a est au carré pour une question d'homogénéité : c'est la même raison pour laquelle la formule de $\mathbb{V}[aX]$ sort un a au carré.

Remarque 26 (Justesse et précision)

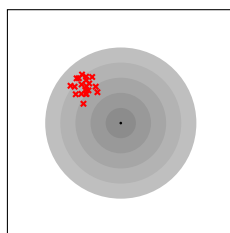
Une analogie qui permet de se représenter mentalement l'effet de l'espérance et de la variance est celle du tir à l'arc.

- Alice pratique en club depuis toute petite. Elle arrive à toujours tirer proche du centre.
- Bob pratique depuis aussi longtemps qu'Alice, mais il vient d'acheter du matériel neuf. Ses tirs sont consistants, mais un peu décalés, le temps qu'il s'habitue à son nouveau matériel.

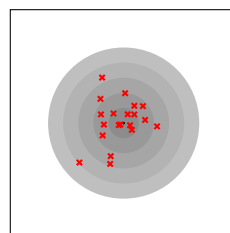
- ▶ Carole a rejoint le club récemment ; elle arrive à toucher la cible... un peu partout !
- ▶ David a rejoint le club hier. Il découvre encore le matériel, et a tendance à tirer un peu trop haut.



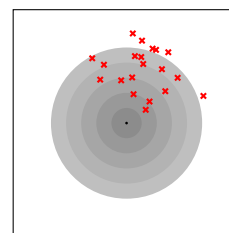
Cible d'Alice



Cible de Bob



Cible de Carole



Cible de David

4 – Loi faible des grands nombres

Théorème 27

Loi faible des grands nombres

On considère un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X , dont la moyenne est notée M_n .

$$\forall a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}[X]| \geq a) = 0$$

Démonstration. Soit $a > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}[M_n]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[M_n]}{a^2}$$

Or d'après la Proposition 19, $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[M_n] = \frac{1}{n}\mathbb{V}[X]$, donc :

$$0 \leq \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{na^2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{V}[X]}{na^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}[X]| \geq a) = 0$$

□

Remarque 28 (Interprétation de l'espérance)

Plus l'échantillon est grand, plus la moyenne empirique se rapproche de la moyenne théorique (l'espérance). Autrement dit, plus on répète une même expérience aléatoire un grand nombre de fois, plus la moyenne des résultats observés se rapproche de l'espérance de la variable aléatoire sous-jacente. C'est ce qui permet de dire si un jeu est favorable au joueur ou non : lorsque l'espérance est négative, cela signifie que sur un grand nombre de parties, la moyenne des gains tend à être négative, c'est-à-dire que le joueur perd une certaine somme d'argent en moyenne sur chaque partie.

Remarque 29 (Statistiques vs. probabilités – intervalles de confiance)

On peut en quelque sorte dire que c'est grâce à la loi des grands nombres que les études statistiques existent : en effet, là où la théorie des probabilités part d'une modélisation pour essayer de prédire les résultats, les statistiques (inférentielles) partent des résultats et essaient de retrouver la modélisation adaptée. Par exemple : imaginons que vous savez que vous observez un phénomène relevant d'une loi de Bernoulli, mais vous ne connaissez pas sa probabilité de succès p . Vous échantillonnez un grand nombre de données, et vous

faites l'observation suivante : vous savez que la loi sous-jacente a pour espérance p , et mesurez une moyenne d'échantillon de p_{obs} . La loi faible des grands nombres vous assure que plus votre échantillon est grand, plus l'écart entre p_{obs} et p sera faible (ou plutôt, qu'il est de plus en plus improbable qu'il soit grand).

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet même de quantifier une borne pour cette probabilité. On peut même aller plus loin et chercher à partir de quelle taille d'échantillon on est assuré que l'erreur ne dépasse pas un certain seuil, avec par exemple une certitude de 95%. Cette idée est la porte d'entrée vers ce que l'on appelle les *intervalles de confiance*.

Allez voir les approfondissements pour une étude complète !

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires identiques et indépendantes dont la loi est donnée par :

Valeur	-2	0	3	4
Proba	0,4	0,2	0,3	0,1

Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$, $\mathbb{V}[X + Y]$ et donner une valeur approchée de $\sigma[X + Y]$ à 10^{-2} près.

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés. On note X_1 le résultat du premier dé et X_2 celui du deuxième dé.

- 1► Calculer l'espérance et la variance de X_1 et X_2 .
- 2► On note $S = X_1 + X_2$.
 - a► Quelles sont les valeurs prises par S ?
 - b► Calculer l'espérance et la variance de S .
- 3► On note $M = \frac{X_1 + X_2}{2}$.
 - a► Quelles sont les valeurs prises par M ?
 - b► Calculer l'espérance et la variance de M .

Exercice 3

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces portent les montants en euros : -4, 1, 2 et 3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euro affiché.

- 1► Calculer $\mathbb{E}[X]$ et interpréter ce résultat.
- 2► Calculer $\mathbb{V}[X]$.
- 3► On décide de doubler chacun des montants (par exemple 3 devient 6). Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euro de ce deuxième jeu.
Exprimer Z en fonction de X puis en déduire $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{V}[Z]$.
- 4► On décide plutôt d'ajouter 2 à chacun des montants (par exemple 3 devient 5). Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euro de ce troisième jeu.
Exprimer Y en fonction de X puis en déduire $\mathbb{E}[Y]$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un même univers fini. La loi de probabilité de X est donnée ci-dessous :

Valeur	0	3
Proba	0,4	0,6

On donne $\mathbb{E}[Y] = 2,5$ et $\mathbb{V}[Y] = 1,2$. Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$, $\mathbb{E}[3Y]$ et $\mathbb{V}[X + Y]$.

Exercice 5

Pour réguler le trafic routier, une commune décide de régler les trois feux tricolores de la rue principale de manière à obtenir les résultats suivants :

- 80% des automobilistes doivent s'arrêter au premier feu ;
- 30% des automobilistes doivent s'arrêter au deuxième feu ;
- 65% des automobilistes doivent s'arrêter au troisième feu.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux auxquels s'arrête un automobiliste pris au hasard.

- 1► Justifier qu'on peut écrire $X = X_1 + X_2 + X_3$ où, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, X_i est la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'automobiliste s'est arrêté au feu numéro i et 0 sinon.
- 2► Déterminer les lois de probabilité des trois variables X_1 , X_2 , X_3 .
- 3► En déduire $\mathbb{E}[X]$. Interpréter ce résultat.

Exercice 6

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculer $\mathbb{V}[X]$.

Exercice 7

Les jours où elle s'entraîne au tir de 7 mètres au handball, Alice fait 30 tirs le matin et 50 l'après-midi : elle marque avec une probabilité égale à 0,46 le matin et une probabilité égale à 0,78 l'après-midi. Tous les tirs sont supposés indépendants.

Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs réussis par Alice le matin (respectivement l'après-midi).

- 1► Donner la loi suivie par X et celle suivie par Y .
- 2► Que représente $X + Y$?
- 3► Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$ et en donner une interprétation.

Exercice 8

Un objet est fabriqué dans une usine de sorte qu'il mesure très exactement 9,5cm. Lorsqu'une personne mesure cet objet, on considère que la variable aléatoire X donnant le résultat de la mesure en cm a pour espérance 9,5 et pour variance 0,04. On fait mesurer indépendamment cet objet à 35 élèves d'une même classe.

- 1► Majorer la probabilité que la moyenne M des mesures effectuées diffère de 9,5 de 0,5cm ou plus.
- 2► a► Minorer $\mathbb{P}(|M - 9,5| < 0,2)$.
b► Interpréter concrètement cette minoration.

Exercice 9

On considère une variable aléatoire X d'espérance 10 et de variance 4.

- 1► Trouver $a > 0$ tel que $\frac{\mathbb{V}[X]}{a^2} \leq 0,02$.
- 2► En déduire, sans calcul, que pour ces valeurs de a , on a $\mathbb{P}(|X - 10| \geq a) \leq 0,02$.

Exercice 10

Un joueur de rugby s'entraîne à tirer des pénalités. On considère que la variable aléatoire X donnant le nombre de pénalités réussies sur les 100 tentées suit une loi d'espérance 70 et de variance inconnue. Sachant que la probabilité qu'il réussisse entre 0 et 60 ou entre 80 et 100 pénalités est supérieure à 0,1, déterminer une minoration de $\mathbb{V}[X]$.

Exercice 11

Un élève se rend à vélo au lycée, distant de 3km de chez lui, à une vitesse supposée constante de 15km/h. Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit vert est $\frac{2}{3}$. Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie et on admet qu'il s'arrête toujours lorsque le feu est orange ou rouge. On considère les variables aléatoires V correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours, et T correspondant au temps en minutes mis par l'élève pour aller au lycée.

- 1► Déterminer la loi de probabilité de V .
- 2► Exprimer T en fonction de V .
- 3► Calculer $\mathbb{E}[T]$ et interpréter le résultat.
- 4► L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
 - a► Peut-il espérer être à l'heure ?
 - b► Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

Exercice 12

La consommation d'eau quotidienne en litres d'un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C telle que $\mathbb{E}[C] = 150$ et $\mathbb{V}[C] = 900$.

