

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION BAC BLANC 2

MATHÉMATIQUES

JOUR 1 : mardi 6 mai 2025

Durée de l'épreuve : 4h

L'usage de la calculatrice graphique en mode examen est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

$$A(3; 0; 1) \quad ; \quad B(2; 1; 2) \quad ; \quad C(-2; -5; 1)$$

- 1► Démontrer que A , B et C ne sont pas alignés.
- 2► Démontrer que ABC est rectangle en A .
- 3► Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x + y - 2z + 5 = 0$$

- 4► On considère le point $S(1; -2; 4)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) , passant par S et orthogonale au plan (ABC) .
- 5► On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
Montrer que les coordonnées de H sont $(0; -1; 2)$.
- 6► Calculer la valeur exacte de la distance SH .
- 7► On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans la plan (ABC) , de centre H et passant par le point B . On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
Déterminer l'aire exacte du disque $\mathcal{D}$.
- 8► En déduire que la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base $\mathcal{D}$ est $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$.
(On rappelle que le volume d'un cône est égal au tiers du produit de sa hauteur par l'aire de sa base.)

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

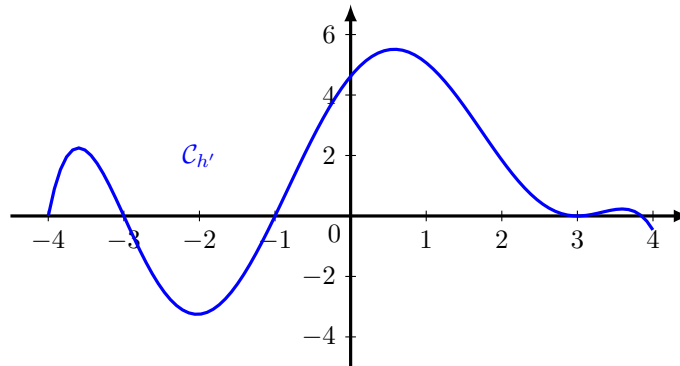
- 1► Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}.$$

Affirmation 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

- 2► Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1; 3]$.

- 3► On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

Affirmation 3 : La fonction f est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$xy' - y = x.$$

- 4► Soit $f : x \mapsto x^{2025} + x$ définie sur $[-1; 1]$.

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution.

- 5► Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

Affirmation 5 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

Exercice 3

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 1► Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
 2► On considère l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

- 3► En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
 4► Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- 1► a► Justifier que pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}$$

- b► En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte de son maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 2► Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

- a► Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[14; 15]$.
 b► Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` ci-contre ?

```

1  from math import exp
2
3  def f(x):
4      return (20*x + 8)*exp(-1/4*x)
5
6  def solution_equation():
7      a, b = 14, 15
8      while b - a > 0.1:
9          m = (a+b)/2
10         if f(m) > 8:
11             a = m
12         else:
13             b = m
14     return a, b

```

Exercice 4

L'alose est un poisson présent dans la mer Méditerranée. Le réchauffement climatique et la pollution marine ont contribué au déclin de sa population au cours des dernières années.

Au début de l'année 2020, on comptait 4 000 aloses en Méditerranée. Une étude a permis de modéliser ce nombre d'aloses par la suite (u_n) définie par $u_0 = 4000$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 10$$

où u_n désigne le nombre d'aloses au début de l'année 2020 + n .

- 1► Calculer, d'après ce modèle, le nombre d'aloses au début de l'année 2021, puis au début de l'année 2022.
- 2► Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $100 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- 3► La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
- 4► L'objectif de cette question est de déterminer la limite de (u_n) .
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 100$.
 - a► Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9.
 - b► En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3900 \times 0,9^n + 100$.
 - c► En déduire la limite de (u_n) .
 - d► En donner une interprétation dans le contexte du problème.
- 5► On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en-dessous d'un certain seuil S .
 - a► Dans cette question, on suppose que $S = 1000$. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 1000$.
 - b► Interpréter le résultat de la réponse précédente.
 - c► Dans le programme Python ci-dessous, la variable n représente le nombre d'années écoulées depuis 2020, et la variable u représente l'effectif de la population.
Recopier et compléter le programme ci-dessous afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en-dessous du seuil S .

```
1 def population(S):
2     n = 0
3     u = 4000
4     while u ... S:
5         u = .....
6         n = .....
7     return .....
```

- d► Dans cette question, on suppose $S > 100$. Exprimer en fonction de S le nombre d'années au bout desquelles la population d'aloses sera inférieure à S .

Exercice 5

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5% des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $P(E)$ la probabilité d'un événement E .

On considère les événements suivants :

- ▶ D : « la pièce est défectueuse » ;
- ▶ T : « la pièce présente un test positif » ;
- ▶ $\bar{D}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les événements contraires de D et T .

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- ▶ La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à 0,98 ;
- ▶ la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

- 1▶ Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2▶
 - a▶ Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
 - b▶ Démontrer que : $P(T) = 0,0775$.
- 3▶ On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.

Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

On rappelle que : $P(D) = 0,05$.

- 1▶ Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
- 2▶ Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.

On donnera un résultat arrondi au centième.

- 3▶ Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.