

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION BAC BLANC 1

MATHÉMATIQUES

JOUR 2 : vendredi 24 janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4h

L'usage de la calculatrice graphique en mode examen est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Une seule réponse est correcte parmi les propositions : indiquez-la sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

- 1► Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale. Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

a► 31^5 b► $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ c► $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ d► $\binom{31}{5}$

- 2► La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

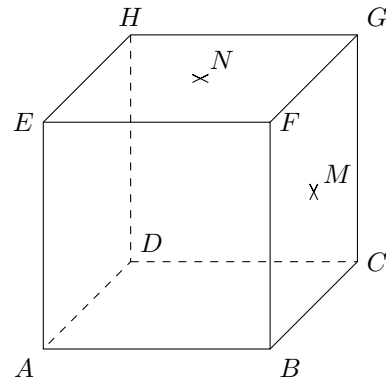
- 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
- 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

a► $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ b► $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$ c► $\binom{20}{3}$ d► $20^3 \times 11^2$

Exercice 2

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 1$. On note M le centre de la face $BCGF$ et N le centre de la face $EFGH$. On se place dans le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DH}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$. On pourra utiliser sans justifier les coordonnées des points $A(0; 0; 1)$, $G(1; 1; 0)$ et $H(1; 0; 0)$.



- 1► Donner sans justifier les coordonnées des points F et C .
- 2► Calculer les coordonnées des points M et N .
- 3► a► Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC) .
b► En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HFC) est $x + y - z - 1 = 0$.
- 4► Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG) .
- 5► Démontrer que le point R de coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ est le projeté orthogonal du point G .
- 6► On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Déterminer les coordonnées de l'unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN est rectangle en K .

- 7► On se place dans le tétraèdre $FNKM$.

- a► Montrer que FK est la hauteur du tétraèdre $FNKM$ associée à la face MNK .
b► (On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \text{hauteur} \times \text{Aire de la base}$)
En déduire que le volume du tétraèdre $FNKM$ est $\frac{1}{48}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{3}; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

Partie A : Étude de la fonction

- 1► Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.
- 2► Calculer les éventuelles limites de la fonction f en $-\frac{1}{3}$ et en $+\infty$.
- 3► Dresser le tableau de variations de f .
- 4► Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 5► Calculer u_1 .
- 6► a► Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

- b► En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- c► Déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .
- 7► a► Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif `precision`, détermine la plus petite valeur N telle que $1 - u_N < \text{precision}$.

```
1 def seuil(precision):
2     u = 0.5
3     n = 0
4     while . . . . .
5         u = . . . . .
6         n = . . . . .
7     return . . . . .
```

- b► Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où `precision` = 10^{-4} .
- 8► On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- a► Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- b► Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}.$$

- c► Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Grâce à cette expression, retrouver la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
f	5 ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ 3	7 ↘ 1	

Affirmation 1 : La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .

Affirmation 2 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = -\infty$

Affirmation 3 : La courbe représentative de la fonction f admet deux asymptotes verticales.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$$

- 1► Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.
 - a► Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b► Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - c►
 - i► Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
 - ii► Montrer que $\alpha \in [0; 1]$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide d'une calculatrice.
 - d► En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2►
 - a► Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b► Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$.
 - c► Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - d►
 - i► Montrer que $e^\alpha = \frac{7 - 2\alpha}{2}$. En déduire une expression de e^α .
 - ii► En déduire que $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$
 - iii► En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.