- 1► Justifier qu'au moins 75% de la population française consomme entre 90 et 210 litres d'eau par jour.
- 2► Est-il vrai de dire « la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85 » ?

Exercice 13

On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment. Les variables aléatoires donnant la masse de l'aiguille en grammes sont :

- X pour les heures, d'espérance 3 et d'écart-type 0,15,
- Y pour les minutes, d'espérance 2 et d'écart-type 0,1.

- 1► Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z donnant la masse totale des deux aiguilles.
- 2► Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux aiguilles doit être comprise entre 4,4g et 5,6g. Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?

Exercice 14

On lance un dé tétraédrique bien équilibré et on note le numéro X de la face obtenue. On admet que l'espérance de X est $\mu = 2,5$ et sa variance est $V = 1,25$.

Combien de lancers suffit-il de faire pour s'assurer au seuil de 95% que la moyenne des résultats des lancers est dans l'intervalle $]2,45; 2,55[$?

Exercice 15

Une urne contient 15 boules : 5 boules sont rouges, 7 boules sont bleues, les autres sont vertes.

On tire au hasard une boule : si elle est bleue on gagne 2 euros, si elle est rouge on gagne 3 euros, sinon on ne gagne rien. On la remet dans l'urne puis on en tire une deuxième : si elle est verte on perd 2 euros, si elle est rouge on perd 5 euros, sinon on ne perd rien. On la remet dans l'urne et on enlève 5 boules bleues de l'urne. Puis on tire au hasard une troisième boule : si elle est bleue on gagne 10 euros, sinon on ne gagne rien.

On note Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique final à ce jeu.

- 1► Proposer une décomposition de Z en somme de variables aléatoires dont on précisera les lois.
- 2► Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et interpréter ce résultat.
- 3► On crée un échantillon $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ de taille n de la variable Z et on considère la variable aléatoire $S_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$.
 - a► Que représente concrètement S_n ?
 - b► Exprimer $\mathbb{E}[S_n]$ en fonction de n .
 - c► Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour espérer remporter plus de 100 euros ?

Je comprends mon cours

Exercice 16

On tire au hasard et avec remise 3 cartes dans un jeu de 52 cartes. On gagne 7 euros par as obtenu, 4 euros par valet, dame ou roi obtenu et on perd 1 euro pour n'importe quelle autre carte obtenue. Par exemple, si on tire as de pique, 7 de trèfle et valet de carreau, on gagne : $7 - 1 + 4 = 10$ euros.

On note Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique total à ce jeu. Décomposer Z sous la forme d'une somme de trois variables aléatoires que l'on définira puis calculer $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 17

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un univers Ω dont on donne les lois de probabilité.

Valeur	-8	20	4
Proba	0,35	0,45	0,2

Valeur	1	3	a	7
Proba	0,1	0,25	0,45	0,2

- 1► Calculer $\mathbb{E}[X]$ puis déterminer une expression de $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de a .
- 2► Quelle doit être la valeur de a pour que $\mathbb{E}[X + 2Y] = 7$?

Objectif Bac

Exercice 18 (BAC 2024)

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n -ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

- 1► Représenter la situation par un arbre pondéré.
- 2► Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.
- 3► Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier. Arrondir au centième.
- 4► Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
 - a► Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1►).
 - b► Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}[Z]$ de la variable aléatoire Z .
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 19

Une loterie comporte un très grand nombre de billets valant chacun 1 euro. Parmi ces billets, 0,2% sont des billets gagnants à 100 euros, 1% à 50 euros, 2% à 10 euros et les autres sont perdants.

Manon, qui est la première à choisir ses billets, en prend 3 au hasard. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un ticket et S la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Manon.

- 1► Donner un argument permettant de considérer que les 3 billets de Manon sont le résultat d'un tirage avec remise.
- 2► Sous cette condition, donner la loi de X et calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$ (arrondir au millièmme si nécessaire).
- 3► En déduire le gain que pourrait espérer en moyenne Manon en tirant 3 billets et l'écart-type de S (arrondir au millièmme si nécessaire).

Exercice 20

- 1► Un jeu consiste à lancer deux dés tétraédriques équilibrés dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4. On souhaite étudier la somme des résultats des deux dés.

Proposer deux variables aléatoires X et Y dont la somme S permet de modéliser la situation puis établir la loi de probabilité de la somme. (Peut-on écrire $S = 2X$?)

- 2► Une urne contient 30 boules dont 10 portent le nombre « 10 », dont 10 autres portent le nombre « 20 » et les 10 dernières le nombre « 30 ». On tire au hasard une boule de l'urne puis on lance une pièce équilibrée. On a écrit -50 sur une face de la pièce et 20 sur l'autre face. On souhaite étudier la somme des deux nombres obtenus au final.

Proposer deux variables aléatoires X et Y dont la somme S permet de modéliser la situation. Étudier la loi de probabilité de S .

Exercice 21 (QCM équilibrés)

Un QCM propose 25 questions indépendantes. Chaque question présente 4 réponses dont une seule est correcte. Une bonne réponse rapporte b points et une mauvaise en fait perdre 1. L'objectif est de déterminer le nombre b de points à gagner par question de sorte qu'un élève répondant au hasard obtiendra 0 points en moyenne.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses et Y celle donnant le nombre de mauvaises réponses.

1► a► Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

b► Exprimer Y en fonction de X .

c► Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

2► Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de points à la fin du QCM.

a► Exprimer Z en fonction de X et Y .

b► En déduire la valeur de b .

3► Combien de points un élève répondant au hasard obtiendrait-il en moyenne si les mauvaises réponses ne faisaient pas perdre de points?

Exercice 22

1► Quand il joue au bowling, Matéo a une probabilité égale à 0,1 de faire un strike. Il lance 10 boules. Pour tout i entre 1 et 10, X_i est la variable aléatoire prenant 1 s'il fait un strike et 0 sinon au i -ième lancer.

a► Que peut-on dire de la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$?

b► Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

2► On lance 30 dés équilibrés. On considère la variable aléatoire Z donnant le nombre de 4 obtenus sur les 30 dés.

a► Déterminer une loi de probabilité associée aux 30 variables aléatoires identiques et indépendantes Z_i , représentant le résultat du i -ième lancer, pour chaque i allant de 1 à 30.

b► Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et en donner une interprétation.

3► Un test de solidité sur un prototype d'une nouvelle pièce automobile montre que dans 95% des cas la pièce testée résiste. On effectue 30 tests de manière indépendante et on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de tests pour lesquels la pièce n'a pas résisté.

a► Déterminer une loi de probabilité permettant d'écrire Y sous la forme d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

b► Calculer $\mathbb{E}[Y]$. Interpréter.

4► On lance 100 dés cubiques équilibrés. On note X la variable donnant la somme de tous les dés.

a► Décomposer X en une somme de variables aléatoires toutes de même loi de probabilité que l'on précisera.

b► Calculer $\mathbb{E}[X]$ et interpréter.

5► La variable aléatoire X donnant le nombre de baguettes ayant eu une mauvaise cuisson dans un échantillon de 50 baguettes d'une même boulangerie suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,03$. On recueille les résultats du prélèvement de 50 baguettes dans 10 boulangeries et on note Z la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes ayant eu une mauvaise cuisson sur l'ensemble des 10 boulangeries. Déterminer $\mathbb{E}[Z]$, $\mathbb{V}[Z]$ et $\sigma[Z]$.

Exercice 23

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q_1 et Q_2 . Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

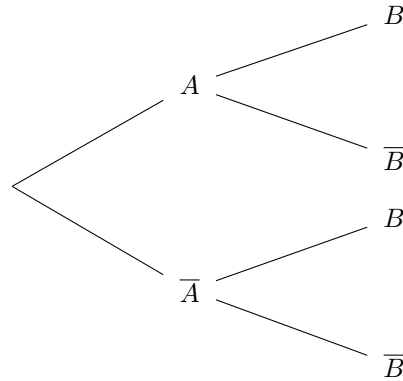
► Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question.

- S'il répond correctement à Q_1 , il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q_2 ,
- S'il ne répond pas correctement à Q_1 , il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q_2 .

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à Q_1 » ;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à Q_2 ».

1► Compléter l'arbre pondéré suivant.



- 2► Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q_1 et Q_2 .
- 3► Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q_2 .
- On note :
- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q_1 ,
 - X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q_2 ,
 - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice : $X = X_1 + X_2$.
- 4► Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2 . En déduire l'espérance de X et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
- 5► On souhaite déterminer la variance de X .
- Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$. En déduire $\mathbb{P}(X = 1)$.
 - Montrer que la variance de X vaut 0,57.
 - A-t-on $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2]$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes. Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point. Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

- Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Donner la valeur exacte de $\mathbb{P}(Y = 8)$.
- Donner l'espérance et la variance de Y .

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note Z la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

- Calculer l'espérance et la variance de Z .

- 2► Soit n un nombre entier strictement positif. Pour i entier variant de 1 à n , on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.
- On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.
- On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes :
- $$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}.$$
- a► Quelle est l'espérance de M_n ?
 - b► Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
 - c► Pour les valeurs trouvées à la question précédente, montrer que la probabilité que $6,3 \leq M_n \leq 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 24 BAC 2025

- Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points. L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs.
- On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match. On admet que l'espérance $\mathbb{E}[X] = 22$ et la variance $\mathbb{V}[X] = 65$.
- Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours de chacun des n matchs dans l'ordre. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X .
- On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.
- 1► Dans cette question, on prend $n = 50$.
 - a► Que représente la variable aléatoire M_{50} ?
 - b► Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .
 - c► Démontrer que $\mathbb{P}(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
 - d► En déduire que la probabilité de l'évènement $\{19 < M_{50} < 25\}$ est strictement supérieure à 0,85.
 - 2► Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $\mathbb{P}(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ »

Vers le supérieur

Exercice 25

On lance trois dés cubiques équilibrés et on note X la variable aléatoire correspondant à la somme obtenue. On note X_1 la variable aléatoire correspondant au résultat du premier dé. A-t-on $X = 3X_1$? Justifier.

Exercice 26

On considère un jeu sur une machine de casino se déroulant en deux manches. Il n'y a que deux possibilités à chaque tour de jeu : gagner 5 euros et ne rien gagner.

- 1► Au premier tour de jeu, 10% des joueurs remportent 5 euros. Les autres perdent.
- 2► Au second tour de jeu, si le joueur a remporté 5 euros au premier tour, ses chances de les remporter à nouveau sont de 15%. Si, à l'inverse, il avait perdu au premier tour, ses chances de gagner au second tour s'élèvent alors à 65%.

On note X_1 la variable aléatoire correspondant au gain du premier tour et X_2 celle correspondant au gain du second tour.

On note A_k l'événement « on a remporté k euros au premier tour » et B_k l'événement « on a remporté k euros au second tour », pour $k = 0$ ou 5.

- 1► Construire un arbre pondéré adapté à la situation.
- 2► En déduire les lois de probabilités des variables X_1 et X_2 .
- 3► Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}[X_2]$.
- 4► a► Calculer $P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\})$ et $P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0)$.
b► Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Justifier.
- 5► Dans la casino concurrent, les règles de ce jeu sont légèrement différentes :
 - au premier tour de jeu, 10% des joueurs remportent 5 euros, les autres perdent ;
 - au second tour de jeu, 60% des joueurs ayant remporté 5 euros au premier tour les gagnent à nouveau. Parmi ceux ayant perdu au premier tour, toujours 60% des joueurs gagnent 5 euros lors du second tour.

On note Y_1 la variable aléatoire correspondant au gain du premier tour et Y_2 celle correspondant au gain du second tour.

- a► Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires Y_1 et Y_2 .
- b► Ces variables sont-elles indépendantes ? Justifier.

Exercice 27

Proposer une expérience aléatoire et deux variables aléatoires X et Y telles que $\mathbb{V}[X + Y] \neq \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$.

14 Convexité

Table des matières

0	Quelques définitions préliminaires	252
1	Convexité, concavité d'une fonction numérique	252
2	Points d'inflexion	255
	Exercices	257

Programme

Compléments sur la dérivation

L'étude de la dérivation, commencée en classe de première, est étendue par l'étude de la dérivée d'une fonction composée et l'introduction de la dérivée seconde.

L'étude des fonctions convexes permet de réinvestir et d'enrichir le travail entamé en classe de première sur les dérivées. Elles donnent l'occasion de raisonner en diversifiant les registres : représentations graphiques, tableaux de variations, expressions symboliques.

Contenus

- ▶ Dérivée seconde d'une fonction.
- ▶ Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f' , la positivité de f'' .
- ▶ Point d'inflexion.

Capacités attendues

- ▶ Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- ▶ Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f , de f' ou de f'' .
- ▶ Lire sur une représentation graphique de f , de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstration

- ▶ Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Approfondissements possibles

- ▶ Courbe de Lorenz.
- ▶ Dérivée n -ième d'une fonction.
- ▶ Inégalité arithmético-géométrique.

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle *ouvert* I .

0 – Quelques définitions préliminaires

Définition 1

Dérivée seconde

Lorsqu'elle est bien définie, on appelle *dérivée seconde de f* , et on note f'' , la dérivée de la dérivée de f , autrement dit $f'' = (f')'$.

Lorsque f'' existe, on dit que f est *deux fois dérivable* sur I .

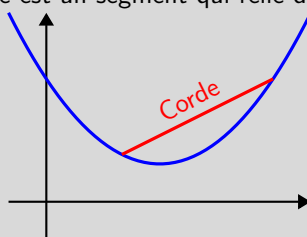
Exemple 2

Soit $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Mais alors f' est elle même dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x + 2$.

Définition 3

Corde d'une courbe

Une *corde* d'une courbe est un segment qui relie deux points de la courbe.



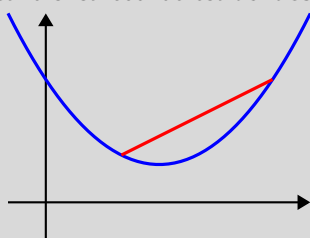
1 – Convexité, concavité d'une fonction numérique

Définition 4

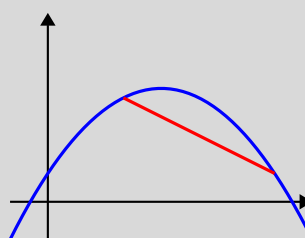
Convexité, concavité

On dit que f est :

- ▶ *convexe* si sa courbe est **en-dessous** de toutes ses cordes,
- ▶ *concave* si sa courbe est **au-dessus** de toutes ses cordes.



CONVEXE



CONCAVE

Remarque 5 (Pour les experts)

Cette définition n'en est pas vraiment une : c'est une interprétation géométrique de la convexité. Le problème est que l'on ne peut pas justifier rigoureusement un « pour tout » graphiquement, car on n'a accès qu'à une certaine portion de la courbe.

La vraie définition de la convexité traduit cette interprétation algébriquement : on dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in [0; 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

On dit que f est concave lorsque $-f$ est convexe.

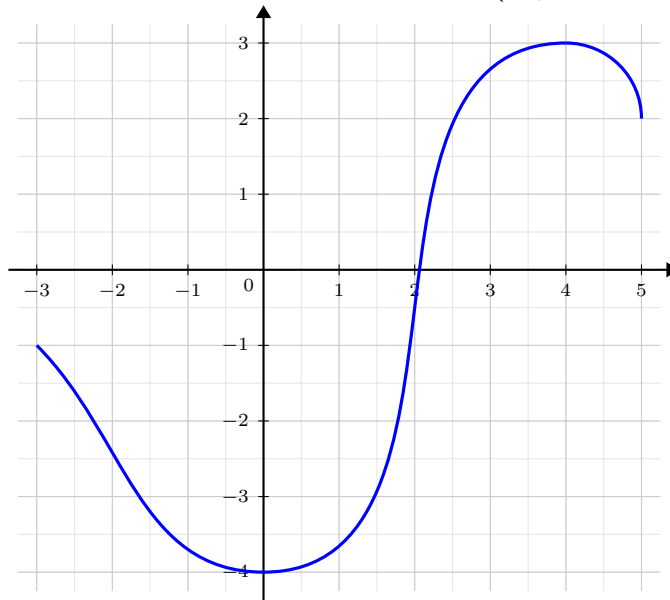
Remarque 6 (Pour la culture)

La notion de convexité est plus générale : une partie du plan est convexe si toute paire de points de cette partie peut être reliée par un segment qui ne sort pas de cette partie. Autrement dit, une portion de plan est convexe si elle ne présente pas de creux.

La portion du plan au-dessus de la courbe d'une fonction est appelée *épigraphe* de cette fonction. Une fonction est alors convexe si, et seulement si son épigraphe est convexe.

Application 7

Identifier le plus grand intervalle où la fonction suivante est convexe (respectivement concave).



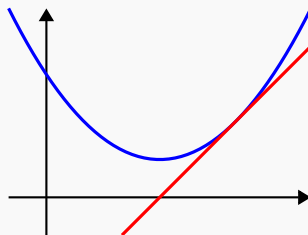
Exercice conseillé : 1

Proposition 8

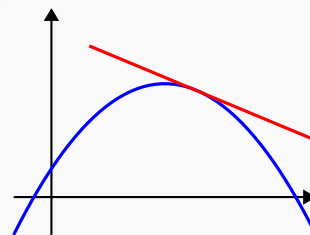
Caractérisation de la convexité par les tangentes

Supposons f dérivable sur I . Alors :

f est convexe si, et seulement si sa courbe est **au-dessus** de toutes ses tangentes.
(Inversement pour f concave.)



CONVEXE



CONCAVE

Exercices conseillés : 4, 11

Proposition 9**Caractérisation de la convexité par la dérivée**

Supposons f dérivable. Alors :

f est convexe si, et seulement si f' est croissante.

Exercices conseillés : 2, 9, 10

Corollaire 10 (Caractérisation par la dérivée seconde)

Supposons f deux fois dérivable. Alors :

f est convexe si, et seulement si f'' est positive sur I

Exercices conseillés : 3, 13

La démonstration exigible suivante fait le lien entre la caractérisation par les tangentes et la caractérisation par la dérivée (seconde).

Démonstration. (Exigible)

Rappels :

- La tangente T_a à la courbe de f en a a pour équation $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Dire que f est au-dessus de la tangente T_a signifie que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Une fonction croissante conserve les inégalités. Une fonction décroissante renverse les inégalités.

Trame de la démonstration : l'objectif est de montrer que f est au-dessus de toutes ses tangentes. On considère donc une tangente quelconque, en une abscisse que l'on note a . On montre alors que la courbe est au-dessus de cette tangente, en montrant que pour tout $x \in I$, $f(x)$ est plus grand que le point d'abscisse x de la tangente.

Supposons f deux fois dérivable sur I . Pour tout $a \in I$, notons $\varphi_a : x \mapsto f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$. Ainsi, f est au-dessus de la tangente T_a si, et seulement si pour tout $x \in I$, $\varphi_a(x) \geq 0$.

Remarquons que comme f est dérivable sur I , φ_a l'est également, et pour tout $x \in I$, $\varphi'_a(x) = f'(x) - f'(a)$.

Supposons f'' positive. Alors f' est croissante (car I est un intervalle), par conséquent, pour tout $a \in I$, φ'_a est aussi croissante. Montrons que f est au-dessus de ses tangentes en montrant que pour tout $a \in I$ et pour tout $x \in I$, $\varphi_a(x) \geq 0$.

Soient a et x dans I .

- Si $x \leq a$, alors φ'_a étant croissante, $\varphi'_a(x) \leq \varphi'_a(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. Ainsi, pour tout x dans le sous-intervalle de I à gauche de a , $\varphi'_a(x) \leq 0$, donc φ_a est décroissante sur cet intervalle, donc $\varphi_a(x) \geq \varphi_a(a) = f(a) - [f'(a)(a - a) + f(a)] = 0$.
- Si $x \geq a$, alors φ'_a étant croissante, $\varphi'_a(x) \geq \varphi'_a(a) = 0$. Ainsi, pour tout x dans le sous-intervalle de I à droite de a , $\varphi'_a(x) \geq 0$, donc φ_a est croissante sur cet intervalle, donc $\varphi_a(x) \geq \varphi_a(a) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in I$, $\varphi_a(x) \geq 0$, donc la courbe de f est au-dessus de T_a . Comme a est quelconque, on a donc montré que la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes, elle est donc convexe sur I . $\square$

Remarque 11

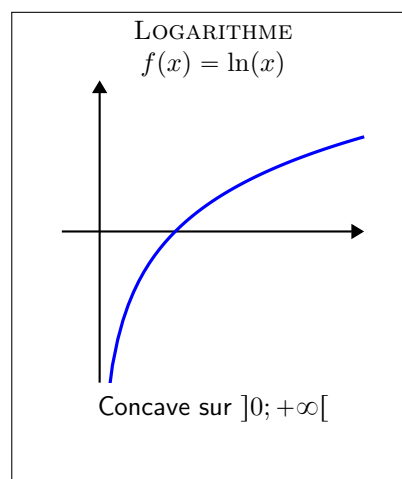
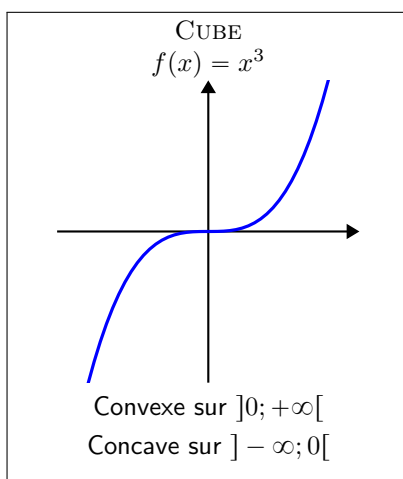
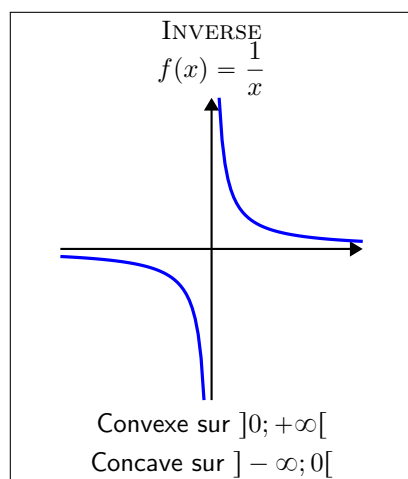
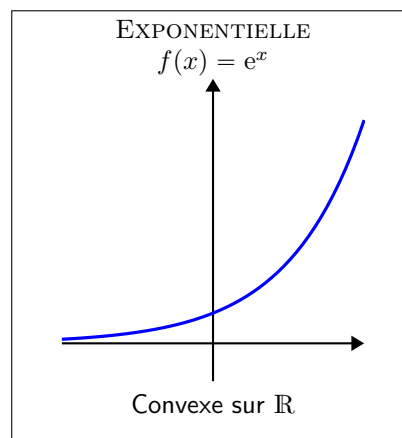
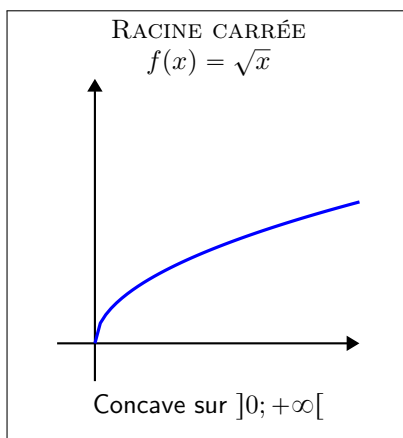
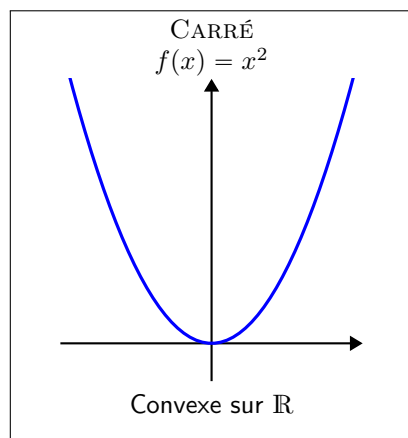
Concernant les fonctions concaves, les propositions équivalentes sont, pour résumer, les suivantes :

- f est concave,
- f' est décroissante,
- f'' est négative,
- La courbe de f est en-dessous de ses tangentes.

Application 12

Étudier la convexité des fonctions suivantes : $\triangleright f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 9x + 4$ $\triangleright g : x \mapsto (x - 2)^2$.

Fonctions usuelles



2 – Points d'inflexion

Dans cette section, on suppose f dérivable.

Définition 13

Point d'inflexion

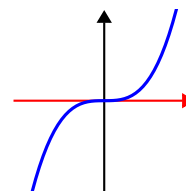
Un point d'inflexion est un point où la courbe de f traverse sa tangente.

Propriété 14

Un point d'inflexion est un point où f change de convexité.

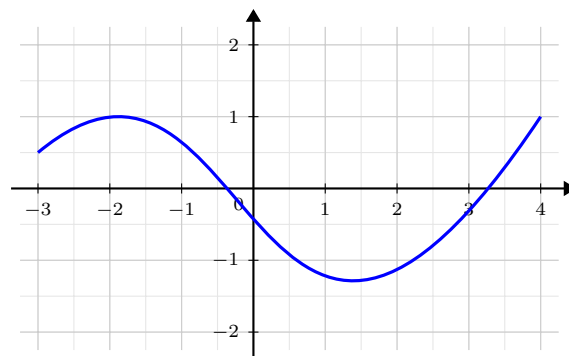
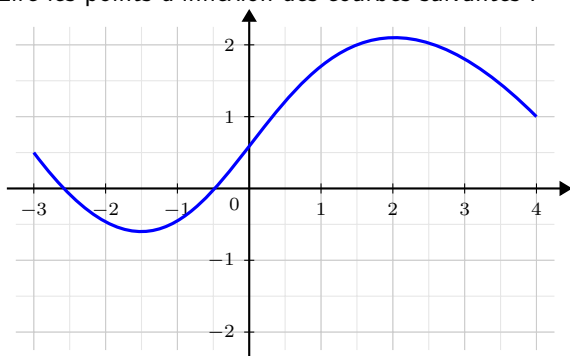
Exemple 15

Considérons la fonction cube. En 0, la tangente est confondue avec l'axe des abscisses. La courbe traverse sa tangente en l'origine : la fonction cube admet donc un point d'inflexion en 0.



Application 16

Lire les points d'inflexion des courbes suivantes :



Application 17

Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1► Étudier la convexité de f .
- 2► Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f en -1 .
- 3► En déduire que pour tout $x \leq 0$, $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.
- 4► (*Bonus*) Esquisser graphiquement la situation.

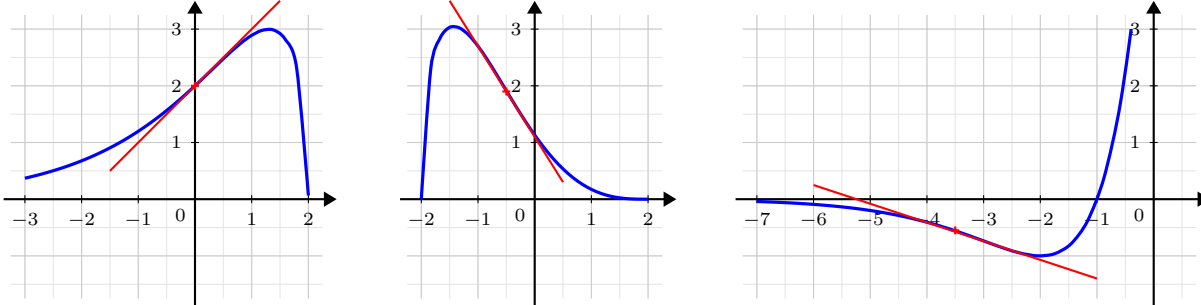
Exercices conseillés : 5, 7, 8, 12

Exercices

Je connais mon cours

Exercice 1

Étudiez graphiquement la convexité des fonctions suivantes :



Exercice 2

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous les variations de leurs dérivées. Étudier la convexité de f et g .

x	$-\infty$	6	$+\infty$
f'	$-\infty$	-2	$-\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'		-1	

Exercice 3

En étudiant le signe de leur dérivée seconde, étudier la convexité des fonctions définies par les expressions suivantes :

$\triangleright f(x) = x^3 + 6x^2$
 $\triangleright g(x) = \frac{3-x}{x+1}$
 $\triangleright h(x) = 5x + 3 + \frac{1}{x}$
 $\triangleright k(x) = 3x - 3x\sqrt{x}$

Exercice 4

Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

(On étudiera la convexité de la fonction exponentielle, et utiliser la tangente en 0.)

Exercice 5

Étudier la convexité des fonctions suivantes et déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion.

1 $\triangleright f : x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

3 $\triangleright f : x \mapsto (x^2 - 3x + 2)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

2 $\triangleright f : x \mapsto (5 - x^2)\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

4 $\triangleright f : x \mapsto (2 - x^2)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

Exercice 6

Pour chaque fonction ci-dessous, étudier sa convexité en étudiant le signe de sa dérivée seconde :

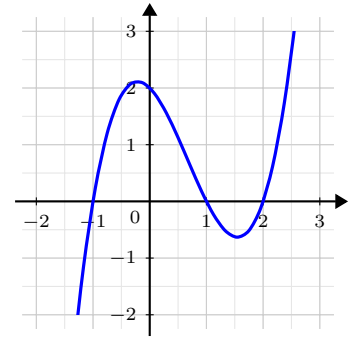
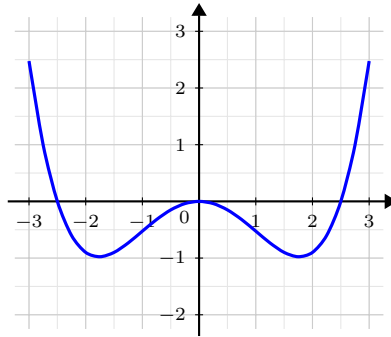
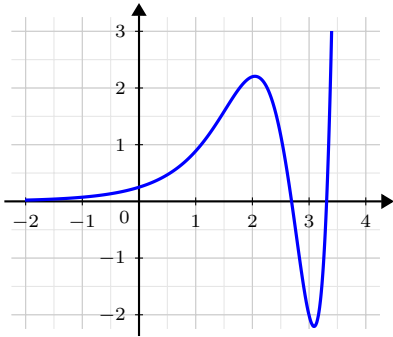
$\triangleright f : x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$

$\triangleright g : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$

$\triangleright h : x \mapsto 4\sqrt{x} + 3x$

Exercice 7

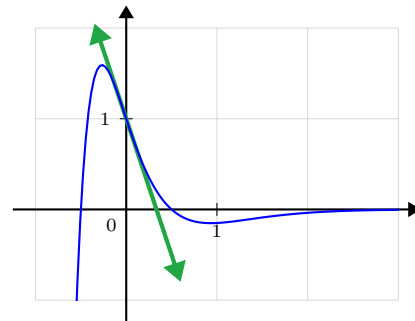
Donner les points d'inflexion des courbes suivantes (on arrondira selon la précision permise par le graphique).



Exercice 8

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-contre. Vrai ou faux ?

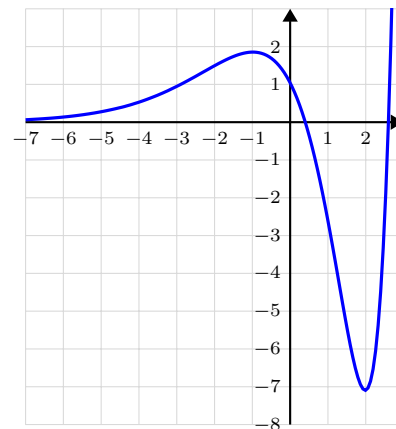
- 1► $f'(0) \approx 1$
- 2► La courbe semble avoir un point d'inflexion en 0
- 3► f semble convexe sur $[0; 1]$
- 4► Si $f = g'$ alors g est concave sur $[0; 0,5]$



Exercice 9

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .

- 1► Dresser le tableau de variations de la fonction f au mieux.
- 2► Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.



Exercice 10

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 5]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f' .

x	-6	-2	1	2	5
f'	4		2	0	-2

- 1► Dresser le tableau de variations de f sur $[-6; 5]$.
- 2► Déterminer la convexité de la fonction f .
- 3► Tracer, dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que ses tangentes horizontales.

Exercice 11

- 1► Justifier la concavité de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
- 2► Déterminer une équation de la tangente à C_f en 1.
- 3► En déduire que $\forall x > 0, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- 4► En déduire que $\sqrt{2} \leq 1,5$.

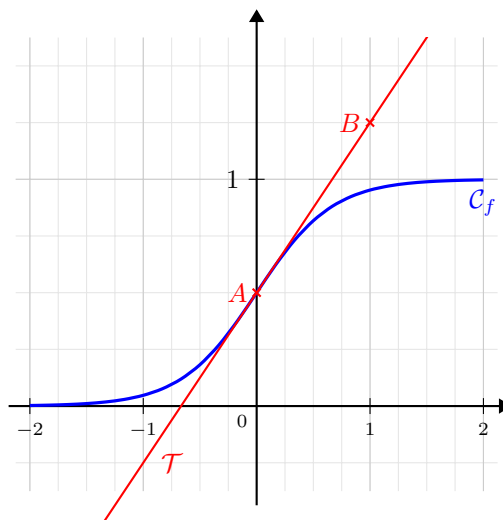
Objectif Bac

Exercice 12 (Centres étrangers 2023 – sujet 2)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On nomme A le point de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, et B le point de coordonnées $\left(1; \frac{5}{4}\right)$. On a tracé ci-contre la courbe C_f , et la tangente $\mathcal{T}$ à C_f au point d'abscisse 0.

**Partie A** : Lectures graphiques

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

- 1► Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
- 2► Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : Étude de la fonction

- 1► On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f' .
- 2► Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 3► Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Partie C : Tangente et convexité

- 1► Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en 0.

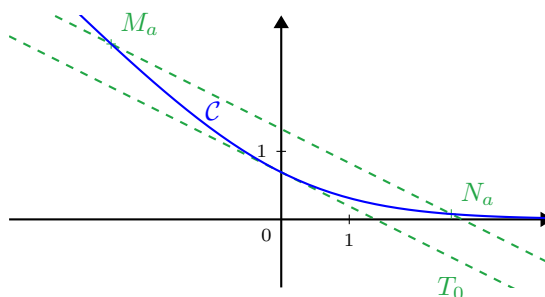
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée seconde est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\text{par } f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}.$$

- 2► Étudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$.
- 3► a► Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
 b► Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
 c► En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 13 (BAC 2023)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé suivant.



- 1► a► Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 b► Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
 c► On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.
 d► Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2► On note $\mathcal{T}_0$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
 a► Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$.
 b► Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
 c► En déduire que, pour tout nombre réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.
- 3► Pour tout nombre réel a non nul, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a . On a donc $M_a(-a; f(-a))$ et $N_a(a; f(a))$.
 a► Montrer que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) - f(-x) = -x$.
 b► En déduire que les droites $\mathcal{T}_0$ et (M_aN_a) sont parallèles.

15 Trigonométrie

Table des matières

1	Le cercle trigonométrique	262
2	Les fonctions trigonométriques	263
A	Courbes représentatives et propriétés associées	263
B	Résolution d'(in)équations trigonométriques	264
C	Dérivation	266
	Exercices	267

Programme

Fonctions sinus et cosinus

Contenus

- ▶ Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

Capacités attendues

- ▶ Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$.
- ▶ Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum

Approfondissement possible

- ▶ Fonction tangente.

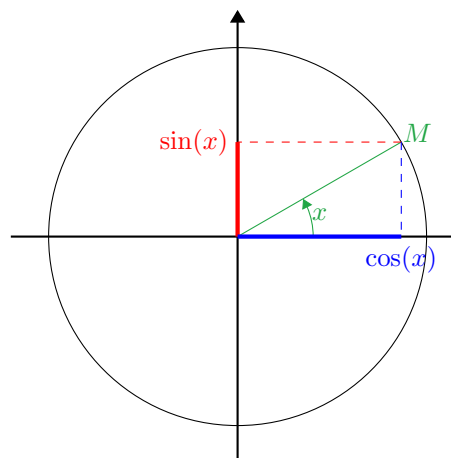
1 – Le cercle trigonométrique

Définition 1

- Le *cercle trigonométrique* est le cercle de rayon 1 et de centre l'origine d'un repère orthonormal donné.

Soit M un point du cercle trigonométrique. On note x l'angle orienté entre $[Ox)$ et $[OM)$.

- Le *cosinus* de x est l'abscisse de M . On le note $\cos(x)$.
- Le *sinus* de x est l'ordonnée de M . On le note $\sin(x)$.



Remarque 2 (Les radians et l'enroulement de la droite réelle)

On rappelle qu'un angle de 1 radian correspond à un arc de longueur 1. Le cercle trigonométrique ayant 1 pour rayon, son périmètre mesure 2π , et donc un tour complet correspond à 2π radians.

Cette correspondance entre angles et radians et longueur d'arc donne lieu au concept d'*enroulement de la droite réelle* : on imagine attacher l'origine de la droite réelle en $(1, 0)$, pour l'enrouler autour du cercle trigonométrique. Ce faisant, on étend la notion de cosinus et de sinus à n'importe quel nombre réel : l'angle 2π radians correspondant à l'angle 0 radians, ils ont même cosinus et même sinus.

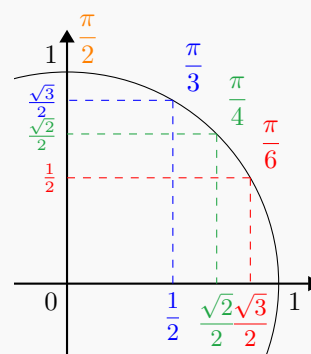
Propriété 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \triangleright -1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \triangleright -1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \triangleright \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

Proposition 4

Valeurs remarquables

Angle (degrés)	0	30	45	60	90	180
Angle (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Remarque 5 (Astuce mnémotechnique)

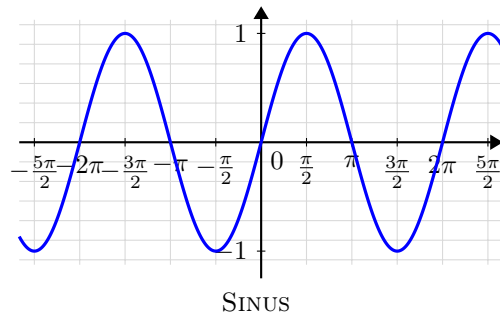
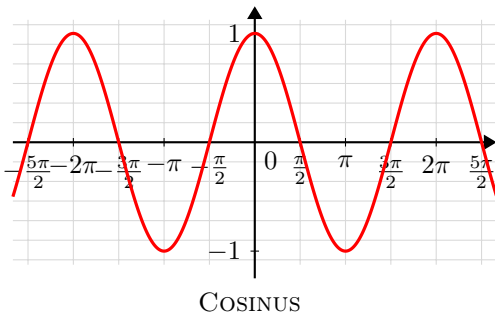
Aidez-vous du cercle trigonométrique pour retrouver ces valeurs. Elles sont toutes de la forme $\frac{\sqrt{n}}{2}$: $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$,

$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$.

Exercice conseillé : 1

2 – Les fonctions trigonométriques

A – Courbes représentatives et propriétés associées



Propriété 6

Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

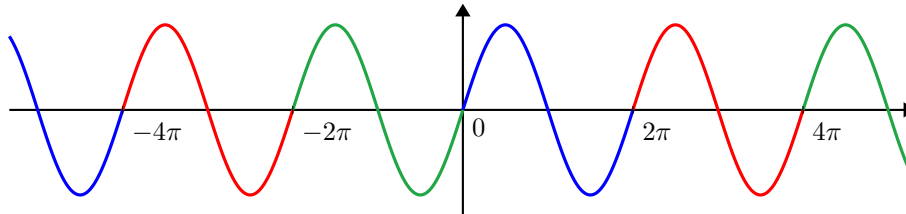
Remarque 7

Par extension, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Cette propriété se traduit graphiquement : les courbes de cos et de sin répètent un même motif tous les 2π .

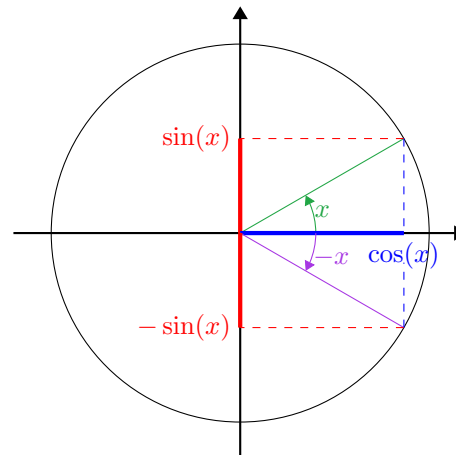
Remarquez également comme les courbes du sinus et du cosinus sont les mêmes à une translation de $\frac{\pi}{2}$ près.



Parité

Propriété 8

- ▶ La fonction cos est paire :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$,
 - Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ▶ La fonction sin est impaire :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$,
 - Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.



Exercices conseillés : 2, 3, 17

B – Résolution d'(in)équations trigonométriques

Théorème 9

Pour tous réels x et a ,

$$\cos(x) = \cos(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$$

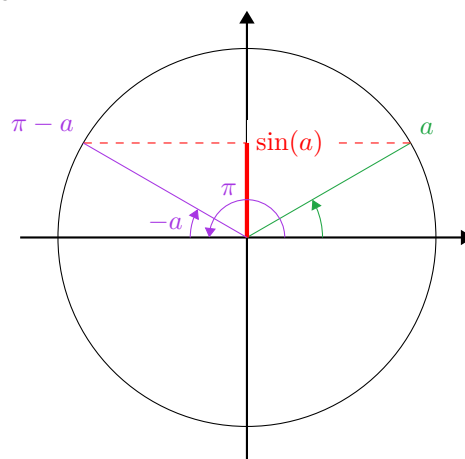
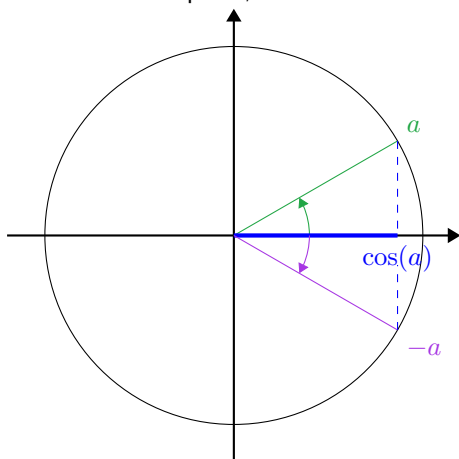
$$\sin(x) = \sin(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$

Correspondances trigonométriques

Remarque 10 (Interprétation géométrique)

La disjonction de cas traduit une question de symétrie : sur le cercle trigonométrique, il y a deux points qui ont le même cosinus (respectivement, le même sinus). Ceux-ci sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (respectivement, des ordonnées). Le fait que $\pi - a$ traduit une symétrie verticale est un peu plus subtil à voir, mémorisez le schéma ci-dessous.

Le « $+2k\pi$ » traduit le fait que si on fait un ou plusieurs tours complets, dans un sens ou dans l'autre, alors on revient au même point, et donc on ne change pas le (co)sinus.

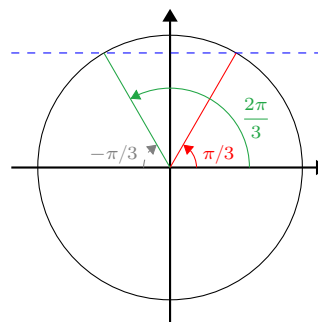


Méthode 11 (Résolution grâce au cercle trigonométrique)

Plutôt que de s'encombrer l'esprit avec un théorème inutile, il est plus aisé de s'appuyer sur un cercle trigonométrique : celui-ci permet de trouver les 2 angles qui correspondent à l'équation, le reste des solutions découlant de la périodicité.

Application 12 (Exercice-type)

Résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $\mathbb{R}$. On pourra s'aider du schéma suivant :



Solution

On peut appliquer le théorème précédent en disant que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. On peut aussi réfléchir : on lit sur le cercle trigonométrique que deux angles possèdent un tel sinus : $\frac{\pi}{3}$ et $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Par périodicité, l'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

On peut donner des formules explicites pour résoudre les équations et inéquations trigonométriques, mais celles-ci sont aussi moches qu'inutiles. On préférera apprendre la méthode « géométrique » :

Méthode 13 (Résolution grâce au cercle trigonométrique)

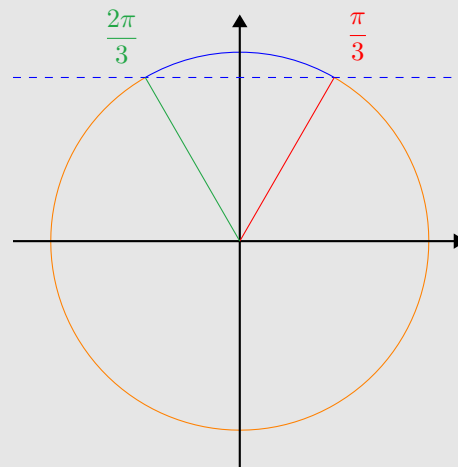
Plutôt que de s'encombrer l'esprit avec un théorème inutile, il est plus aisé de s'appuyer sur un cercle trigonométrique : celui-ci permet de trouver les 2 angles limites de l'équation, on lit ensuite l'intervalle des angles qui satisfont l'inéquation le long de l'un des deux arcs de cercle délimités par ces angles.

Application 14 (Exercice-type)

Résoudre $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$.

Solution

On peut appliquer le théorème précédent en disant que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. On peut aussi réfléchir : on lit sur le cercle trigonométrique que deux angles possèdent un sinus de $\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\frac{\pi}{3}$ et $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Tous les angles correspondant à l'arc orange ont un sinus inférieur ou égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il s'agit de les décrire par une union d'intervalles : comme on cherche à résoudre l'inéquation sur $[-\pi; \pi]$, on commence à analyser les angles à partir de $-\pi$, c'est-à-dire le point de coordonnées $(-1, 0)$ du cercle trigonométrique :



- De $-\pi$ à $\frac{\pi}{3}$, on parcourt la moitié basse du cercle, et l'arc entre l'abscisse et $\frac{\pi}{3}$: tous les angles sont valides. On compte donc l'intervalle $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.
- De $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$, on parcourt l'arc bleu, correspondant aux sinus trop grands,
- De $\frac{2\pi}{3}$ à π , on parcourt la dernière portion d'arc orange, qui correspond à des angles valides : on compte l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

(Attention, l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ n'est pas un intervalle correctement écrit !).

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

Application 15

Résoudre $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

Application 16

Résoudre $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi]$.

Exercices conseillés : 5, 7, 8, 10, 15

C – Dérivation

Théorème 17

Dérivation des fonctions trigonométriques

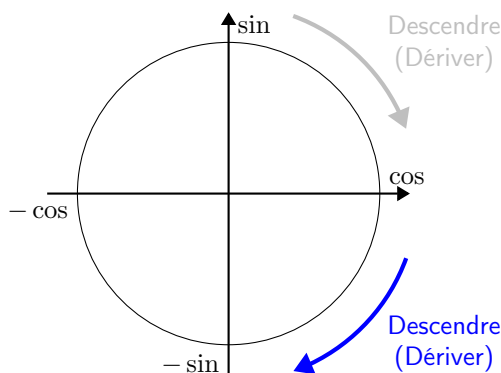
Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées :

$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin$$

Remarque 18 (Astuces mnémotechniques)

Quand on dérive une fonction polynomiale, on abaisse son degré. Parmi d'autres raisons, ceci a motivé un vocabulaire historique différent : pour *dériver* une fonction, on disait parfois *descendre* une fonction. On peut exploiter cette idée pour se donner un moyen mnémotechnique pour mémoriser les dérivées trigonométriques. On place $\sin$ et $\cos$ et leurs opposés aux quatre points cardinaux du cercle trigonométrique. Partant du cosinus : comme en le dérivant on le « descend », il descend le long du cercle trigonométrique, et devient un $-\sin$. En fait, cela donne un sens de rotation qui reste valable : $-\sin$ devient $-\cos$, $-\cos$ devient $\sin$, et $\sin$ devient $\cos$.

Si cette astuce ne vous plaît pas, en voilà une autre... Retenez que le **cosinus** est **compliqué**, et fait apparaître un signe moins en dérivant. Ou dans l'autre sens : le **sinus** est **sympathique** et n'amène pas de problème de signe. Pour le reste, retenez l'astuce de rotation autour du cercle trigo !



Corollaire 19

Soit u une fonction dérivable. Alors :

$$(\sin \circ u)' = u' \times \cos \circ u \quad \text{et} \quad (\cos \circ u)' = -u' \times \sin \circ u$$

Application 20

Dérivez les fonctions données par les expressions suivantes :

► $f(x) = \sin(5x + 1)$

► $g(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + 5\right)$

► $h(x) = \cos(3x^2 + 5x - 1)$

Exercices conseillés : 4, 6, 12, 13, 19, 14, 16, 18, 11

Exercices

Je connais mon cours

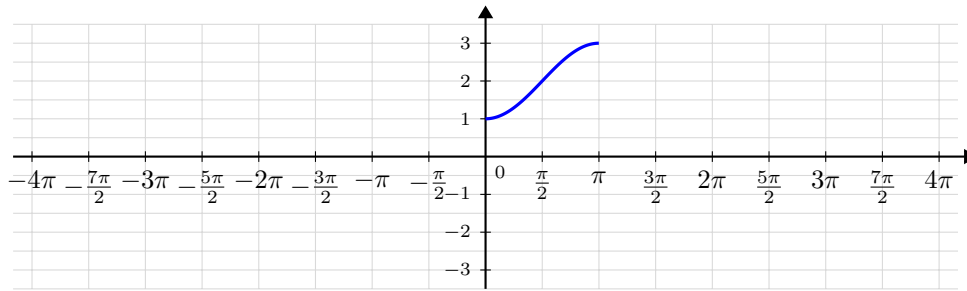
Exercice 1

Placer les réels suivants sur le cercle trigonométrique (on fera attention à la précision du tracé) :

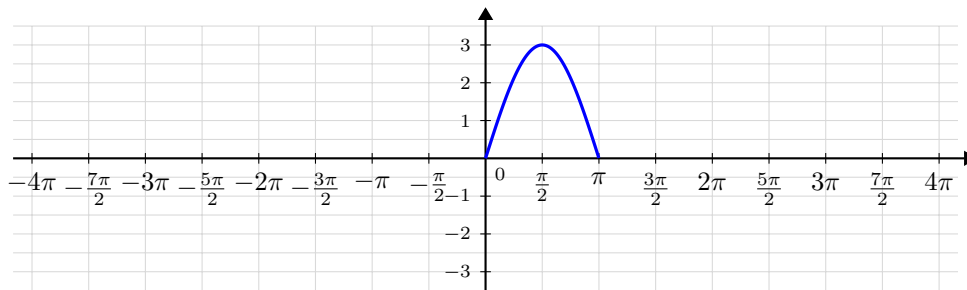
$$\triangleright \frac{\pi}{2} \quad \triangleright \frac{\pi}{3} \quad \triangleright \frac{\pi}{4} \quad \triangleright \frac{\pi}{6} \quad \triangleright \frac{3\pi}{4} \quad \triangleright -\frac{2\pi}{3} \quad \triangleright -\frac{5\pi}{6} \quad \triangleright \frac{9\pi}{4}$$

Exercice 2

- 1► On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - \cos(x)$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal, sur l'intervalle $[0; \pi]$.



- a► Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Compléter $\mathcal{C}_f$ en justifiant.
 b► Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Compléter $\mathcal{C}_f$ en justifiant.
- 2► Mêmes questions avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 \sin(x)$.



Exercice 3

Déterminer la parité des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\triangleright f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{2 + \cos(x)} \quad \triangleright g(x) = \sin(x) \cos(x) \quad \triangleright h(x) = 7 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 4

Dériver les fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \triangleright a(x) &= \frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 + \cos(x)} & \triangleright c(x) &= \frac{\sin(x)}{x^2} & \triangleright e(x) &= 5 \sin(3x + 12) \\ \triangleright b(x) &= \frac{1}{\sin(x)} & \triangleright d(x) &= \frac{x + \cos(x)}{3 + \sin(x)} & \triangleright f(x) &= 8 \cos(\sqrt{1 + x^2}) \end{aligned}$$

- ▶ $g(x) = \cos(2x-1) \sin(5x+3)$
- ▶ $i(x) = \cos(x) \sin(x)$
- ▶ $k(x) = \sin^3(x) + \sin(x)$
- ▶ $h(x) = \sqrt{4 + \sin(2x)}$
- ▶ $j(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + 2}$
- ▶ $\ell(x) = \sqrt{3 + \cos(x)}$

Exercice 5 (BAC 2024)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par $f(x) = x + \sin(x)$. On admet que f est deux fois dérivable.

Une seule des quatre propositions est exacte :

- ▶ La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- ▶ La fonction f est concave sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- ▶ La fonction f admet sur l'intervalle $[0; \pi]$ un unique point d'inflexion.
- ▶ La fonction f admet sur l'intervalle $[0; \pi]$ exactement deux points d'inflexion.

Exercice 6

Montrer que l'équation $(E) : \sin(x) = x - 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; \pi]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

Je comprends mon cours

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \cos(2x) - \frac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1▶ Étudier la parité de f .
- 2▶ Démontrer que f est π -périodique.
- 3▶ Étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 4▶ Représenter graphiquement f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis étendre cette représentation par parité et périodicité.

Exercice 8

- 1▶ Déterminer le sinus et le cosinus de :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{▶ } -\frac{2\pi}{3} & \text{▶ } \frac{3\pi}{4} & \text{▶ } -\frac{5\pi}{6} & \text{▶ } \frac{3\pi}{2} & \text{▶ } -\frac{4\pi}{2} & \text{▶ } 2k\pi & \text{▶ } \frac{15\pi}{6} & \text{▶ } \frac{17\pi}{3} \end{array}$$

2► Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a► $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b► $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

c► $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

d► $\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -1$

3► Résoudre les inéquations suivantes :

a► Dans $[0; \pi[$: $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b► Dans $[0; 2\pi]$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{1}{2}$

c► Dans $[-\pi; \pi]$: $1 + 2\cos(x) > 0$

d► Dans $[-\pi; \pi[$: $\sqrt{2} - 2\cos(x) > 0$

Exercice 9

Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ à l'aide du cercle trigonométrique.

1► $2\sin(x) + 1 = 0$

3► $4\cos^2(x) - 1 = 0$

5► $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2► $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$

4► $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

6► $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$

Exercice 10

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ et représenter les solutions sur le cercle unité.

1► $2\sin(x) + \sqrt{2} < 0$

2► $2\cos(x) - \sqrt{3} \leq 0$

3► $2\sin(x) + 1 \geq 0$

4► $\sqrt{2}\cos(x) > 1$

Exercice 11

Montrer que l'équation $(E) : \cos(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

Objectif Bac

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto \frac{2\cos(x) + 1}{2 + \cos(x)}$.

- 1► Montrer que f est 2π -périodique.
- 2► Montrer que f est paire.
- 3► En déduire que l'on peut restreindre l'étude de f à un intervalle I que l'on déterminera.
- 4► Dresser le tableau de variations de f sur I .
- 5► Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur I dont on donnera une valeur approchée au millièmes.

Exercice 13

Soit $f : x \mapsto 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1► Montrer que f est π -périodique.
- 2► Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 3$.
- 3► Déterminer la dérivée de f .
- 4► Déterminer les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$.
- 5► En déduire que f admet un minimum sur $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$ et déterminer sa valeur.
- 6► Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{8}$.

Exercice 14 (BAC 2024)

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) \, dx \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) \, dx$$

- 1► Calculer I_0 .
- 2► a► Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
b► Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
c► Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
- 3► a► Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :
$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} \, dx$$

b► Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :
$$\int_0^\pi e^{-nx} \, dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

c► Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .
- 4► a► En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

- b► En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

- 5► On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient strictement inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```

1 from math import *
2 def seuil():
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6     n = n+1
7     I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n

```

Exercice 15 (BAC 2024)

Une seule des quatre propositions est exacte.

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\sin(x) = 0$, 1 admet :

- zéro solution
- deux solutions
- une solution
- quatre solutions

Exercice 16 (BAC 2024)

On considère l'équation différentielle :

$$(E_0) : y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

- 1► Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
- 2► Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0) . On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

- 3► La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2\cos(x) + \sin(x).$$

On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .

- 4► On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalente à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
- 5► En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 6► Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
- 7► Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)] \, dx$$

Vers le supérieur

Exercice 17

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- 1► Montrer que f est 0-périodique.
- 2► Montrer que si f est à la fois T_1 -périodique et T_2 -périodique, alors elle est $(T_1 + T_2)$ -périodique.
- 3► Montrer que si f est T_1 -périodique, alors elle est $-T_1$ -périodique.
- 4► En déduire que si f est T -périodique, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle est aussi nT -périodique.

Exercice 18

On note id la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe x lui-même. On l'appelle la *fonction identité*. On admet que les fonctions $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$ vérifient les relations (attention aux quantificateurs!) :

- $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$.
- $\forall x \in [0; \pi], \arccos(\cos(x)) = x$.
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x$.

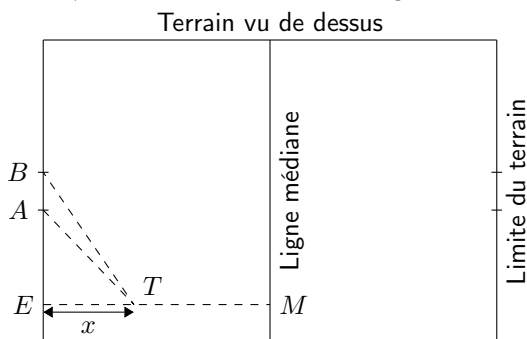
- 1► Déterminer la dérivée de id .
- 2► Dériver la relation $\sin \circ \arcsin = \text{id}$ en utilisant, pour le membre de gauche, la formule de dérivation d'une fonction composée. (*Les questions de définition et de dérivabilité sont admises.*)
- 3► Justifier que pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \cos(y) = \sqrt{1 - \sin(y)^2}$.
- 4► Appliquer l'égalité précédente à $y = \arcsin(x)$, et en déduire une expression simplifiée de $\arcsin'(x)$ pour tout $x \in]-1; 1[$.
- 5► Répéter l'exercice pour déterminer une expression simplifiée de la dérivée de $\arccos$.
- 6► En utilisant la formule $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer une expression simplifiée de la dérivée de $\arctan$.
- 7► Démontrer que $\forall x \in [-1; 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19 (BAC 2016)

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-dessous) situé à l'extérieur du segment $[AB]$. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E . La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible. Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle. Dans toute la suite, on note

x la longueur ET , qu'on cherche à déterminer. Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50\text{m}$, $EA = 25\text{m}$ et $AB = 5,6\text{m}$. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.



- 1► En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de x . La fonction tangente est définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
- 2► Montrer que la fonction $\tan$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.
- 3► L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure. On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}$. Montrer que $\tan(\gamma) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$.
- 4► L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par

$$f(x) = x + \frac{765}{x}$$

- 5► Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près puis au degré près.

Mathématiques

Terminale spécialité – Cours complet

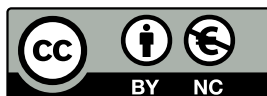
La série « Mathématiques – Terminale spécialité » est composée de quatre ouvrages :

- *Cours complet* est une version enrichie du cours, avec des remarques supplémentaires et toutes les démonstrations, qu'elles soient exigibles par le programme ou bien au-delà de sa portée, tout en restant abordables pour quiconque peut faire preuve de suffisamment de motivation et de patience. Cette version a été écrite avec plusieurs objectifs en tête. Permettre aux absents et absentes de rattraper le cours sans trop de pertes. Donner à celles et ceux qui souhaitent s'avancer, notamment pour le Grand Oral, suffisamment de matériel pour le faire en autonomie. Satisfaire l'appétit des esprits les plus gourmands, en culture comme en technique. Donner un aperçu de ce que sont les mathématiques dans le supérieur – et à ce titre rester une ressource pertinente plusieurs années après la terminale –.
- *Squelette de cours* est, comme son nom le suggère, une extraction de la version complète, qui ne contient que les essentiels du cours parfois à compléter, et les exercices. Il n'y a pas les démonstrations ni les détails supplémentaires. Cet élagage a pour objectif de créer un support de cours à la fois synthétique et fourni, afin d'optimiser la prise de notes en classe.
- *Extras* est un complément au *Cours complet*, avec des approfondissements, des points culture supplémentaires, et des annexes contenant des rappels « éclairés » (des notions vues les années passées, agrémentées de démonstrations permettant une compréhension plus profonde) et des outils qui ne sont pas ou plus au programme, mais qui peuvent rester utiles, notamment pour le Grand Oral.
- *Corrections* rassemble tous les exercices présents dans les feuilles de fin de chapitre, ainsi que leur correction plus ou moins rédigée. Il s'agit d'un support d'aide pour le travail en autonomie, aussi certains exercices ne bénéficient que d'éléments de correction. Voir la préface du manuel en question pour plus d'explications.

Cours complet (et *Squelette de cours* par conséquent) regroupe tous les cours et exercices dispensés lors de l'année de terminale, en spécialité mathématique. Les chapitres sont ordonnés selon une progression arbitraire, qui n'est pas la seule envisageable.

Cours & illustrations réalisés par E. Suong

Les exercices sont issus de sources multiples. Pour tout ajout de référence, adaptation ou retrait, merci de me contacter.



Version du 30 septembre 2026

